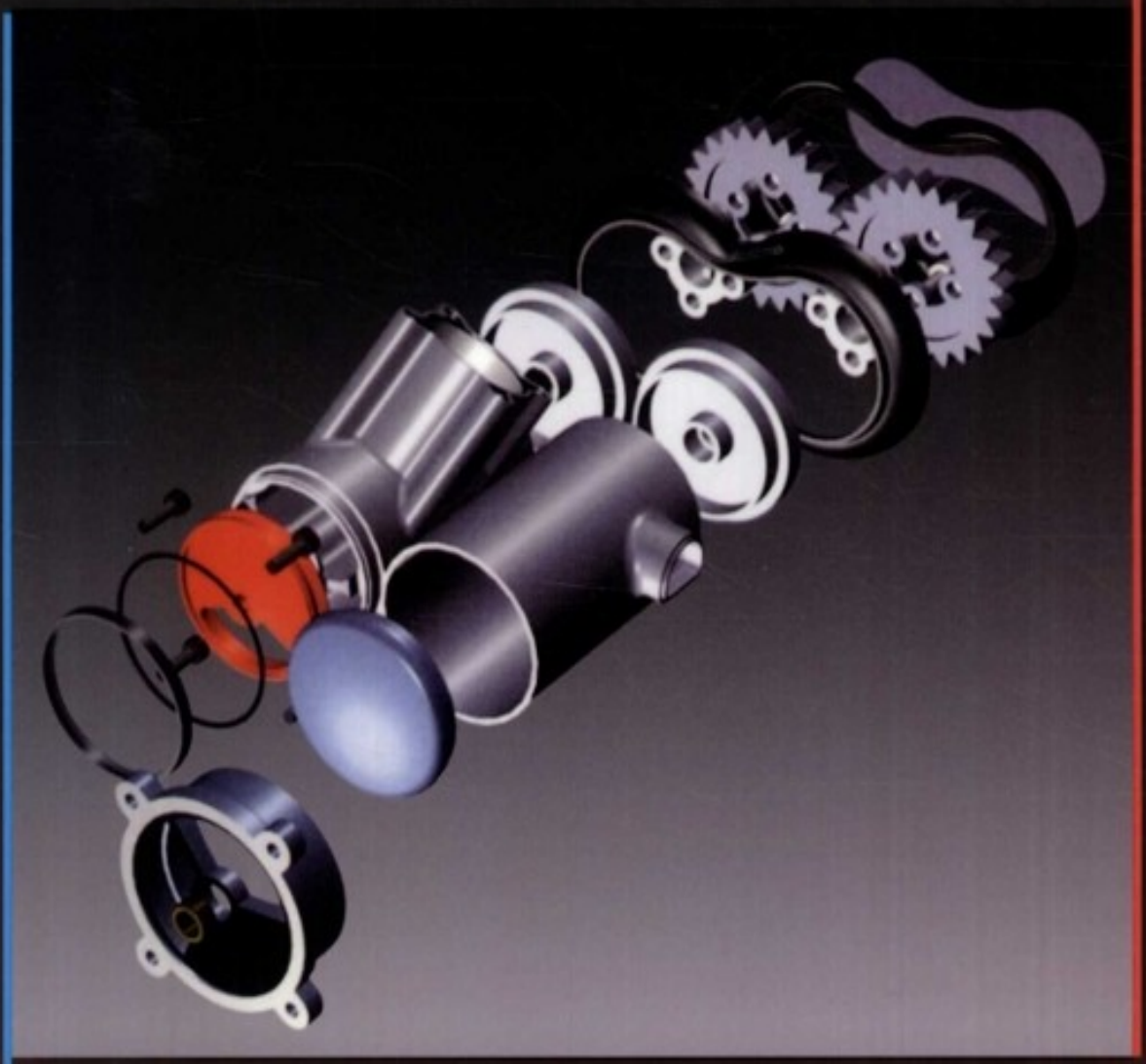
Projeto de Engenharia Mecânica

7ª Edição



Joseph E. Shigley
Charles R. Mischke
Richard G. Budynas

bookman®

Projeto de Engenharia Mecânica

Joseph E. Shigley (falecido em maio de 1994)
Professor Emérito na Universidade de Michigan e membro da American Society of Mechanical Engineers (ASME), Shigley recebeu a medalha Worcester Reed Warner em 1977 e o Machine Design Award em 1985. É autor de oito livros, incluindo *Theory of Machines and Mechanisms* (com John J. Uicker, Jr.) e *Applied Mechanics of Materials*, além de co-editor-chefe do *Standard Handbook of Machine Design*. Em 1956, deu início a *Machine Design* como único autor, obra que evoluiu até resultar em *Mechanical Engineering Design*, definindo o modelo para tais livros-texto.

Foi também agraciado com os diplomas de B.S.M.E. e B.S.E.E., na Purdue University, e com o de M.S., na Universidade de Michigan.

Charles R. Mischke ocupou posições acadêmicas na Universidade do Kansas, no Pratt Institute, em Nova York, e na Universidade de Iowa. Recebeu muitos prêmios relativos a ensino e bolsas de estudo, incluindo o Machine Design Award e o Life Fellow da ASME. Além de várias publicações de pesquisa, é autor de *Elements of Mechanical Analysis* (1963), *Introduction to Computer-Aided Design* (1968), *Mathematical Model Building* (1980); co-autor de *Mechanical Engineering Design* (1986 e 2001); e co-editor-chefe do premiado *Standard Handbook of Machine Design* (1986 e 1993).

Foi também agraciado com os diplomas de B.S.M.E. e M.M.E., na Cornell University, e com o de Ph.D., na Universidade de Wisconsin. É engenheiro profissional licenciado em Iowa e no Kansas e faz conferências, em vários fóruns, sobre tópicos de interesse mútuo.

Richard G. Budynas é professor de Engenharia Mecânica no Rochester Institute of Technology. Tem mais de 30 anos de experiência em ensino e no exercício de projetos de engenharia mecânica. É autor de *Advanced Strength and Applied Stress Analysis*, livro-texto recentemente revisto e publicado em segunda edição, e co-autor de um livro de referência, também recentemente revisto, *Roark's Formulas for Stress and Strain*, em sétima edição.

S555p Shigley, Joseph E.
Projeto de engenharia mecânica / Joseph E. Shigley, Charles R. Mischke, Richard G. Budynas ; tradução João Batista de Aguiar, José Manoel de Aguiar. – 7. ed. – Porto Alegre : Bookman, 2005.
960 p. ; 28 cm.

ISBN 978-85-363-0562-2

1. Engenharia mecânica. 2. Máquina – Desenho técnico. 3. Desenho técnico mecânico. I. Mischke, Charles R. II. Budynas, Richard G. III. Título.

CDU 621

Catalogação na publicação: Júlia Angst Coelho – CRB Provisório 05/05

Joseph E. Shigley
Professor da University of Michigan

Charles R. Mischke
Professor Emérito de Engenharia Mecânica da Iowa State University

Richard G. Budynas
Rochester Institute of Technology

Projeto de Engenharia Mecânica

7ª Edição

Tradução:

João Batista de Aguiar
Ph. D. em Engenharia Mecânica pelo Massachusetts Institute of Technology
Professor da Escola Politécnica da USP

José Manoel de Aguiar
Ph. D. em Engenharia Mecânica pela Stanford University
Professor de Engenharia Mecânica da Faculdade de Tecnologia de São Paulo – FatecSP

Reimpressão 2008

bookman®

2005

Obra originalmente publicada sob o título
Mechanical Engineering Design, 7/e

© 2004, The McGraw-Hill Companies, Inc., New York, NY, EUA
ISBN 0-07-252036-1

Capa: *Mário Röhnelt*

Preparação do original: *André Luiz de Godoy Vieira*

Leitura final: *Sandro Waldez Andretta*

Supervisão editorial: *Arysinha Jacques Affonso e Denise Weber Nowaczyk*

Editoração eletrônica: *Laser House*

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
Biblioteca Clorindo Burnier
FAC. ENGENHARIA
Reg.: ____/____/____

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
1120010043549

Reservados todos os direitos de publicação, em língua portuguesa, à
ARTMED® EDITORA S. A.
(BOOKMAN® COMPANHIA EDITORA é uma divisão da ARTMED® EDITORA S.A.)
Av. Jerônimo de Ornelas, 670 - Santana
90040-340 Porto Alegre RS
Fone (51) 3027-7000 Fax (51) 3027-7070

É proibida a duplicação ou reprodução deste volume, no todo ou em parte, sob quaisquer formas ou por quaisquer meios (eletrônico, mecânico, gravação, fotocópia, distribuição na Web e outros), sem permissão expressa da Editora.

SÃO PAULO
Av. Angélica, 1091 - Higienópolis
01227-100 São Paulo SP
Fone (11) 3665-1100 Fax (11) 3667-1333

SAC 0800 703-3444

IMPRESSO NO BRASIL
PRINTED IN BRAZIL

Às muitas pessoas que me incentivaram a crescer profissional e espiritualmente ao longo da vida, especialmente minha esposa, Joanne, e minha falecida mãe, Inez. Incluídos aí estão também muitos companheiros educadores, estudantes e projetistas a quem sou grato.

Richard G. Budynas

A todos os meus mais de 3.500 alunos, os quais me fizeram muitas e excelentes perguntas, aprenderam a fazê-las a si mesmos, e então a respondê-las, seguindo adiante, para orgulho de suas *alma maters*.

Charles R. Mischke

Agradecimentos

Esta edição contou com a assistência e os comentários e sugestões de muitos colegas. Gostaríamos de agradecer às seguintes pessoas:

Leonard L. Bashford, *University of Nebraska*
David Beale, *Auburn University*
P. Thomas Blotter, *Utah State University*
Stephen Boedo, *Rochester Institute of Technology*
Lawrence Carlson, *University of Colorado, Boulder*
Robert Corey, *United States Naval Academy*
Jerry Fuh, *National University of Singapore*
Vladimir Glozman, *California State Polytechnic University, Pomona*
Itzak Green, *Georgia Tech. University*
A. Henry Hagedoorn, *University of Central Florida*
K. R. Halliday, *Ohio University*
Antony Hodgson, *University of British Columbia*
Cecil Huey, Jr., *Clemson University*
E. William Jones, *Mississippi State University*
Tim Lee, *McGill University*
Robert LeMaster, *University of Tennessee*
Liwei Lin, *University of California-Berkeley*
Noah D. Manring, *University of Missouri-Columbia*
David M. McStravick, *Rice University*
Alan H. Nye, *Rochester Institute of Technology*
Keith Nisbitt, *University of Missouri-Rolla*
Marcia O'Malley, *Rice University*
Gordon Pennock, *Purdue University*
R. E. Rowlands, *University of Wisconsin*
Kazuhiro Saitou, *University of Michigan*
Albert J. Shih, *North Carolina State University*
Brian S. Thompson, *Michigan State University*
Ng Heong Wah, *Nanyang Technological University, Singapore*

Agradecemos especialmente a Om Prakash Agrawal, da Southern Illinois University, e Vladimir Glozman, da California State Polytechnic University, Pomona, por sua ajuda na precisão do texto, e a Robert West, Reginald Mitchiner, Charles Knight (*in memoriam*), Shih-Liang (Sid) Wang, Elizabeth Kenyon e Edward Anderson, por seu auxílio nos recursos de texto do Centro de Aprendizagem Online.

Prefácio

Objetivos

Esta obra destina-se a todos aqueles que estão iniciando seus estudos de projeto de engenharia mecânica, servindo também como um livro básico de referência para engenheiros no exercício da profissão. Seus objetivos são:

- Abarcar os fundamentos do projeto de máquinas, incluindo itens como processo do projeto, engenharia mecânica e de materiais, prevenção de falha sob carregamento estático e variável e características dos principais tipos de elementos mecânicos.
- Oferecer uma abordagem prática do assunto, mediante exemplos e aplicações práticas.
- Incentivar os leitores a associar projeto e análise.

Abordagem Geral: Retomada dos Fundamentos

Esta sétima edição mantém e realça as características mais populares das edições anteriores, ao mesmo tempo em que deixa de fora alguns elementos não-essenciais. O alcance desta obra enfoca as principais tendências do projeto de máquinas, apresentando somente uma discussão moderada dos métodos estatísticos.

O texto enfatiza uma abordagem prática de cada tópico, com problemas concisos de projeto e exemplos ilustrando o processo de tomada de decisão.

O texto é acessível e direto, com muitos capítulos contendo uma discussão reduzida de tópicos avançados.

O Que Há de Novo Nesta Edição

Nossa meta para a sétima edição deste livro foi torná-la mais acessível aos leitores, no que diz respeito a conceitos-chave e procedimentos no projeto de máquinas. O texto contém muitas características novas e realçadas. Entre os pontos de interesse, destacam-se os seguintes:

- *Cobertura prática do projeto de máquinas básico.* Tal cobertura foi simplificada, enfocando os tópicos mais importantes e que melhor se ajustam ao currículo típico de engenharia. Os leitores poderão identificar com maior facilidade o desenvolvimento dos conceitos principais.
- *Cobertura aprimorada da engenharia mecânica e da prevenção de falhas.* Uma discussão acentuada de tópicos-chave como fratura e fadiga é fornecida. Todos os tópicos são apresentados em ordem lógica, e a cobertura é condensada.
- *Cobertura realçada do projeto de componente de máquina.* Esta edição aprimora ainda mais a já bastante prática e qualificada cobertura anterior das considerações de projeto para as principais componentes de máquina.
- *Série de problemas revista e ampliada.* Os problemas anteriores foram atualizados e novos problemas foram acrescentados. Todos estão organizados de modo que se progrida do básico ao desafiador de forma consistente. Os problemas orientados à estatística foram reduzidos drasticamente, enfatizando a solução determinística dos problemas fundamentais de projeto.

Mudanças de Conteúdo e Reorganização

Todos os capítulos-chave foram reescritos e os tópicos, reorganizados, de modo a fornecer maior clareza e progresso lógico. O estilo do texto é direto, objetivando uma fácil compreensão. Alguns pontos relevantes são mencionados a seguir.

Parte 1: Fundamentos

A Parte 1 fornece uma introdução lógica e unificada ao projeto de máquinas. Os capítulos foram encurtados e enfocam nitidamente conceitos-chave, permitindo aos estudantes obter rapidamente um fundamento básico sobre a essência do assunto.

- *Capítulo 1, Introdução.* Atualizado com exemplos contemporâneos, com cobertura de ferramentas de projeto e recursos e com informações novas sobre como utilizar a Internet.
- *Capítulo 2, Considerações estatísticas.* Uma revisão geral autocontida de estatística que remete à abordagem vista nas edições anteriores (os exemplos básicos de estatística e os problemas foram drasticamente reduzidos nos capítulos subseqüentes).
- *Capítulo 3, Materiais.* Tratado como tópico de revisão e deslocado para adiante. Os tópicos avançados estão agora dispostos em capítulos nos quais materiais específicos são aplicados em projeto. Foi acrescentada a cobertura de compósitos.
- *Capítulo 4, Carga e análise de tensão.* Texto reescrito, apresentando uma melhor fluência e clareza. Há cobertura extra sobre carregamento em geral, bem como sobre equilíbrio, diagramas de corpo livre, força de cisalhamento, momentos flexores, funções de singularidade e vigas curvas.
- *Capítulo 5, Deflexão e rigidez.* Simplificado com uma cobertura clara e incluindo exemplos práticos de sobreposição, funções de singularidade e método de Castigliano.

Parte 2: Prevenção de Falha

Algumas das mais significativas melhorias desta edição podem ser encontradas na Parte 2, que agora destaca uma cobertura condensada, clara e concisa.

- *Capítulo 6, Falhas resultantes de carregamento estático.* Melhor organização em todo o capítulo e uma discussão a respeito de mecânica de fraturas – um tópico-chave.
- *Capítulo 7, Falha de fadiga resultante de carregamento variável.* Melhorias significativas foram feitas neste capítulo crucial. Agora, ele se desenvolve de maneira lógica, empregando uma abordagem determinística, desde os conceitos gerais sobre falha de carregamento variável até a discussão de tópicos como vida sob tensão, vida sob deformação e métodos de mecânica de fratura. Novas ilustrações foram acrescentadas, e os métodos estatísticos foram movidos para o final do capítulo.

Parte 3: Projeto de Elementos Mecânicos

A Parte 3 abarca o projeto de componentes de máquina específicas. A apresentação do material foi realçada para uma melhor fluência. Exemplos e problemas, novos e mais apropriados, foram acrescentados. A cobertura foi organizada e simplificada integralmente, tendo sido removida a maioria dos exemplos e problemas estatisticamente fundamentados. Os tópicos abrangidos são os seguintes:

- *Capítulo 8, Parafusos, fixadores e projeto de junções não-permanentes*
- *Capítulo 9, Soldagem, união e projeto de junções permanentes*
- *Capítulo 10, Molas mecânicas*
- *Capítulo 11, Mancais de contato rolante*
- *Capítulo 12, Lubrificação e mancais de munhão*
- *Capítulo 13, Engrenagens – geral*
- *Capítulo 14, Engrenagens retas e helicoidais*
- *Capítulo 15, Engrenagens cônicas e sem-fim*
- *Capítulo 16, Embreagens, freios, acoplamentos e volante*
- *Capítulo 17, Elementos mecânicos flexíveis*
- *Capítulo 18, Eixos rotativos e eixos fixos*

Ferramentas de Aprendizagem

Esta edição destaca muitos elementos que podem ajudar os estudantes a rapidamente entender e utilizar os conceitos de projeto de máquinas. As ferramentas-chave de aprendizagem são delineadas a seguir.

Introduções de capítulo. Cada capítulo abre com uma introdução que explica seus objetivos e a importância dos tópicos abordados.
Exemplos solucionados. Cada capítulo contém diversos exemplos solucionados que esclarecem o material e ilustram os conceitos básicos.
Problemas de fim de capítulo. Cada capítulo termina com uma série de problemas práticos que ajudam a reforçar o entendimento do material pelos estudantes.
Uso extenso de material gráfico. Desenhos e fotografias são usados extensivamente em todos os capítulos, para ilustrar o material e ajudar os estudantes a visualizar conceitos e problemas.

Suplementos

Ferramentas do Centro de Aprendizagem

Nosso novo Centro de Aprendizagem Online* oferece várias ferramentas computacionais práticas para ajudar estudantes e instrutores a explorar e dominar os conceitos do projeto de máquinas. Os elementos-chave incluem o seguinte:

Suplementos dos Estudantes

- *Tutoriais – Apresentação dos 10 principais conceitos, com visualização.* Entre os tópicos abordados estão os seguintes: projeto de vaso de pressão, ajuste prensado e de contração, tensões de contato e projeto para falha estática.
- *MATLAB® para projeto de máquinas.* Inclui simulações visuais e acompanhadas de código-fonte. Tais simulações estão ligadas a exemplos e problemas no texto, bem como demonstram maneiras como programas computacionais podem ser utilizados em projeto mecânico e análise.
- *FEPC.* Um programa de análise de elemento finito, bidimensional, que fornece aos leitores uma ferramenta fácil de empregar para entender o uso de FEA no projeto mecânico. Uma apostila sobre elementos finitos explica o uso do programa e sua aplicação a problemas de projeto mecânico. Tutoriais adicionais de FEM provêem um exame mais detalhado das aplicações de FEA a situações de projeto de máquinas.
- *Questões de exame dos fundamentos da engenharia (FE) para projeto de máquinas.* Testes de engenharia relacionados ao projeto mecânico, com problemas interativos e soluções. Essas questões de múltipla escolha servem como problemas efetivos, de auto-avaliação, bem como para a preparação do exame de FE.

Suplemento dos Instrutores (com Senha de Proteção)**

- *Manual de soluções.* Um manual do instrutor com soluções para a maioria dos problemas de fim de capítulo que não são de projeto.

* N de R. Material exclusivamente em inglês disponível no site da editora original (www.mhhe.com).
**N de R. Material disponível exclusivamente para professores. Solicitações podem ser encaminhadas para secretariaeditorial@artmed.com.br.

Sumário Resumido

Parte I Fundamentos 23

1 Introdução 25
2 Considerações Estatísticas 53
3 Materiais 85
4 Carga e Análise de Tensão 115
5 Deflexão e Rigidez 191

Parte II Prevenção de Falha 249

6 Falhas Resultantes de Carregamento Estático 251
7 Falha por Fadiga Resultante de Carregamento Variável 301

Parte III Projetos de elementos mecânicos 383

8 Parafusos, Fixadores e Projeto de Junções Não-Permanentes 385
9 Soldagem, União e Projeto de Junções Permanentes 447
10 Molas Mecânicas 489
11 Mancais de Contato Rolante 535
12 Lubrificação e Mancais de Munhão 577
13 Engrenagens – Geral 627
14 Engrenagens Cilíndricas de Dentes Retos e Engrenagens Cilíndricas Helicoidais 681
15 Engrenagens Cônicas e Sem-Fim 727
16 Embreagens, Freios, Acoplamentos e Volantes 765
17 Elementos Mecânicos Flexíveis 815
18 Eixos Rotativos e Eixos Fixos 863

Apêndice
A Tabelas Úteis 899
B Respostas de Problemas Selecionados 949

Índice 953

Sumário

Parte I **Fundamentos** 23

1 Introdução 25

1-1 Projeto 26
1-2 Projeto de Engenharia Mecânica 28
1-3 Interação entre os Elementos do Processo de Projeto 31
1-4 Ferramentas de Projeto e Recursos 34
1-5 Responsabilidades Profissionais do Engenheiro de Projeto 35
1-6 Códigos e Padronizações 37
1-7 Economia 37
1-8 Segurança e Responsabilidade do Produto 39
1-9 Avaliação de Adequação 39
1-10 Incerteza 40
1-11 Tensão e Resistência 41
1-12 Fator de Projeto e Fator de Segurança 44
1-13 Confiabilidade 45
1-14 Unidades e Unidades Preferenciais 46
1-15 Cálculos e Algarismos Significativos 48
PROBLEMAS 49

2 Considerações Estatísticas 53

2-1 Variáveis Aleatórias 54
2-2 Média Aritmética, Variância e Desvio-Padrão 56
2-3 Distribuições de Probabilidade 60
2-4 Propagação do Erro 67
2-5 Regressão Linear 69
2-6 Limites e Ajustes 71
2-7 Dimensões e Tolerâncias 75
PROBLEMAS 78

3 Materiais 85

3-1 Resistência e Rigidez dos Materiais 86
3-2 Significado Estatístico das Propriedades dos Materiais 89
3-3 Resistência e Trabalho a Frio 90
3-4 Dureza 93
3-5 Propriedades de Impacto 95
3-6 Efeitos da Temperatura 96
3-7 Sistemas de Numeração 97
3-8 Fundição em Areia 98
3-9 Moldagem em Casca 98
3-10 Fundição em Revestimento 99
3-11 Processo de Metalurgia do Pó 99
3-12 Processos de Trabalho a Quente 99
3-13 Processos de Trabalho a Frio 100
3-14 Tratamento Térmico do Aço 101
3-15 Aços de Liga 103
3-16 Aços Resistentes à Corrosão 104
3-17 Materiais de Fundição 105
3-18 Metais Não-Ferrosos 106
3-19 Plásticos 109
3-20 Materiais Compósitos 110
PROBLEMAS 111

4 Carga e Análise de Tensão 115

4-1 Equilíbrio e Diagramas de Corpo Livre 116
4-2 Força de Cisalhamento e Momentos Flexores em Vigas 119
4-3 Funções de Singularidade 120
4-4 Tensão 123
4-5 Componentes Cartesianas de Tensão 124
4-6 Círculo de Mohr para Tensão Plana 125
4-7 Tensão Tridimensional Geral 130
4-8 Deformação Elástica 131
4-9 Tensões Uniformemente Distribuídas 132

4-10 Tensões Normais para Vigas em Flexão 133
4-11 Vigas com Secções Assimétricas 138
4-12 Tensões de Cisalhamento para Vigas em Flexão 138
4-13 Torção 144
4-14 Concentração de Tensão 153
4-15 Tensões em Cilindros Pressurizados 155
4-16 Tensões em Anéis Rotativos 158
4-17 Ajustes por Pressão e por Contração 158
4-18 Efeitos da Temperatura 160
4-19 Vigas Curvas em Flexão 161
4-20 Tensões de Contato 168
4-21 Resumo 172
PROBLEMAS 172

5 Deflexão e Rigidez 191

5-1 Razões de Mola 192
5-2 Tração, Compressão e Torção 193
5-3 Deflexão por Flexão 193
5-4 Métodos de Deflexão de Viga 196
5-5 Determinação das Deflexões de Viga por Superposição 197
5-6 Deflexões de Viga por Funções de Singularidade 199
5-7 Energia de Deformação 203
5-8 Teorema de Castigliano 206
5-9 Deflexão de Membros Curvos 210
5-10 Problemas Estaticamente Indeterminados 214
5-11 Membros de Compressão – Geral 219
5-12 Colunas Longas com Carregamento Central 221
5-13 Colunas de Comprimento Intermediário com Carregamento Central 224
5-14 Colunas com Carregamento Excêntrico 224
5-15 Pilarete, ou Membros Curtos de Compressão 228
5-16 Choque e Impacto 230
5-17 Carregamento Aplicado Subitamente 231
PROBLEMAS 233

Parte II Prevenção de Falha 249

6 Falhas Resultantes de Carregamento Estático 251

6-1 Resistência Estática 252
6-2 Concentração de Tensão 258
6-3 Teorias de Falha 259
6-4 Teoria da Tensão Máxima de Cisalhamento para Materiais Dúcteis 260
6-5 Teoria da Energia de Distorção para Materiais Dúcteis 261
6-6 Teoria de Coulomb-Mohr para Materiais Dúcteis 267
6-7 Resumo das Falhas de Materiais Dúcteis 269
6-8 Teoria da Tensão Normal Máxima para Materiais Frágeis 272
6-9 Modificações da Teoria de Mohr para Materiais Frágeis 274
6-10 Resumo da Falha de Materiais Frágeis 276
6-11 Seleção de Critérios de Falha 277
6-12 Carregamento Estático ou Quase Estático em um Eixo 278
6-13 Introdução à Mecânica de Fratura 280
6-14 Análise Estocástica 289
PROBLEMAS 295

7 Falha por Fadiga Resultante de Carregamento Variável 301

7-1 Introdução à Fadiga em Metais 302
7-2 Abordagem da Falha por Fadiga em Análise e Projeto 303
7-3 Métodos da Vida sob Fadiga 309
7-4 Método da Vida sob Tensão 309
7-5 Método da Vida sob Deformação 311
7-6 Método da Mecânica de Fraturas Linear Elástica 314
7-7 Limite de Resistência 317
7-8 Resistência à Fadiga 319
7-9 Fatores Modificadores do Limite de Resistência 321
7-10 Concentração de Tensão e Sensibilidade a Entalhe 328
7-11 Caracterização de Tensões Flutuantes 336
7-12 Critérios de Falha por Fadiga sob Tensões Flutuantes 338
7-13 Resistência à Fadiga Torcional sob Tensões Flutuantes 352
7-14 Combinações de Modos de Carregamento 352
7-15 Tensões Flutuantes e Variáveis; Dano Cumulativo de Fadiga 355
7-16 Resistência à Fadiga de Superfície 360
7-17 Análise Estocástica 363
PROBLEMAS 376
RESUMO DAS PARTES 1 E 2 382

Parte III Projetos de elementos mecânicos 383

8 Parafusos, Fixadores e Projeto de Junções Não-Permanentes 385

8-1 Padrões de Rosca e Definições 386
8-2 Mecânica dos Parafusos de Potência 387
8-3 Fixadores Rosqueados 397
8-4 Junções – Rigidez de Fixadores 398
8-5 Junções – Rigidez de Membro 402
8-6 Resistência de Parafuso de Porca 405
8-7 Junções de Tração – Carga Externa 407
8-8 Relacionando o Torque à Tração de Parafuso de Porca 409
8-9 Junção de Tração Carregada Estaticamente com Pré-Carga 412
8-10 Junções de Gaxeta 415
8-11 Carregamento de Fadiga de Junções de Tração 415
8-12 Junções de Cisalhamento 421
8-13 Parafusos de Retenção 426
8-14 Chavetas e Pinos 427
8-15 Considerações Estocásticas 433
PROBLEMAS 434

9 Soldagem, União e Projeto de Junções Permanentes 447

9-1 Símbolos de Soldagem 448
9-2 Soldas de Topo e Filete 450
9-3 Tensões em Junções Soldadas sob Torção 453
9-4 Tensões em Junções Soldadas sob Flexão 458
9-5 Resistência de Junções Soldadas 460
9-6 Carregamento Estático 463
9-7 Carregamento de Fadiga 466
9-8 Soldagem de Resistência 468
9-9 Junções Rebitadas e Parafusadas com Porcas Carregadas em Cisalhamento6 469
9-10 União por Adesivos 473
PROBLEMAS 480

10 Molas Mecânicas 489

10-1 Tensões em Molas Helicoidais 490
10-2 Efeito de Curvatura 491
10-3 Deflexão de Molas Helicoidais 492
10-4 Molas de Compressão 492
10-5 Estabilidade 493
10-6 Materiais de Mola 494
10-7 Projeto de Molas Helicoidais de Compressão para Serviço Estático 499
10-8 Freqüência Crítica de Molas Helicoidais 504
10-9 Carregamento de Fadiga de Molas Helicoidais de Compressão 506
10-10 Projeto de Molas Helicoidais de Compressão para Carregamento de Fadiga 509
10-11 Molas de Extensão 512
10-12 Molas de Torção de Espiras Helicoidais 519
10-13 Molas Belleville 526
10-14 Molas Diversas 526
10-15 Resumo 528
PROBLEMAS 528

11 Mancais de Contato Rolante 535

11-1 Tipos de Mancais 536
11-2 Vida do Mancal 538
11-3 Carga e Vida do Mancal na Confiabilidade Especificada 539
11-4 Sobrevivência do Mancal: Confiabilidade versus Vida 541
11-5 Relacionando Carga, Vida e Confiabilidade 542
11-6 Carregamento Combinado Radial e Axial 544
11-7 Carregamento Variável 548
11-8 Seleção de Mancais de Esferas e Rolos Cilíndricos 552
11-9 Seleção de Mancais de Rolos Cônicos 554
11-10 Avaliação do Projeto para Mancais Selecionados de Contato Rolante 565
11-11 Lubrificação 569
11-12 Montagem e Recinto 569
PROBLEMAS 573

12 Lubrificação e Mancais de Munhão 577

12-1 Tipos de Lubrificação 578
12-2 Viscosidade 579
12-3 Equação de Petroff 580
12-4 Lubrificação Estável 582
12-5 Lubrificação de Filme Espesso 583
12-6 Teoria Hidrodinâmica 583

12-7 Considerações de Projeto 588
12-8 As Relações das Variáveis 589
12-9 Condições de Estado Permanente em Mancais Autocontidos 602
12-10 Folga 605
12-11 Mancais de Alimentação por Pressão 606
12-12 Cargas e Materiais 612
12-13 Tipos de Mancal 614
12-14 Mancais de Empuxo 615
12-15 Mancais de Contorno Lubrificado 616
PROBLEMAS 623

13 Engrenagens – Geral 627
13-1 Tipos de Engrenagens 628
13-2 Nomenclatura 629
13-3 Ação Conjugada 630
13-4 Propriedades da Evolvente 631
13-5 Fundamentos 632
13-6 Razão de Contato 637
13-7 Interferência 638
13-8 Fabricação de Dentes de Engrenagens 640
13-9 Engrenagens Cônicas de Dentes Retos 643
13-10 Engrenagens Helicoidais de Eixos Paralelos 643
13-11 Engrenagens Sem-Fim 647
13-12 Sistemas de Dentes3 648
13-13 Trens de Engrenagens 650
13-14 Análise de Força – Engrenagens Cilíndricas de Dentes Retos 655
13-15 Análise de Força – Engrenagens Cônicas 658
13-16 Análise de Força – Engrenagens Helicoidais 661
13-17 Análise de Força – Engrenagens Sem-Fim 663
PROBLEMAS 668

14 Engrenagens Cilíndricas de Dentes Retos e Engrenagens Cilíndricas Helicoidais 681
14-1 Equação de Flexão de Lewis 682
14-2 Durabilidade Superficial 690
14-3 Equações de Tensão AGMA 692
14-4 Equações de Resistência AGMA 693
14-5 Fatores Geométricos I e J (ZI e YJ) 697
14-6 Coeficiente Elástico Cp (ZE) 701
14-7 Fator Dinâmico Kv 701
14-8 Fator de Sobrecarga Ko 703
14-9 Fator de Condição de Superfície Cf (ZR) 703
14-10 Fator de Tamanho Ks 704
14-11 Fator de Distribuição de Carga Km (KH) 705
14-12 Fator de Razão de Dureza CH 706
14-13 Fatores de Vida para Ciclagem de Tensão YN e ZN 707
14-14 Fator de Confiabilidade KR (YZ) 708
14-15 Fator de Temperatura KT (Yq) 709
14-16 Fator de Espessura de Borda KB 709
14-17 Fatores de Segurança SF e SH 709
14-18 Análise 710
14-19 Projeto de um Par de Engrenagens 719
PROBLEMAS 724

15 Engrenagens Cônicas e Sem-Fim 727
15-1 Engrenagens Cônicas – Geral 728
15-2 Tensões e Resistências em Engrenagens Cônicas 729
15-3 Fatores para Equação AGMA 733
15-4 Análise de Engrenagens Cônicas de Dentes Retos 744
15-5 Projeto de um Conjunto de Engrenagens Cônicas de Dentes Retos 747
15-6 Engrenagens Sem-Fim – Equação AGMA 750
15-7 Análise de Engrenagens Sem-Fim 753
15-8 Projeto de um Par Sem-Fim 757
15-9 Carga de Desgaste de Buckingham 760
PROBLEMAS 761

16 Embreagens, Freios, Acoplamentos e Volantes 765
16-1 Análise Estática de Embreagens e Freios 766
16-2 Embreagens e Freios de Aro Interno Expansível 771
16-3 Embreagens e Freios de Aro Externo Contrátil 779
16-4 Embreagens e Freios de Cinta 783
16-5 Embreagens Axiais de Contato Friccional 784
16-6 Freios de Disco 787
16-7 Embreagens de Cone e Freios 791

16-8 Considerações de Energia 793
16-9 Elevação de Temperatura 795
16-10 Materiais de Fricção 798
16-11 Embreagens e Acoplamentos Diversos 800
16-12 Volantes 802
PROBLEMAS 807

17 Elementos Mecânicos Flexíveis 815

17-1 Correias 816
17-2 Transmissões de Correias Planas e Redondas 819
17-3 Correias em V 834
17-4 Correias de Tempo 841
17-5 Corrente de Rolos 842
17-6 Corda de Fio 849
17-7 Eixos Flexíveis 856
PROBLEMAS 857

18 Eixos Rotativos e Eixos Fixos 863

18-1 Visão Geral 864
18-2 Restrições Geométricas 869
18-3 Restrições de Resistência 874
18-4 Restrições de Resistência – Métodos Adicionais 881
18-5 Materiais de Eixo 884
18-6 Eixos Vazados 885
18-7 Velocidades Críticas 885
18-8 Projeto de Eixo 891
PROBLEMAS 892

Apêndice

A Tabelas Úteis 899

B Respostas de Problemas Selecionados 949

Índice 953

Lista de Símbolos

Esta é uma lista dos símbolos comuns utilizados em projeto de máquinas e também neste livro. Sua utilização em situações mais específicas pode exigir o uso de sobrescritos e subscritos, porém apresentaremos apenas a parte essencial de cada símbolo, visando a facilitar a consulta. Veja a Tabela 14-1 (p. 683-684) para os símbolos de engrenagem reta e helicoidal, e a Tabela 15-1 (p. 731-733) para os símbolos de engrenagem cônica.

A	Área, coeficiente
$\mathbf{A}$	Variante de área
a	Distância, constante de regressão
$\hat{a}$	Estimativa de constante de regressão
$\mathbf{a}$	Variante de distância
B	Coeficiente
Bhn	Dureza Brinell
$\mathbf{B}$	Variante
b	Distância, parâmetro de forma de Weibull, número de intervalo, constante de regressão, largura
$\hat{b}$	Estimativa de constante de regressão
$\mathbf{b}$	Variante de distância
C	Classificação básica de carga, constante de junção parafusada, distância de centro, coeficiente de variação, condição de extremidade de coluna, fator de correção, capacidade específica de calor, índice de mola
c	Distância, amortecimento viscoso, coeficiente de velocidade
CDF	Função cumulativa de distribuição
COV	Coeficiente de variação
$\mathbf{c}$	Variante de distância
D	Diâmetro de hélice
d	Diâmetro, distância
E	Módulo de elasticidade, energia, erro
e	Distância, excentricidade, eficiência, base de logaritmo neperiano
F	Força, dimensão fundamental de força
f	Coeficiente de fricção, freqüência, função
fom	Figura de mérito
G	Módulo elástico de torção
g	Aceleração decorrente da gravidade, função
H	Calor, potência
H_B	Dureza Brinell
HRC	Escala C de dureza Rockwell
h	Distância, espessura de filme
h_{CR}	Coeficiente combinado global de transferência de calor de convecção e radiação
I	Integral, impulso linear, momento de massa de inércia, segundo momento de área
i	Índice
$\mathbf{i}$	Vetor unitário na direção x
J	Equivalente mecânico de calor, segundo momento polar de área, fator de geometria
$\mathbf{j}$	Vetor unitário na direção y
K	Fator de serviço, fator de concentração de tensão, fator aumentador de tensão, coeficiente de torque
k	Fator modificante do limite de resistência de Marin, razão de mola

k	Variante de k, vetor unitário na direção z
L	Comprimento, vida, dimensão fundamental de comprimento
LN	Distribuição *lognormal*
l	Comprimento
M	Dimensão fundamental de massa, momento
M	Vetor de momento, variante de momento
m	Massa, inclinação, expoente de enrijecimento por deformação
N	Força normal, número, velocidade rotacional
N	Distribuição normal
n	Fator de carga, velocidade rotacional, fator de segurança
n_d	Fator de projeto
P	Força, pressão, passo diametral
PDF	Função de densidade de probabilidade
p	Passo, pressão, probabilidade
Q	Primeiro momento de área, força imaginária, volume
q	Carga distribuída, sensibilidade a entalhe
R	Raio, força de reação, confiabilidade, dureza Rockwell, razão de tensão
R	Vetor de força de reação
r	Coeficiente de correlação, raio
r	Vetor de distância
S	Número de Sommerfeld, resistência
S	Variante de **S**
s	Distância, desvio-padrão de amostra, tensão
T	Temperatura, tolerância, torque, dimensão fundamental de tempo
T	Vetor de torque, variante de torque
t	Distância, estatística da distribuição *t-student*, tempo, tolerância
U	Energia de deformação
U	Distribuição uniforme
u	Energia de deformação por unidade de volume
V	Velocidade linear, força de cisalhamento
v	Velocidade linear
W	Fator de trabalho a frio, carga, peso
W	Distribuição de Weibull
w	Distância, lacuna, intensidade de carga
w	Vetor de distância
X	Coordenada, número truncado
x	Coordenada, valor verdadeiro de um número, parâmetro de Weibull
x	Variante de x
Y	Coordenada
y	Coordenada, deflexão
y	Variante de y
Z	Coordenada, módulo de secção, viscosidade
z	Desvio-padrão da distribuição normal unitária
z	Variante de z

α	Coeficiente, coeficiente de expansão térmica linear, condição de extremidade para molas, ângulo de rosca
β	Ângulo de suporte, coeficiente
Δ	Variação, deflexão
δ	Desvio, elongação
ϵ	Razão de excentricidade, deformação (normal) de engenharia
$\boldsymbol{\epsilon}$	Distribuição normal com uma média de 0 e um desvio-padrão de s
ε	Deformação verdadeira ou logarítmica
Γ	Função gama
γ	Ângulo de passo, deformação de cisalhamento, peso específico
λ	Razão de esbelteza para molas
λ	Distribuição *lognormal* com uma média de 1 e um desvio-padrão igual ao COV
μ	Viscosidade absoluta, média populacional
ν	Razão de Poisson
ω	Velocidade angular, freqüência circular
ϕ	Ângulo, comprimento de onda
ψ	Integral da inclinação
ρ	Raio de curvatura
σ	Tensão normal
σ'	Tensão de von Mises
$\boldsymbol{\sigma}$	Variante da tensão normal
σ	Desvio-padrão
τ	Tensão de cisalhamento
$\boldsymbol{\tau}$	Variante da tensão de cisalhamento
θ	Ângulo, parâmetro característico de Weibull
¢	Custo por peso unitário
\$	Custo

Projeto de Engenharia Mecânica

PARTE I

FUNDAMENTOS

CAPÍTULO 1

Introdução

1-1 Projeto 26
1-2 Projeto de Engenharia Mecânica 28
1-3 Interação entre os Elementos do Processo de Projeto 31
1-4 Ferramentas de Projeto e Recursos 34
1-5 Responsabilidades Profissionais do Engenheiro de Projeto 35
1-6 Códigos e Padronizações 37
1-7 Economia 37
1-8 Segurança e Responsabilidade do Produto 39
1-9 Avaliação de Adequação 39
1-10 Incerteza 40
1-11 Tensão e Resistência 41
1-12 Fator de Projeto e Fator de Segurança 44
1-13 Confiabilidade 45
1-14 Unidades e Unidades Preferenciais 46
1-15 Cálculos e Algarismos Significativos 48

Este capítulo introduzirá muitas idéias, algumas das quais poderão ser novas para você, tanto em contexto quanto em conteúdo. O projeto mecânico é uma tarefa complexa, que requer diversas habilidades. Um vocabulário que permita a subdivisão de muitas relações em uma série de tarefas simples faz-se necessário. A complexidade do assunto sugere uma seqüência na qual as idéias possam ser introduzidas e revistas. Nesse sentido, consideraremos alguns tópicos brevemente neste capítulo, para servir de orientação. Adiante, esses tópicos serão desenvolvidos em detalhes e as dúvidas, esclarecidas; assim, eles se tornarão familiares para você.

Consideraremos primeiramente a natureza do projeto *em geral* e, então, o projeto de engenharia mecânica *em particular*. Um projeto é um processo iterativo com muitas fases interativas. Aprender e especializar-se constitui um processo contínuo à medida que você completa sua educação formal e segue sua carreira. Existem muitos recursos para apoiar o projetista, incluindo fontes de informação como a Internet e diversas ferramentas computacionais de projeto. Há funções a serem desempenhadas pelos códigos e padronizações, bem como uma economia sempre presente, além da segurança e de considerações de confiabilidade do produto.

Assim, o foco do capítulo se estreita e a habilidade primordial do projetista – a avaliação de adequação – é considerada. Questões de incerteza sempre estiveram presentes nos projetos de engenharia, e métodos foram desenvolvidos a partir do conhecimento crescente. É dada atenção especial a termos como tensão e resistência e à distinção entre fator de projeto e fator de segurança. A confiabilidade é considerada, assim como unidades, unidades preferenciais, cálculos e figuras significativas.

Processos que envolvem tomada de decisão são comuns a todas as disciplinas do campo de projeto de engenharia – não somente ao projeto de engenharia mecânica. Todavia, na medida em que nosso assunto *é* o projeto de engenharia mecânica, vamos utilizá-lo como veículo para o entendimento desses processos de tomada de decisão e para aplicá-los a situações práticas.

Este livro consiste em três partes. A Parte 1 inicia explicando algumas diferenças entre projeto e análise, além de introduzir noções fundamentais e enfoques de projeto. Ela segue então com um capítulo sobre métodos estatísticos (Capítulo 2). Um conhecimento de análise estatística não se faz necessário para estudar o balanço do material neste livro. Contudo, você encontrará algumas idéias úteis no Capítulo 2, bem como métodos para auxiliar no entendimento e aperfeiçoar seu projeto. A seguir, há uma revisão das propriedades dos materiais, uma análise de tensão e uma introdução à rigidez e à análise de deflexão.

A Parte 2, sobre prevenção de falha, consiste em dois capítulos acerca da prevenção de falha em peças mecânicas. O motivo de estas falharem e a maneira como elas podem ser projetadas para prevenir falhas são questões difíceis, de modo que serão utilizados dois capítulos para respondê-las – um sobre prevenção de falhas decorrentes de cargas estáticas e o outro sobre prevenção de falhas decorrentes de fadiga e de cargas dinâmicas.

Na Parte 3, o material das Partes 1 e 2 é aplicado à análise, à seleção e ao projeto de elementos mecânicos específicos, tais como fixadores, soldagem, molas, mancais de contato de rolamento, mancais de filme, engrenagens, correias, correntes e cabos de fios. O projeto de eixos reúne as influências de vários dos elementos precedentes.

1-1 Projeto

Projetar consiste tanto em formular um plano para a satisfação de uma necessidade específica quanto em solucionar um problema. Se tal plano resultar na criação de algo tendo uma realidade física, então o produto deverá ser funcional, seguro, confiável, competitivo, utilizável, manufaturável e mercável. Esses termos são definidos da seguinte forma:

- *Funcional.* O produto deve apresentar um desempenho que atenda às necessidades e expectativas do consumidor.
- *Seguro.* O produto não deve oferecer perigo ao usuário, a circunstantes ou a propriedades vizinhas. Perigos que não podem ser "evitados por projeto" devem se valer de anteparos (envoltórios protetores); se isso não for possível, informações apropriadas ou avisos devem ser fornecidos.
- *Confiável.* Confiabilidade é a probabilidade condicional, a um determinado nível de confiança, de que o produto irá desempenhar sua função proposta satisfatoriamente, ou sem falhar a uma determinada idade.
- *Competitivo.* O produto deve ser um forte competidor em seu mercado.
- *Utilizável.* O produto deve ser "amigável ao usuário", acomodando-se a especificações como tamanho, resistência, postura, alcance, força, potência e controle humanos.
- *Manufaturável.* O produto deve ser reduzido a um número "mínimo" de componentes, adequados à produção em massa, com dimensões, distorção e resistência sob controle.
- *Mercável.* O produto pode ser comprado, e serviços de assistência técnica devem estar disponíveis.

Para lembrarmos que os projetos apresentam restrições e têm de exibir qualidades conhecidas desde o início, um *imperativo de projeto* pode ser expresso como segue:

Projete
(sujeito a algumas restrições de solução de problemas)
uma componente, um sistema ou um processo
que realize uma tarefa especificada
(sujeita a certas restrições de solução)
otimamente.

As expressões entre parênteses se referem a qualificações impostas ao projeto. A metodologia de solução é restringida por aquilo que o projetista conhece, ou pode fazer; a solução, além de funcional, segura, confiável, competitiva, utilizável, manufaturável e mercável, deve também ser legal e adaptar-se aos códigos e padrões aplicáveis.

É importante que o projetista comece sabendo como reconhecer uma alternativa satisfatória e como distinguir entre duas alternativas satisfatórias, a fim de identificar a melhor. A partir desse fundamento, estratégias de otimização poderão ser elaboradas e selecionadas. Logo, desdobram-se as seguintes tarefas:

- Elaborar soluções alternativas.
- Estabelecer métricas-chave de desempenho.
- Mediante análise e teste, simular e predizer o desempenho de cada alternativa, retendo as satisfatórias e descartando as insatisfatórias.
- Escolher a melhor alternativa satisfatória descoberta como uma aproximação ao ótimo.
- Implementar o projeto.

A caracterização de uma tarefa de projeto como um *problema* de projeto pode introduzir a idéia de que, sendo um problema, deve ter uma solução – o que nem sempre é verdade. O espaço de projeto pode ser vazio. Ademais, é possível que algumas situações simplesmente tenham de ser toleradas. A fim de compensar a ausência de soluções, alguma(s) restrição(ões) pode(m) ter de ser negociada(s) para que resoluções possam ser admitidas. Assim, uma vez mais, mesmo quando soluções são possíveis, o projetista pode não ser criativo ou inventivo o suficiente para concebê-las. Isso revela ao problema de projeto a necessidade de talento individual ou de habilidade nessa área.

Normalmente há mais de uma solução, de modo que distinguir entre elas, a fim de escolher a melhor, pode requerer a habilidade de lidar com muitas soluções sem ficar abismado. Estas, caso existam, podem ser caracterizadas como satisfatórias, algumas melhores do que outras, outras claramente boas e uma, a melhor, assim determinada por algum critério. Pode também haver uma dependência temporal, de modo que o que é aceitável hoje pode não sê-lo amanhã e vice-versa.

Projetar é um processo inovador e altamente iterativo. É também um processo de tomada de decisão. Decisões, algumas vezes, têm de ser tomadas com base em muito pouca informação, ocasionalmente com a quantidade certa de informação, ou mesmo com uma fartura de informações parcialmente contraditórias. Um homem com um relógio sabe que horas são; com dois relógios, entretanto, nunca estará seguro. Decisões são algumas vezes tomadas por tentativas, reservando-se o direito de ajustá-las toda vez que mais informações se tornarem conhecidas. A questão é que o projetista de engenharia tem de se sentir pessoalmente confortável com o papel de tomador de decisões e solucionador de problemas. Essa deve ser uma atividade gratificante e bem-vinda. Do contrário, podem surgir ramificações pessoais (como o estresse) passíveis de afetar – até mesmo ameaçar – sua saúde.

Projetar é uma atividade de intensa comunicação em que palavras e desenhos são ambos utilizados, assim como formas orais e escritas. Os engenheiros têm de se comunicar efetivamente e trabalhar com pessoas de muitas disciplinas que podem saber mais ou menos do que eles. Essas são habilidades importantes, e o sucesso do engenheiro depende delas.

Os recursos pessoais de criatividade, habilidade de comunicação e capacidade de solução de problemas que compõem o instrumental de um projetista estão entrelaçados com o conhecimento de tecnologia e princípios fundamentais. As ferramentas de engenharia (matemática, estatística, computação, desenho e linguagem) são combinadas para produzir um plano que, quando levado a cabo, resulta em um produto funcional, seguro, confiável, competitivo, utilizável, manufaturável e mercável, independentemente de quem o construa ou de quem o utilize.

1-2 Projeto de Engenharia Mecânica

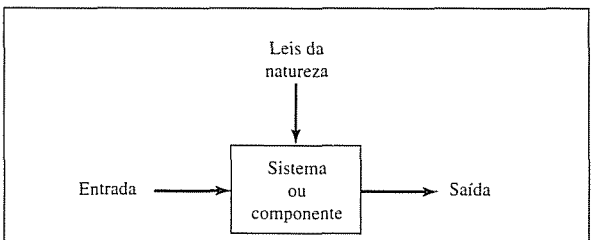
Os engenheiros mecânicos estão associados à produção e ao processamento de energia, bem como ao fornecimento dos meios de produção, das ferramentas de transporte e das técnicas de automação. Suas habilidades e base de conhecimento são extensas. Entre suas bases disciplinares encontram-se a mecânica dos sólidos e fluidos, o transporte de massa e de *momentum*, além dos processos de manufatura e das teorias elétrica e de informação. O projeto de engenharia mecânica envolve todas as disciplinas da Engenharia Mecânica.

Muitos problemas resistem à compartimentalização. Um simples mancal de deslizamento envolve fluxo de fluido, transferência de calor, fricção, transporte de energia, seleção de material, tratamentos termomecânicos, descrições estatísticas e assim por diante. Um edifício é controlado ambientalmente. As considerações referentes ao aquecimento, à ventilação e ao condicionamento de ar são de tal forma especializadas que há quem fale em *projeto de aquecimento, ventilação e ar-condicionado* como se isso fosse separado e distinto do projeto de engenharia mecânica. De maneira similar, o *projeto de motor de combustão interna*, o *projeto de turbomaquinaria* e o *projeto de motor a jato* são considerados, algumas vezes, entidades discretas. Os termos adjetivos que sucedem o vocábulo *projeto* são meramente um auxiliar descritivo do produto para o processo de comunicação. Há termos como *projeto de máquinas*, *projeto de elementos de máquinas*, *projeto de componentes de máquinas*, *projeto de sistemas* e *projeto de potência dos fluidos*. Todos são, de alguma forma, exemplos mais focados do projeto de engenharia mecânica. Dependem do mesmo corpo de conhecimento, são similarmente organizados e requerem habilidades semelhantes.

No mundo acadêmico, que agrega o conhecimento em grupos de aprendizado eficientes, encontramos diversos assuntos, cursos, disciplinas e campos. As ementas consistem de uma seqüência de cursos. O arranjo dos cursos apresenta a oportunidade de estudar elementos de máquinas e máquinas antes do último semestre. Assim, o projeto de máquinas costuma representar a primeira experiência séria do estudante em projeto que já tenha uma base de conhecimentos substancial. Alguns – mas não muitos – elementos de máquinas podem ser entendidos sem uma base de termofluidos completa, porém, antes que você o saiba, já estará dentro do campo de projeto mecânico.

A ciência explica *o que é*, a engenharia cria *o que nunca foi*. A matemática não é ciência nem engenharia. Física e química são ciências, mas não engenharia.

Como sugerido na Figura 1-1, exige-se um tipo de talento para se tornar um cientista e um talento diferente para criar o que nunca existiu. Engenheiros e cientistas conhecem algo do trabalho um do outro, mas apenas em casos raros ambos os talentos são desenvolvidos em um mesmo indivíduo. Exige-se talento e habilidade para criar e inovar, talento para ser, de forma consistente, um solucionador de problemas e um tomador de decisões, e talento para ser um comunicador efetivo. Preparação, como você pode ver, é o desenvolver e o esmerar do talento, seja qual for a tarefa.



Nome da atividade	Para encontrar	Dados	Habilidade envolvida
Análise,	Saída,	Sistema, entrada, leis	Dedução,
Análise inversa,	Entrada,	Sistema, saída, leis	Dedução,
Ciência,	Leis,	Sistema, entrada, saída	Indução,
Engenharia	Sistema	Entrada, saída, leis	Síntese

Figura 1-1 O(s) nome(s) da(s) atividade(s). Observe as distinções entre análise, ciência e engenharia, bem como as habilidades significativas envolvidas.

Tomada Racional de Decisão

Os projetistas têm de tomar decisões – poucas ou muitas, algumas *a priori*, outras em comum acordo. A tomada racional de decisão é um processo sistemático de projeto que envolve os seguintes elementos-chave.

Chave 1: Adequabilidade, Factibilidade, Aceitabilidade

Quando as forças armadas reconheceram a importância do pensamento claro e da tomada racional de decisões por parte de seus generais, elas procuraram o conselho de engenheiros sobre o modo como proceder. Os militares perceberam que os engenheiros empenham enormes quantidades de recursos em grandes projetos, sem qualquer possibilidade de recomeço. O conselho fornecido pode ser assim resumido:

- Uma ação contemplada é *adequada* se sua adoção de fato atingir o propósito intencionado.
- Uma ação contemplada é *factível* se puder ser desenvolvida com conhecimento, pessoal, dinheiro e material disponível, ou se puder ser feita em tempo hábil.
- Uma ação contemplada é *aceitável* se os resultados prováveis equivalerem ao valor dos custos calculados.

Chave 2: Alternativa Satisfatória

Se uma ação contemplada é adequada, factível e aceitável, ela se torna uma *alternativa satisfatória* e é posta de lado, para ser comparada com outras alternativas satisfatórias. Se pudermos comparar duas alternativas satisfatórias e escolher a melhor, uma *estratégia de otimização* poderá ser criada ou selecionada a fim de lidar com uma grande quantidade de alternativas satisfatórias.

Chave 3: Conjunto de Especificações

Um *conjunto de especificações* são os desenhos, textos, lista de materiais e instruções que constituem o memorando de decisões em uma forma que permite ao fabricante ou ao usuário concretizar a função de forma segura, confiável, competitiva e útil, tendo o produto sido fabricado e reparado de acordo com a satisfação do usuário.

O conjunto de especificações para uma mola de compressão de espiras helicoidais para serviço estático, por exemplo, pode ser fornecido a um fabricante de molas para manufaturá-la. O que esse conjunto de especificações não revela é quais de seus elementos se encarregarão, individualmente ou em combinação, das questões de função, segurança, confiabilidade e competitividade. Um projetista necessita de um conjunto alternativo (equivalente) que mostre cada decisão necessária, que permita bifurcação em decisões *a priori* e decisões de projeto, que admita etiquetagem para mostrar que qualidade (função, segurança, confiabilidade ou competitividade) é considerada e que revele a dimensionalidade do problema.

Chave 4: Conjunto de Decisões

Um *conjunto de decisões* constitui uma lista de decisões requerida para estabelecer o conjunto de especificações. O primeiro conjunto equivale ao segundo. Ambos podem ser deduzidos um do outro, com base na conveniência, para clarear o pensamento. O conjunto de decisões é expresso em termos dos parâmetros de pensamento do projetista e facilmente enfoca a função, a segurança, a confiabilidade e assim por diante. Por exemplo, o *conjunto de especificações* para uma mola de espiras helicoidais para serviço estático pode ser assim disposto:

- Material e condição
- Tratamento de extremidade
- Diâmetro interno e externo da espira e tolerância
- Número total de voltas e tolerância
- Comprimento livre e tolerância
- Tamanho do fio e tolerância

Observe que esses itens são requeridos pelo fabricante de mola para reproduzir a única mola encomendada. Não está claro como, ou se, uma especificação de diâmetro de espira considera a função, a segurança e assim por diante, nem se o fabricante da mola se importa com isso. Contudo, o projetista deve se preocupar, e por esse motivo organiza o *conjunto de decisões* equivalente da seguinte forma:

- Material e condição
- Tratamento de extremidade
- Força F_1 e contração da extremidade y_1, ou F_1 e comprimento L_1 (função)
- Atua (externamente) sobre uma barra: d_{rod} (função)

- Sobrecurso fracionário para fechamento da espira ξ: $\xi = 0{,}15$ (segurança, confiabilidade e linearidade da mola [robustez do modelo matemático])
- Diâmetro d do fio (competitividade por meio da otimização)

Observe que esses itens são utilizados pelo projetista para identificar decisões, o que elas consideram e a dimensionalidade do problema. Tolerâncias podem ser expressas como uma função de valores intermediários e podem também ser quantificadas em um passo subseqüente. No Capítulo 10, você aprenderá a provar a equivalência entre o conjunto de decisões e o de especificações para uma mola de espiras helicoidais.

Compor um conjunto de decisões que seja apropriadamente revelador e útil constitui uma habilidade desenvolvida por meio de conhecimento e prática. Existe alguma duplicidade entre os registros no conjunto de especificações precedente e o conjunto de decisões, mas observe o surgimento explícito de parâmetros de pensamento. A carga F_1 que essa mola deve apresentar na contração de extremidade y_1 (ou no comprimento de mola L_1) considera a função. Trabalhar sobre uma barra é necessário para que a mola funcione. O sobrecurso fracionário até o fechamento ξ fixado em 0,15 considera segurança e confiabilidade, protegendo a mola fechada sólida, intencional ou inadvertidamente, ao mesmo tempo que preserva a linearidade desta, de modo que o modelo matemático permanece congruente com a natureza.

Chave 5: Decisões *a Priori versus* Variáveis de Projeto

As primeiras cinco decisões do exemplo anterior de conjunto de decisões podem ser tomadas de antemão (denominam-se *decisões a priori*). A última decisão, aquela do tamanho d do fio, é denominada *variável de projeto*, antes de a tomarmos, e *decisão de projeto*, depois. É por meio dessa variável que o projetista atende a assuntos relativos à preservação de função, segurança e confiabilidade, especificamente utilizando-a para considerar a competitividade mediante a otimização. Nesse caso, o conhecimento de que existe uma variável independente influencia a seleção da metodologia empregada para estabelecer o diâmetro d do fio.

Chave 6: Avaliação de Adequação (Habilidade 1)

Uma *avaliação de adequação* consiste nos passos mentais, empíricos e relativos à modelagem matemática que o projetista toma para assegurar-se de que um conjunto de especificações dado é satisfatório (adequado, factível e aceitável). Uma avaliação de adequação constitui a habilidade primordial do projetista. Refere-se ao modo como ele reconhece um conjunto satisfatório de especificações ou, de outra forma, um conjunto de decisões correspondente. De tão importante, tal avaliação é denominada *habilidade* 1. Muito de um primeiro curso em projeto de elementos de máquinas concentra-se em construir e refinar essa habilidade em diversas aplicações. Sua centralidade é vista na Figura 1-2.

Chave 7: Figura de Mérito

Se, no exemplo da mola de espiras, o projetista encontra diversos tamanhos de fio que passam pela avaliação de adequação, ele então utiliza uma *figura de mérito* para ajudar a identificar o melhor deles. Não é exagero dizer que molas "são vendidas por grama (g)". O volume do material utilizado para formar uma mola é um índice de custo. Trata-se de uma robusta figura de mérito, abreviada como *f.o.m.*, ou simplesmente *fom*. Quantitativamente, ela pode ser expressa, no caso da mola de espira helicoidal de compressão, como:

$$\text{fom} = -\frac{\pi d^2 N_t D}{4}$$

em que d é o diâmetro do fio, N_t é o número total de voltas e D, o diâmetro médio das espiras. O sinal de menos permite que a figura de mérito aumente com um volume decrescente. Tal figura é um número cuja magnitude é um índice monotônico para o mérito, ou desejabilidade, da mola. Ela permite a rápida escolha entre diversos projetos satisfatórios. Caso haja muitos deles, uma estratégia de otimização é empregada para identificar o melhor, dispensando-se um exame exaustivo.

Chave 8: Habilidade de Síntese (Habilidade 2)

A capacidade de síntese envolve uma estratégia de otimização, uma figura de mérito e a habilidade 1. Um diagrama das habilidades 1 e 2 é visto na Figura 1-2. Observe que a habilidade 1 está embutida na habilidade 2, de modo que precisa ser aprendida antes.

Há aqui uma ironia que não nos deve escapar. De certa forma, estivemos construindo uma lista de verificação com um objetivo incomum. A meta da maioria das listas de verificação é lembrar as pessoas de executar tarefas sem deixar escapar uma situação que demande pensar e, dessa forma, atingir um desempenho crível. A lista de verificação tem aqui o propósito de estimular e facilitar o raciocínio original e racional, habilitando, pois, a engenheiros com uma tarefa de projeto ensinar a si mesmos o que necessitam saber a respeito da estrutura e conectividade dos elementos da tarefa em questão.

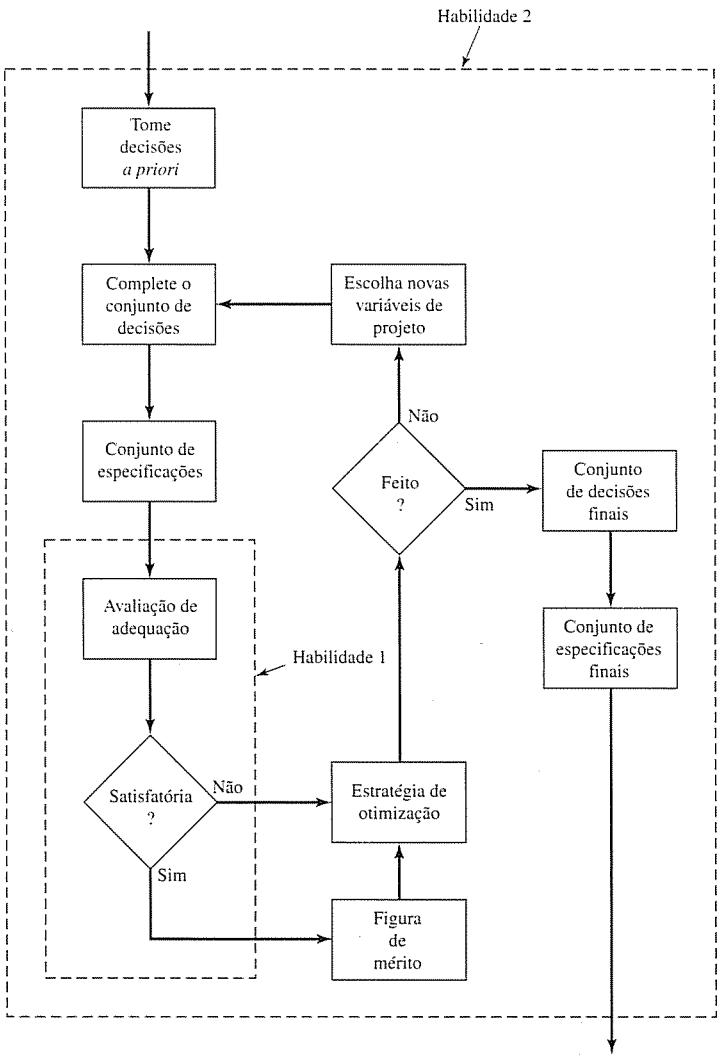


Figura 1-2 Um diagrama de fluxo lógico das habilidades 1 e 2 do projetista. Observe que a habilidade de análise 1 está inserida na habilidade de síntese 2. Dependendo do modo como a estratégia de otimização é formulada, a habilidade 2 pode significar uma antianálise, na mesma medida em que a integral em cálculo pode ser vista como uma antiderivada.

1-3 Interação entre os Elementos do Processo de Projeto

O processo completo de projeto é de nosso interesse neste capítulo. Como ele começa? Simplesmente o engenheiro senta-se a uma mesa, com uma folha de papel em branco, e anota algumas idéias? O que acontece a seguir? Que fatores influenciam ou controlam as decisões que têm de ser tomadas? Por fim, como esse processo de projeto termina?

O processo completo de projeto, do início ao fim, é freqüentemente delineado como na Figura 1-3. Ele começa com o reconhecimento de uma necessidade e de uma decisão envolvendo fazer algo a respeito dela. Após muitas iterações, o processo termina com a apresentação dos planos para satisfazer a tal necessidade. Dependendo da natureza da tarefa de projeto, várias fases de projeto podem ser repetidas ao longo da vida do produto, desde sua concepção até seu término. Nas seções seguintes, examinaremos esses passos do processo de projeto detalhadamente.

Reconhecimento e Identificação

Às vezes, o projeto inicia quando alguém identifica uma necessidade e decide fazer algo a respeito. O *reconhecimento da necessidade* e a expressão da mesma com freqüência constituem um ato altamente criativo, uma vez que a necessidade pode ser apenas um descontentamento vago, um sentimento de inquietação ou uma percepção de que algo não está certo. Muitas vezes ela não é evidente; seu reconhecimento é em geral

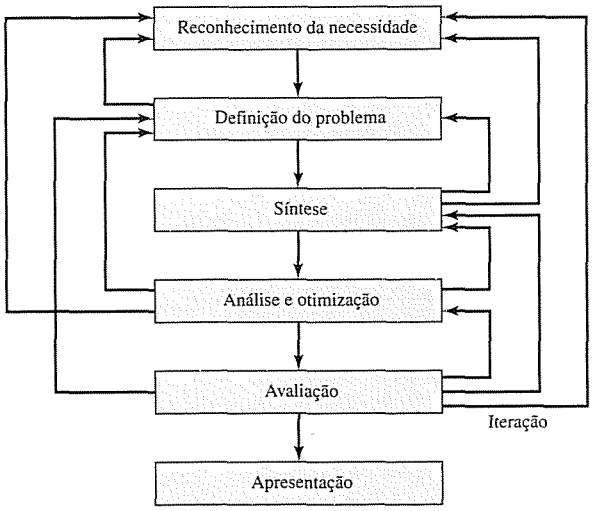


Figura 1-3 As fases do projeto, reconhecendo as muitas realimentações e iterações.

devido a uma circunstância particular adversa ou a um conjunto de circunstâncias aleatórias que aparecem quase simultaneamente. Por exemplo, a necessidade de fazer algo a respeito de uma máquina de empacotar alimentos pode ser indicada pelo nível de barulho, pela variação no peso dos pacotes ou por ligeiras mas perceptíveis variações na qualidade do pacote ou embrulho.

É lógico que uma pessoa sensível, que facilmente se perturbe com alguma coisa, tenha mais probabilidade de reconhecer uma necessidade – e também de fazer algo a respeito dela. Por essa razão, as pessoas sensíveis costumam ser mais criativas. Uma necessidade é facilmente reconhecida depois de alguém tê-la expressado. Assim, a necessidade que muitos países têm de qualidade de água e de ar, de mais locais de estacionamento nas cidades, de melhores sistemas de transporte público e de um fluxo mais rápido tornou-se bastante evidente.

Há uma diferença distinta entre a declaração da necessidade e a identificação do problema que segue a essa declaração (Figura 1-3), o qual é mais específico. Se a necessidade for de ar limpo, tal problema poderá ser o de reduzir a emissão de poluentes industriais e do escapamento de automóveis, ou de rapidamente extinguir incêndios florestais.

A *definição do problema* deve incluir todas as especificações para o objeto que será projetado. Tais especificações são as quantidades de entrada e saída, as características e dimensões do espaço que o objeto deve ocupar e todas as limitações porventura existentes. Podemos considerar o objeto a ser projetado como algo em uma caixa-preta. Nesse caso, devemos especificar as entradas e saídas dessa caixa, juntamente com suas características e limitações. As especificações definem o custo, a quantidade de objetos a ser manufaturada, a vida esperada, o intervalo, a temperatura de operação e a confiabilidade. As características especificadas podem incluir velocidades, avanços, limitações de temperatura, intervalo máximo, variações esperadas nas variáveis e limitações dimensionais e no peso.

Existem muitas especificações subentendidas que resultam do ambiente particular do projetista ou da natureza do problema em si. Os processos de manufatura disponíveis, juntamente com os recursos de cada fábrica, constituem restrições à liberdade de um projetista e por isso são uma parte das especificações subentendidas. É possível que uma pequena fábrica, por exemplo, não disponha de maquinaria de trabalho a frio. Ciente disso, o projetista seleciona outros métodos de processamento de metal que possam ser empregados nessa fábrica. As habilidades dos trabalhadores disponíveis e a situação de competição também constituem restrições subentendidas. Qualquer coisa que limite a liberdade de escolha do projetista é uma restrição. Muitos materiais e tamanhos são listados nos catálogos dos fornecedores, por exemplo, mas nem sempre estão disponíveis com facilidade, e escassezes freqüentemente ocorrem. Além disso, a economia de inventário requer que um fabricante armazene uma quantidade mínima de materiais e de tamanhos.

A síntese de um esquema conectando elementos possíveis do sistema é às vezes denominada *invenção do conceito*. Esse é o primeiro passo na tarefa de síntese. À medida que o esquema progride, análises devem ser feitas para avaliar se o seu desempenho é satisfatório ou mesmo melhor e, se satisfatório, exatamente quão bem operará. Eis uma tarefa de análise. Esquemas de sistema que não sobrevivem à análise são revistos, melhorados ou descartados. Aqueles com potencial são otimizados para determinar o melhor desempenho de que o esquema é capaz. Esquemas rivais são comparados, de modo que o caminho que leve ao pro-

duto mais competitivo pode ser escolhido. A Figura 1-3 mostra que *síntese*, *análise* e *otimização* acham-se íntima e iterativamente relacionadas. A síntese depende muito do talento. Nessa iteração, o conjunto de especificações é formado.

Observamos, e o faremos repetidas vezes, que o projeto é um processo iterativo no qual passamos por várias etapas, avaliamos os resultados e então retornamos a uma fase anterior do procedimento. Assim, podemos sintetizar várias componentes de um sistema, analisá-las, otimizá-las e então retornar à síntese para ver que efeito isso terá nas partes restantes do sistema. Tanto a análise como a otimização requerem que construamos ou criemos modelos abstratos do sistema que admitam alguma forma de análise matemática. Tais modelos são denominados *modelos matemáticos*. Ao criá-los, nossa esperança é a de que possamos encontrar um modelo que simule muito bem o sistema físico real.

Como indicado na Figura 1-3, a *avaliação* é uma fase importante do processo completo de projeto. É a prova final de um projeto bem-sucedido e normalmente envolve o ensaio de um protótipo em laboratório. Aqui, desejamos descobrir se o projeto realmente satisfaz à(s) necessidade(s). Ele é confiável? Competirá exitosamente com produtos similares? É econômico de manufaturar e usar? É facilmente mantido e ajustado? Pode algum lucro ser obtido de sua venda ou uso? Qual a probabilidade de que ele resulte em processos de confiabilidade do produto? E o seguro, é barato e facilmente obtido? É provável que retornos à fabrica sejam necessários para substituir partes defeituosas ou sistemas?

Comunicar o projeto a outras pessoas constitui o passo final e vital de apresentação no processo de projeto. Sem dúvida, muitos grandes projetos, invenções e trabalhos criativos já se perderam para a posteridade, simplesmente porque seus criadores foram incapazes de ou não desejaram explicar suas realizações a outros. A apresentação é um trabalho de venda. O engenheiro, quando expõe uma nova solução à administração, à gerência ou a pessoas da supervisão, está tentando vender ou provar-lhes que sua solução é a melhor. A menos que isso possa ser feito com êxito, o tempo e o esforço despendidos para obter tal solução foram desperdiçados. Quando projetistas vendem uma nova idéia, eles o fazem a si mesmos. Se obtêm êxito repetidamente em vender idéias, projetos e novas soluções à administração, passam a receber aumentos de salário e promoções; de fato, esse é o caminho para alguém ser bem-sucedido em sua profissão.

Considerações de Projeto

Às vezes, a resistência requerida de um elemento em um sistema é um fator importante na determinação da geometria e das dimensões desse elemento. Em tal situação, dizemos que a *resistência* é uma consideração importante de projeto. Quando utilizamos a expressão *consideração de projeto*, estamos nos referindo a alguma característica que influencia o projeto do elemento ou, talvez, o sistema inteiro. Comumente, uma boa quantidade de tais características deve ser considerada em uma dada situação de projeto. Muitas das características importantes são como as que seguem (não necessariamente em ordem de importância):

1 Funcionalidade
2 Resistência/tensão
3 Distorção/deflexão/rigidez
4 Desgaste
5 Corrosão
6 Segurança
7 Confiabilidade
8 Fabricabilidade
9 Utilidade
10 Custo
11 Fricção
12 Peso
13 Vida
14 Barulho
15 Estilo
16 Forma
17 Tamanho
18 Controle
19 Propriedades térmicas
20 Superfície
21 Lubrificação
22 Mercantilidade
23 Manutenção
24 Volume
25 Responsabilidade
26 Refabricação/recuperação de recursos

Algumas dessas características têm a ver diretamente com as dimensões, o material, o processamento e a junção dos elementos do sistema. Outras considerações afetam a configuração do sistema total. Direcionaremos nossa atenção para esses fatores e para outras considerações ao longo de todo o livro.

Nesta obra, você irá se deparar com muitas situações de projeto nas quais os fundamentos de engenharia deverão ser aplicados, geralmente em uma abordagem matemática, para solucionar o(s) problema(s). Isso é correto e apropriado em um ambiente acadêmico, no qual a necessidade é realmente utilizar esses fun-

damentos na resolução de problemas profissionais. Para manter a perspectiva correta, contudo, deve ser observado que em muitas situações de projeto as considerações mais importantes são tais que nenhum cálculo ou experimentos são necessários para definir um elemento ou sistema. Os estudantes, em especial, costumam ficar frustrados em situações nas quais é virtualmente impossível efetuar cálculos e uma decisão importante de projeto deve ser tomada. Essas não são ocorrências de exceção, elas acontecem todos os dias. Suponha ser desejável, de um ponto de vista de vendas – por exemplo, em maquinaria de laboratório médico –, criar uma impressão de grande resistência e durabilidade. Peças grossas montadas com parafusos muito grandes, maiores que o usual, podem ser utilizadas para criar uma máquina que pareça resistente. Às vezes, máquinas ou peças de maquinaria são projetadas puramente de um ponto de vista estilístico, e nada mais. Mencionamos tudo isso para que você não seja induzido a pensar que existe apenas a abordagem matemática racional para todas as decisões de projeto.

1-4 Ferramentas de Projeto e Recursos

Atualmente, os engenheiros contam com uma grande variedade de ferramentas e recursos para assisti-los na solução de problemas de projeto. Microcomputadores baratos e pacotes de programas robustos provêem ferramentas de imensa capacidade para o projeto, a análise e a simulação de componentes mecânicas. Além dessas ferramentas, os engenheiros sempre necessitam de informação técnica, seja na forma de ciência básica/comportamento de engenharia ou na de características de componentes específicas de catálogo. Aqui, os recursos podem variar desde livros-texto de ciência/engenharia até brochuras de fabricantes ou catálogos. Também o computador desempenha um papel relevante na coleta de informações.[1]

Ferramentas Computacionais

Programas de *projeto auxiliado por computador* (CAD) permitem o desenvolvimento de projetos tridimensionais (3D) a partir dos quais visualizações ortográficas bidimensionais convencionais com dimensionamento automático podem ser produzidas. Os passos das ferramentas de manufatura podem ser gerados a partir dos modelos 3D; além disso, em alguns casos, peças podem ser criadas diretamente de uma base de dados 3D, mediante o emprego de um método de prototipagem rápida e de manufatura (estereolitografia) – *manufatura sem papel*! Uma outra vantagem de uma base de dados tridimensional é que ela permite cálculos rápidos e precisos das propriedades de massa, tais como massa, localização do centro de gravidade e momentos de inércia das massas. Outras propriedades geométricas, como áreas e distâncias entre pontos, são provavelmente obtidas de maneira fácil. Há diversos pacotes de programas de CAD disponíveis, tais como Aries, AutoCAD, CadKey, I-Deas/Unigraphics e ProEngineer, para mencionar apenas alguns.

O termo *engenharia auxiliada por computador* (CAE) geralmente se aplica a *todas* as aplicações de engenharia relacionadas a computador. Com essa definição, o CAD pode ser considerado um subconjunto da CAE. Alguns pacotes de programas de computador realizam a análise específica de engenharia e/ou tarefas de simulação que auxiliam o projetista, mas não são considerados ferramentas para a *criação* do projeto da mesma maneira que o CAD. Tais programas ajustam-se em duas categorias: a dos fundamentados na engenharia e a dos não-específicos dela. Alguns exemplos de programas fundamentados na engenharia, para aplicações de engenharia mecânica – programas que podem também ser integrados dentro de um sistema CAD –, incluem o seguinte: programas de análise de elemento finito (FEA) para análise de tensão e deflexão, vibração e transferência de calor (p. ex., Algor, ANSYS e MSC/NASTRAN); programas de dinâmica dos fluidos computacional (CFD) para análise de fluxo de fluido e simulação (p. ex., CFD++, FIDAP e Fluent); e programas para simulação da força dinâmica e do movimento em mecanismos (p. ex., ADAMS, DADS e Working Model).

Exemplos de aplicações auxiliadas por computador não-específicas da engenharia incluem o seguinte: programas para processamento de palavras; programas de planilhas (p. ex., Excel, Lotus e Quattro-Pro); e solucionadores matemáticos (p. ex., Maple, MathCad, Matlab, Mathematica e TKsolver).

Seu instrutor é a melhor fonte de informação a respeito dos programas disponíveis; ele pode recomendar aqueles que são úteis para tarefas específicas. *Uma advertência, contudo*: programas de computador não são um substituto para o processo de pensamento humano. *Você* é o condutor aqui; o computador é o veículo para assisti-lo em sua jornada em busca de uma solução. Os números gerados por um computador poderão estar distantes da verdade se você der entrada a um registro incorreto, se interpretar mal a aplicação ou

[1] Uma discussão ampla e excelente do processo de "coleta de informações" pode ser encontrada no Capítulo 4 de George E. Dieter, *Engineering Design, A Materials and Processing Approach*, 3ª ed., McGraw-Hill, New York, 2000.

FAC ENGENHARIA
Biblioteca Clorindo Burnier

o resultado do programa, se este contiver erros, etc. É sua responsabilidade assegurar a validade dos resultados; portanto, seja cauteloso ao verificar a aplicação e os resultados, realize testes de verificação ao submeter problemas com soluções conhecidas e verifique o fabricante do programa, bem como boletins de grupos de usuários.

Adquirindo Informação Técnica

Atualmente vivemos no que se convencionou chamar de *era da informação* – uma época em que a informação é gerada a uma velocidade estarrecedora. É difícil, mas extremamente importante, manter-se informado acerca dos desenvolvimentos do passado e do presente em seu campo de estudo e em sua ocupação. A nota de rodapé da página anterior é uma leitura altamente recomendada ao engenheiro de projetos sério e criterioso. A seguir, algumas fontes de informação:

- *Bibliotecas (comunitária, universitária e particular).* Dicionários de engenharia e enciclopédias, livros-texto, monografias, manuais, serviços de indexação e resumo, periódicos, traduções, relatórios técnicos, patentes e fontes/brochuras/catálogos de negócios.
- *Fontes governamentais.* Departamentos de Defesa, Comércio, Energia e Transporte; NASA; Imprensa Governamental; Departamento de Patentes e Comércio; Serviço Nacional de Informação Técnica; e Instituto Nacional de Patentes e Tecnologia.
- *Sociedades profissionais.* American Society of Mechanical Engineering, Society of Manufacturing Engineers, Society of Automotive Engineers, American Society for Testing and Materials e American Welding Society.
- *Vendedores comerciais.* Catálogos, literatura técnica, dados de ensaios, amostras e informação sobre custo.
- *Internet.* O meio de acesso, na rede de computadores, às páginas associadas à maioria das categorias supracitadas.

A lista não está completa. O leitor deve regularmente explorar as várias fontes de informação e manter um registro do conhecimento adquirido.

1-5 Responsabilidades Profissionais do Engenheiro de Projeto

Em geral, o engenheiro de projeto tem de satisfazer às necessidades dos clientes (gerência, clientes, consumidores, etc.) – e espera-se que o faça de maneira competente, responsável, ética e profissional. Muito do trabalho desenvolvido no curso de Engenharia e da experiência prática enfoca a competência; quando, porém, se deve começar a desenvolver responsabilidade de engenharia e profissionalismo? Para ingressar na rota do sucesso, você deverá desenvolver essas características cedo em seu programa educacional. É necessário cultivar sua ética de trabalho profissional e habilidades de processo antes da graduação, de modo que, quando der início à sua carreira formal em engenharia, você esteja preparado para enfrentar os desafios.

Ainda que não seja óbvio para alguns estudantes, as habilidades de comunicação desempenham aqui um importante papel, e é sábio aquele que trabalha continuamente para aperfeiçoá-las – *mesmo que elas não sejam um requisito direto do curso!* O sucesso em engenharia (conquistas, promoções, aumentos salariais, etc.) pode em grande parte dever-se à competência; no entanto, se você não conseguir comunicar suas idéias clara e concisamente, sua proficiência técnica poderá estar comprometida.

Você pode começar a desenvolver suas habilidades de comunicação mantendo um diário claro de suas atividades, fazendo registros datados freqüentemente. (Muitas empresas exigem que seus engenheiros mantenham um diário, devido a preocupações com patentes e responsabilidades.) Diários separados devem ser usados para cada projeto (ou tema de curso). Quando iniciar um projeto ou problema, no estágio de definição, faça registros no diário com bastante freqüência. Outras pessoas, bem como você mesmo, poderão mais tarde questionar a razão de algumas de suas decisões. Bons registros cronológicos tornarão mais fácil explicá-las quando preciso.

Muitos estudantes de Engenharia vêem a si mesmos, após a graduação, como engenheiros de projeto elaborando, desenvolvendo e analisando produtos e processos, de modo que consideram a necessidade de boas habilidades de comunicação, seja oral ou escrita, algo secundário. Isso em muito distancia-se da verdade. A maioria dos engenheiros que exercem a profissão despende uma boa quantidade de tempo comunicando-se com outras pessoas, escrevendo propostas e relatórios técnicos, realizando apresentações e interagindo com equipes de suporte da engenharia e de outras áreas. Você dispõe de tempo, agora, para ampliar suas habilidades de comunicação. Quando lhe for dada uma tarefa de escrever ou fazer qualquer apresenta-

ção, seja ela técnica *ou não*, aceite-a entusiasticamente e se esforce por melhorar suas habilidades de comunicação. O tempo será bem empregado se você aprender as habilidades mencionadas desde já, e não apenas no trabalho.

Quando estiver trabalhando em um problema de projeto, é importante que você desenvolva uma abordagem sistemática. Uma atenção cuidadosa aos seguintes passos de atividades o ajudará a organizar sua técnica de preparação de soluções.

- *Entenda o problema.* A definição do problema é provavelmente o passo mais significativo no processo de projeto de engenharia. Leia cuidadosamente, entenda e refine o enunciado do problema.
- *Identifique os dados.* A partir do enunciado refinado do problema, descreva concisamente que informação é conhecida e relevante.
- *Identifique as incógnitas e formule a estratégia de solução.* Enuncie o que deve ser determinado, e em que ordem, objetivando chegar a uma solução para o problema. Esboce a componente ou o sistema sob investigação, identificando os parâmetros conhecidos e desconhecidos. Crie um diagrama de fluxo dos passos necessários para alcançar a solução final. Tais passos podem requerer o uso de diagramas de corpo livre; propriedades do material a partir de tabelas; equações dos princípios fundamentais, livros-texto ou manuais relacionando os parâmetros conhecidos e desconhecidos; diagramas obtidos experimental ou numericamente; ferramentas computacionais específicas, conforme discutido na Seção 1-4, etc.
- *Estabeleça todas as hipóteses e decisões.* Problemas reais de projeto geralmente não têm soluções únicas, ideais ou analíticas. Seleções – como a escolha de materiais, tratamentos térmicos, etc. – requerem decisões. Análises requerem hipóteses relacionadas à modelagem da componente real ou do sistema. Todas as assunções (hipóteses) e decisões devem ser identificadas e registradas.
- *Analise o problema.* Empregando sua estratégia de solução em conjunção com suas decisões e hipóteses, execute a análise do problema. Refira as fontes de todas as equações, tabelas, diagramas, resultados de programas, etc. Verifique a credibilidade de seus resultados. Verifique a ordem de magnitude, dimensionalidade, tendências, sinais, etc.
- *Avalie sua solução.* Avalie cada passo na solução, observando como mudanças na estratégia, nas decisões, nas hipóteses e na execução podem alterar os resultados – de maneira positiva ou negativa. Se possível, incorpore as mudanças positivas em sua solução final.
- *Apresente sua solução.* Eis o ponto no qual suas habilidades de apresentação são importantes. Aqui, você estará vendendo a si mesmo e suas habilidades técnicas. Se não explicar de forma habilidosa o que realizou, algo do seu trabalho ou todo ele poderá ser mal interpretado e rejeitado. Conheça seu público.

A fim de ser efetivo, todo profissional deve manter-se atualizado em seu campo de trabalho. O engenheiro de projeto pode satisfazer a esse requisito de diversas maneiras: sendo um membro ativo de uma ou mais sociedades profissionais, tais como a American Society of Mechanical Engineers (ASME), a Society of Automotive Engineers (SAE), a Society of Manufacturing Engineers (SME), etc.; participando de encontros, conferências e seminários promovidos por sociedades, fabricantes, universidades, etc.; realizando cursos específicos de graduação ou programas em universidades; efetuando uma leitura regular de revistas técnicas e profissionais, etc. A educação de um engenheiro não termina na graduação.

As obrigações profissionais de um engenheiro de projeto incluem conduzir atividades de forma ética. Reproduzimos aqui a *Doutrina dos Engenheiros*, extraída da National Society of Professional Engineers (NSPE):

Como engenheiro, dedico meu conhecimento e minha habilidade profissional para a melhoria e o avanço do bem-estar das pessoas.
Eu prometo:
Dar o máximo de desempenho;
Não participar de iniciativas que não sejam honestas;
Viver e trabalhar de acordo com as leis e os padrões mais elevados de conduta profissional;
Pôr o servir antes do lucro, a honra e a reputação da profissão antes das vantagens pessoais e o bem público acima de todas as outras considerações.
Eu, humildemente e com a ajuda de Deus, faço essa promessa.

Adotado pela National Society of Professional Engineers em junho de 1954.
Reproduzido com permissão.

1-6 Códigos e Padronizações

No passado, não havia qualquer padrão para parafusos, porcas e roscas de parafuso. Um fabricante produziria, digamos, parafusos de meia polegada (1,27 cm) com nove roscas por polegada; um outro utilizaria 12. Alguns fixadores tinham roscas de mão esquerda, sendo que algumas vezes os perfis de rosca diferiam entre si. Não era incomum, nos primórdios do automóvel, ver um mecânico dispor os fixadores em uma linha, à medida que estes eram desmontados, a fim de evitar a mistura dos mesmos durante a remontagem. Essa falta de padronização e uniformidade era custosa e ineficiente por várias razões. Não é de admirar que uma pessoa, insatisfeita e incapaz de encontrar um substituto para um fixador danificado, utilizasse, por vezes, um barbante ou arame para manter unidas as peças.

Um *padrão* é um conjunto de especificações para peças, materiais ou processos destinado a atingir uniformidade, eficiência e uma qualidade determinada. Um dos importantes propósitos de um padrão é pôr um limite no número de itens contido nas especificações, de modo a proporcionar um inventário razoável de ferramentas, tamanhos, formas e variedades.

Um *código (norma)* é um conjunto de especificações para análise, projeto, manufatura e construção de algo. O propósito de um código é atingir um grau especificado de segurança, eficiência e desempenho ou qualidade. É importante observar que códigos de segurança *não* implicam *segurança absoluta.* De fato, a segurança absoluta é impossível de ser obtida. Algumas vezes, uma situação inesperada pode ocorrer. Projetar um edifício para agüentar ventos de 120 km/h não significa que os projetistas imaginem que um vento de 140 km/h seja impossível; significa simplesmente que eles o consideram altamente improvável.

Todas as organizações e sociedades listadas a seguir estabeleceram especificações para padrões e segurança ou códigos de projeto. O nome de cada organização dá uma idéia da natureza do padrão ou código. Alguns dos padrões e códigos, assim como os endereços, podem ser obtidos em bibliotecas públicas. As organizações de interesse dos engenheiros mecânicos são as seguintes:

Aluminum Association (AA)
American Gear Manufacturer Association (AGMA)
American Institute of Steel Construction (AISC)
American Iron and Steel Institute (AISI)
American National Standards Institute (ANSI)[2]
American Society for Metals (ASM)
American Society of Mechanical Engineers (ASME)
American Society of Testing and Materials (ASTM)
American Welding Society (AWS)
American Bearing Manufacturers Association (ABMA)[3]
British Standards Institution (BSI)
Industrial Fasteners Institute (IFI)
Institution of Mechanical Engineers (I. Mech. E.)
International Bureau of Weights and Measures (BIPM)
International Standards Organization (ISO)
National Institute for Standards and Technology (NIST)[4]
Society of Automotive Engineers (SAE)

1-7 Economia

A consideração de custo é tão importante no processo de decisão de projeto que poderíamos facilmente despender tanto tempo no seu estudo quanto no do assunto integral de projeto. Introduziremos aqui apenas alguns enfoques gerais e regras simples.

Primeiramente, observe que nada pode ser afirmado em um sentido absoluto, no que concerne a custos. Materiais e mão-de-obra geralmente apresentam um custo crescente a cada ano. Todavia, pode-se esperar que os custos de processamento dos materiais apresentem uma tendência de queda devido ao uso de máquinas automáticas e robôs. O custo de fabricação de um único produto poderá variar de cidade para cidade

[2] Em 1966, a American Standards Association (ASA) mudou seu nome para United States of America Standards Institute (USAS). Posteriormente, em 1969, esse nome foi mudado novamente para American National Standards Institute, como mencionado acima, o qual permanece até hoje. Isso significa que você poderá eventualmente encontrar padronizações da ANSI designadas por ASA ou USAS.

[3] Em 1993, a Anti-Friction Bearing Manufacturers Association (AFBMA) mudou seu nome para American Bearing Manufacturers Association (ABMA).

[4] Antiga National Bureau of Standards (NBS).

e de uma fábrica para outra, em decorrência dos encargos, da mão-de-obra, das taxas e diferenças de frete, bem como das pequenas, mas inevitáveis, variações de manufatura.

Tamanhos Padronizados

O uso de tamanhos padronizados ou de estoque é um princípio primário de redução de custo. O engenheiro que especificar uma barra de aço AISI 1020 laminada a quente, de secção transversal quadrada, com 53 mm de lado – denominada quadrado laminado a quente –, terá adicionado custo ao produto, uma vez que quadrados de 50 ou 60 mm de lado, sendo ambos os tamanhos preferenciais, solucionariam o problema com igual eficiência. O tamanho de 53 mm pode ser obtido por meio de encomenda especial, ou pela laminação ou usinagem de um quadrado de 60 mm de lado; no entanto, essas alternativas acarretam mais custos ao produto. Para assegurar-se de que tamanhos padronizados ou preferenciais sejam especificados, os projetistas devem ter acesso às listas de estoque dos materiais que utilizam. Tais listas estão disponíveis em bibliotecas ou podem ser obtidas diretamente dos fornecedores.

Uma palavra a mais de cautela, no que diz respeito à seleção de tamanhos preferenciais, faz-se necessária. Embora muitos tamanhos sejam normalmente listados em catálogos, eles não estão disponíveis de imediato. Alguns são utilizados com tão pouca freqüência que nem são estocados. Um pedido de urgência por tais tamanhos pode significar mais despesas e atraso. Assim, você deverá também ter acesso a uma ou mais listas – como aquelas apresentadas na Tabela A-17 – para tamanhos preferenciais em polegadas e milímetros.

Há muitas peças compradas – motores, bombas, mancais e fixadores – que são especificadas por projetistas. Também no caso dessas componentes, você deverá fazer um esforço extra para especificar peças que estejam disponíveis de imediato. Peças fabricadas e vendidas em grandes quantidades geralmente custam um pouco menos que componentes de tamanhos incomuns. O custo de mancais de rolamentos, por exemplo, depende mais da quantidade produzida pelo fabricante do que do tamanho do mancal.

Tolerâncias Grandes

Dentre os efeitos das especificações de projeto sobre os custos, talvez aqueles relacionados às tolerâncias sejam os mais significativos. As tolerâncias de projeto influenciam a produtibilidade do produto final de muitas maneiras; tolerâncias restritas podem requerer passos adicionais de processamento ou, ainda, render uma peça cuja produção é completamente inviável do ponto de vista econômico. As tolerâncias abrangem as variações dimensionais e o intervalo de rugosidade superficial, além da variação nas propriedades mecânicas resultantes de tratamentos térmicos e outras operações de processamento.

Na medida em que peças com grandes tolerâncias podem freqüentemente ser produzidas por máquinas com taxas de produção maiores, os custos de mão-de-obra são menores do que seriam se trabalhadores qualificados fossem requeridos para isso. Ademais, menos dessas peças serão rejeitadas no processo de inspeção, e elas geralmente são mais fáceis de montar.

Ponto de Equivalência

Algumas vezes, quando dois ou mais procedimentos de projeto são comparados quanto ao custo, a escolha entre ambos depende de um conjunto de condições, tais como a quantidade de produção, a velocidade das linhas de montagem, etc. Surge, então, um ponto que corresponde a custos iguais, denominado *ponto de equivalência.*

A título de exemplificação, considere uma situação em que uma determinada peça pode ser manufaturada a uma razão de 25 por hora, em uma máquina de fuso automático, ou de 10 por hora, em uma máquina de fuso manual. Suponhamos, também, que o tempo de ajuste para a máquina automática seja de três horas e que o custo de mão-de-obra para ambas as máquinas seja de 20 dólares a hora, incluindo os encargos. A Figura 1-4 é um gráfico do custo *versus* a produção pelos dois métodos. O ponto de equivalência corresponde a 50 peças. Se a produção desejada for maior que isso, a máquina automática deve ser utilizada.

Estimativas de Custo

Há várias maneiras de obter figuras relativas de custo, de modo que dois ou mais projetos podem, *grosso modo*, ser comparados. Uma certa dose de julgamento pode ser requerida em alguns casos. Por exemplo, podemos confrontar o valor relativo de dois automóveis comparando o custo em dólares por grama de peso. Uma outra forma de comparar o custo de dois projetos é simplesmente contar o número de peças. É provável que aquele com o menor número de peças custe menos. Muitas outras estimativas de custo podem ser utilizadas,

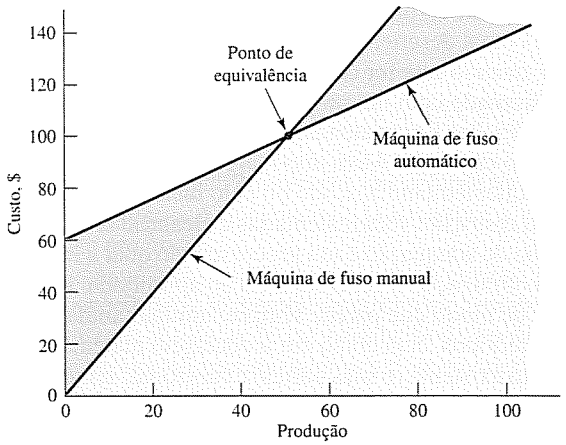


Figura 1-4 Um ponto de equivalência.

dependendo da aplicação, tais como área, volume, potência em cavalos, torque, capacidade, velocidade, além de várias razões de desempenho.

1-8 Segurança e Responsabilidade do Produto

O conceito de *responsabilidade estrita* para a responsabilidade do produto geralmente prevalece nos Estados Unidos. Ele estabelece que o fabricante de um artigo é responsável por qualquer dano ou ferimento que aconteça em decorrência de um defeito, não importando se sabia a respeito desse defeito ou se de fato pudesse ter conhecimento do mesmo. Por exemplo, suponha que um artigo tenha sido fabricado, digamos, há 10 anos. Suponha, também, que naquele tempo ele pudesse não ser considerado defeituoso, com base em todo o conhecimento tecnológico disponível então. Dez anos mais tarde, de acordo com o conceito de responsabilidade estrita, o fabricante ainda é responsável por ele. Portanto, segundo tal conceito, o reclamante necessita apenas provar que o artigo era defeituoso e que o defeito lhe causou algum dano ou ferimento. A negligência do fabricante não precisará ser provada.

Um dos assuntos delicados que eventualmente afloram na prática da engenharia é o que fazer quando você detecta algo que considera de baixa qualidade. Se possível, naturalmente, você deve tentar corrigi-lo ou, então, realizar testes suficientes para provar que seus receios são infundados. Se nenhuma dessas abordagens for exeqüível, então um outro procedimento consistirá em colocar um memorando no arquivo de projeto e manter uma cópia do mesmo em casa, caso o original "desapareça". Ainda que esse procedimento possa protegê-lo, poderá também fazer com que você seja preterido em sua promoção, ou mesmo demitido. A longo prazo, se você realmente tiver a forte sensação de que a qualidade da engenharia deixa a desejar, e se de fato não puder conviver com isso, considere então transferir-se ou mesmo buscar uma nova posição.

As melhores abordagens para a prevenção de responsabilidade pelo produto são uma engenharia satisfatória, tanto em análise como em projeto, controle de qualidade e procedimentos claros de teste. Gerentes de propaganda costumam fazer promessas desmedidas na garantia e na literatura de venda de um produto. Essas afirmações devem ser revistas cuidadosamente pelo grupo de engenharia, para eliminar promessas excessivas e inserir avisos adequados e instruções de uso.

Vários livros, todos do mesmo autor,[5] podem ser úteis nesse ponto, de modo que você poderá desejar consultá-los periodicamente no futuro.

1-9 Avaliação de Adequação

Uma avaliação de adequação foi definida na Seção 1-2, juntamente com outros conceitos úteis no projeto de engenharia mecânica. Trata-se de uma idéia tão útil e importante que também é referida como *habilidade* 1

[5] L. J. Kamm, *Successful Engineering: A Guide to Achieving Your Career Goals*, McGraw-Hill, New York, 1989; *Real World Engineering: A Guide to Achieving Career Success*, IEEE Press, New York, 1991; *Understanding Electro-Mechanical Engineering: An Introduction to Mechatronics*, IEEE Press, New York, 1996; e *Designing Cost-Efficient Mechanisms*, Society of Automotive Engineers, Warrentown, Pa., 1993.

– a habilidade primordial do projetista. Uma tal avaliação inicia com o conjunto de especificações de um projeto simples ou com a descrição completa do projeto (desenhos de montagem, desenhos de detalhes e a lista de materiais), quando este for complexo.

Quando confrontado com um projeto acabado (todas as decisões tomadas), o projetista deve perguntar-se se todas as restrições foram atendidas de um modo que corresponde ou excede às expectativas, ou que então fique aquém do esperado. Além disso, algum critério é utilizado para examinar o mérito, sendo que o melhor mérito é freqüentemente buscado ou pelo menos aproximado. Uma avaliação de adequação corresponde a julgar se as restrições foram atendidas e alcançadas de maneira ótima.

Uma avaliação de adequação é um processo pelo qual a informação é coletada e utilizada para decidir se as restrições e a otimização receberam atenção apropriada. Ela pode variar em algum(ns) detalhe(s), dependendo do caso, de modo que parece sempre familiar, ainda que um tanto diferente. Consiste em vários passos empíricos e teóricos, bem como em modelagem matemática – idéias que um engenheiro utiliza para decidir se um projeto existente (e suas partes) é funcional, seguro, confiável e assim por diante. Uma avaliação de adequação é composta de idéias simples. É possível familiarizar-se com o processo desenvolvendo algumas partes do mesmo e analisando situações cada vez mais complexas – logo, obtendo-se proficiência.

Comece perguntando a si próprio se cada uma das 26 considerações de projeto listadas na Seção 1-3 é satisfeita de forma adequada, presumindo que todas sejam aplicáveis. Por exemplo, ao considerar o item 2, resistência/tensão, as seguintes questões são úteis:

- Que resistência (última, à tração, ao escoamento, à fadiga, à fluência, etc.) se aplica?
- Que tensão (de tração, de cisalhamento, principal, de von Mises, etc.) se aplica?
- Que par de tensão e resistência é mais revelador da integridade funcional e que localidade(s) é(são) crítica(s)?
- Com que precisão são conhecidas a resistência e a tensão?
- Quanto de uma diferença entre tensão e resistência é "suficiente"?

De maneira semelhante, os itens restantes na lista de considerações são então examinados.

Uma avaliação de adequação efetiva identifica as questões a serem perguntadas, elucida as estimativas quantitativas das respostas, inclui modelagem matemática e considera a compatibilidade com a natureza e o mercado. Assim como com qualquer habilidade intelectual, a proficiência é o resultado de se começar simplesmente com exemplos e problemas de treinamento em aplicações, prosseguindo com exercícios que demandem estimativas específicas em situações novas para o estudante. O objetivo final é cultivar o conhecimento, o julgamento, a proficiência e a consistência da pessoa.

A avaliação de adequação aproveita análises de cursos anteriores, sem, no entanto, respeitar a especificidade dos mesmos. O que você escolher utilizar dependerá de suas metas. Além disso, o curso seguido por este livro não é uma exceção; fundamenta-se em muitas raízes disciplinares da experiência educacional prévia do leitor. Os problemas iniciais são mais simples, de modo que é fácil verificar o que é importante e delinear uma avaliação de adequação com lápis e papel. À medida que avançar na leitura e adquirir experiência, é útil rever problemas anteriores, para ver se você ainda trabalharia com eles da mesma maneira. Seu instrutor é a chave para lidar com as muitas questões e detalhes que envolvem a habilidade 1. Consulte-o à medida que aprender a empregar essa habilidade e a aplicá-la a situações desenvolvidas neste livro, ou se estiver indo em uma direção diferente, conforme necessário aos objetivos do curso.

1-10 Incerteza

São muitas as incertezas em projeto de máquinas. Alguns exemplos relativos à tensão e à resistência incluem o seguinte:

- Composição do material e efeito da variação nas propriedades.
- Variação nas propriedades de ponto a ponto, no interior de uma barra em estoque.
- Efeitos do processamento local, ou nas proximidades, sobre as propriedades.
- Efeitos de montagens próximas, tais como soldagens e ajustes por contração em condições de tensão.
- Efeito de tratamento termomecânico sobre as propriedades.
- Intensidade e distribuição de carregamento.
- Validade de modelos matemáticos utilizados para representar a realidade.
- Intensidade de concentrações de tensão.

- Influência do tempo na resistência e na geometria.
- Efeito de corrosão.
- Efeito de desgaste.
- Incerteza quanto a qualquer lista de incertezas.

Os engenheiros devem se adaptar à incerteza, que sempre acompanha a mudança. As propriedades dos materiais, a variabilidade de carga, a fidelidade de fabricação e a validade dos modelos matemáticos estão entre as preocupações dos projetistas.

Existem métodos matemáticos para considerar as incertezas. A técnica primária constitui-se nos métodos determinísticos e estocásticos. O método determinístico estabelece um *fator de projeto (fator de segurança)* baseado em incertezas absolutas de um parâmetro de perda de função (que poderia ser a carga que provoca a falha) e de um parâmetro máximo admissível (que poderia ser a carga máxima permissível). Aqui, o fator de projeto, n_d, é definido como

$$n_d = \frac{\text{parâmetro de perda de função}}{\text{parâmetro máximo admissível}} \tag{1-1}$$

Se o parâmetro for a carga, então a *carga máxima admissível* poderá ser encontrada a partir de

$$\text{Carga máxima admissível} = \frac{\text{carga de perda de função}}{n_d} \tag{1-2}$$

EXEMPLO 1-1

Considere que a carga máxima em uma estrutura é conhecida com uma incerteza de ±20% e que a carga causadora de falha é conhecida com uma incerteza de ±15%. Se a carga que causa falha é nominalmente de 2000 lbf, determine o fator de projeto e a carga máxima admissível que compensará as incertezas absolutas.

Solução

Para levar em conta sua incerteza, a carga de perda de função deve ser aumentada para 1/0,85, ao passo que a carga máxima admissível deve ser diminuída para 1/1,2. Logo, para compensar as incertezas absolutas, o fator de projeto deve ser

Resposta

$$n_d = \frac{1/0{,}85}{1/1{,}2} = 1{,}4$$

A partir da Equação (1-2), a carga máxima admissível deve ser

Resposta

$$\text{carga máxima admissível} = \frac{2000}{1{,}4} = 1400 \text{ lbf}$$

Os métodos estocásticos são baseados na natureza estatística dos parâmetros de projeto e enfocam a probabilidade de sobrevida da função de projeto (isto é, a confiabilidade). O Capítulo 2 contém o material de formação sobre estatística aplicada a projeto.

1-11 Tensão e Resistência

A sobrevivência de muitos produtos depende do modo como o projetista ajusta as tensões máximas em uma componente, para que elas sejam menores que a resistência desta em locais específicos de interesse. O projetista deve permitir que a tensão máxima seja menor que a resistência por uma margem suficiente, para que a ocorrência de falha seja o mais próxima de zero, mesmo com todas as incertezas possíveis.

Ao focalizar a comparação tensão-resistência em um local crítico, freqüentemente procuramos a "resistência na geometria e na condição de uso". Resistências são tensões nas quais algo de interesse ocorre, tal como o limite de proporcionalidade, o escoamento de 0,2% de deformação ou a fratura. Em muitos casos, tais eventos representam o nível de tensão em que ocorre perda de função.

Resistência é uma *propriedade* de um material ou de um elemento mecânico. A resistência de um elemento depende da escolha, do tratamento e do processamento do material. Considere, por exemplo, um car-

regamento de molas. Podemos associar uma resistência a uma mola específica. Quando essa mola é incorporada a uma máquina, forças externas são aplicadas, resultando em tensões induzidas pelas cargas na mola, cujas magnitudes dependem de sua geometria, mas são independentes do material e de seu processamento. Se a mola for removida da máquina sem que esteja danificada, a tensão devida às forças externas irá retornar a zero. No entanto, a resistência se mantém como uma das propriedades da mola. Lembre-se, então, de que a *resistência é uma propriedade inerente de uma peça*, uma propriedade intrínseca à mesma pelo uso de um determinado material e de um processo.

Vários processos de conformação e tratamento térmico de metais, como forjamento, laminação e conformação a frio, causam variações na resistência de ponto a ponto no interior da peça. É bastante provável que a mola supracitada tenha uma resistência na parte externa das espiras diferente de sua resistência na parte interna, uma vez que foi fabricada por meio de um processo de enrolamento a frio e que os dois lados podem não ter sido deformados da mesma maneira. Portanto, lembre-se de que um valor de resistência dado a uma peça pode se aplicar a um ponto particular apenas ou a um conjunto de pontos da mesma.

Neste livro, utilizaremos a letra maiúscula S para denotar resistência, com marcas apropriadas e subscritos para o tipo de resistência. Assim, S_s é uma resistência a cisalhamento; S_y, uma resistência a escoamento; S_u, um limite de resistência (resistência última); e $\bar{S}$, uma tensão média obtida por meio de uma amostragem de dados de ensaio.

De acordo com a prática aceita em engenharia, utilizaremos as letras gregas σ (sigma) e τ (tau) para designar as tensões normais e de cisalhamento, respectivamente. Uma vez mais, determinadas marcas e subscritos indicarão algumas características especiais. Por exemplo, σ_1 é uma tensão principal; σ_y, uma componente de tensão na direção y; e σ_r, uma componente de tensão na direção radial.

Tensão é uma *propriedade de estado* de um corpo, que é uma função da carga, da geometria, da temperatura e do processo de manufatura. Em um curso elementar de mecânica de materiais, a tensão relacionada à carga e à geometria é enfatizada com alguma discussão das tensões térmicas. Contudo, as tensões decorrentes de tratamentos térmicos, moldagem, montagem, etc., são também importantes e às vezes desprezadas.

Um dos problemas básicos encontrados ao se lidar com tensão e resistência está no modo como relacionar ambas a fim de desenvolver um projeto seguro, econômico e eficiente. Ao estudar esse problema, será útil examinar tal relacionamento de acordo com a forma como ele se aplica a um ramo particular do projeto mecânico. O American Institute of Steel Construction (AISC), fundado em 1921, é uma sociedade sem fins lucrativos, cujos objetivos são melhorar e levar adiante o uso de aço estrutural fabricado. Para atingir esses objetivos, o AISC publica manuais, livros-texto, especificações e livretos técnicos. O mais conhecido e amplamente utilizado deles é o *Manual of Steel Construction Allowable Stress Design (ASD)*,[6] que ocupa uma posição de destaque na literatura de engenharia. Padrões importantes incluídos nesse manual são a *Specification for the Design, Fabrication and Erection of Structural Steel for Buildings* e o *Code of Standard Practice for Steel Buildings and Bridges*.

A Tabela 1-1 lista resistências mínimas ao escoamento S_y e à tração S_u para certos aços da ASTM, como dado nas especificações do AISC. Nessa tabela, S_y representa tanto o ponto de escoamento mínimo, caso o material tenha um, como a mínima resistência ao escoamento.

O padrão ANSI-ASTM B483-78 define a resistência mínima como segue:

> **A2.1** Os limites das propriedades mecânicas padronizadas para os intervalos respectivos de tamanho são baseados em uma análise de dados provenientes de material de produção padronizada e são estabelecidos a um nível no qual pelo menos 99% da população de valores, obtidos de todo o material padronizado na gama de tamanhos, satisfazem ao valor estabelecido.

Muitos leitores podem preferir qualificar o *mínimo* utilizando sempre o adjetivo *ASTM*, como em *resistência mínima ASTM*. A palavra *mínimo* não qualificada pode ser enganosa, uma vez que existe uma chance de até 1% de que os materiais envolvidos possam ter uma resistência menor que o mínimo ASTM.

Para assegurar que materiais que apresentam essas resistências mínimas sejam realmente utilizados em construção, a especificação AISC estabelece o seguinte:

> Relatórios de ensaios de usinas certificadas ou relatórios certificados de ensaios feitos pelo fabricante ou pelo laboratório de ensaio, em consonância com a ASTM A6 ou A568 – a que for aplicável ao caso –, bem como a especificação em vigor, constituirão evidência suficiente de conformidade com um dos padrões da ASTM. Além disso, o fabricante deverá, caso requerido, prover uma declaração escrita e juramentada de que o aço estrutural fornecido atende aos requisitos do grau especificado.

[6] Atualmente em sua oitava edição; novas edições são publicadas periodicamente.

Tabela 1-1 Resistências mínimas especificadas de certos aços da ASTM

Tipo de aço	ASTM Nº	S_y, kpsi	S_u, kpsi	Tamanho, in, até
Carbono	A36	36	58	8
Carbono	A529	42	60	$\frac{1}{2}$
Baixa liga	A572	42	60	6
Baixa liga	A572	50	65	2
Inoxidável	A588	50	70	4
Liga Q&T *	A514	100	110	$2\frac{1}{2}$

* N. de T.: Q&T (Quenching&Tempering) significa aço submetido aos tratamentos térmicos de têmpera e revenido.

O AISC vem desenvolvendo o método da tensão permissível, e a noção de fator de projeto não será envolvida. Observe, também, que a variabilidade em S não está descrita em nenhuma forma e que a confiabilidade não é mencionada.

Encontrar valores reduzidos constitui a primeira parte do procedimento do AISC. De acordo com o vocabulário utilizado por esse instituto, designamos a tensão normal admissível como σ_{all} e a tensão de cisalhamento admissível como τ_{all}. Assim, a relação entre as tensões admissíveis e as resistências mínimas especificadas utilizando o código AISC é definida como segue:

$$\begin{aligned} &\text{TRAÇÃO} && 0{,}45S_y \le \sigma_{all} \le 0{,}60S_y \\ &\text{CISALHAMENTO} && \tau_{all} = 0{,}40S_y \\ &\text{FLEXÃO} && 0{,}60S_y \le \sigma_{all} \le 0{,}75S_y \\ &\text{SUPORTE} && \sigma_{all} = 0{,}90S_y \end{aligned} \tag{1-3}$$

A próxima parte do código AISC lida com a determinação das cargas e forças utilizadas para obter as tensões. O procedimento pode ser apresentado de forma sucinta pela equação

$$F = \sum W_d + \sum W_l + \sum KF_l + F_w + \sum F_{misc} \tag{1-4}$$

em que F é a força a ser utilizada na equação apropriada de tensão; ver Capítulo 4, por exemplo. As componentes dessa força são definidas como segue.

O termo $\sum W_d$ é a soma de todas as *cargas mortas*. Estas consistem no peso do aço, nos materiais fixados a ele e nas partes por ele suportadas.

O termo $\sum W_l$ é a soma de todas as *cargas vivas*, estacionárias ou estáticas. Estas incluem o peso de equipamento, os ocupantes, o mobiliário e a carga de neve, se especificada por um código aplicável.

A força ou a resultante das forças devida a equipamento que possa causar impacto ou carregamento dinâmico também é considerada carga viva e é representada pelo termo F_l. Esse fator deve ser multiplicado por um *fator de serviço* K obtido da Tabela 1-2.

O termo F_w na Equação (1-4) é a carga de vento na estrutura. Uma orientação apropriada para esse caso pode ser especificada por códigos regionais ou locais.

Tabela 1-2 Fatores de serviço do AISC para uso na Equação (1-4)

Para suportes de elevadores	$K = 2$
Para vigas de suporte de guindaste móvel de cabina de operação e suas conexões	$K = 1{,}25$
Para vigas de guindaste móvel de cabina pendente e suas conexões	$K = 1{,}10$
Para suportes de maquinaria leve, comandada por eixo ou por motor	$K \ge 1{,}20$
Para suportes de maquinaria de movimento alternado ou unidades de comando de potência	$K \ge 1{,}50$
Para estruturas de suporte de pavimento e balcão	$K = 1{,}33$

O termo $\sum F_{misc}$ deve ser incluído em alguns locais para levar em conta os efeitos de tremores de terra, furacões ou outras condições regionais extraordinárias.

O passo final no procedimento do AISC é selecionar dimensões para o membro a ser mensurado, de tal forma que a tensão de projeto, calculada a partir da força F, não exceda a tensão admissível, como dado pela Equação (1-3); em outras palavras, selecionar dimensões ou geometria de tal forma que

$$\sigma \leq \sigma_{all} \quad \text{ou} \quad \tau \leq \tau_{al} \tag{1-5}$$

em que σ e τ podem ser chamados de valores de projeto das tensões normal e de cisalhamento, respectivamente. Isso presume uma proporcionalidade linear entre carga e tensão.

Em suma, a Equação (1-3) define as tensões admissíveis como sendo as resistências mínimas especificadas, reduzidas por fatores de multiplicação que variam entre 40 e 90% para garantir segurança. A Equação (1-4) leva em conta todas as possíveis cargas, e os fatores de serviço na Tabela 1-2 fornecem um grau adicional de segurança para carregamento dinâmico. Essa é uma implementação do método da tensão permissível com a resistência caracterizada a um nível de 99%.

1-12 Fator de Projeto e Fator de Segurança

O método AISC para relacionar tensão e resistência também é utilizado em algumas outras áreas especializadas de projeto. Contudo, não constitui uma abordagem geral, pois considera apenas materiais específicos e carregamentos. No projeto de engenharia mecânica há categorias de situações que confrontam o engenheiro.

- O produto é feito em grandes quantidades, é valioso ou perigoso, justificando os ensaios elaborados dos materiais, componentes ou protótipos no campo.
- O produto é feito em quantidades suficientes para justificar um programa de ensaio modesto do material, talvez tão pequeno quanto ensaios de resistência à tração.
- O produto é feito em quantidades tão pequenas que nenhum ensaio dos materiais é realizado.

As duas últimas situações são as mais desafiadoras. Há também a pergunta para o produto defeituoso: Por quê? Como isso pode ser corrigido?

Um enfoque geral para o problema de carga admissível/carga de perda de função é o *método do fator de projeto*, algumas vezes chamado de método clássico de projeto.

A equação fundamental é a (1-2):

$$\text{Carga admissível} = \frac{\text{carga de perda de função}}{n_d}$$

em que n_d é denominado *fator de projeto.*[7] Para uma dada carga de perda de função, duplicar o fator de projeto faz cair à metade a carga admissível. Para que seja de máxima utilidade, essa propriedade deve persistir independentemente da linearidade, ou da falta desta, entre a tensão e a carga. A avaliação de adequação nos métodos de fator de projeto implica, em parte, estimar o *fator de segurança* do projeto completo. O fator de segurança n tem a mesma definição que o fator de projeto, mas difere numericamente devido ao arredondamento (em geral para cima) causado pela utilização de tamanhos padronizados e componentes saídas da prateleira.

Ao avaliar o fator de segurança de um elemento (p. ex., o dente de uma engrenagem) que pode falhar por fadiga flexional ou superficial, observamos que o dente tem um fator de segurança que protege contra a ocorrência da fadiga flexional e um outro fator de segurança que protege contra a fadiga superficial. Se esses fatores de segurança forem numericamente iguais a 1,5 e 1,3, respectivamente, então a fadiga superficial ocorrerá antes da fadiga flexional.

Quando Hooke descobriu o comportamento elástico das molas metálicas, o conceito introspectivo de tensão estava a 162 anos de seu surgimento. Tal conceito ofereceu a oportunidade de expressar o fator de projeto em termos de tensão. Com a invenção das máquinas de ensaio,[8] nas quais modos particulares de falha poderiam ser induzidos, os fatores de projeto vieram a ser expressos em termos de uma tensão e de uma resistência relevante, e expressões como

[7] Ver D. W. Lapedes, *Dictionary of Scientific and Technical Terms*, McGraw-Hill, New York, 1978, a respeito de *fator de segurança.*

[8] Musschenbrock (1729), Perronet (1768) e então Gauthey, Rondelet, Girard e Williams contribuíram. O primeiro a empregar a pressão hidráulica e a viga balanceada foi Lagerhjelm, em 1827. As características importantes são o controle do modo de falha durante a medição, a introdução da noção de resistência do material, verificada por ensaio, e o uso do conceito de tensão devido a Cauchy (1822).

FAC ENGENHARIA
Biblioteca Clorindo Burnier

$$n_d = \frac{S(\text{perda de função})}{\sigma(\text{admissível})} = \frac{\text{resistência}}{\text{tensão}} \tag{1-6}$$

tornaram-se possíveis. Para problemas de tensão de contato[9] em que as tensões não são linearmente proporcionais às cargas, a forma muda para

$$n_d = \left(\frac{\text{resistência}}{\text{tensão}}\right)^3 \qquad \text{para esferas em contato} \tag{1-7}$$

$$n_d = \left(\frac{\text{resistência}}{\text{tensão}}\right)^2 \qquad \text{para cilindros em contato} \tag{1-8}$$

refletindo a relação não-linear entre tensão e carga. Nas Equações (1-6) a (1-8), as resistências podem ser valores mínimos, de escoamento, de tração, de fadiga e de cisalhamento, bem como outras. Naturalmente, a tensão utilizada deve corresponder em tipo e unidades à resistência. Mais ainda, a tensão e a resistência devem se referir ao mesmo ponto.

A Equação (1-3) foi utilizada para levar em conta quaisquer incertezas concernentes à resistência real de um membro. A Equação (1-4) foi utilizada para levar em conta quaisquer incertezas relativas às cargas reais. O fator de projeto constante da Equação (1-6) é utilizado para considerar *ambas* as incertezas.

1-13 Confiabilidade

Nestes tempos de aumento constante do número de demandas legais e da necessidade de se conformar às regulações de agências governamentais como a EPA e a OSHA, nos Estados Unidos, é muito importante para o projetista e o fabricante saber a confiabilidade de seus produtos. O *método de confiabilidade* do projeto é aquele com o qual obtemos a distribuição de tensões e a de resistências e então as relacionamos a fim de atingir uma taxa de sucesso aceitável.

A medida estatística da probabilidade de que uma determinada componente mecânica não falhará durante seu uso é denominada *confiabilidade* desse elemento. A confiabilidade R pode ser expressa por um número que tem o intervalo

$$0 \leq R < 1 \tag{1-9}$$

A confiabilidade $R = 0{,}90$ significa que há 90% de chance de que a peça irá cumprir sua função de forma apropriada, sem falha. A falha de seis peças em mil fabricadas pode ser considerada uma razão de falha aceitável para uma certa classe de produtos. Esta representa uma confiabilidade de

$$R = 1 - \frac{6}{1000} = 0{,}994$$

ou 99,4%.

No *método de confiabilidade de projeto*, a tarefa do projetista é fazer uma seleção cuidadosa dos materiais, dos processos e da geometria (tamanho), visando a atingir uma meta de confiabilidade. Logo, se a confiabilidade objetivada é de 99,4%, como supramencionado, que combinação de materiais, processos e dimensões é necessária para atingir essa meta?

As análises que levam a uma avaliação de confiabilidade consideram as incertezas, ou suas estimativas, de acordo com os parâmetros que descrevem a situação. Variáveis estocásticas como tensão, resistência, carga ou tamanho são descritas quanto a suas médias, desvios-padrão e distribuições. Se mancais de esferas são produzidos por um processo de manufatura em que uma distribuição de diâmetros é criada, podemos dizer que, ao escolher uma esfera, há uma incerteza concernente ao seu tamanho. Se quisermos considerar o peso ou o momento de inércia em rolamento, essa incerteza quanto ao tamanho pode ser considerada *propagada* ao nosso conhecimento do peso ou da inércia. Há maneiras de estimar os parâmetros estatísticos que descrevem o peso e a inércia a partir daqueles que descrevem o tamanho e a densidade. Esses métodos são chamados de *propagação de erro*, *propagação de incerteza* ou *propagação de dispersão*. São parte integral das tarefas de análise ou síntese toda vez que a probabilidade de falha está envolvida.

O método do fator estocástico de projeto e o enfoque do método estocástico para projeto são relativamente novos, dado o escopo da história do projeto de máquinas. Temos registros históricos do comportamen-

[9] Ver Seção 4-21.

to de montagens de materiais e suas descrições estatísticas. Ao utilizá-los, o projetista pode proceder em direção a uma meta especificada de confiabilidade. Feito isso, os tamanhos geométricos das peças serão maiores do que quando o projetista tem apenas informação estocástica específica sobre o material que ele finalmente selecionou.

O enfoque estatístico oferece a oportunidade de considerar metas de confiabilidade e outras idéias que os métodos mais antigos não conseguiam. Se o carregamento a que a transmissão de um trator será submetida no campo é incerto, então barras de acoplamento de implementos agrícolas instrumentadas em estudos de campo produzirão informação que é melhor entendida sob interpretação estocástica do que determinística. A estatística permite a quantificação e a explicação da variação. A natureza é cheia de variabilidades individuais com regularidade em períodos longos. Estabilidade não significa unicidade de magnitude, mas de padrão de variação, uma mistura de efeitos sistemáticos e aleatórios. A estatística permite que esses efeitos sejam separados; ela se refere à variação e sua medida, às formas como os modelos descrevem dados e modelos de crítica de dados, bem como ao uso sensitivo de dados para esclarecer pontos obscuros.

1-14 Unidades e Unidades Preferenciais

Unidades

Na equação simbólica das unidades para a segunda lei de Newton, $F = ma$,

$$F = MLT^{-2} \tag{1-10}$$

F representa força; M, massa; L, comprimento; e T, tempo. As unidades escolhidas para *qualquer* tríade dessas quantidades são denominadas *unidades de base.* Após as três primeiras unidades terem sido escolhidas, a quarta unidade passa a se chamar *unidade derivada.* Quando força, comprimento e tempo são escolhidos como unidades de base, a massa é a unidade derivada e o sistema resultante é chamado de *sistema gravitacional de unidades.* Quando massa, comprimento e tempo são escolhidos como unidades de base, a força é a unidade derivada e o sistema que daí resulta se chama *sistema absoluto de unidades.*

Em alguns países de língua inglesa, o sistema *pé-libra-segundo* (fps), de uso costumeiro nos Estados Unidos, e o sistema *polegada-libra-segundo* (ips) são os dois sistemas gravitacionais-padrão mais utilizados pelos engenheiros. No sistema fps, a unidade de massa é

$$M = \frac{FT^2}{L} = \frac{(\text{libra-força})(\text{segundo})^2}{\text{pé}} = \text{lbf} \cdot \text{s}^2/\text{ft} = slug \tag{1-11}$$

Logo, comprimento, tempo e força são as três unidades de base no sistema gravitacional fps.

A unidade de tempo no sistema fps é o segundo, abreviado por s. A unidade de força no sistema fps é a libra, mais propriamente a *libra-força.* Raramente abreviamos essas unidades como lbf; a abreviação lb é permissível, visto que estaremos lidando somente com o sistema gravitacional costumeiro norte-americano. Em alguns ramos da engenharia é útil representar 1000 lbf como quilolibra e abreviá-lo como kip. Muitos autores acrescentam a letra "s" a kip para obter o plural, mas, para estar de acordo com a prática de usar somente formas singulares para unidades, não o faremos aqui. Assim, 1 kip e 3 kip são usados para designar 1000 e 3000 lbf, respectivamente. Por fim, notamos, na Equação (1-11), que a unidade derivada da massa no sistema gravitacional fps é lbf · s^2/ft, chamada um *slug*; não existe abreviação para *slug*.

A unidade de massa no sistema gravitacional ips é

$$M = \frac{FT^2}{L} = \frac{(\text{libra-força})(\text{segundo})^2}{\text{polegada}} = \text{lbf} \cdot \text{s}^2/\text{in} \tag{1-12}$$

As unidades lbf · s^2/in não têm nome oficial.

O Sistema Internacional de Unidades (SI) é um sistema absoluto. As unidades de base são o metro, o quilograma (para massa) e o segundo. A unidade de força é derivada mediante a segunda lei de Newton e é denominada *newton.* As unidades constituintes do newton (N) são

$$F = \frac{ML}{T^2} = \frac{(\text{quilograma})(\text{metro})}{(\text{segundo})^2} = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2 = \text{N} \tag{1-13}$$

O peso de um objeto é a força exercida sobre ele pela gravidade. Designando o peso por W e a aceleração devida à gravidade por g, obtemos

$$W = mg \tag{1-14}$$

No sistema fps, a gravidade-padrão é $g = 32{,}1740$ ft/s^2. Na maioria dos casos, esse valor é arredondado para 32,2. Assim, o peso de uma massa de 1 *slug* no sistema fps é

$$W = mg = (1\ slug)(32{,}2\ \text{ft/s}^2) = 32{,}2\ \text{lbf}$$

No sistema ips, a gravidade-padrão é 386,088, ou cerca de 386 in/s^2. Logo, nesse sistema, uma unidade de massa pesa

$$W = (1\ \text{lbf} \cdot s^2/\text{in})(386\ \text{in/s}^2) = 386\ \text{lbf}$$

Com unidades SI, a gravidade-padrão vale 9,806, ou cerca de 9,81 m/s^2. Logo, o peso de 1 kg massa vale

$$W = (1\ \text{kg})(9{,}81\ \text{m/s}^2) = 9{,}81\ \text{N}$$

Uma série de nomes e símbolos para formar múltiplos e submúltiplos das unidades SI foi estabelecida para fornecer uma alternativa à escrita de potências de 10. A Tabela A-1 inclui esses prefixos e símbolos.

Regras para Utilização das Unidades SI

O International Bureau of Weights and Measures (BIPM), a agência internacional de padronização para o sistema SI, estabeleceu certas regras e recomendações para o uso deste. Elas são destinadas a eliminar as diferenças existentes entre cada país no que concerne a práticas científicas e técnicas.

Grupos de Números

Os números com quatro ou mais dígitos são dispostos em grupos de três e separados por um espaço, em vez de uma vírgula. Contudo, o espaço pode ser omitido para o caso especial de números com quatro dígitos. Um ponto é utilizado como ponto decimal.* Essas recomendações evitam a confusão causada por alguns países europeus onde uma vírgula é utilizada como ponto decimal e pelo uso inglês de um ponto centralizado. Eis alguns exemplos de uso correto e incorreto:

1924 ou 1 924, mas não 1,924
0.1924 ou 0.192 4, mas não 0.192,4
192 423.618 50, mas não 192,423.61850

O ponto decimal deve sempre ser precedido de um zero para números menores que a unidade.

Uso de Prefixos

Somente os prefixos de múltiplo e submúltiplo a cada casa de 1000 são recomendados (Tabela A-1). Isso significa que as unidades de comprimento podem ser expressas em mm, m ou km, mas não em cm, a menos que uma razão válida exista.

Quando unidades SI são elevadas a uma dada potência, os prefixos também são elevados a essa mesma potência. Isso significa que o km^2 é definido por

$$1\ \text{km}^2 = (1000\ \text{m})^2 = (1000)^2\ \text{m}^2 = 10^6\ \text{m}^2$$

Similarmente, o mm^2 é definido como segue:

$$(0{,}001\ \text{m})^2 = (0{,}001)^2\ \text{m}^2 = 10^{-6}\ \text{m}^2$$

Ao elevar unidades prefixadas a uma potência, é permissível, embora não freqüentemente conveniente, utilizar prefixos não-preferenciais, como cm^2 ou dm^3.

Exceto para o caso do quilograma, que é uma unidade de base, os prefixos não devem ser utilizados nos denominadores de unidades derivadas. Assim, o meganewton por metro quadrado, MN/m^2 (MPa), é satisfatório, mas o newton por milímetro quadrado, N/mm^2, não deve ser utilizado.[10] Observe que essa recomendação evita uma proliferação de unidades derivadas.

Prefixos duplos não devem ser utilizados. Assim, em vez de milimilímetros (mmm), utilize micrômetros (μm).

---

* N. de T.: No Brasil, a vírgula é usada como indicador da posição da unidade na representação decimal de um número. Portanto, seu emprego como separador decimal é utilizado nesta tradução.

[10] Ao utilizarem softwares como o Finite Element Analysis (FEA) junto com as unidades do sistema internacional (SI), os analistas de projeto podem empregar newtons e milímetros em uma análise. O resultado da tensão será em unidades de N/mm^2, que podem ser pronta e diretamente convertidas para MPa.

Unidades Preferenciais

Como regra geral, é conveniente e de boa prática selecionar prefixos de modo que o número de sentenças contenha não mais do que quatro dígitos à esquerda do ponto decimal. Aplicando essa regra, descobrimos que algumas unidades preferenciais incluem o quilolibra por polegada quadrada (kpsi) e o megapascal (MPa) para tensão, a libra por polegada quadrada (psi) e o quilopascal (kPa) para pressão de ar ou hidráulica, a libra (lbf) e o quilonewton (kN) para força, bem como a polegada à quarta potência (in^4) e o centímetro à quarta potência (cm^4) para o segundo momento de área.

A Tabela A-1 é de particular importância ao se utilizarem unidades com prefixos mistos em uma equação. Suponha que se deseje resolver a equação de deflexão de uma viga de diâmetro d em balanço, carregada em uma extremidade (ver Capítulo 5)

$$y = \frac{64Fl^3}{3\pi d^4 E}$$

em que $F = 1{,}30$ kN, $l = 300$ mm, $d = 2{,}5$ cm e $E = 207$ GPa. É conveniente mostrar a solução em duas partes, a primeira contendo os números e a segunda, os prefixos. Logo,

$$y = \frac{64(1{,}30)(300)^3}{3\pi(2{,}5)^4(207)} \frac{(\text{quilo})(\text{milésimo})^3}{(\text{centésimo})^4(\text{giga})}$$

Agora, compute o valor numérico da primeira parte e substitua os valores de prefixos na segunda. Isso produz

$$y = [29{,}48(10)^3]\left[\frac{10^3(10^{-3})^3}{(10^{-2})^4(10^9)}\right] = 29{,}48(10)^{-4}\ \text{m}$$

$$= 2{,}948\ \text{mm}$$

Em muitos casos, equações similares são usadas tão freqüentemente que lembramos os prefixos a empregar, a fim de obter um resultado tendo um prefixo conveniente. Logo, na equação supracitada, se utilizarmos F em kN, l e d em mm e E em GPa, o resultado y será em mm. Faça um teste. As Tabelas A-3 e A-4 também serão de ajuda.

1-15 Cálculos e Algarismos Significativos

A discussão nesta seção se aplica a números reais, não a inteiros. A precisão de um número real depende de quantos algarismos significativos o descrevem. Normalmente, três ou quatro algarismos significativos são necessários para se ter precisão em engenharia. A menos que se estabeleça o contrário, *não menos* que três algarismos significativos devem ser usados em seus cálculos. O número de algarismos significativos costuma ser inferido do número de algarismos dados (exceto pelos zeros à esquerda). Por exemplo, 706, 3,14 e 0,002 19 devem supostamente ser números de três algarismos significativos. Para os zeros finais, uma clarificação um pouco maior se faz necessária. Para mostrar 706 até quatro algarismos significativos, insira um zero final e mostre 706,0, $7{,}060 \times 10^2$, ou $0{,}7060 \times 10^3$. Além disso, considere um número como 91 600. A notação científica deve ser utilizada para clarificar a precisão. Para três algarismos significativos, expresse o número como $91{,}6 \times 10^3$. Para quatro algarismos significativos, expresse-o como $91{,}60 \times 10^3$.

Computadores e calculadoras mostram os cálculos para muitos algarismos significativos. Contudo, você nunca deve reportar um número de algarismos significativos de um cálculo maior que o menor número de algarismos significativos dos números utilizados por cálculo. Naturalmente, você deve empregar a maior precisão possível quando efetuar um cálculo. Por exemplo, determine a circunferência de um eixo sólido com um diâmetro $d = 0{,}40$ in. A circunferência é fornecida por $C = \pi d$. Visto que d é fornecido com dois algarismos significativos, C deve ser reportado com somente dois algarismos significativos. Agora, se usássemos somente dois algarismos significativos para π, nossa calculadora produziria $C = 3{,}1\ (0{,}40) = 1{,}24$ in. Este se arredonda para dois algarismos significativos como $C = 1{,}2$ in. Todavia, utilizando $\pi = 3{,}141\ 592\ 654$ como programado na calculadora, $C = 3{,}141\ 592\ 654\ (0{,}40) = 1{,}256\ 637\ 061$ in. Este se arredonda para $C = 1{,}3$ in, o qual é 8,3% maior que o primeiro cálculo. Porém, observe que, por d ser fornecido com dois algarismos significativos, subentende-se que seu intervalo seja $0{,}40 \pm 0{,}005$. Isso significa que o cálculo de C é acurado apenas dentro de $\pm 0{,}005/0{,}40 = \pm 0{,}0125 = \pm 1{,}25\%$. O cálculo poderia também ser um em uma série, sendo que arredondar cada cálculo separadamente pode levar a um acúmulo de imprecisão maior. Portanto, é considerado boa prática de engenharia fazer todos cálculos para a maior precisão possível e reportar os resultados dentro da precisão dos dados iniciais.

PROBLEMAS

Os problemas desta seção dizem respeito a idéias apresentadas neste capítulo e são acompanhados de exercícios de mecânica que "fazem pensar" e exigem diagramas de corpo livre.

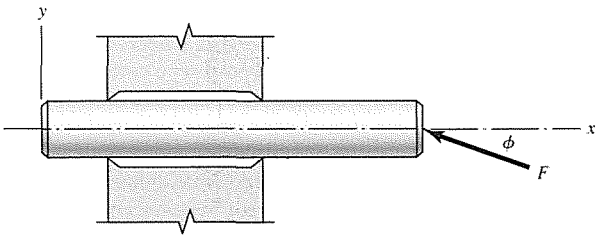
PESQUISA **1-1** Selecione uma componente mecânica da Parte 3 deste livro (mancais de rolamento, molas, etc.), vá à biblioteca de sua universidade e, utilizando o livro *Thomas Register of American Manufacturers*, relate as informações obtidas sobre cinco fabricantes ou fornecedores.

PESQUISA **1-2** Selecione uma componente mecânica da Parte 3 deste livro (mancais de rolamento, molas, etc.), vá à Internet e, utilizando um sistema de busca, relate as informações obtidas sobre cinco fabricantes ou fornecedores.

PESQUISA **1-3** Selecione uma organização listada na Seção 1-6, vá à Internet e verifique as informações disponíveis sobre a organização.

PESQUISA **1-4** Vá à Internet e se conecte à página da NSPE (www.nspe.org). Leia a versão completa do *NSPE Code of Ethics for Engineers* e faça uma breve discussão a respeito.

ANÁLISE **1-5** Um pino "folgado" em um furo pode ser utilizado como um par cinemático de deslizamento. Se uma força F for aplicada a esse pino, como mostrado na figura, formando um ângulo com o eixo dele (e a direção potencial de movimento), o pino irá se mover? Em caso negativo, qual a razão para isso? Em caso positivo, qual a aceleração (e a força) que causa o movimento? Reverter o sentido da força F altera alguma das respostas?



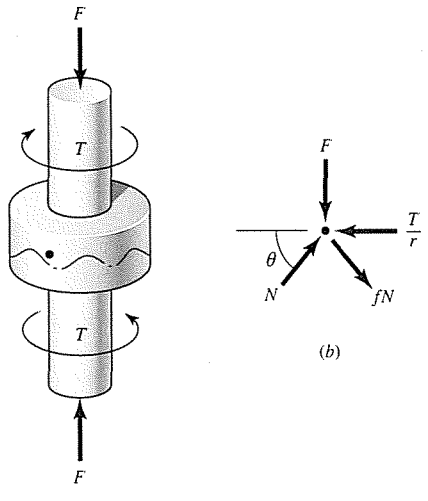
Problema 1-5

ANÁLISE **1-6** Um detentor (um redutor de tração, especificamente um mecanismo que inicia, permite ou bloqueia movimento) é um dispositivo que indexa e evita o movimento entre peças. Alguns se movem em resposta a uma força, outros em resposta a um torque. O detentor de embreagem de mandíbula mostrado na figura tem dentes de flancos retos similares a uma engrenagem com coroa. O raio efetivo é r, e a força de retenção é F, como ilustrado. O ângulo de flanco θ é medido entre a horizontal e o vetor de força normal, e f é o coeficiente de atrito. O diagrama de corpo livre mostra uma partícula de contato no topo da mandíbula. Mostre que

$$F = N(\operatorname{sen}\theta - f\cos\theta)$$

$$T = Fr\frac{1 + f\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\theta - f} = KFr$$

O detentor é autotravante?



Problema 1-6
Um detentor de embreagem com mandíbula.

ANÁLISE **1-7** No Problema 1-6, a força axial F é fornecida por uma mola helicoidal de compressão. A força compressiva é F_0 quando as mandíbulas estão completamente encaixadas. Se x representa a localização de uma partícula, medida a partir de sua posição mais inferior possível, e k é a razão constante de mola, então $F = F_0 + kx$.

(*a*) Em qual torque T_1 o movimento axial começa?

(*b*) Qual torque T_2 permite que ocorra a indexação?

ANÁLISE **1-8** Um detentor de embreagem com mandíbula, como mostrado no Problema 1-6, tem uma força de mola $F = 10 + 2{,}5x$ lbf, um raio efetivo do círculo de mandíbula $r = 2$ in, uma altura de dente de 0,2 in, um ângulo de flanco de dente $\theta = 60°$ e um coeficiente de atrito $f = 0{,}25$. Estime os valores inicial ($x = 0$) e final ($x = 0{,}2$ in) da força de mola F, da força normal N, da constante K e do torque T.

ANÁLISE **1-9** A experiência com túneis de tráfego de alta velocidade (duas faixas paralelas na mesma direção) indica que o espaçamento médio entre os carros aumenta com a velocidade. Dados de um túnel em Nova York mostram que, entre 15 e 35 mi/h, o espaço x entre os veículos (em milhas) é $x = 0{,}324/(42{,}1 - v)$, sendo v a velocidade do veículo em milhas por hora.

(*a*) Ignorando o comprimento de cada veículo, que velocidade produzirá o máximo volume de veículos por hora no túnel?

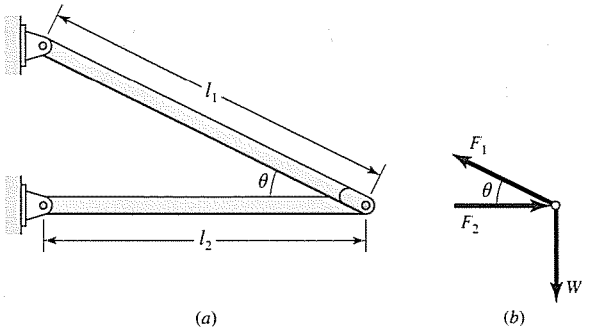
(*b*) Incluir o comprimento dos veículos corta a predição de capacidade do túnel de forma significativa?

(*c*) Para a parte (*b*), a velocidade ótima muda muito?

PROJETO **1-10** Um projetista de engenharia deve criar (inventar) o conceito e a conectividade dos elementos que constituem o projeto, e não perder de vista a necessidade de desenvolver a(s) idéia(s) tendo em mente valores ótimos. Uma figura de mérito útil pode ser o custo, que pode estar relacionado à quantidade de material utilizado (volume ou peso). Quando você considera isso, o peso é uma função da geometria e da densidade. Quando o projeto aparece, determinar o peso é uma tarefa trivial, ainda que tediosa às vezes. A figura adiante mostra uma estrutura simples articulada que possui suportes que se projetam a partir de uma coluna de parede. A estrutura suporta um guincho de corrente. Juntas articuladas são utilizadas para evitar a flexão. O custo de um conector pode ser *aproximado* por $\$ = \text{¢}Al\gamma$, em que ¢ é o custo por unidade de peso do conector, A é a área da secção transversal do conector prismático, l é o comprimento do conector de pino a pino e γ é o peso específico. Para ser mais claro, essa é apenas uma aproximação, porque nenhuma decisão foi tomada quanto à forma geométrica dos conectores ou de seus acessórios. Investigando os custos dessa maneira aproximada, neste momento, podemos detectar se um conjunto particular de proporções do braço articulado (indexado pelo ângulo θ) é vantajoso. Existe um ângulo preferível θ? Mostre que as figuras de mérito podem ser expressas como

$$\text{fom} = -\frac{\gamma \text{¢} W l_2}{S}\left(\frac{1 + \cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta \cos\theta}\right)$$

em que W é o peso do guincho e da carga e S é a tensão admissível de tração ou compressão no material de conexão (assuma que $S = |F/A|$ e nenhuma ação de coluna). Qual é o ângulo desejável correspondente ao custo mínimo?



Problema 1-10 *(a) Estrutura articulada de um guincho de corrente. (b) Diagrama de corpo livre do pino.*

ANÁLISE **1-11** Quando conhecemos os valores verdadeiros de x_1 e x_2 e temos aproximações X_1 e X_2 à mão, podemos ver de onde os erros surgem. Ao ver o erro como algo a ser adicionado a uma aproximação para obter um valor verdadeiro, segue que o erro e_i está relacionado a X_i e x_i como $x_i = X_i + e_i$.

(*a*) Mostre que o erro em uma soma $X_1 + X_2$ é

$$(x_1 + x_2) - (X_1 + X_2) = e_1 + e_2$$

(*b*) Mostre que o erro em uma diferença $X_1 - X_2$ é

$$(x_1 - x_2) - (X_1 - X_2) = e_1 - e_2$$

(*c*) Mostre que o erro em um produto X_1X_2 é

$$x_1x_2 - X_1X_2 = X_1X_2\left(\frac{e_1}{X_1} + \frac{e_2}{X_2}\right)$$

(*d*) Mostre que em um quociente X_1/X_2 o erro é

$$\frac{x_1}{x_2} - \frac{X_1}{X_2} = \frac{X_1}{X_2}\left(\frac{e_1}{X_1} - \frac{e_2}{X_2}\right)$$

ANÁLISE **1-12** Utilize os valores verdadeiros $x_1 = \sqrt{5}$ e $x_2 = \sqrt{6}$.

(*a*) Demonstre a correção da equação de erro do Problema 1-11, no que tange à adição, se três dígitos corretos são utilizados para definir X_1 e X_2.

(*b*) Demonstre a correção da equação de erro usando números com três dígitos significativos para X_1 e X_2.

ANÁLISE **1-13** Converta o que segue em unidades SI apropriadas:

(*a*) Uma tensão de 20 000 psi.

(*b*) Uma força de 350 lbf.

(*c*) Um momento de 1200 lbf · in.

(*d*) Uma área de 2,4 in^2.

(*e*) Um segundo momento de inércia de 17,4 in^4.

(*f*) Uma área de 3,6 mi^2.

(*g*) Um módulo de elasticidade de 21 Mpsi.

(*h*) Uma velocidade de 45 mi/h.

(*i*) Um volume de 60 in^3.

ANÁLISE **1-14** Converta o que segue em unidades ips apropriadas:

(*a*) Um comprimento de 1,5 m.

(*b*) Uma tensão de 600 MPa.

(*c*) Uma pressão de 160 kPa.

(*d*) Um módulo seccional de 1,84 (10^5) mm^3.

(*e*) Um peso por unidade com comprimento de 38,1 N/m.

(*f*) Uma deflexão de 0,05 mm.

(*g*) Uma velocidade de 6,12 m/s.

(*h*) Uma deformação unitária de 0,0021 m/m.

(*i*) Um volume de 30 litros.

ANÁLISE **1-15** Geralmente, os resultados finais de projeto são arredondados, ou fixados, a três dígitos, uma vez que os dados utilizados não podem justificar uma mostra de mais dígitos. Além disso, prefixos devem ser selecionados de modo a limitar a série de números a não mais do que quatro dígitos à esquerda do ponto decimal. Utilizando essas regras, bem como aquelas relativas à escolha de prefixos, solucione as seguintes relações:

(*a*) $\sigma = M/Z$, em que $M = 200$ N · m e $Z = 15{,}3$ cm^3.

(*b*) $\sigma = F/A$, em que $F = 42$ kN e $A = 6$ cm^2.

(*c*) $y = Fl^3/3EI$, em que $F = 1200$ N, $l = 800$ mm, $E = 207$ GPa e $I = 6{,}4$ cm^4.

(*d*) $\theta = Tl/GJ$ em que $J = \pi d^4/32$, T = 1100 N · m, $l = 250$ mm, $G = 79{,}3$ GPa e $d = 25$ mm. Converta os resultados em graus.

ANÁLISE **1-16** Repita o Problema 1-15 para o seguinte:

(*a*) $\sigma = F/wt$, em que $F = 600$ N, $w = 20$ mm e $t = 6$ mm.

(*b*) $I = bh^3/12$, em que $b = 8$ mm e $h = 24$ mm.

(*c*) $I = \pi d^4/64$, em que $d = 32$ mm.

(*d*) $\tau = 16T/\pi d^3$, em que $T = 16$ N · m e $d = 25$ mm.

ANÁLISE

1-17 Repita o Problema 1-15 para:

(*a*) $\tau = F/A$, em que $A = \pi d^2/4$, $F = 120$ kN, e $d = 20$ mm.

(*b*) $\sigma = 32Fa/\pi d^3$, em que $F = 800$ N, $a = 800$ mm e $d = 32$ mm.

(*c*) $Z = (\pi/32d)(d^4 - d_i^4)$ para $d = 36$ mm e $d_i = 26$ mm.

(*d*) $k = (d^4G)/(8D^3N)$, em que $d = 1{,}6$ mm, $G = 79{,}3$ GPa, $D = 19{,}2$ mm e $N = 32$ (um número adicional).

CAPÍTULO 2

Considerações Estatísticas

2-1 Variáveis Aleatórias 54
2-2 Média Aritmética, Variância e Desvio-Padrão 56
2-3 Distribuições de Probabilidade 60
2-4 Propagação do Erro 67
2-5 Regressão Linear 69
2-6 Limites e Ajustes 71
2-7 Dimensões e Tolerâncias 75

A estatística no projeto mecânico provê um método de lidar com características cujos valores são variáveis. Produtos manufaturados em grandes quantidades – automóveis, relógios, cortadores de grama, máquinas de lavar, por exemplo – têm uma vida variável. Um automóvel pode ter tantos defeitos que deve ser reparado repetidamente, durante os primeiros meses de operação, ao passo que um outro pode operar satisfatoriamente durante anos, requerendo apenas uma manutenção menor.

Os métodos de controle de qualidade estão profundamente enraizados no uso de estatísticas, de modo que os projetistas de engenharia necessitam de um bom conhecimento da matéria para atender aos padrões de tal controle. A variabilidade inerente aos limites e ajustes, à tensão e resistência, às folgas de mancais e a muitas outras características deve ser descrita numericamente, para controle próprio. Não é satisfatório dizer que se espera que um produto tenha uma vida longa e sem problemas. Devemos expressar tais coisas, como vida e confiabilidade do produto, em forma numérica, a fim de alcançar um objetivo específico de qualidade. A álgebra de números reais, em si, não é apropriada o bastante para descrever a presença de variação.

Está claro que as consistências na natureza são estáveis – não em magnitude, mas no *padrão de variação*. A evidência obtida da natureza por meio de medidas é uma mistura de efeitos sistemáticos e aleatórios. É função da estatística separar esses efeitos e, mediante o uso sensível dos dados, iluminar o obscuro.

Alguns estudantes iniciarão este livro após completar um curso formal de estatística, ao passo que outros poderão ter tido contatos breves com tal matéria em seus cursos de engenharia. Esse contraste na formação, juntamente com as restrições de espaço e tempo, torna muito difícil apresentar uma integração extensa da estatística com o projeto de engenharia mecânica nesse estágio. Depois do primeiro curso de projeto mecânico e de estatística de engenharia, o estudante poderá começar a integrar significativamente ambos em um segundo curso de projeto.

A intenção deste capítulo é introduzir alguns conceitos estatísticos associados aos objetivos básicos de confiabilidade.

2-1 Variáveis Aleatórias

Considere um experimento relativo a medir a resistência em uma coleção de 20 espécimes de ensaio de tração que foram usinados a partir de um número de amostras selecionadas, ao acaso, de uma grande quantidade de, digamos, aço UNS G10200. É razoável esperar que haverá diferenças nas resistências últimas à tração S_{ut} entre cada um dos espécimes individuais de ensaio. Tais diferenças podem ocorrer devido às variações nos tamanhos dos espécimes, à resistência do material em si ou a ambas. Um experimento dessa natureza é denominado *experimento aleatório*, uma vez que os espécimes são selecionados ao acaso. A resistência S_{ut} por ele determinada é chamada de *variável aleatória* ou *variável estocástica*. Assim, uma variável aleatória é uma quantidade variável – tal como resistência, tamanho ou peso – cujo valor depende do resultado de um experimento aleatório.

Definamos uma variável aleatória x como a soma dos números obtidos quando dois dados são lançados. Um e outro dado podem exibir quaisquer números de 1 a 6. A Figura 2-1 mostra todos os resultados possíveis no que é denominado *espaço da amostra*. Observe que x tem um valor específico para cada resultado possível – por exemplo, o evento 5, 4; $x = 5 + 4 = 9$. É útil construir uma tabela que apresente os valores de x e os valores correspondentes da probabilidade de x, denominada $p = f(x)$. Isso é feito com facilidade, a partir da Figura 2-1, simplesmente adicionando-se cada resultado, determinando-se quantas vezes um valor específico de x aparece e dividindo-se pelo número total de resultados possíveis. Os resultados são mostrados na Tabela 2-1. Qualquer tabela como essa, listando todos os valores possíveis de uma variável aleatória e apresentando as probabilidades correspondentes, é denominada *distribuição de probabilidade*.

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

Figura 2-1 Espaço amostral exibindo todos os resultados possíveis do lançamento de dois dados.

Tabela 2-1 Uma distribuição de probabilidade

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Tabela 2-2 Uma distribuição cumulativa de probabilidade

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$F(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{36}{36}$

Os valores da Tabela 2-1 estão traçados graficamente na Figura 2-2. Está claro, aqui, que a probabilidade é uma função de x. Essa *função de probabilidade*, $p = f(x)$, é freqüentemente chamada de *função de freqüência* ou, às vezes, *função de densidade de probabilidade* (PDF). A probabilidade de que x seja menor que, ou igual a, um certo valor x_i pode ser obtida, a partir da função de probabilidade, somando-se a probabilidade de todos os x até, e incluindo, x_i. Se fizermos isso com a Tabela 2-1, estabelecendo x_i como igual a 2, depois a 3, e assim por diante, até chegar a 12, obteremos a Tabela 2-2, denominada *distribuição cumulativa de probabilidade.* A *função* $F(x)$, nessa tabela, é chamada de *função cumulativa de probabilidade* (CDF) de x. Em termos de $f(x)$, ela pode ser expressa matematicamente, na forma geral

$$F(x_i) = \sum_{x_j \le x_i} f(x_j) \tag{2-1}$$

A distribuição cumulativa pode também ser traçada como um gráfico (Figura 2-3).

A variável x desse exemplo é denominada *variável aleatória discreta*, visto que x tem somente valores discretos. Uma *variável aleatória contínua* pode ter qualquer valor em um intervalo especificado; para tais variáveis, gráficos como os das Figuras 2-2 e 2-3 seriam traçados como curvas contínuas. Para uma função contínua de densidade de probabilidade $F(x)$, a probabilidade de obter uma observação igual a, ou menor que x, é dada por

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx \tag{2-2}$$

em que $f(x)$ é a probabilidade por unidade x. Quando $x \to \infty$, então

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \tag{2-3}$$

A diferenciação da Equação (2-2) produz

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \tag{2-4}$$

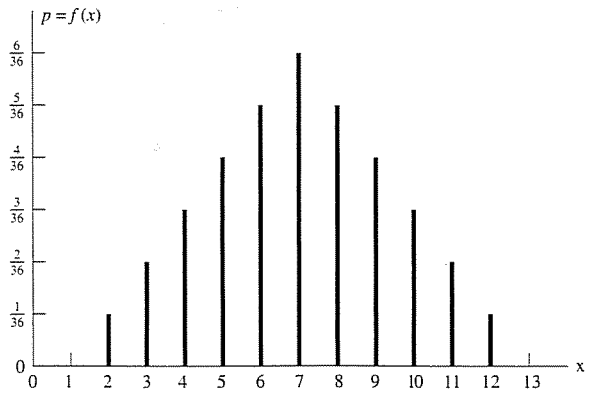


Figura 2-2 Distribuição de freqüência.

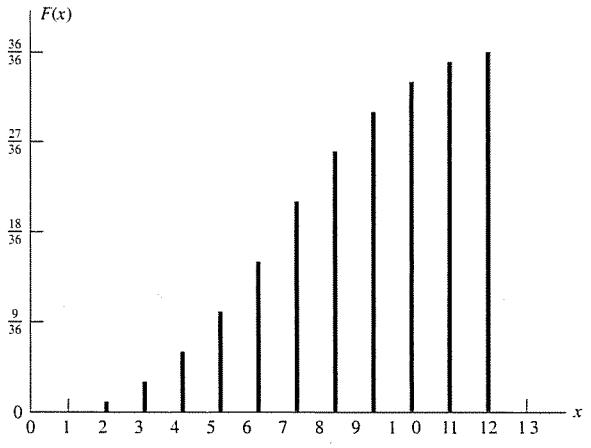


Figura 2-3 Distribuição cumulativa de freqüência.

2-2 Média Aritmética, Variância e Desvio-Padrão

Ao estudar as variações nas propriedades mecânicas e as características dos elementos mecânicos, estaremos geralmente lidando com um número finito de elementos. O número total desses elementos, denominado *população*, pode, em alguns casos, ser bastante grande. Nessas situações, normalmente é impraticável medir as características de cada membro da população, haja vista que isso envolve ensaios destrutivos em alguns casos; dessa forma, selecionamos uma pequena parte do grupo, denominada *amostra*, para tais determinações. Assim, a *população* é o grupo completo e a *amostra*, uma parte dele.

A média aritmética de uma amostra, chamada *média da amostra*, consistindo em N elementos, é definida pela equação

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_N}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \tag{2-5}$$

Além da média aritmética, é útil ter um outro tipo de medida que nos diga algo a respeito do espalhamento, ou dispersão, da distribuição. Para qualquer variável aleatória x, o desvio da *i-ésima* observação, em relação à média, é $x_i - \bar{x}$. Entretanto, visto que a soma dos desvios assim definida é sempre zero, nós os quadramos e definimos *a variância da amostra* como

$$s_x^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_N - \bar{x})^2}{N - 1} = \frac{1}{N - 1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 \tag{2-6}$$

O *desvio-padrão da amostra*, definido como a raiz quadrada da variância da amostra, é

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{N - 1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2} \tag{2-7}$$

A Equação (2-7) não é muito conveniente para uso em uma calculadora. Para tais propósitos, utilizamos a forma alternativa

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2 / N}{N - 1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - N\bar{x}^2}{N - 1}} \tag{2-8}$$

para o desvio-padrão.

Deve-se observar que alguns autores definem a variância e o desvio-padrão empregando N, em vez de $N - 1$, no denominador. Para valores grandes de N, existe muito pouca diferença. Para valores pequenos, o denominador $N - 1$ realmente fornece uma melhor estimativa da variância da população da qual a amostra é tomada.

As Equações (2-5) a (2-8) aplicam-se especificamente à *amostra* de uma população. Quando uma população completa é considerada, as mesmas equações se aplicam, mas $\bar{x}$ e s_x são substituídos pelos símbo-

los μ_x e $\hat{\sigma}_x$, respectivamente. A marca do acento circunflexo (^), ou "chapéu", é usada para evitar confusão com a tensão normal. Para a variância da população, o ponderador N é utilizado nos denominadores, em vez de $N-1$.

Às vezes, lidaremos com o desvio-padrão da resistência de um elemento. Portanto, você deve ter cuidado para não se confundir com a notação empregada. Observe que estamos utilizando a *letra maiúscula S* para *resistência* e a *minúscula s* para *desvio-padrão*, como mostra a legenda do histograma da Figura 2-4.

A figura em questão é denominada *histograma de freqüência discreta*, que provê o número de ocorrências, ou a freqüência da classe f_i, dentro do intervalo determinado. Se os dados forem agrupados dessa maneira, então a média e o desvio-padrão serão fornecidos por

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} f_i x_i \tag{2-9}$$

e

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2 - \left[\left(\sum_{i=1}^{k} f_i x_i\right)^2 / N\right]}{N-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2 - N\bar{x}^2}{N-1}} \tag{2-10}$$

Aqui, x_i, f_i e k são os pontos médios da classe, as freqüências de ocorrência dentro do intervalo da classe e o número total de classes, respectivamente. Além disso, a função de densidade cumulativa que fornece a probabilidade de uma ocorrência na marca de classe de x_i, ou menor que esta, é

$$F_i = \frac{f_i w_i}{2} + \sum_{j=1}^{i-1} f_j w_j \tag{2-11}$$

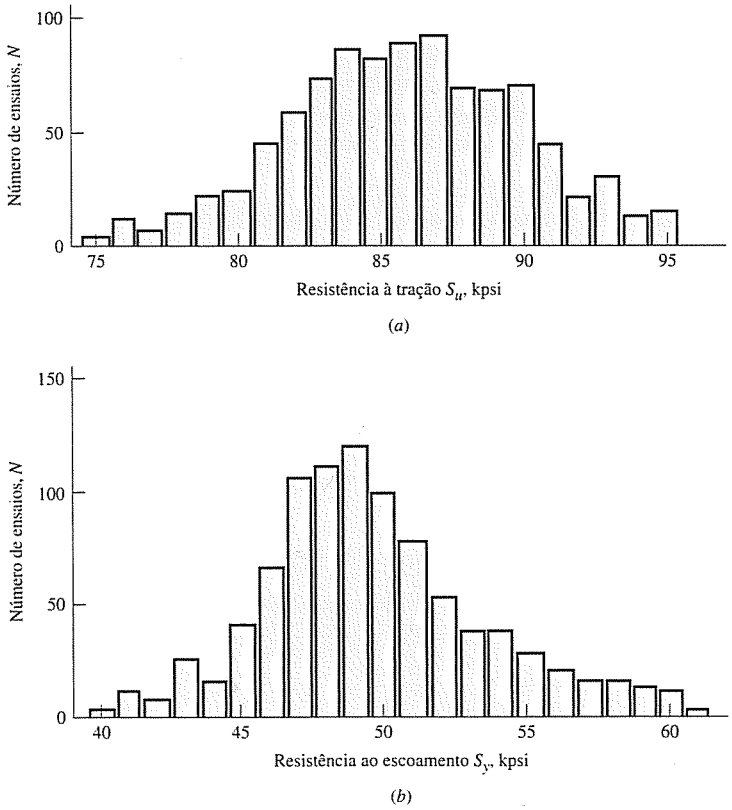


Figura 2-4 Distribuição das propriedades de tração de um aço laminado a quente UNS G10350, conforme laminado. Esses ensaios foram realizados em barras redondas variando, em diâmetro, de 1 a 9 in. (*a*) Distribuição da resistência à tração (última) de fornada de 930 barras; $\bar{S}_u = 86{,}0$ kpsi, $s_{su} = 4{,}94$ kpsi. (*b*) Distribuição da resistência ao escoamento de fornada de 899 barras; $\bar{S}_y = 49{,}5$ kpsi, $s_{sy} = 5{,}36$ kpsi. (De Metals Handbook, vol. 1, 8ª ed., *American Society for Metals, Materials Park, OH 44073-0002, fig. 22, p. 64. Reimpressa com autorização da ASM International®, www.asminternational.org.)*

em que w_i representa a largura da classe em x_i. Para a Figura 2-4(a), $k = 21$ e a largura da classe é constante em $w = 1$ kpsi.

Notação

Neste livro, seguimos a convenção de designar vetores por caracteres em negrito, indicativo esse de que duas ou três quantidades, tais como direção e magnitude, são necessárias para descrevê-los. A mesma convenção é amplamente utilizada para variáveis aleatórias que podem ser caracterizadas ao se especificar uma média e um desvio-padrão. Portanto, usaremos caracteres em negrito para designar variáveis aleatórias, bem como vetores. É improvável que haja confusão entre os dois.

Os termos *variável estocástica* e *variante* são também usados para significar uma variável aleatória. Uma *quantidade determinística* é algo que apresenta um único valor específico. O valor médio de uma população é uma quantidade determinística, sendo também o seu desvio-padrão. Uma variável estocástica pode ser parcialmente descrita pela média e pelo desvio-padrão, ou pela média e pelo *coeficiente de variação* definido por

$$C_x = \frac{s_x}{\bar{x}} \tag{2-12}$$

logo, a variante $\mathbf{x}$ para a amostra pode ser expressa das duas maneiras a seguir:

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}(\bar{x}, s_x) = \bar{x}\,\mathbf{X}(1, C_x) \tag{2-13}$$

em que $\mathbf{X}$ representa uma função de distribuição de probabilidade da variante. Observe que as quantidades determinísticas $\bar{x}$, s_x e C_x apresentam-se todas em fonte itálica normal.

EXEMPLO 2-1

Cinco toneladas de barra redonda de 2 in de aço laminado a quente 1030 foram recebidas para estoque de peças. Nove espécimes geométricos padronizados de ensaio de tração foram usinados, a partir de pontos aleatórios, em várias barras. No relatório de ensaio, a resistência última à tração foi fornecida em kpsi. Em ordem ascendente (não necessariamente), tais dados são mostrados na Tabela 2-3. Encontre a média $\bar{x}$, o desvio-padrão s_x e o coeficiente de variação C_x a partir da amostra, de modo que sejam as melhores estimativas da população original (a fábrica converterá o estoque em produto).

Tabela 2-3 Planilha de dados de nove espécimes de ensaio de tração tirados de uma remessa de barras para estoque de aço 1030 laminado a quente

S_{ut}, kpsi x	x^2
62,8	3 943,84
64,4	4 147,36
65,8	4 329,64
66,3	4 395,69
68,1	4 637,61
69,1	4 774,81
69,8	4 872,04
71,5	5 112,25
74,0	5 476,00
Σ 611,8	41 689,24

Solução A partir das Equações (2-5) e (2-8)

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{9} x_i$$

e

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2 / N}{N - 1}}$$

É computacionalmente eficiente gerar $\sum x$ e $\sum x^2$ antes de avaliar $\bar{x}$ e s_x, o que foi feito na Tabela 2-3.

$$\bar{x} = \frac{1}{9}(611{,}8) = 67{,}98 \text{ kpsi}$$

$$s_x = \sqrt{\frac{41\,689{,}24 - 611{,}8^2/9}{9 - 1}} = 3{,}543 \text{ kpsi}$$

A partir da Equação (2-12),

$$C_x = \frac{s_x}{\bar{x}} = \frac{3{,}543}{67{,}98} = 0{,}0521$$

Todas as três estatísticas são estimativas dos parâmetros estatísticos da população original. Observe que esses resultados são independentes da distribuição.

Entradas múltiplas de dados podem ser idênticas, ou agrupadas de forma histográfica, para sugerir uma forma de distribuição. Se os dados originais forem perdidos pelo projetista, os dados agrupados poderão ainda ser reduzidos, embora com alguma perda na precisão computacional.

EXEMPLO 2-2

Os dados do Exemplo 2-1 chegaram ao projetista na forma histográfica das duas primeiras colunas da Tabela 2-4. Utilizando-os nessa forma, encontre a média $\bar{x}$, o desvio-padrão s_x e o coeficiente de variação C_x.

Tabela 2-4 Dados agrupados da resistência última à tração de nove espécimes de ensaio de tração de uma remessa de barras para estoque de aço 1030 laminado a quente

Ponto médio da classe x_i, kpsi	Freqüência da classe f	Extensão fx	Extensão fx^2
63,5	2	127	8 064,50
66,5	2	133	8 844,50
69,5	3	208,5	14 480,75
72,5	2	145	10 513,50
	Σ 9	613,5	41 912,25

Os dados na Tabela 2-4 foram estendidos de modo a prover $\sum f_i x_i$ e $\sum f_i x_i^2$.

Solução

A partir da Equação (2-9),

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{4} f_i x_i = \frac{1}{9}(613{,}5) = 68{,}17 \text{ kpsi}$$

A partir da Equação (2-10),

$$s_x = \sqrt{\frac{41\,912{,}25 - 613{,}5^2/9}{9 - 1}} = 3{,}391 \text{ kpsi}$$

A partir da Equação (2-12),

$$C_x = \frac{s_x}{\bar{x}} = \frac{3{,}391}{68{,}17} = 0{,}0497$$

Observe as pequenas mudanças em $\bar{x}$, s_x e C_x, devidas a pequenas mudanças nos termos do somatório.

As estatísticas descritivas desenvolvidas, seja a partir de dados não-agrupados ou agrupados, descrevem a resistência última à tração S_{ut} do material a partir do qual faremos as peças. Tal descrição não é possível com um único número. De fato, às vezes dois ou três números, além da identificação – ou, pelo menos, uma aproximação robusta da distribuição –, são necessários. À medida que você observar os dados do Exemplo 2-1, considere respostas para estas questões:

- Podemos caracterizar a resistência última à tração pela média, $\bar{S}_{ut}$?
- Podemos tomar a menor resistência última à tração de 62,8 kpsi como um mínimo? Se o fizermos, encontraremos algumas resistências-limite menores, uma vez que a resistência de algum dos 100 espécimes será menor.
- Podemos encontrar a distribuição da resistência última à tração do estoque de aço 1030 do Exemplo 2-1? Sim, mas isso necessitará de mais espécimes e requererá traçar coordenadas que retifiquem a série de dados.

2-3 Distribuições de Probabilidade

Existem determinadas distribuições padronizadas discretas e contínuas de probabilidade que são comumente aplicáveis a problemas de engenharia. Nesta seção, discutiremos quatro importantes distribuições contínuas de probabilidade: a *gaussiana* (ou *normal*), a *lognormal*, a *uniforme* e a *de Weibull.*

Distribuição Gaussiana (Normal)

Quando Gauss perguntou a si próprio qual distribuição seria mais provável de originar um conjunto de dados, a resposta indicou aquela que leva seu nome. A *distribuição gaussiana*, ou *normal*, é uma importante distribuição cuja função de densidade de probabilidade é expressa, em termos de sua média μ_x e de seu desvio-padrão $\hat{\sigma}_x$, como

$$f(x) = \frac{1}{\hat{\sigma}_x\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_x}{\hat{\sigma}_x}\right)^2\right] \tag{2-14}$$

Com a notação descrita na Seção 2-2, a normalmente distribuída variante x pode ser expressa como

$$\mathbf{x} = \mathbf{N}(\mu_x, \hat{\sigma}_x) = \mu_x \mathbf{N}(1, C_x) \tag{2-15}$$

em que **N** representa a função de distribuição normal fornecida pela Equação (2-14).

Visto que a Equação (2-14) é uma função de densidade de probabilidade, a área sob ela, conforme requerido, é unitária. Os gráficos da referida equação são mostrados na Figura 2-5, para pequenos e grandes desvios-padrão. A curva em formato de sino é mais alta e mais estreita para valores pequenos de $\hat{\sigma}$ e mais baixa e mais larga para valores grandes de $\hat{\sigma}$. A integração da Equação (2-14), para encontrar a função de densidade cumulativa $F(x)$, não é possível de forma analítica, mas deve ser completada numericamente. Para evitar a necessidade de muitas tabelas para valores diferentes de μ e $\hat{\sigma}$, o desvio da média é expresso em unidades de desvio-padrão pela transformação

$$\mathbf{z} = \frac{\mathbf{x} - \mu_x}{\hat{\sigma}_x} \tag{2-16}$$

A integral da transformação está classificada na Tabela A-10 e esboçada na Figura 2-6. O valor da função de densidade normal cumulativa é utilizado tão freqüentemente, e manipulado em tantas equações, que tem seu próprio símbolo, $\Phi(z)$. A variante de transformação **z** é distribuída normalmente, com uma média de zero e um desvio-padrão e uma variância unitária. Isto é, $\mathbf{z} = \mathbf{N}(0,1)$. A probabilidade de uma observação menor que **z** é $\Phi(z)$ para valores negativos de z e $1 - \Phi(z)$ para valores positivos de z na Tabela A-10.

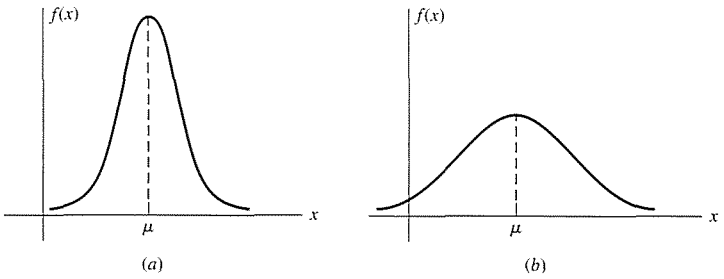


Figura 2-5 O formato da curva de distribuição normal: (a) pequeno $\hat{\sigma}$; (b) grande $\hat{\sigma}$.

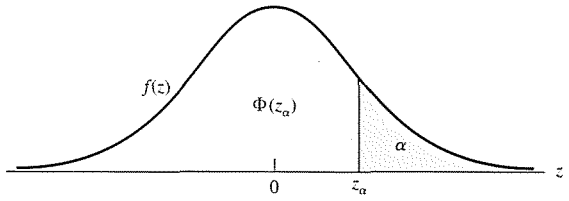


Figura 2-6 A distribuição normal padrão.

EXEMPLO 2-3

Em uma remessa de 250 barras de conexão, a resistência média de tração encontrada é de 45 kpsi e o desvio-padrão, de 5 kpsi.

(*a*) Supondo uma distribuição normal, quantas barras se pode esperar que tenham uma resistência menor que 39,5 kpsi?

(*b*) Quantas se pode esperar que tenham uma resistência entre 39,5 e 59,5 kpsi?

Solução

(*a*) Substituindo na Equação (2-16), obtemos a variável padronizada z como

$$z_{39,5} = \frac{x - \mu_x}{\hat{\sigma}_x} = \frac{S - \bar{S}}{\hat{\sigma}_S} = \frac{39,5 - 45}{5} = -1,10$$

A probabilidade de que a resistência seja menor que 39,5 kpsi pode ser designada como $F(z) = \Phi(-1,10)$. Utilizando a Tabela A-10, e referindo-nos à Figura 2-7, encontramos $\Phi(z_{39,5}) = 0,1357$. Assim, o número de barras com uma resistência menor que 39,5 kpsi é

Resposta

$$N\Phi(z_{39,55}) = 250(0,1357) = 33,9 \approx 34$$

porque $\Phi(z_{39,5})$ representa a proporção da população N tendo uma resistência menor que 39,5 kpsi.

(*b*) Correspondendo a $S = 59,5$ kpsi, temos

$$z_{59,5} = \frac{59,5 - 45}{5} = 2,90$$

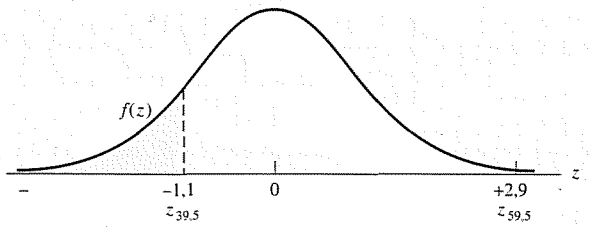


Figura 2-7

Referindo-nos outra vez à Figura 2-7, vemos que a probabilidade de que a resistência seja menor que 59,5 kpsi é $F(z) = \Phi(z_{59,5})$. Visto que a variável z é positiva, necessitamos encontrar o valor complementar à unidade. Logo, a partir da Tabela A-10,

$$\Phi(2{,}90) = 1 - \Phi(-2{,}90) = 1 - 0{,}001\,87 = 0{,}998\,13$$

A probabilidade de que a resistência esteja entre 39,5 e 59,5 kpsi é a área entre as ordenadas em $z_{39,5}$ e $z_{59,5}$ na Figura 2-7. Tal probabilidade deve ser

$$\begin{aligned} p = \Phi(z_{59,5}) - \Phi(z_{39,5}) &= \Phi(2{,}90) - \Phi(-1{,}10) \\ &= 0{,}998\,13 - 0{,}1357 = 0{,}862\,43 \end{aligned}$$

Portanto, o número de barras que se espera que tenham resistências entre 39,5 e 59,5 kpsi é

Resposta

$$Np = 250(0{,}862) = 215{,}5 \approx 216$$

Distribuição Lognormal

Às vezes, as variáveis aleatórias apresentam as duas seguintes características:

- A distribuição é assimétrica em relação à média.
- As variáveis têm somente valores positivos.

Tais características eliminam o uso da distribuição normal. Existem várias outras distribuições que são potencialmente úteis em tais situações, sendo uma delas a distribuição *lognormal* (escrita como uma única palavra). Em especial, quando há vida envolvida, tal como vida de fadiga sob tensão ou vida de desgaste de mancais de rolamento, a distribuição *lognormal* pode ser muito apropriada para utilizarmos.

Nesse tipo de distribuição, os logaritmos da variante têm uma distribuição normal. Dessa forma, diz-se que a variante em si está distribuída de forma *lognormal*. Deixe essa variante ser expressa como

$$\mathbf{x} = \mathbf{LN}(\mu_x, \hat{\sigma}_x) \qquad (a)$$

A equação (*a*) afirma que a variável aleatória x está distribuída de forma *lognormal* (*não um logaritmo*) e que seu valor médio é μ_x e seu desvio-padrão, $\hat{\sigma}_x$.

Agora, utilize a transformação

$$\mathbf{y} = \ln \mathbf{x} \qquad (b)$$

Visto que, por definição, **y** tem uma distribuição normal, podemos escrever

$$\mathbf{y} = \mathbf{N}(\mu_y, \hat{\sigma}_y) \qquad (c)$$

Essa equação estabelece que a variável aleatória **y** é distribuída normalmente, que seu valor médio é μ_y e que seu desvio-padrão é $\hat{\sigma}_y$.

Convém pensar na Equação (*a*) como designando a *distribuição original*, ou *principal*, enquanto a Equação (*b*) representa a distribuição *de companhia*, ou *subsidiária*.

A função de densidade de probabilidade (PDF) para **x** pode ser derivada daquela de **y**; veja a Equação (2-14) e substitua y por x. Logo, a PDF para a distribuição associada (acompanhante) deve ser

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\hat{\sigma}_y\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln x - \mu_y}{\hat{\sigma}_y}\right)^2\right] & \text{para } x > 0 \\ 0 & \text{para } x \le 0 \end{cases} \qquad (2\text{-}17)$$

A média da acompanhante μ_y e o desvio-padrão $\hat{\sigma}_y$, na Equação (2-17), são obtidos a partir de

$$\mu_y = \ln \mu_x - \ln\sqrt{1 + C_x^2} \approx \ln \mu_x - \frac{1}{2}C_x^2 \qquad (2\text{-}18)$$

$$\hat{\sigma}_y = \sqrt{\ln\left(1 + C_x^2\right)} \approx C_x \tag{2-19}$$

Essas equações tornam possível o uso da Tabela A-10 para cômputos estatísticos e eliminam a necessidade de uma tabela especial para a distribuição *lognormal*.

EXEMPLO 2-4

Mil espécimes de aço 1020 foram testados quanto a ruptura, e as resistências últimas à tração foram registradas conforme os dados agrupados na Tabela 2-5. A partir da Equação (2-9),

$$\bar{x} = \frac{63\,625}{1000} = 63{,}625 \text{ kpsi}$$

Tabela 2-5 Planilha para o Exemplo 2-4

Ponto médio da classe kpsi	Freqüência f_i	Extensão $x_i f_i$	Extensão $x_i^2 f_i$	PDF observada $f_i/(Nw)^*$	Densidade normal $f(x)$	Densidade lognormal $g(x)$
56,5	2	113,0	6 384,5	0,002	0,0035	0,0026
57,5	18	1 035,0	59 512,5	0,018	0,0095	0,0082
58,5	23	1 345,5	78 711,75	0,023	0,0218	0,0209
59,5	31	1 844,5	109 747,75	0,031	0,0434	0,0440
60,5	83	5 021,5	303 800,75	0,083	0,0744	0,0773
61,5	109	6 703,5	412 265,25	0,109	0,110	0,1143
62,5	138	8 625,0	539 062,5	0,138	0,140	0,1434
63,5	151	9 588,5	608 869,75	0,151	0,1536	0,1539
64,5	139	8 965,5	578 274,75	0,139	0,1453	0,1424
65,5	130	8 515,0	577 732,5	0,130	0,1184	0,1142
66,5	82	5 453,0	362 624,5	0,082	0,0832	0,0800
67,5	49	3 307,5	223 256,25	0,049	0,0504	0,0493
68,5	28	1 918,0	131 382,0	0,028	0,0263	0,0268
69,5	11	764,5	531 32,75	0,011	0,0118	0,0129
70,5	4	282,0	19 881,0	0,004	0,0046	0,0056
71,5	2	143,0	10 224,5	0,002	0,0015	0,0022
	Σ 1000	6 3625	4 054 864	1,000		

* Para comparar os dados de freqüência discreta com funções contínuas de densidade de probabilidade, f_i deve ser dividida por N w. Aqui, N = tamanho da amostra = 1000; w = largura do intervalo de classe = 1 kpsi.

A partir da Equação (2-10)

$$s_x = \sqrt{\frac{4\,054\,864 - 63\,625^2/1000}{1000 - 1}} = 2{,}594\,245 = 2{,}594 \text{ kpsi}$$

$$C_x = \frac{s_x}{\bar{x}} = \frac{2{,}594\,245}{63{,}625} = 0{,}040\,773 = 0{,}0408$$

A partir da Equação (2-14), a função de densidade de probabilidade, para uma distribuição normal com uma média de 63,625 e um desvio-padrão de 2,594 245, é

$$f(x) = \frac{1}{2{,}594\,245\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x - 63{,}625}{2{,}594\,245}\right)^2\right]$$

Por exemplo, $f(63{,}625) = 0{,}1538$. A função de densidade de probabilidade $f(x)$ é avaliada nos pontos médios de classe, para formar a coluna de densidade normal na Tabela 2-5.

EXEMPLO 2-5

Continue o Exemplo 2-4, mas ajuste uma função de densidade *lognormal*.

Solução A partir das Equações (2-18) e (2-19),

$$\mu_y = \ln \mu_x - \ln\sqrt{1 + C_x^2} = \ln 63{,}625 - \tfrac{1}{2}\ln(1 + 0{,}040\,773^2) = 4.1522$$

$$\hat{\sigma}_y = \sqrt{\ln\left(1 + C_x^2\right)} = \sqrt{\ln(1 + 0{,}040\,773^2)} = 0{,}0408$$

A densidade de probabilidade de uma distribuição *lognormal* é fornecida, na Equação (2-17), como

$$g(x) = \frac{1}{x\,(0{,}0408)\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - 4{,}1522}{0{,}0408}\right)^2\right] \quad \text{para } x > 0$$

Por exemplo, $g(63{,}625) = 0{,}1537$. Essa densidade *lognormal* foi adicionada à Tabela 2-5. Trace a PDF *lognormal* superposta ao histograma do Exemplo 2-4 conjuntamente com a densidade normal. Como visto na Figura 2-8, ambas as densidades normal e *lognormal* se ajustam bem.

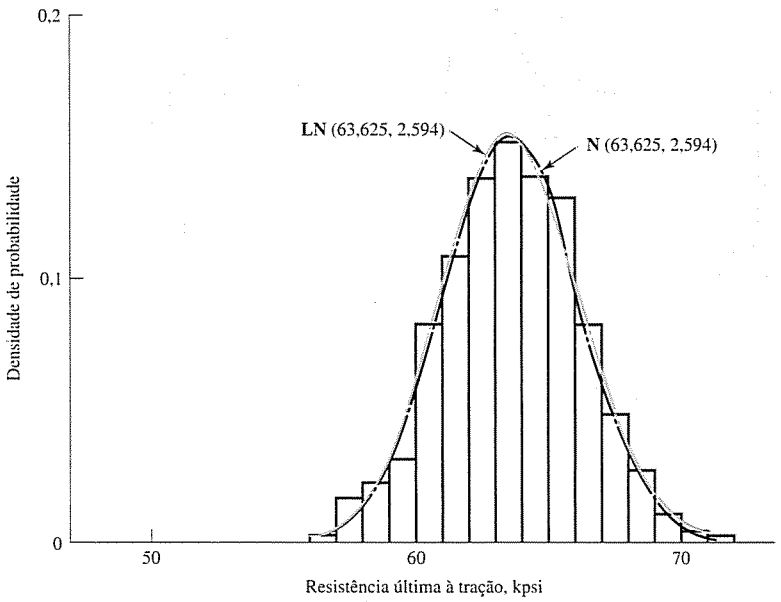


Figura 2-8 Histograma para os Exemplos 2-4 e 2-5, com as funções de densidade de probabilidade normal e *lognormal* superpostas.

Distribuição Uniforme

A distribuição uniforme é uma distribuição de intervalo fechado que surge quando a chance de uma observação é a mesma que para qualquer outra observação. Se a é o limite inferior e b, o superior, então a função de densidade de probabilidade (PDF) para a distribuição uniforme é

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & a \le x \le b \\ 0 & a > x > b \end{cases} \tag{2-20}$$

A função cumulativa de densidade (CDF), a integral de $f(x)$, é, portanto, linear no intervalo $a \le x \le b$ fornecido por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ (x-a)/(b-a) & a \le x \le b \\ 1 & x > b \end{cases} \tag{2-21}$$

A média e o desvio-padrão são dados por

$$\mu_x = \frac{a+b}{2} \tag{2-22}$$

$$\hat{\sigma}_x = \frac{b-a}{2\sqrt{3}} \tag{2-23}$$

A distribuição uniforme surge, durante o processo de manufatura, quando uma peça é produzida em série, em uma operação automática, e a dimensão gradualmente muda pelo desgaste da ferramenta e pelas forças aumentadas desta entre os ajustes que recebe. Se n é a seqüência da peça, ou o número do processo, e n_f é o número de seqüência da peça final produzida antes de outro ajuste, então a dimensão x é representada linearmente, quando traçada contra o número de seqüência n. Se a última peça de prova feita durante o ajuste tem uma dimensão x_i e a peça final produzida tem uma dimensão x_f, a magnitude da dimensão no número de seqüência n é dada por

$$x = x_i + (x_f - x_i)\frac{n}{n_f} = x_i + (x_f - x_i)F(x) \tag{a}$$

visto que n / n_f é uma boa aproximação para a CDF. Solucionando a Equação (a) para $F(x)$, obtemos

$$F(x) = \frac{x - x_i}{x_f - x_i} \tag{b}$$

Compare essa equação com a forma intermediária da Equação (2-21).

Distribuição de Weibull

A distribuição de Weibull não surge da estatística clássica e tampouco costuma ser incluída em livros-texto de estatística elementar. De fato, é muito mais provável que ela venha a ser discutida e utilizada em trabalhos que lidem com resultados de experimentos, particularmente com a confiabilidade. Trata-se de uma distribuição camaleônica, assimétrica, com valores diferentes para a média e a mediana. Tal distribuição contém uma boa aproximação da distribuição normal, bem como uma representação exata da distribuição exponencial. A maioria das informações de confiabilidade provém de dados laboratoriais e de serviços de campo; ademais, devido à sua flexibilidade, a distribuição de Weibull é amplamente empregada.

A expressão para a confiabilidade é o valor da função cumulativa de densidade complementar à unidade. Para a distribuição de Weibull, esse valor é tanto explícito quanto simples. A confiabilidade fornecida pela *distribuição de Weibull de três parâmetros* é

$$R(x) = \exp\left[-\left(\frac{x - x_0}{\theta - x_0}\right)^b\right] \qquad x \geq x_0 \geq 0 \tag{2-24}$$

em que os três parâmetros são

x_0 = valor mínimo, garantido, de x
θ = um valor característico, ou valor de escala ($\theta \geq x_0$)
b = um parâmetro de forma ($b > 0$)

Para o caso especial em que $x_0 = 0$, a Equação (2-24) torna-se uma distribuição de Weibull de dois parâmetros

$$R(x) = \exp\left[-\left(\frac{x}{\theta}\right)^b\right] \qquad x \geq 0 \tag{2-25}$$

A variante característica θ desempenha um papel similar à média e representa um valor de x abaixo do qual situam-se 63,2% das observações.

O parâmetro de forma b controla a obliqüidade da distribuição. A Figura 2-9 mostra que valores grandes de b obliquam a distribuição para a direita e valores pequenos de b a obliquam para a esquerda. No intervalo $3{,}3 < b < 3{,}5$, uma simetria aproximada é obtida em conjunto com uma boa aproximação à distribuição normal. Quando $b = 1$, a distribuição é exponencial.

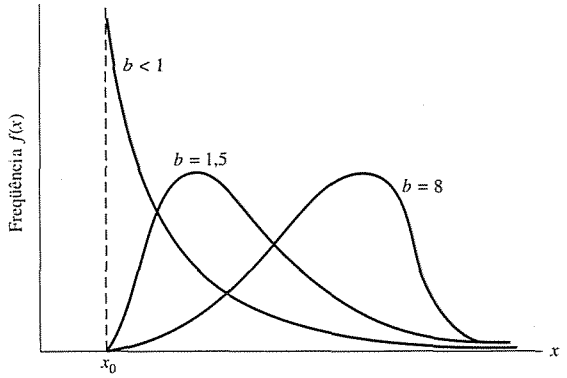


Figura 2-9 A função de densidade da distribuição de Weibull mostrando o efeito de obliqüidade do parâmetro de forma b.

Dada uma confiabilidade específica requerida, solucionando a Equação (2-24) para x, obtemos

$$x = x_0 + (\theta - x_0)\left(\ln \frac{1}{R}\right)^{1/b} \tag{2-26}$$

Para encontrar a função de probabilidade, observamos que

$$F(x) = 1 - R(x) \tag{a}$$

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = -\frac{dR(x)}{dx} \tag{b}$$

Logo, para a distribuição de Weibull,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{b}{\theta - x_0}\left(\dfrac{x - x_0}{\theta - x_0}\right)^{b-1} \exp\left[-\left(\dfrac{x - x_0}{\theta - x_0}\right)^{b}\right] & x \geq x_0 \geq 0 \\ 0 & x \leq x_0 \end{cases} \tag{2-27}$$

A média e o desvio-padrão são fornecidos por

$$\mu_x = x_0 + (\theta - x_0)\,\Gamma(1 + 1/b) \tag{2-28}$$

$$\hat{\sigma}_x = (\theta - x_0)\sqrt{\Gamma(1 + 2/b) - \Gamma^2(1 + 1/b)} \tag{2-29}$$

em que Γ é a função gama e pode ser encontrada classificada na Tabela A-34. A notação para a distribuição de Weibull é[1]

$$\mathbf{x} = \mathbf{W}(x_0, \theta, b) \tag{2-30}$$

EXEMPLO 2-6

A distribuição de Weibull é empregada extensivamente, para expressar a confiabilidade de mancais de rolamento de contato (ver Seção 11-4). Aqui, a variante x é posta, em forma adimensional, como $x = L/L_{10}$, em que L é a vida do mancal em, digamos, números de ciclos e L_{10} é a vida nominal do fabricante do mancal em que 10% dos mancais falharam (90% de confiabilidade).

Construa as propriedades distribucionais de um mancal de esfera de ranhura profunda de 02-30 mm, se os parâmetros da distribuição de Weibull forem $x_{10} = 0{,}0200$, $\theta = 4{,}459$ e $b = 1{,}483$. Encontre a média, a mediana, L_{90} e o desvio-padrão.

[1] Para estimar os parâmetros de Weibull a partir dos dados, ver J. E. Shigley e C. R. Mischke, *Mechanical Engineering Design*, 5th ed., 1989, McGraw-Hill, New York, Sec. 4-12. Os referidos parâmetros são determinados para os dados apresentados no Exemplo 2-4.

Solução A partir da Equação (2-28), a vida média adimensional é

Resposta
$$\mu_x = x_0 + (\theta - x_0)\Gamma(1 + 1/b)$$
$$= 0{,}0200 + (4{,}459 - 0{,}0200)\Gamma(1 + 1/1{,}483) = 4{,}033$$

Isso diz que a vida média do mancal é de 4,033 L_{10}. Já a vida mediana adimensional corresponde a $R = 0{,}5$, ou L_{50}, e, a partir da Equação (2-26), é

Resposta
$$x_{0,5} = x_0 + (\theta - x_0)\left(\ln\frac{1}{0{,}5}\right)^{1/b} = 0{,}0200 + (4{,}459 - 0{,}0200)\left(\ln\frac{1}{0{,}5}\right)^{1/1{,}483}$$
$$= 3{,}487$$

Para L_{90}, $R = 0{,}1$, e a vida adimensional x é

Resposta
$$x_{0,90} = 0{,}0200 + (4{,}459 - 0{,}0200)\left(\ln\frac{1}{0{,}1}\right)^{1/1{,}483} = 7{,}810$$

O desvio-padrão da vida adimensional é fornecido pela Equação (2-29):

Resposta
$$\hat{\sigma}_x = (\theta - x_0)\sqrt{\Gamma(1 + 2/b) - \Gamma^2(1 + 1/b)}$$
$$= (4{,}459 - 0{,}0200)\sqrt{\Gamma(1 + 2/1{,}483) - \Gamma^2(1 + 1/1{,}483)} = 2{,}753$$

2-4 Propagação do Erro

Na equação para a tensão axial

$$\sigma = \frac{F}{A} \tag{a}$$

suponha que a força F e a área A sejam variáveis aleatórias. Assim sendo, a Equação (*a*) é escrita como

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{A}} \tag{b}$$

e vemos que a tensão σ é também uma variável aleatória. Quando a Equação (*b*) é solucionada, diz-se que os erros inerentes a **F** e **A** são *propagados* à variante de tensão σ. Não é difícil pensar em muitas outras relações em que isso ocorrerá.

Suponha que desejemos adicionar as duas variantes **x** e **y** para formar uma terceira variante, **z**. Isso é escrito como

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y} \tag{c}$$

A média é dada como

$$\mu_z = \mu_x + \mu_y \tag{d}$$

O desvio-padrão segue o teorema de Pitágoras. Logo, tanto para adição como para subtração de variáveis independentes, ele é

$$\hat{\sigma}_z = \sqrt{\hat{\sigma}_x^2 + \hat{\sigma}_y^2} \tag{e}$$

Relações similares foram elaboradas para diversas funções e são mostradas na Tabela 2-6. Os resultados apresentados podem ser facilmente combinados, para formar outras funções.

Uma pergunta aqui não respondida diz respeito a qual é a distribuição que resulta de várias operações. Para respostas a essa questão, os estatísticos utilizam teoremas de fechamento e o teorema do limite central.[2]

[2] Ver E. B. Haugen, *Probabilistic Mechanical Design*, Wiley, New York, 1980, p. 49-54.

Tabela 2-6 Médias e desvios-padrão para operações algébricas simples em variáveis aleatórias independentes (não-correlacionadas)

Função	Média (μ)	Desvio-padrão ($\hat{\sigma}$)
a	a	0
$\mathbf{x}$	μ_x	$\hat{\sigma}_x$
$\mathbf{x}+a$	$\mu_x + a$	$\hat{\sigma}_x$
$a\mathbf{x}$	$a\mu_x$	$a\hat{\sigma}_x$
$\mathrm{x}+\mathrm{y}$	$\mu_x + \mu_y$	$\left(\hat{\sigma}_x^2 + \hat{\sigma}_y^2\right)^{1/2}$
$\mathrm{x}-\mathrm{y}$	$\mu_x - \mu_y$	$\left(\hat{\sigma}_x^2 + \hat{\sigma}_y^2\right)^{1/2}$
xy	$\mu_x\mu_y$	$\mu_x\mu_y\left(C_x^2 + C_y^2 + C_x^2C_y^2\right)^{1/2}$
$\mathrm{x/y}$	μ_x/μ_y	$\mu_x/\mu_y\left[\left(C_x^2 + C_y^2\right)/\left(1 + C_y^2\right)\right]^{1/2}$
$\mathbf{x}^n$	$\mu_x^n\left[1 + \frac{n(n-1)}{2}C_x^2\right]$	$\lvert n\rvert\mu_x^nC_x\left[1 + \frac{(n-1)^2}{4}C_x^2\right]$
$1/\mathbf{x}$	$\frac{1}{\mu_x}\left(1 + C_x^2\right)$	$\frac{C_x}{\mu_x}\left(1 + C_x^2\right)$
$1/\mathbf{x}^2$	$\frac{1}{\mu_x^2}\left(1 + 3C_x^2\right)$	$\frac{2C_x}{\mu_x^2}\left(1 + \frac{9}{4}C_x^2\right)$
$1/\mathbf{x}^3$	$\frac{1}{\mu_x^3}\left(1 + 6C_x^2\right)$	$\frac{3C_x}{\mu_x^3}\left(1 + 4C_x^2\right)$
$1/\mathbf{x}^4$	$\frac{1}{\mu_x^4}\left(1 + 10C_x^2\right)$	$\frac{4C_x}{\mu_x^4}\left(1 + \frac{25}{4}C_x^2\right)$
$\sqrt{\mathbf{x}}$	$\sqrt{\mu_x}\left(1 - \frac{1}{8}C_x^2\right)$	$\frac{\sqrt{\mu_x}}{2}C_x\left(1 + \frac{1}{16}C_x^2\right)$
$\mathbf{x}^2$	$\mu_x^2\left(1 + C_x^2\right)$	$2\mu_x^2C_x\left(1 + \frac{1}{4}C_x^2\right)$
$\mathbf{x}^3$	$\mu_x^3\left(1 + 3C_x^2\right)$	$3\mu_x^3C_x\left(1 + C_x^2\right)$
$\mathbf{x}^4$	$\mu_x^4\left(1 + 6C_x^2\right)$	$4\mu_x^4C_x\left(1 + \frac{9}{4}C_x^2\right)$

Nota: O coeficiente de variação da variante $\mathbf{x}$ é $C_x = \hat{\sigma}_x/\mu_x$. Para COVs pequenos, seus quadrados são pequenos se comparados à unidade; assim, o primeiro termo nas potências de expansão de $\mathbf{x}$ são excelentes aproximações. Para produtos correlatos e quocientes, ver Charles R. Mischke, *Mathematical Model Building*, 2ª ed., Iowa State University Press, Ames, 1980, Ap. C.

EXEMPLO 2-7

Uma barra redonda sujeita a uma carga de flexão tem um diâmetro $\mathbf{d} = \mathbf{LN}(2{,}000, 0{,}002)$ in. Essa equivalência afirma que o diâmetro médio é $\mu_d = 2{,}000$ in e o desvio-padrão, $\hat{\sigma}_d = 0{,}002$ in. Encontre a média e o desvio-padrão do segundo momento de área.

Solução

O segundo momento de área é fornecido pela equação

$$\mathbf{I} = \frac{\pi \mathbf{d}^4}{64}$$

O coeficiente de variação do diâmetro é

$$C_d = \frac{\hat{\sigma}_d}{\mu_d} = \frac{0{,}002}{2} = 0{,}001$$

Utilizando a Tabela 2-6, encontramos

Resposta
$$\mu_I = (\pi/64)\mu_d^4\left(1 + 6C_d^2\right) = (\pi/64)(2{,}000)^4[1 + 6(0{,}001)^2] = 0{,}785 \text{ in}^4$$

Resposta
$$\hat{\sigma}_I = 4\mu_d^4 C_d\left[1 + (9/4)C_d^2\right] = 4(2{,}000)^4(0{,}001)[1 + (9/4)(0{,}001)^2] = 0{,}064 \text{ in}^4$$

Esses resultados podem ser expressos na forma

$$\mathbf{I} = (0{,}785, 0{,}064) = 0{,}785\mathbf{LN}(1, 0{,}0815) \text{ in}^4$$

2-5 Regressão Linear

Os estatísticos utilizam um processo de análise denominado *regressão* para obter uma curva que melhor se ajuste a um conjunto de pontos de dados. O processo é chamado de *regressão linear* quando se descobre que o melhor ajuste é a linha reta. O significado da palavra *melhor* é aberto a argumentações, uma vez que podem existir muitos significados. O método usual, e aqui empregado, considera uma linha como "melhor" se ela minimiza os quadrados dos desvios dos pontos de dados em relação a si própria.

A Figura 2-10 ilustra um conjunto de pontos de dados aproximados pela linha AB. A equação-padrão de uma linha reta é

$$y = mx + b \tag{2-31}$$

em que m é a inclinação e b, a intersecção em y. Considere um conjunto de N pontos de dados (x_i, y_i). Em geral, a linha de melhor ajuste não cruzará um ponto de dados. Logo, podemos escrever

$$y_i = mx_i + b + \epsilon_i \tag{b}$$

em que $\varepsilon_i = y_i - y$ é o desvio entre o ponto de dados e a linha. A soma dos quadrados dos desvios é fornecida por[3]

$$\mathcal{E} = \sum \epsilon_i^2 = \sum (y_i - mx_i - b)^2 \tag{c}$$

Minimizar ε, a soma dos erros quadrados, esperando um ponto mínimo estacionário, requer $\partial\varepsilon/\partial m = 0$ e $\partial\varepsilon/\partial b = 0$. Isso resulta em duas equações simultâneas para a inclinação e a intersecção em y, denotadas por $\hat{m}$ e $\hat{b}$, respectivamente. Solucionando essas equações, obtemos

$$\hat{m} = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} = \frac{\sum x_i y_i - N\bar{x}\bar{y}}{\sum x_i^2 - N\bar{x}^2} \tag{2-32}$$

$$\hat{b} = \frac{\sum y_i - \hat{m}\sum x_i}{N} = \bar{y} - \hat{m}\bar{x} \tag{2-33}$$

Uma vez que você tenha estabelecido uma inclinação e uma intersecção, o próximo ponto de interesse será descobrir quão bem x e y correlacionam-se entre si. Se os pontos de dados estão espalhados comple-

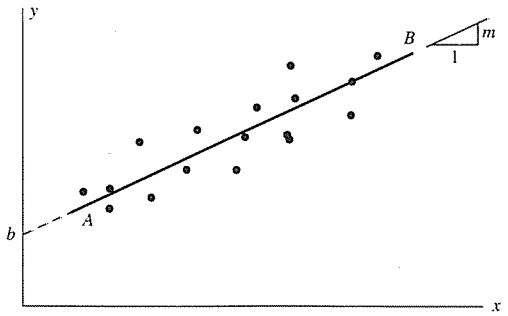


Figura 2-10 Conjunto de pontos de dados aproximados pela linha de regressão AB.

[3] Deste ponto em diante, para economia de notação, os limites da soma de $i(1, N)$ não serão exibidos.

tamente sobre o plano xy, não há obviamente correlação alguma. No entanto, se todos os pontos de dados coincidem com a linha de regressão, há então uma correlação perfeita. A maioria dos dados estatísticos estará entre esses extremos. Um *coeficiente de correlação* r, tendo o intervalo $-1 \leq r \leq +1$, foi criado para responder a tal questão. A fórmula é

$$r = \hat{m}\frac{s_x}{s_y} \tag{2-34}$$

em que s_x e s_y são os desvios-padrão das coordenadas x e y dos dados, respectivamente. Se $r = 0$, não há correlação; se $r = \pm 1$, há uma correlação perfeita. Um valor de r positivo ou negativo indica que a linha de regressão tem uma inclinação positiva ou negativa, respectivamente.

Os desvios-padrão para $\hat{m}$ e $\hat{b}$ são fornecidos por

$$s_{\hat{m}} = \frac{s_{y \cdot x}}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2}} \tag{2-35}$$

$$s_{\hat{b}} = s_{y \cdot x}\sqrt{\frac{1}{N} + \frac{\bar{x}^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}} \tag{2-36}$$

em que

$$s_{y \cdot x} = \sqrt{\frac{\sum y_i^2 - \hat{b}\sum y_i - \hat{m}\sum x_i y_i}{N - 2}} \tag{2-37}$$

é o desvio-padrão do espalhamento dos dados em relação à linha de regressão.

EXEMPLO 2-8

Um espécime de um aço carbono médio foi ensaiado em tração. Foi utilizado um medidor de extensão durante seu carregamento e descarregamento, para ver se a leitura retornava a "sem carga"; então, uma segunda carga, maior, foi aplicada. As cargas e as elongações do medidor de extensão foram reduzidas à tensão σ e à deformação ϵ, produzindo os seguintes dados:

σ, psi	5033	10 068	15 104	20 143	35 267
ϵ	0,000 20	0,000 30	0,000 50	0,000 65	0,001 15

Encontre o módulo médio de Young $\bar{E}$ e seu desvio-padrão. Visto que o medidor de extensão parece apresentar uma leitura inicial "sem carga", utilize uma regressão $y = mx + b$.

Solução

A partir da Tabela 2-7, $\bar{x} = 0{,}002\,80/5 = 0{,}000\,56$ e $\bar{y} = 85\,615/5 = 17\,123$. Observe que uma linha de regressão sempre contém o centróide de dados. A partir da Equação (2-32),

$$\hat{m} = \frac{5(65{,}229) - 0{,}0028(85\,615)}{5(0{,}000\,002\,125) - 0{,}0028^2} = 31{,}03(10^6)\,\text{psi} = \bar{E}$$

Resposta

A partir da Equação (2-33)

$$\hat{b} = \frac{0{,}000\,002\,125(85\,615) - 0{,}002\,80(65{,}229)}{5(0{,}000\,002\,125) - 0{,}0028^2} = -254{,}69\,\text{psi}$$

A partir da Equação (2-34), obtendo s_x e s_y a partir de uma rotina de calculadora estatística,

$$\hat{r} = \frac{\hat{m}s_x}{s_y} = \frac{31\,031\,597{,}85(3\,162\,163\,10^{-4})}{11\,601{,}11} = 0{,}998$$

A partir da Equação (2-37), o espalhamento ao redor da linha de regressão é medido pelo desvio-padrão $s_{y \cdot x}$ e é igual a

$$s_{y \cdot x} = \sqrt{\frac{\sum y^2 - \hat{b}\sum y - \hat{m}\sum xy}{N-2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\,004\,328\,267 - (-254{,}69)85\,615 - 31{,}03(10^6)(65{,}229)}{5-2}}$$

$$= 811{,}1 \text{ psi}$$

Tabela 2-7 Planilha para o Exemplo 2-6

y σ, psi	x ϵ	x^2	xy	y^2	$(x-\bar{x})^2$
5 033	0,000 20	0,000 000 040	1,006 600	25 330 089	0,000 000 130
10 068	0,000 30	0,000 000 090	3,020 400	101 364 624	0,000 000 069
15 104	0,000 50	0,000 000 250	7,552 000	228 130 816	0,000 000 004
20 143	0,000 65	0,000 000 423	13,092 950	405 740 449	0,000 000 008
35 261	0,001 15	0,000 001 323	40,557 050	1 243 761 289	0,000 000 348
Σ85 615	0,002 80	0,000 002 125	65,229 000	2 004 328 267	0,000 000 556

Nota: $\bar{y} = 85\,615/5 = 17\,123$ psi, $\bar{x} = 0{,}002\,80/5 = 0{,}000\,56$.

A partir da Equação (2-35), o desvio-padrão de $\hat{m}$ é

Resposta

$$s_{\hat{m}} = \frac{s_{y \cdot x}}{\sqrt{\sum (x-\bar{x})^2}} = \frac{811{,}1}{\sqrt{0{,}000\,000\,558}} = 1{,}086(10^6) \text{ psi} = s_E$$

Ver a Figura 2-11 para o gráfico de regressão.

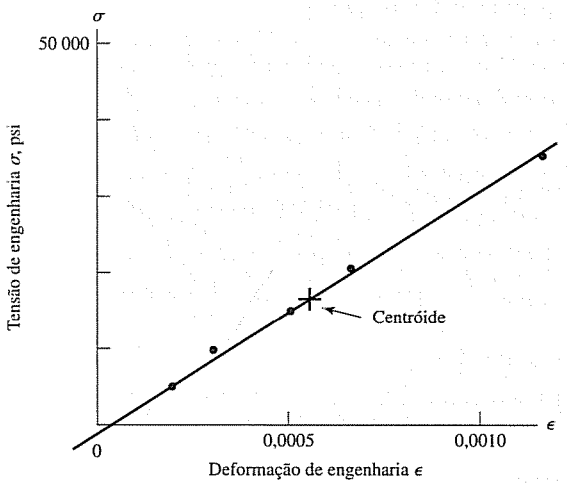


Figura 2-11 Os dados do Exemplo 2-8 são traçados. A linha de regressão passa pelo centróide dos dados e entre os pontos de dados, minimizando os desvios quadrados.

2-6 Limites e Ajustes

O assunto de limites e ajustes mereceria um capítulo à parte. Porém, será aqui incluído porque a variabilidade inerente a muitas classes de ajuste é extremamente útil para demonstrar aplicações práticas das idéias estatísticas apresentadas.

O projetista é livre para adotar qualquer geometria de ajuste para eixos e furos que venha a assegurar a função pretendida. Há suficiente experiência acumulada com situações recorrentes comuns para tornar a padronização útil. Existem dois padrões para limites e ajustes nos Estados Unidos, um baseado em unidades inglesas e o outro em unidades métricas.[4] Ambos diferem em nomenclatura, definições e organização. De nada serviria estudar separadamente cada um desses dois sistemas, dos quais a versão métrica é a mais nova e está bem organizada; sendo assim, apresentaremos aqui somente essa versão, mas incluiremos um conjunto de conversões a polegadas, para habilitar o mesmo sistema a ser utilizado com qualquer sistema de unidades.

Ao utilizar o padrão, *letras maiúsculas sempre se referem ao furo; letras minúsculas são empregadas para o eixo.*

As definições ilustradas na Figura 2-12 são explicadas como segue:

- *Tamanho básico* é o tamanho a que limites ou desvios são assinalados e é o mesmo para ambos os membros do ajuste.
- *Desvio* é a diferença algébrica entre um tamanho e o tamanho básico correspondente.
- *Desvio superior* é a diferença algébrica entre o limite máximo e o tamanho básico correspondente.
- *Desvio inferior* é a diferença algébrica entre o limite mínimo e o tamanho básico correspondente.
- *Desvio fundamental* é tanto o desvio superior quanto o inferior, dependendo de qual é o mais próximo do tamanho básico.
- *Tolerância* é a diferença entre os limites de tamanho máximo e mínimo de uma componente.
- Números de *grau de tolerância internacional* (IT) designam grupos de tolerâncias, de forma que as tolerâncias para um número particular IT apresentam o mesmo nível relativo de acurácia, mas variam de acordo com o tamanho básico.
- *Base furo* representa um sistema de ajustes correspondente a um tamanho básico de furo. O desvio fundamental é H.
- *Base eixo* representa um sistema de ajustes correspondente a um tamanho básico de eixo. O desvio fundamental é h. O sistema base eixo não é incluído aqui.

A magnitude da zona de tolerância é a variação em tamanho da peça e também a mesma para ambas as dimensões interna e externa. As zonas de tolerância são especificadas pelos números de grau de tolerância internacional, denominados números IT. Os números para graus menores especificam uma zo-

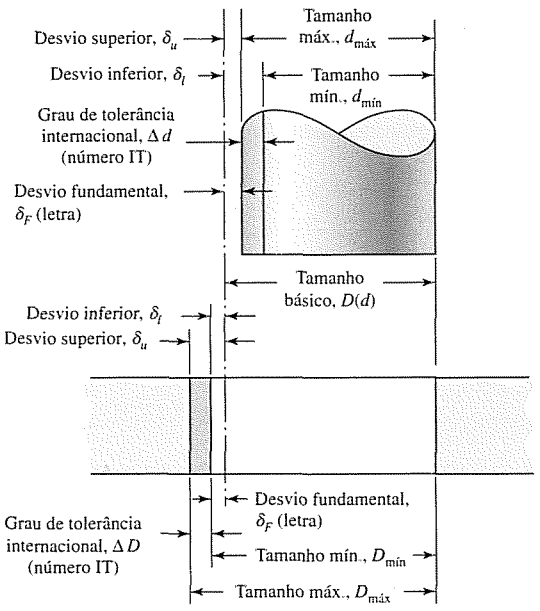


Figura 2-12 Definições aplicadas a um ajuste cilíndrico.

[4] *Preferred Metric Limits* e *Fits for Cylindrical Parts*, ANSI B4.1-1967. *Preferred Metric Limits and Fits*, ANSI B4.2-1978.

na de tolerância menor; variam de IT0 a IT16, mas somente os graus IT6 a IT11 são necessários para os ajustes preferenciais. Eles estão listados nas Tabelas A-11 a A-13 para tamanhos básicos de até 16 in ou 400 mm.

O padrão utiliza *letras de posição de tolerância*, com maiúsculas para dimensões internas (furos) e minúsculas para dimensões externas (eixos). Como mostrado na Figura 2-12, o desvio fundamental localiza a zona de tolerância relativa ao tamanho básico.

A Tabela 2-8 mostra como as letras são combinadas com os graus de tolerância para estabelecer o ajuste preferido. O símbolo ISO para furo de um ajuste deslizante com tamanho básico de 32 mm é 32H7. As unidades inglesas (polegadas) não são parte do padrão. Contudo, a designação ($1\frac{3}{8}$ in)H7 inclui a mesma informação e é recomendada para uso aqui. Em ambos os casos, a letra maiúscula H estabelece o desvio fundamental e o número 7 define um grau de tolerância de IT7.

Para um ajuste deslizante, as dimensões correspondentes do eixo são definidas pelo símbolo 32g6 [($1\frac{3}{8}$ in)g6].

Os desvios fundamentais para eixos são fornecidos nas Tabelas A-11 e A-13. Para códigos de letras c, d, f, g e h,

Desvio superior = desvio fundamental
Desvio inferior = desvio superior – grau de tolerância

Para códigos de letras k, n, p, s e u, os desvios para eixos são

Desvio inferior = desvio fundamental
Desvio superior = desvio inferior + grau de tolerância

O desvio inferior H (para furos) é zero. Para estes, o desvio superior iguala o grau de tolerância.

Tabela 2-8 Descrições de ajustes preferenciais utilizando o sistema básico de furo

Tipos de ajuste	Descrição	Símbolo
Folga	*Ajuste corrediço folgado*: para tolerâncias comerciais amplas ou margens em membros externos.	H11/c11
	Ajuste corrediço livre: não deve ser utilizado quando a acurácia é essencial, mas é bom para grandes variações de temperatura, altas velocidades ou pressões elevadas em munhão.	H9/d9
	Ajuste corrediço apertado: para funcionamento em máquinas precisas e para posicionamento acurado a velocidades e pressões moderadas em munhão.	H8/f7
	Ajuste deslizante: onde as peças não são destinadas a correr livremente, mas sim a mover-se e girar livremente, bem como a se posicionar com precisão.	H7/g6
	Ajuste locativo com folga: provê um ajuste apertado para a localização de peças estacionárias, que, no entanto, podem ser livremente montadas e desmontadas.	H7/h6
Transição	*Ajuste de transição locativa* para localização acurada, um compromisso entre folga e interferência.	H7/k6
	Ajuste de transição locativa para localização mais acurada em que maior interferência é permissível.	H7/n6
Interferência	*Ajuste de interferência locativa*: para peças requerendo rigidez e alinhamento com acurácia primordial de localização, mas sem requisitos especiais de pressão de furo.	H7/p6
	Ajuste de esforço médio: para peças feitas de aço de uso corriqueiro ou ajustes de contração de secções leves, o ajuste mais apertado que se pode utilizar com ferro fundido.	H7/s6
	Ajuste forçado: adequado para peças que podem sofrer tensões elevadas ou para ajustes de contração nos quais grandes forças de prensagem são impraticáveis.	H7/u6

Fonte: Preferred Metric Limits and Fits, ANSI B4.2-1978. Ver também BS 4500.

Como mostrado na Figura 2-12, utilizamos a seguinte notação:

D = tamanho básico do furo
d = tamanho básico do eixo
δ_u = desvio superior
δ_l = desvio inferior
δ_F = desvio fundamental
ΔD = grau de tolerância para o furo
Δd = grau de tolerância para o eixo

Observe que essas quantidades são todas determinísticas. Logo, para o furo,

$$D_{\max} = D + \Delta D \qquad D_{\min} = D \tag{2-38}$$

Para eixos com ajustes com folga c, d, f, g e h,

$$d_{\max} = d + \delta_F \qquad d_{\min} = d + \delta_F - \Delta d \tag{2-39}$$

Para eixos com ajustes por interferência k, n, p, s e u,

$$d_{\min} = d + \delta_F \qquad d_{\max} = d + \delta_F + \Delta d \tag{2-40}$$

EXEMPLO 2-9

Encontre as dimensões de eixo e de furo para um ajuste corrediço folgado com um tamanho básico de 34 mm.

Solução A partir da Tabela 2-8, o símbolo ISO é 34H11/c11. A partir da Tabela A-11, descobrimos que o grau de tolerância IT11 é de 0,160 mm. O símbolo 34H11/c11, portanto, diz que $\Delta D = \Delta d = 0{,}160$ mm. Utilizando a Equação (2-38) para o furo, obtemos

Resposta $$D_{\max} = D + \Delta D = 34 + 0{,}160 = 34{,}160 \text{ mm}$$

Resposta $$D_{\min} = D = 34{,}000 \text{ mm}$$

O eixo é designado como um eixo 34c11. A partir da Tabela A-12, o desvio fundamental é $\delta_F = -0{,}120$ mm. Utilizando a Equação (2-39), obtemos, para as dimensões de eixo,

Resposta $$d_{\max} = d + \delta_F = 34 + (-0{,}120) = 33{,}880 \text{ mm}$$

Resposta $$d_{\min} = d + \delta_F - \Delta d = 34 + (-0{,}120) - 0{,}160 = 33{,}720 \text{ mm}$$

EXEMPLO 2-10

Encontre os limites de furo e de eixo para um ajuste de esforço médio utilizando um tamanho básico de furo de 2 in.

Solução O símbolo para o ajuste, a partir da Tabela 2-8, em unidades de polegadas, é (2 in)H7/s6. Para o furo, utilizamos a Tabela A-13 e descobrimos que o grau IT7 é $\Delta D = 0{,}0010$ in. Logo, a partir da Equação (2-38),

Resposta $$D_{\max} = D + \Delta D = 2 + 0{,}0010 = 2{,}0010 \text{ in}$$

Resposta $$D_{\min} = D = 2{,}0000 \text{ in}$$

A tolerância IT6, para o eixo, é $\Delta d = 0{,}0006$ in. Ademais, a partir da Tabela A-14, o desvio fundamental é $\delta_F = 0{,}0017$ in. Utilizando a Equação (2-40), descobrimos, para o eixo, que

Resposta $$d_{\min} = d + \delta_F = 2 + 0{,}0017 = 2{,}0017 \text{ in}$$

Resposta $$d_{\max} = d + \delta_F + \Delta d = 2 + 0{,}0017 + 0{,}0006 = 2{,}0023 \text{ in}$$

2-7 Dimensões e Tolerâncias

Os seguintes termos são utilizados geralmente no dimensionamento:

- *Tamanho nominal.* O tamanho que utilizamos ao falar de um elemento. Por exemplo, podemos especificar um parafuso de $\frac{1}{2}$ in ou um tubo de $1\frac{1}{2}$ in. Tanto o tamanho teórico quanto o tamanho real medido podem ser bem diferentes. O parafuso, digamos, pode medir, de fato, 0,492 in, e o tamanho teórico de um tubo de $1\frac{1}{2}$ in vale 1,900 in para o diâmetro exterior.
- *Tamanho básico.* O tamanho teórico exato. Dimensões-limite, tanto para mais quanto para menos, se estabelecem a partir da dimensão básica.
- *Limites.* As dimensões máxima e mínima declaradas.
- *Tolerância.* A diferença entre os dois limites.
- *Tolerância bilateral.* A variação em ambas as direções, a partir da dimensão básica. Isto é, o tamanho básico situa-se entre os dois limites; por exemplo, $1{,}005 \pm 0{,}002$ in. As duas partes da tolerância não necessitam ser iguais.
- *Tolerância unilateral.* A dimensão básica é tida como um dos limites, e a variação permitida ocorre em uma direção apenas; por exemplo,

$$1{,}005 \begin{matrix} +\,0{,}004 \\ -\,0{,}000 \end{matrix} \text{ in}$$

- *Tolerância natural.* Uma tolerância igual a mais e menos três desvios-padrão, a partir da média. Para uma distribuição normal, isso assegura que 99,73% da produção estão dentro dos limites de tolerância.
- *Folga.* Um termo geral que se aplica a peças cilíndricas em par, tais como um parafuso e um furo. A palavra *folga* é utilizada somente quando o membro interno é menor que o externo. A *folga diametral* é a diferença medida nos dois diâmetros; a *radial*, a diferença entre os dois raios.
- *Interferência.* O oposto de folga, para peças cilíndricas em par nas quais o membro interno é maior que o externo.
- *Margem.* A mínima folga ou a máxima interferência declaradas para peças em par.

Variações em dimensões de peças, num processo de produção, podem ocorrer puramente ao acaso, assim como por razões específicas. Por exemplo, a temperatura de operação de uma ferramenta de máquina varia durante a partida, e isso pode ter um efeito nas dimensões das peças produzidas durante os primeiros 30 minutos de operação. Estando todas essas variações em dimensões de peças eliminadas, diz-se que o processo de produção está em *controle estatístico.* Sob tais condições, todas as variações em dimensões ocorrem ao acaso.

Quando várias peças são montadas, a abertura (ou interferência) depende das dimensões e tolerâncias das peças individuais. Considere o conjunto de vetores paralelos na Figura 2-13. Os vetores x estão direcionados para a direita; os vetores y, para a esquerda. Tal como os vetores paralelos, eles se adicionam e subtraem de forma algébrica. A tolerância bilateral é t_i sobre a média $\bar{x}_i$ e t_j sobre a média $\bar{y}_j$, sendo todos os números positivos. O espaço que não é fechado é denominado w. A partir da Figura 2-13,

$$(x_1 + x_3 + \cdots) - (y_2 + y_4 + \cdots) - w = 0$$

que pode ser escrita sucintamente como

$$w = \sum x_i - \sum y_j \tag{2-41}$$

A folga máxima, w_{max}, ocorre quando os vetores que apontam para a direita são o máximo possível e os que apontam para a esquerda são o mínimo possível. Escrevemos

$$w_{max} = \sum(x_i + t_i) - \sum(y_j - t_j) = \sum \bar{x}_i - \sum \bar{y}_j + \sum_{all} t \tag{2-42}$$

De maneira semelhante para a folga mínima, w_{min}, podemos escrever

$$w_{min} = \sum(x_i - t_i) - \sum(y_j + t_j) = \sum \bar{x}_i - \sum \bar{y}_j - \sum_{all} t \tag{2-43}$$

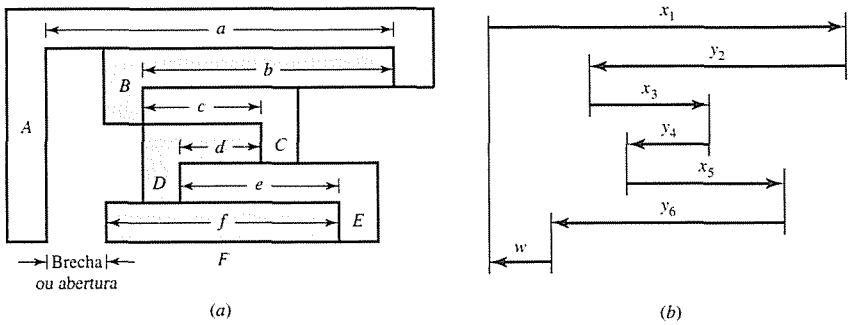


Figura 2-13 Uma montagem considerada como um grupo de vetores de deslocamento. (*a*) Cinco blocos *A*, *B*, *C*, *D* e *E* em forma de L e um bloco retangular *F* são montados como ilustrado. As dimensões *a*, *b*, *c*, *d*, *e* e *f* apresentam tolerâncias, fazendo-as variáveis aleatórias. (*b*) O diagrama correspondente de vetores mostrando o deslocamento que aponta para a direita como *x* e que aponta para a esquerda como *y* e *w*.

O valor médio é $\bar{w} = (w_{max} + w_{min})/2$. Substituindo as Equações (2-42) e (2-43) na expressão para w, e simplificando, obtemos

$$\bar{w} = \sum \bar{x}_i - \sum \bar{y}_j \tag{2-44}$$

A tolerância bilateral para essa folga é $t_w = (w_{max} - w_{min})/2$. Substituindo as Equações (2-42) e (2-43) na expressão para t_w, e simplificando, obtemos

$$t_w = \sum_{all} t \tag{2-45}$$

A Equação (2-45) é a base para a expressão "acúmulo de tolerâncias", utilizada na descrição da condição de folga. Todas as tolerâncias constituintes *adicionam-se* para produzir a tolerância da folga. Se o caso de folga w for negativo, haverá interferência. As Equações (2-44) e (2-45) são regras rígidas para as tolerâncias. Uma vez que *todas* as observações de w caem entre $\bar{w} - t_w$ e $\bar{w} + t_w$ e que nenhuma delas se situa fora desses números de intervalos, as duas referidas equações representam, portanto, um *sistema de tolerância absoluta.*

Dimensões de folgas próximas aos limites de folga são eventos raros, requerendo observações simultâneas próximas aos valores extremos de dimensões individuais, todas em um lado particular; isso sugere um sistema de tolerância estatística de pequeno risco. A equação operativa é a (2-41), escrita para variáveis aleatórias:

$$\mathbf{w} = \sum \mathbf{x}_i - \sum \mathbf{y}_j \tag{2-46}$$

A folga média $\bar{w}$ é a soma algébrica das médias constituintes:

$$\bar{w} = \sum \bar{x}_i - \sum \bar{y}_j \tag{2-47}$$

o que concorda com a Equação (2-44). A variância em **w** é a soma positiva de todas as (não-correlacionadas) variâncias constituintes:

$$\hat{\sigma}_w^2 = \sum \hat{\sigma}_i^2 + \sum \hat{\sigma}_j^2 = \sum_{all} \hat{\sigma}^2$$

Ocorre, portanto, que o desvio-padrão da folga **w** é

$$\hat{\sigma}_w = \sqrt{\sum_{all} \hat{\sigma}^2} \tag{2-48}$$

As Equações (2-47) e (2-48) são as equações operacionais para o *sistema de tolerância estatística.* Uma formulação comum da Equação (2-48) é

$$t_w = \sqrt{\sum_{all} t^2}$$

o que requer uma presunção de normalidade nas dimensões individuais – uma ocorrência rara. Para encontrar a distribuição de **w** e/ou a probabilidade de se observarem valores de $w > w_{crit}$ ou, alternativamente, de $w < w_{crit}$, requer-se uma simulação computacional na maioria dos casos. Simulações computacionais *de Monte Carlo* são usadas para determinar a distribuição de **w** pela seguinte abordagem:

1. Gere um exemplo i, para cada variável aleatória x_i ou y_i no problema, selecionando o valor de x_i ou de y_i com base na distribuição de probabilidade.
2. Calcule w_i utilizando os valores de x_i e y_i obtidos no passo 1.
3. Repita os passos 1 e 2 N vezes, para gerar a distribuição de w. À medida que o número de tentativas aumenta, também aumenta a confiabilidade da distribuição.

EXEMPLO 2-11

Um parafuso de gola tem três peças cilíndricas circulares retas vazadas, antes que uma porca seja apertada contra o apoio. Para suster a função, a folga w deve igualar-se ou exceder a 0,003 in. As peças na montagem representada na Figura 2-14 apresentam dimensões e tolerâncias como segue:

$$a = 1{,}750 \pm 0{,}003 \text{ in} \qquad b = 0{,}750 \pm 0{,}001 \text{ in}$$

$$c = 0{,}120 \pm 0{,}005 \text{ in} \qquad d = 0{,}875 \pm 0{,}001 \text{ in}$$

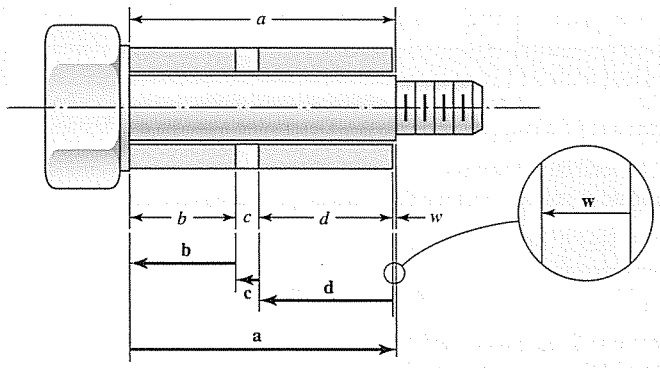


Figura 2-14 Uma montagem de três mangas cilíndricas (buchas) de comprimentos *a*, *b* e *c* na haste do parafuso de comprimento *a*. A folga **w** é de interesse.

Todas as peças são fornecidas por vendedores, exceto aquela com a dimensão d, que é feita localmente.

(*a*) Estime a média e a tolerância no intervalo **w**.

(*b*) Que valor de $\bar{d}$ assegurará $w > 0{,}003$ in?

Solução

(*a*) Utilizamos as equações precedentes para encontrar

Resposta

$$\bar{w} = 1{,}750 - 0{,}750 - 0{,}120 - 0{,}875 = 0{,}005 \text{ in} \tag{2-44}$$

$$t_w = 0{,}003 + 0{,}001 + 0{,}005 + 0{,}001 = 0{,}010 \text{ in} \tag{2-45}$$

Então,

$$w_{\max} = \bar{w} + t_w = 0{,}005 + 0{,}010 = 0{,}015 \text{ in} \tag{2-42}$$

$$w_{\min} = \bar{w} - t_w = 0{,}005 - 0{,}010 = -0{,}005 \text{ in} \tag{2-43}$$

Há tanto folga quanto interferência.

(*b*) Se $w_{\min}$ deve ser 0,003 in, então

$$\bar{w} = w_{\min} + t_w = 0{,}003 + 0{,}010 = 0{,}013 \text{ in}$$

Solucione a Equação (2-47) para $\bar{d}$:

Resposta $$\bar{d} = \bar{a} - \bar{b} - \bar{c} - \bar{w} = 1{,}750 - 0{,}750 - 0{,}120 - 0{,}013 = 0{,}867 \text{ in}$$

PROBLEMAS

Todos os problemas a seguir são de análise.

2-1 A uma amplitude constante e em um nível de tensão de flexão completamente reversa, a observação do número de ciclos até a ocorrência de falha de 69 espécimes de aço 5160H, produzidos a partir de barras hexagonais de estoque com lado de 1,25 in, ocorreu como segue:

L	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	210
f	2	1	3	5	8	12	6	10	8	5	2	3	2	1	0	1

em que L representa a vida, em milhares de ciclos, e f é a freqüência de classe das falhas.

(*a*) Construa um histograma que tenha a freqüência de classe f como ordenada.

(*b*) Estime a média e o desvio-padrão de vida para a população da qual a amostra foi retirada.

2-2 As determinações de resistência à tração S_{ut} de uma chapa de aço inoxidável (17-7PH, condição TH 1050), em tamanhos de 0,016 a 0,062 in, em 197 testes combinados em sete classes, foram

S_{ut}, kpsi	174	182	190	198	206	214	222
Freqüência, f	6	9	44	67	53	12	6

em que f é a freqüência de classe. Determine a média e o desvio-padrão.

2-3 Um total de 58 barras de aço AISI 1018 estiradas a frio foi ensaiado para determinar a resistência ao escoamento S_y referente a uma deformação permanente de 0,2%. Os resultados foram:

S_y, kpsi	64	68	72	76	80	84	88	92
f	2	6	6	9	19	10	4	2

em que S_y é o ponto médio de classe e f, a freqüência de classe. Estime a média e o desvio-padrão de S_y e sua PDF assumindo uma distribuição normal.

2-4 O logaritmo de base 10 de 55 observações do número de ciclos até a ocorrência de falha em espécimes submetidos a um nível constante de tensão de fadiga foi classificado como segue:

y	5,625	5,875	6,125	6,375	6,625	6,875	7,125	7,375	7,625	7,875	8,125
f	1	0	0	3	3	6	14	15	10	2	1

Aqui, y é o ponto médio de classe e f, a freqüência de classe.

(*a*) Estime a média e o desvio-padrão da população da qual a amostra foi retirada e estabeleça a PDF normal.

(*b*) Trace o histograma e superponha a freqüência de classe prevista a partir do ajuste para normal.

2-5 Um elemento redondo de $\frac{1}{2}$ in de diâmetro nominal é usinado em uma operação de máquina automática de parafuso que é inicialmente ajustada para produzir um diâmetro de 0,5000 in e reajustada quando o desgaste da ferramenta produz diâmetros que excedem a 0,5008 in. Um conjunto de peças é cuidadosamente misturado e produz uma distribuição uniforme de diâmetros.

(*a*) Estime a média e o desvio-padrão do grande lote de peças fabricado desde o ajuste até o reajuste.

(*b*) Encontre as expressões para a PDF e para a CDF da população.

(*c*) Se, por inspeção, os diâmetros menores que 0,5002 in forem removidos, quais serão as novas PDF e CDF, assim como a média e o desvio-padrão dos diâmetros dos elementos sobreviventes à inspeção?

2-6 O único desenho detalhado de uma peça de máquina está com uma dimensão manchada e ilegível. O elemento redondo em questão foi produzido em uma máquina automática de parafuso, e mil peças se encontram em estoque. Uma amostra aleatória com 50 peças produziu uma dimensão média $\bar{d} = 0{,}6241$ in e um desvio-padrão $s = 0{,}000\,581$ in. As dimensões afetadas de tolerâncias em outros lugares são apresentadas em milésimos de polegada. Estime a informação faltante no desenho.

2-7 (*a*) A CDF da variante **x** é $F(x) = 0{,}555x - 33$, sendo que x está em milímetros. Encontre a PDF, a média, o desvio-padrão e os números que delimitam o intervalo da distribuição.

(*b*) Na expressão $\sigma = \mathbf{F/A}$, a força é dada por $\mathbf{F} = \mathbf{LN}(3600, 300)$ lbf e a área, por $\mathbf{A} = \mathbf{LN}(0{,}112, 0{,}001)$ in^2. Estime a média, o desvio-padrão, o coeficiente de variação e a distribuição σ.

2-8 Um modelo de regressão da forma $y = a_1x + a_2x^2$ é pretendido. A partir das equações normais

$$\sum y = a_1 \sum x + a_2 \sum x^2$$

$$\sum xy = a_1 \sum x^2 + a_2 \sum x^3$$

mostre que

$$a_1 = \frac{\sum y \sum x^3 - \sum xy \sum x^2}{\sum x \sum x^3 - \left(\sum x^2\right)^2} \quad \text{e} \quad a_2 = \frac{\sum x \sum xy - \sum y \sum x^2}{\sum x \sum x^3 - \left(\sum x^2\right)^2}$$

Para o conjunto de dados

x	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
y	0,01	0,15	0,25	0,25	0,17	−0,01

encontre a equação de regressão e trace os dados com o modelo de regressão.

2-9 R. W. Landgraf reportou as seguintes resistências à fadiga axial (movimento de puxar e empurrar) de aços com diferentes resistências à tração últimas:

S_u	S'_e	S_u	S'_e	S_u	S'_e
65	29,5	325	114	280	96
60	30	238	109	295	99
82	45	130	67	120	48
64	48	207	87	180	84
101	51	205	96	213	75
119	50	225	99	242	106
195	78	325	117	134	60
210	87	355	122	145	64
230	105	225	87	227	116
265	105				

(*a*) Trace um gráfico dos dados utilizando S'_e como ordenada e S_u como abscissa.

(*b*) Utilizando o modelo de regressão linear $y = mx + b$, encontre a linha de regressão e seu traçado.

2-10 Em estudos de fadiga, uma parábola do tipo Gerber

$$\frac{\sigma_a}{S_e} + \left(\frac{\sigma_m}{S_{ut}}\right)^2 = 1$$

é útil (ver Seção 7-12). Solucionada para σ_a, a equação precedente torna-se

$$\sigma_a = S_e - \frac{S_e}{S_{ut}^2}\sigma_m^2$$

Isso implica um modelo de regressão da forma $y = a_0 + a_2x^2$. Mostre que as equações normais são

$$\sum y = na_0 + a_2 \sum x^2$$

$$\sum xy = a_0 \sum x + a_2 \sum x^3$$

e que

$$a_0 = \frac{\sum x^3 \sum y - \sum x^2 \sum xy}{n \sum x^3 - \sum x \sum x^2} \quad \text{e} \quad a_2 = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{n \sum x^3 - \sum x \sum x^2}$$

Trace os dados

x	20	40	60	80
y	19	17	13	7

sobrepostos em um gráfico da linha de regressão.

2-11 Considere os seguintes dados coletados de uma mola de extensão de uma única espira helicoidal, com uma tração inicial F_i e uma razão de mola k suspeita de estar relacionada pela equação $F = F_i + kx$, em que x é a deflexão além da inicial. Os dados são

x, in	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	2,0
F, lbf	7,1	10,3	12,1	13,8	16,2	25,2

(*a*) Estime a média e o desvio-padrão da tração inicial F_i.

(*b*) Estime a média e o desvio-padrão da razão de mola k.

2-12 Na expressão da deformação uniaxial $\epsilon = \delta/\mathbf{l}$, a elongação é especificada como $\delta \sim (0{,}0015, 0{,}000\,092)$ in e o comprimento, como $\mathbf{l} \sim (2{,}0000, 0{,}0081)$ in. Qual é a média, o desvio-padrão e o coeficiente de variação da deformação correspondente ϵ?

2-13 Na lei de Hooke para tensão uniaxial $\sigma = \epsilon\mathbf{E}$, a deformação é dada como $\epsilon \sim (0{,}0005, 0{,}000\,034)$ e o módulo de Young, como $\mathbf{E} \sim (29{,}5, 0{,}885)$ Mpsi. Encontre a média, o desvio-padrão e o coeficiente de variação da tensão correspondente σ em psi.

2-14 A extensão de uma barra uniforme sob tração é dada pela fórmula $\delta = Fl/AE$. Suponha que os termos presentes nessa equação sejam variáveis aleatórias com parâmetros, como segue:

$$\mathbf{F} \sim (14{,}7, 1{,}3) \text{ kip} \qquad \mathbf{A} \sim (0{,}226, 0{,}003) \text{ in}^2$$
$$\mathbf{l} \sim (1{,}5, 0{,}004) \text{ in} \qquad \mathbf{E} \sim (29{,}5, 0{,}885) \text{ Mpsi}$$

Estime a média, o desvio-padrão e o coeficiente de variação da elongação correspondente δ em polegadas.

2-15 A máxima tensão de flexão em uma barra redonda sob flexão ocorre na superfície externa e é dada pela equação $\sigma = 32M/\pi d^3$. Se o momento é especificado como $\mathbf{M} \sim (15\,000, 1350)$ lbf · in e o diâmetro como $\mathbf{d} \sim (2{,}00, 0{,}005)$ in, encontre a média, o desvio-padrão e o coeficiente de variação da correspondente tensão σ em psi.

2-16 Quando um processo de produção é mais amplo que o intervalo de tolerância, a inspeção rejeita uma fração do trecho da extremidade inferior α com $x < x_1$ e uma fração do trecho da extremidade superior β com dimensões $x > x_2$. A população sobrevivente tem uma nova função de densidade $g(x)$ relacionada à original $f(x)$ por um multiplicador a. Isso ocorre porque quaisquer duas observações x_i e x_j terão a mesma probabilidade relativa de ocorrência que antes. Mostre que

$$a = \frac{1}{F(x_2) - F(x_1)} = \frac{1}{1 - (\alpha + \beta)}$$

e

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{F(x_2) - F(x_1)} = \dfrac{f(x)}{1 - (\alpha + \beta)} & x_1 \le x \le x_2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

2-17 Uma máquina automática de parafusos produz uma série de peças com uma distribuição uniforme $\mathbf{d} = \mathbf{U}[0{,}748, 0{,}751]$ in, uma vez que não foi reajustada quando os diâmetros alcançaram o valor de 0,750 in. Os colchetes contêm delimitadores de intervalo.

(*a*) Estime a média, o desvio-padrão e a PDF da corrida original de produção, se as peças forem bem misturadas.

(*b*) Utilizando os resultados do Problema 2-16, encontre a nova média, o novo desvio-padrão e a nova PDF. Superponha os gráficos das PDFs e compare.

2-18 Um fabricante de molas está suprindo molas de espira helicoidais, satisfazendo ao requisito de ter uma razão de mola k igual a 10 ± 1 lbf/in. O programa de teste desse fabricante mostra que a distribuição da razão de mola é bastante aproximada por uma distribuição normal. Experiências com inspeção de molas mostraram que 8,1% delas são sucateadas, por ter $k < 9$, e que 5,5% também o são, por apresentar $k > 11$. Estime a função densidade de probabilidade.

2-19 As vidas de peças são freqüentemente expressas pelo número de ciclos de operação a que uma percentagem especificada da população excederá, antes de apresentar falha. O símbolo **L** é utilizado para designar essa definição de vida. Portanto, podemos falar de vida **L**10 como sendo o número de ciclos, excedido por 90% da população de peças, até a ocorrência de falha. Utilizando os dados de média e desvio-padrão para o Problema 2-1, um modelo de distribuição normal, estime a vida correspondente a **L**10.

2-20 Ajuste uma distribuição normal ao histograma do Problema 2-1. Superponha a função densidade de probabilidade no traçado histográfico de $f/(Nw)$.

2-21 Para o Problema 2-2, trace o histograma com $f/(Nw)$ como ordenada e superponha uma função densidade de distribuição normal sobre o gráfico histográfico.

2-22 Para o Problema 2-3, trace o histograma com $f/(Nw)$ como ordenada e superponha uma função de densidade de distribuição normal sobre o gráfico histográfico.

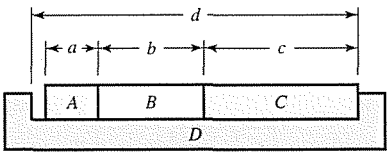
2-23 Um aço 1018 estirado a frio tem uma resistência ao escoamento sob tração correspondente a 0,2% de deformação permanente $\mathbf{S}_y = \mathbf{N}(78{,}4,\ 5{,}90)$ kpsi. Uma barra redonda em tração é sujeita a uma carga $\mathbf{P} = \mathbf{N}(40,\ 8{,}5)$ kip. Se o diâmetro da barra d for de 1,000 in, qual será a probabilidade de que uma carga aleatória estática de tração P de **P**, imposta em uma haste com uma resistência ao escoamento correspondente a 0,2% S_y de $\mathbf{S}_y$, não escoe?

2-24 Um aço 1035 laminado a quente tem uma resistência ao escoamento sob tração correspondente a 0,2% de deformação permanente $\mathbf{S}_y = \mathbf{LN}(49{,}6,\ 3{,}81)$ kpsi. Uma barra redonda sob tração é submetida a uma carga $\mathbf{P} = \mathbf{LN}(30,\ 5{,}1)$ kip. Se o diâmetro da barra d for de 1,000 in, qual será a probabilidade de que uma carga estática aleatória P de **P**, em uma haste com resistência ao escoamento referente a 0,2% de deformação permanente S_y de $\mathbf{S}_y$, não escoe?

2-25 Três blocos, A, B e C, bem como um bloco com ranhura, D, têm dimensões a, b, c e d, como segue:

$$a = 1{,}000 \pm 0{,}001 \text{ in} \qquad b = 2{,}000 \pm 0{,}003 \text{ in}$$
$$c = 3{,}000 \pm 0{,}005 \text{ in} \qquad d = 6{,}020 \pm 0{,}006 \text{ in}$$

Os blocos são montados como mostra a figura.



Problema 2-25

(*a*) Utilizando o sistema de tolerância absoluta, determine a folga nominal $\bar{w}$ e a amplitude de sua tolerância bilateral t_w.

(*b*) Utilizando o sistema de tolerância estatística, determine a folga nominal $\bar{w}$ e a amplitude de sua tolerância bilateral t_w.

2-26 Se $x = a \pm \Delta a$, $y = b \pm \Delta b$ e $z = c \pm \Delta c$, mostre que, para o volume V de um paralelepípedo retangular, $V = xyz$,

$$\frac{\Delta V}{\bar{V}} = \frac{\Delta a}{\bar{a}} + \frac{\Delta b}{\bar{b}} + \frac{\Delta c}{\bar{c}}$$

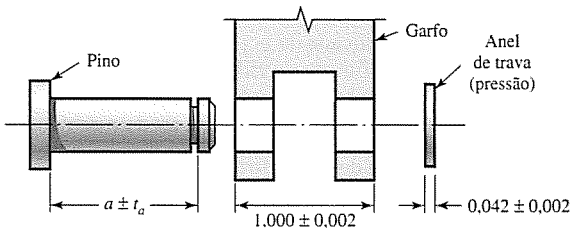
Utilize esse resultado para estabelecer os números do intervalo (limites de tolerância absoluta) no volume de um paralelepípedo retangular com as dimensões

$$a = 1{,}250 \pm 0{,}001 \text{ in} \qquad b = 1{,}875 \pm 0{,}002 \text{ in} \qquad c = 2{,}750 \pm 0{,}003 \text{ in}$$

2-27 Um pivô em um conector tem um pino, como desenhado na respectiva figura, cuja dimensão $a \pm t_a$ deve ser estabelecida. A espessura do garfo desse conector é de $1{,}000 \pm 0{,}002$ in. O projetista concluiu que uma folga entre 0,004 e 0,14 in irá, de maneira satisfatória, manter a função do pivô do conector.

(*a*) Determine a dimensão a e sua tolerância usando o método da tolerância absoluta.

(*b*) Estabeleça a dimensão a e sua tolerância utilizando o método da tolerância estatística.



Problema 2-27
Dimensões em polegadas.

2-28 Um pino-guia se faz necessário para alinhar a montagem de um dispositivo de duas componentes. O tamanho nominal desse pino é de 15 mm. Tome as decisões dimensionais para um ajuste com folga de posição para 15 mm de tamanho básico.

2-29 Um ajuste de interferência de um cubo de uma engrenagem, feito de ferro fundido, em um eixo de aço é requerido. Tome as decisões dimensionais pertinentes a um ajuste de esforço médio para um tamanho básico de 45 mm.

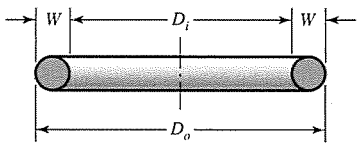
2-30 Um pino é requerido para formar um pivô de conexão. Encontre as dimensões exigidas para um tamanho básico do pino e do garfo de 50 mm com um ajuste deslizante.

2-31 Um mancal de munhão (deslizamento) e uma bucha necessitam ser detalhados. O tamanho nominal é de 1 in. Que dimensões serão necessárias para um tamanho básico de 1 in com um ajuste corrediço apertado, se esta for uma montagem de bucha e munhão levemente carregados?

2-32 Um anel O circular de secção transversal tem as dimensões mostradas na figura. Em particular, um anel O nº 240 tem um diâmetro interno D_i e um diâmetro de secção transversal W de

$$D_i = 3{,}734 \pm 0{,}028 \text{ in} \qquad W = 0{,}139 \pm 0{,}004 \text{ in}$$

Utilizando o sistema de tolerância absoluta, estime o diâmetro médio externo $\bar{D}_0$ e sua tolerância bilateral.



Problema 2-32

2-33 Um anel O nº 370 tem as dimensões

$$D_i = 208{,}92 \pm 1{,}30 \text{ mm} \qquad W = 5{,}33 \pm 0{,}13 \text{ mm}$$

Utilizando o método da tolerância absoluta, estime o diâmetro médio externo $\bar{D}_0$ e sua tolerância bilateral.

2-34 Estime o diâmetro médio externo $\bar{D}_0$ e sua tolerância bilateral do anel O nº 240 do Problema 2-32, se **W** for independente de $\boldsymbol{D}_i$ e o método estatístico de tolerância for empregado.

2-35 Encontre o diâmetro externo $\bar{D}_0$ (médio) e sua tolerância bilateral para o anel O nº 370 do Problema 2-33, se **W** for independente de $\boldsymbol{D}_i$ e o método estatístico de tolerância for empregado.

2-36 A empacotadora para um anel O sob pressão interna é mostrada na figura a seguir. Para um anel O nº 240, as dimensões recomendadas da parte móvel são

$$G = 0{,}185 \pm 0{,}005 \text{ in} \qquad F = 0{,}106 \pm 0{,}003 \text{ in}$$

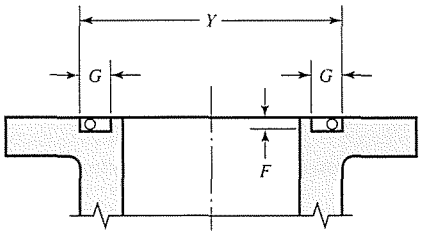
Um fabricante de anéis O recomenda o diâmetro externo da parte móvel como

$$Y_{\max} = D_o \qquad Y_{\min} = \max[0{,}99\bar{D}_o, \bar{D}_o - 0{,}060] \text{ in}$$

O diâmetro externo de um anel nº 240 é de 4,012 ± 0,036 in, e o diâmetro da secção transversal é de 0,139 ± 0,004 in.

(*a*) Quando a placa de extremidade é soldada em posição, todos os anéis O são comprimidos. Qual é a compressão mínima (aperto) de um anel O nº 240 em polegadas?

(*b*) Quando o anel O é posto na máquina empacotadora antes da montagem da placa de extremidade, ele fica livre ou sob compressão?



Problemas 2-36 e 2-37

2-37 A empacotadora para um anel O sob pressão interna é mostrada na figura. Para um anel O nº 370, as dimensões recomendadas dessa empacotadora são

$$F = 4{,}32 \pm 0{,}13 \text{ mm} \qquad G = 7{,}24 \pm 0{,}13 \text{ mm}$$

Um fabricante de anéis O recomenda que o maior diâmetro da empacotadora seja

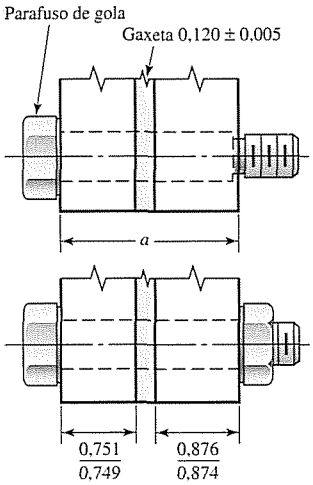
$$Y_{\max} = D_o \qquad Y_{\min} = \max[0{,}99D_o,\ D_o - 1{,}52] \text{ mm}$$

O diâmetro externo de um anel nº 370 é de 219,58 ± 0,34 mm, e o diâmetro da secção transversal é de 5,33 ± 0,13 mm.

(*a*) Quando a placa de extremidade é soldada em posição, o anel O é comprimido. Qual é a compressão mínima (aperto) de um anel O nº 370 em milímetros?

(*b*) Quando um anel O é posto na máquina empacotadora antes da montagem da placa de extremidade, ele fica livre ou sob compressão?

2-38 Dois flanges de uma junção soldada comprimem uma gaxeta (junta de vedação) macia controladamente, de modo que o "aperto" está entre 0,020 in e 0,040 in. Pouco aperto resulta em vazamento e muito aperto, em "fluxo" da gaxeta. Como mostrado na figura, um parafuso de calota é usado para controlar a compressão da gaxeta, e o fator crítico, ao manter a função da junção, é o comprimento a desse parafuso. Se as dimensões dos membros forem como as mostradas e a espessura de produção da gaxeta for de 0,120 ± 0,005 in, encontre o comprimento médio $\bar{a}$ e a tolerância t_a empregando o sistema absoluto de tolerância e o sistema estatístico de tolerância.



Problema 2-38

2-39 A resistência ao escoamento em tração, correspondente a 0,2% de deformação, do aço AISI 1137 estirado a frio de perfis redondos até 1 polegada em diâmetro, de duas usinas e 25 corridas, é reportada em forma de histograma como segue:

S_y	93	95	97	99	101	103	105	107	109	111
f	19	25	38	17	12	10	5	4	4	2

em que S_y é o ponto médio de classe em kpsi e f é o número em cada classe. Presumindo que a distribuição seja normal, qual é a resistência ao escoamento excedida por 99% da população?

2-40 Repita o Problema 2-39, presumindo que a distribuição seja *lognormal*. Qual é a resistência ao escoamento excedida por 99% da população? Compare o ajuste normal do Problema 2-39 com o ajuste *lognormal* sobrepondo as PDFs e a PDF histográfica.

2-41 Um aço 1046, temperado em água e revenido por 2 horas a 1210°F, apresenta uma resistência à tração média de 105 kpsi e uma resistência ao escoamento média de 82 kpsi. Dados de ensaio de resistência à fadiga para vida de 10^4 ciclos produzem $(\mathbf{S'}_{fe})_{10^4} = \mathbf{W}[79, 86{,}2, 2{,}60]$ kpsi. Qual é a média, o desvio-padrão e o coeficiente de variação de $(\mathbf{S'}_{fe})_{10^4}$?

2-42 Um ferro fundido ASTM, grau 40, apresenta os seguintes resultados de ensaio limite de resistência à tração (resistência última à tração): $\mathbf{S}_{ut} = \mathbf{W}[27{,}7, 46{,}2, 4{,}38]$ kpsi. Encontre a média e o desvio-padrão de $\mathbf{S}_{ut}$ e estime a chance de o limite de resistência ser menor que 40 kpsi.

2-43 Um aço inoxidável estirado a frio 301SS tem um limite de resistência à tração (resistência última à tração) fornecida por $\mathbf{S}_{ut} = \mathbf{W}[151{,}9, 193{,}6, 8{,}00]$ kpsi. Encontre a média e o desvio-padrão.

2-44 Um ferro nodular 100-70-04 apresenta resistências à tração e ao escoamento descritas por

$$\mathbf{S}_{ut} = \mathbf{W}[47{,}6, 125{,}6, 11{,}84] \text{ kpsi}$$

$$\mathbf{S}_{y} = \mathbf{W}[64{,}1, 81{,}0, 3{,}77] \text{ kpsi}$$

Qual é a chance de que S_{ut} seja menor que 100 kpsi? Qual é a chance de que S_y seja menor que 70 kpsi?

2-45 Um parafuso de aço 1038 tratado termicamente, na sua forma acabada, forneceu o material a partir do qual um espécime para ensaio de tração foi feito. O ensaio de vários desses parafusos levou à descrição $\mathbf{S}_{ut} = \mathbf{W}[122{,}3, 134{,}6, 3{,}64]$ kpsi. Qual é a probabilidade de que os parafusos satisfaçam ao requerimento de uma resistência mínima à tração de 120 kpsi para o grau 5 da SAE? Qual a probabilidade de que satisfaçam aos requisitos de resistência mínima à tração de 133 kpsi, para receber o grau 7 da SAE?

2-46 Um aço 5160H foi ensaiado à fadiga, e descobriu-se que a distribuição do número de ciclos até falha, sob nível constante de tensão, obedece a $\mathbf{n} = \mathbf{W}[36{,}9\ 133{,}6, 2{,}66]$ kpsi, a 10^3 ciclos. Trace a PDF de n e a PDF da distribuição *lognormal* tendo a mesma média e o mesmo desvio-padrão. Qual é a vida $\mathbf{L}10$ (ver Problema 2-19) prevista por ambas as distribuições?

2-47 Um material foi ensaiado sob carregamento fixo completamente reverso, para determinar o número de ciclos até falha usando-se cem espécimes. Os resultados foram

$(10^{\circ 5})L$	3,05	3,55	4,05	4,55	5,05	5,55	6,05	6,55	7,05	7,55	8,05	8,55	9,05	9,55	10,05
f	3	7	11	16	21	13	13	6	2	0	4	3	0	0	1

sendo L a vida em ciclos e f, o número de elementos em cada classe. Assumindo uma distribuição *lognormal*, trace a PDF teórica e a PDF histográfica para comparação.

2-48 O limite de resistência à tração (resistência última à tração) de um aço AISI 1117 estirado a frio é weibulliana, com $\mathbf{S}_u = \mathbf{W}[70{,}3, 84{,}4, 2{,}01]$ kpsi. Qual é a média, o desvio-padrão e o coeficiente de variação?

2-49 Um ferro nodular 60-45-15 tem uma resistência ao escoamento S_y correspondente a 0,2% de deformação permanente, com uma média de 49,0 kpsi, um desvio-padrão de 4,2 kpsi e uma resistência garantida contra escoamento de 33,8 kpsi. Quais são os parâmetros de Weibull θ e b?

2-50 Um ferro maleável 35018 tem uma resistência ao escoamento correspondente a 0,2% de deformação permanente fornecida por uma distribuição de Weibull $\mathbf{S}_y = \mathbf{W}[34{,}7, 39{,}0, 2{,}93]$ kpsi. Qual é a média, o desvio-padrão e o coeficiente de variação?

2-51 Resultados histográficos de ensaios com cargas fixas sobre 237 mancais de contato de rolamento produziram o seguinte:

L	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f	11	22	38	57	31	19	15	12	11	9	7	5

sendo L a vida em milhões de rotações e f, o número de falhas. Ajuste uma distribuição *lognormal* a esses dados e trace a PDF com a PDF histográfica a ela sobreposta. A partir da distribuição *lognormal*, estime a vida na qual 10% dos mancais sob esse carregamento fixo terão falhado.

CAPÍTULO

3 Materiais

3-1 Resistência e Rigidez dos Materiais 86
3-2 Significado Estatístico das Propriedades dos Materiais 89
3-3 Resistência e Trabalho a Frio 90
3-4 Dureza 93
3-5 Propriedades de Impacto 95
3-6 Efeitos da Temperatura 96
3-7 Sistema de Numeração 97
3-8 Fundição em Areia 98
3-9 Moldagem em Casca 98
3-10 Fundição em Revestimento 99
3-11 Processo de Metalurgia do Pó 99
3-12 Processos de Trabalho a Quente 99
3-13 Processos de Trabalho a Frio 100
3-14 Tratamento Térmico do Aço 101
3-15 Aços de Liga 103
3-16 Aços Resistentes à Corrosão 104
3-17 Materiais de Fundição 105
3-18 Metais Não-Ferrosos 106
3-19 Plásticos 109
3-20 Materiais Compósitos 110

A seleção de um material para um elemento de máquina ou membro estrutural é uma das decisões que o projetista está encarregado de tomar. Tal decisão é geralmente tomada antes de as dimensões do elemento serem estabelecidas. Após decidir sobre o processo de criação da geometria desejada e sobre o material (ambos não podem divorciar-se), o projetista pode dar proporções ao elemento, de modo que a perda de função possa ser evitada, ou que a eventualidade desta seja mantida a um risco aceitável.

Nos Capítulos 4 e 5, métodos para estimar tensões e deflexões em membros de máquina serão apresentados. Tais estimativas baseiam-se nas propriedades do material do qual o membro será feito. Nas avaliações de deflexões e estabilidade, por exemplo, as propriedades elásticas (rigidez) do material são requeridas, e as avaliações de tensão em um ponto crítico de um membro de máquina requerem uma comparação com a resistência do material naquele ponto, na geometria e nas condições de uso. Essa resistência é uma propriedade do material encontrada por meio de ensaios e ajustada à geometria e às condições de uso conforme necessário.

Tão importante quanto a tensão e a deformação no projeto de elementos mecânicos, a seleção de um material nem sempre é baseada nesses fatores. Muitos elementos não têm cargas quaisquer sobre si. De fato, alguns podem até ser projetados apenas para preencher espaço ou por qualidades estéticas; já os membros costumam ser projetados para resistir à corrosão. Às vezes, os efeitos da temperatura são mais importantes no projeto do que a tensão e a deformação. Muitos outros fatores, além desses dois últimos, podem orientar o projeto de elementos, que exige do projetista uma versatilidade que provém somente de uma base ampla em materiais e processos.

3-1 Resistência e Rigidez dos Materiais

O ensaio-padrão de tração é empregado para obter diversas características e resistências que são utilizadas em projeto. A Figura 3-1 ilustra um espécime típico de ensaio de tração e suas dimensões características.[1] O diâmetro original d_0 e o comprimento de bitola l_0, usado para medir as deformações, são registrados antes de o ensaio ser iniciado. O espécime é então montado na máquina de ensaio, sendo vagarosamente carregado em tração, enquanto a carga P e a deformação são observadas. Tal carga é convertida à tensão pelo cálculo

$$\sigma = \frac{P}{A_0} \tag{3-1}$$

em que $A_0 = \frac{1}{4}\pi d_0^2$ é a área original do espécime.

A deflexão, ou extensão do comprimento de bitola, é dada por $l - l_0$, em que l é o comprimento de bitola correspondente à carga P. A deformação é calculada por

$$\epsilon = \frac{l - l_0}{l_0} \tag{3-2}$$

Na conclusão do (ou durante o) ensaio, os resultados são representados graficamente como um *diagrama de tensão-deformação*. A Figura 3-2 representa diagramas típicos de tensão-deformação para materiais dúcteis e frágeis, sendo que os primeiros deformam muito mais que os últimos.

O ponto *pl* na Figura 3-2(*a*) é denominado *limite de proporcionalidade*, ponto esse em que a curva começa a desviar de uma linha reta. Nenhuma deformação permanente será observável no espécime, se a car-

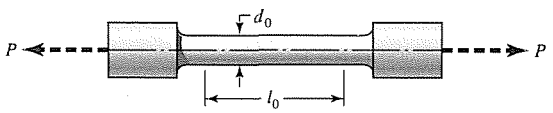


Figura 3-1 Um espécime típico de ensaio de tração. Algumas das dimensões padronizadas usadas para d_0 são 2,5, 6,25 e 12,5 mm, bem como 0,505 in, mas outras seções e tamanhos são também utilizados. Comprimentos comuns de bitola l_0 usados são 10, 25 e 50 mm, bem como 1 e 2 in.

[1] Ver as normas ASTM E8 e E-8 m para dimensões padronizadas.

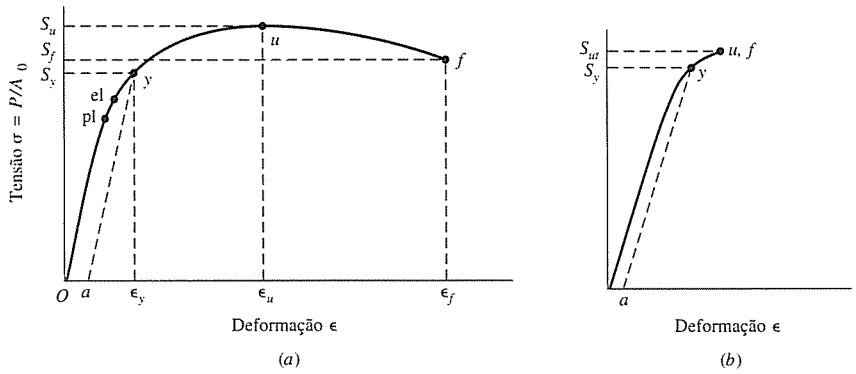


Figura 3-2 Diagrama de tensão-deformação obtido do ensaio de tração padronizado. (a) Material dúctil; (b) material frágil. Nesse diagrama, pl marca o limite de proporcionalidade; el, o limite elástico; *y*, a resistência ao escoamento de desvio, como definido pela deformação de desvio *OA*; *u*, a resistência máxima ou última; e *f*, a resistência à fratura.

ga for removida nesse ponto. No intervalo linear, a relação uniaxial tensão-deformação é fornecida pela *lei de Hooke* como

$$\sigma = E\epsilon \tag{3-3}$$

em que a constante de proporcionalidade E, a inclinação da parte linear da curva de tensão-deformação, é chamada de *módulo de Young* ou *módulo de elasticidade*. E é uma medida da rigidez de um material, e, visto que a deformação é adimensional, suas unidades são as mesmas da tensão. O aço, por exemplo, tem um módulo de elasticidade de cerca de 30 Mpsi (207 Gpa), *independentemente do tratamento térmico, do conteúdo de carbono ou dos elementos de liga.* O aço inoxidável tem cerca de 27,5 Mpsi (190 Gpa).

O ponto *el* na Figura 3-2 é denominado *limite elástico.* Se o espécime for carregado além desse ponto, dir-se-á que a deformação é plástica e que o material terá uma deformação permanente quando a carga for removida. Entre pl e el, o diagrama não é uma linha perfeitamente reta, embora o espécime seja elástico.

Durante o ensaio de tração, vários materiais alcançam um ponto no qual a deformação começa a aumentar rapidamente, sem, no entanto, um aumento correspondente na tensão. Esse ponto é denominado *ponto de escoamento.* Nem todos os materiais têm um ponto de escoamento óbvio, especialmente os frágeis. Por tal razão, a *resistência ao escoamento* S_y é freqüentemente definida por um *método de desvio*, como mostrado na Figura 3-2, no qual a linha *ay* é traçada na inclinação E. O ponto *a* corresponde a uma quantidade definida ou declarada de deformação permanente, geralmente 0,2% do comprimento original de bitola (ϵ = 0,002), embora as percentagens 0,01, 0,1 e 0,5 sejam às vezes usadas.

A *resistência à tração*, ou *resistência última*, S_u ou S_{ut}, corresponde ao ponto *u* na Figura 3-2, e é a máxima tensão alcançada no diagrama de tensão-deformação.[2] Como ilustrado na Figura 3-2(*a*), determinados materiais exibem uma tendência para baixo, após ser alcançada a tensão máxima. Outros, tais como alguns dos ferros fundidos e aços de alta resistência, fraturam enquanto o traço de tensão-deformação está ainda subindo, como mostra a Figura 3-2(*b*), na qual os pontos *u* e *f* são idênticos.

Conforme observado na Seção 1-11, a *resistência*, como empregada neste livro, é uma propriedade intrínseca de um material, ou de um elemento mecânico, devido à seleção de um material particular ou de um processo, ou de ambos. A resistência de uma barra de conexão, em um ponto crítico na geometria e nas condições de uso, por exemplo, é a mesma, não importando se este já é um elemento em uma máquina operatriz ou se está descansando em uma mesa de trabalho, esperando a montagem com outras peças. Por outro lado, a *tensão* é algo que ocorre em uma peça, geralmente como resultado de estar montada em uma máquina e carregada. Entretanto, tensões podem ser introduzidas em uma peça por processamento ou manipulação. Por exemplo, o jateamento de esferas produz uma *tensão* de compressão na superfície externa de uma peça, bem como melhora a resistência à fadiga da mesma. Assim, neste livro seremos muito cuidadosos ao distinguir entre *resistência*, designada por S, e *tensão,* designada por σ ou τ.

[2] O uso varia. Por muito tempo, os engenheiros utilizaram o termo *resistência última* – daí o subscrito *u* em S_u ou S_{ut}. Contudo, em ciência dos materiais e metalurgia, o termo *resistência à tração* é empregado.

Os diagramas na Figura 3-2 são denominados diagramas de tensão-deformação *de engenharia*, uma vez que as tensões e deformações calculadas nas Equações (3-1) e (3-2) não são valores *verdadeiros*. A tensão calculada na Equação (3-1) está baseada na área original *antes* de a carga ser aplicada. Em realidade, à medida que essa carga é aplicada, a área se reduz de tal forma que a *tensão real* ou *verdadeira* é maior que a *tensão de engenharia*. Para obter a tensão verdadeira para o diagrama, a carga e a área da secção transversal devem ser medidas simultaneamente durante o ensaio. A Figura 3-2(*a*) representa um material dúctil em que a tensão parece decrescer dos pontos *u* até *f*. Tipicamente, além do ponto *u*, o espécime começa a "espescoçar" em um ponto de fraqueza no qual a área se reduz dramaticamente, como mostrado na Figura 3-3. Por essa razão, a tensão verdadeira é muito mais elevada que a tensão de engenharia na secção espescoçada.

A deformação de engenharia fornecida pela Equação (3-2) está baseada na mudança líquida no comprimento, a partir do comprimento *original*. Ao representar graficamente o *diagrama verdadeiro de tensão-deformação*, é comum empregar um termo chamado *deformação verdadeira* ou, às vezes, *deformação logarítmica*. A deformação verdadeira é a soma de elongações incrementais divididas pelo comprimento *corrente* de bitola na carga *P*, ou

$$\varepsilon = \int_{l_0}^{l} \frac{dl}{l} = \ln \frac{l}{l_0} \tag{3-4}$$

em que o símbolo ε é usado para representar a deformação verdadeira. A característica mais importante de um diagrama verdadeiro de tensão-deformação (Figura 3-4) é que a tensão verdadeira aumenta continuamente até ocorrer a fratura. Assim, como ilustrado na Figura 3-4, a tensão verdadeira de fratura σ_f é maior que a tensão verdadeira última. Contraste isso com a Figura 3-2, na qual a resistência à fratura de engenharia S_f é menor que a resistência última de engenharia S_u.

Os ensaios de compressão são mais difíceis de conduzir, e a geometria dos espécimes de ensaio difere da dos usados em ensaios de tração. A razão para isso é que o espécime pode flambar durante o ensaio, ou pode ser difícil obter tensões distribuídas uniformemente. Outras dificuldades ocorrem porque materiais dúcteis sofrerão abaulamento após o escoamento. Contudo, os resultados podem ser representados graficamente também em um diagrama de tensão-deformação, e as mesmas definições de resistência podem ser aplicadas tal como utilizadas em ensaio à tração. Para a maioria dos materiais, as resistências à compressão são aproximadamente as mesmas que as da tração. Quando diferenças substanciais ocorrem entre as resistências à tração e à compressão, no entanto, como é o caso com ferros fundidos, tais resistências devem ser declaradas separadamente como S_{ut} e S_{uc}, sendo que S_{uc} é reportada como uma quantidade *positiva*.

As resistências torcionais são encontradas torcendo-se barras circulares sólidas e registrando-se o torque e o ângulo de rotação. Os resultados são então representados graficamente como um *diagrama de torque-torção*. As tensões de cisalhamento no espécime são lineares quanto à localização radial, sendo zero no centro do espécime e máxima no raio externo *r* (ver Capítulo 4). A tensão máxima de cisalhamento, τ_{max}, está relacionada ao ângulo de torção θ por

$$\tau_{max} = \frac{Gr}{l_0}\theta \tag{3-5}$$

em que θ está em radianos, *r* é o raio do espécime, l_0 é o comprimento de bitola e *G* é a propriedade de rigidez do material denominada *módulo de cisalhamento* ou *módulo de rigidez*. A tensão de cisalhamento máxima está também relacionada ao torque aplicado *T* por

$$\tau_{max} = \frac{Tr}{J} \tag{3-6}$$

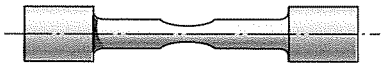


Figura 3-3 Espécime de tração depois do espescoçamento.

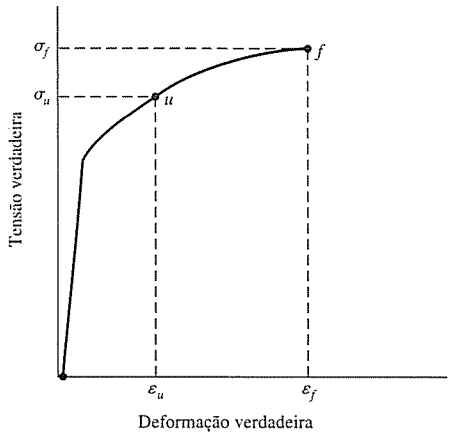


Figura 3-4 Diagrama verdadeiro de tensão-deformação representado em coordenadas cartesianas.

em que $J = \frac{1}{2}\pi r^4$ é o momento polar segundo de área da secção transversal.

O diagrama de torque-torção será similar à Figura 3-2, e, utilizando as Equações (3-5) e (3-6), o módulo de rigidez pode ser encontrado, bem como o limite de elasticidade e a *resistência ao escoamento torcional* S_{sy}. O ponto máximo em um diagrama de torque-torção, correspondendo ao ponto u na Figura 3-2, é T_u. A equação

$$S_{su} = \frac{T_u r}{J} \tag{3-7}$$

define o *módulo de ruptura* para o ensaio de torção. Observe que é incorreto ter S_{su} como a resistência torcional última, visto que a região mais externa da barra está em estado plástico no torque T_u e que a distribuição de tensão não é mais linear.

Todas as tensões e resistências definidas pelo diagrama de tensão-deformação da Figura 3-2 e por diagramas similares são especialmente conhecidas como *tensões de engenharia* e *resistências* ou *tensões nominais* e *resistências*. Esses são os valores normalmente utilizados em todos os cálculos de projetos de engenharia. A locução adjetiva *de engenharia* e o adjetivo *nominal* são usados aqui para enfatizar que as tensões são computadas utilizando-se a *área original* ou *área seccional transversal* do espécime *sem tensão*. Neste livro, empregaremos esses modificadores apenas quando especificamente desejarmos chamar a atenção para tal distinção.

3-2 Significado Estatístico das Propriedades dos Materiais

Há uma sutileza nas idéias apresentadas na seção anterior que deve ser ponderada cuidadosamente antes de continuarmos. A Figura 3-2 representa os resultados de um *único* ensaio de tração (um espécime, agora fraturado). É comum a engenheiros considerar esses valores importantes de *tensão* (nos pontos pl, el, y, u e f) como *propriedades* e denotá-los como *resistências*, fazendo uso de uma notação especial, com S maiúsculo, em vez do sigma minúsculo σ, e com subscritos adicionados: S_{pl} para limite de proporcionalidade, S_y para resistência ao escoamento de desvio, S_u para resistência última à tração (S_{ut} ou S_{uc} se o significado de tração ou compressão for importante).

Tudo isso é prematuro, haja vista que a Figura 3-2 se refere a um *único espécime*. Se houvesse 10 espécimes nominalmente idênticos, cada qual exibiria resistências *diferentes*. O que se está observando é um padrão consistente de distribuição, e, como constatado no Capítulo 2, a descrição tem de ser estocástica (estatística). A idéia de resistência, uma propriedade, é distribucional. Para verificar isso, considere a seguinte tabela, que é um relato de histograma contendo as tensões máximas de mil ensaios de tração em um aço 1020 de uma única fornada. Aqui, buscamos a resistência última à tração S_{ut}. Relembre que tais dados foram analisados no Exemplo 2-4.

Freqüência de classe f_i	2	18	23	31	83	109	138	151	139	130	82	49	28	11	4	2
Ponto médio de classe x_i, kpsi	56,5	57,5	58,5	59,5	60,5	61,5	62,5	63,5	64,5	65,5	66,5	67,5	68,5	69,5	70,5	71,5

A partir do Exemplo 2-3, a média da amostra é $\bar{x} = 63{,}62$ kpsi; o desvio-padrão, $s_x = 2{,}594$ kpsi; e o coeficiente de variação, $C_x = 0{,}04077$. Admitindo uma distribuição normal, a função de densidade de probabilidade é

$$f(x) = \frac{1}{2{,}594\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x - 63{,}62}{2{,}594}\right)^2\right]$$

A descrição da resistência S_{ut} é então expressa no que diz respeito a seus parâmetros estatísticos e seu tipo de distribuição. Nesse caso, $\mathbf{S}_{ut} = \mathbf{N}(63{,}62, 2{,}594)$ kpsi. Um gráfico dessa distribuição é fornecido na Figura 2-8, juntamente com o histograma e o ajuste de dados por uma distribuição *lognormal*.

Observe que o programa de ensaio descreveu as propriedades do 1020 $\mathbf{S}_{ut}$ para somente uma fornada de um supridor. Ensaios são processos complicados e caros. Tabelas de propriedades são freqüentemente preparadas para ser úteis a outras pessoas. Uma quantidade estocástica é descrita por sua média, desvio-padrão e tipo de distribuição. Muitas tabelas mostram um único número, o qual costuma ser a média, ou algum percentil, como o 99° percentil. *Sempre* leia as observações e notas de uma tabela. Se qualificação alguma for feita em uma tabela de entrada única, essa tabela estará sujeita a sérias dúvidas.

Visto não ser surpresa que descrições úteis de uma propriedade são estocásticas em sua natureza, os engenheiros, ao ordenar ensaios de propriedades, devem especificar as instruções de modo que os dados gerados lhes sejam suficientes para observar os parâmetros estatísticos e identificar as características distribucionais. O programa de ensaio de tração nos mil espécimes do aço 1020 é grande. Se você fosse confrontado por algo em uma tabela de resistências últimas à tração e restringido a um único número, qual seria ele e o que se leria em suas observações?

3-3 Resistência e Trabalho a Frio

Trabalho a frio é o processo de deformação plástica abaixo da temperatura de recristalização na região plástica do diagrama de tensão-deformação. Materiais podem ser deformados plasticamente pela aplicação de calor, como na ferraria ou na laminação a quente, mas as propriedades mecânicas são muito diferentes daquelas obtidas pelo trabalho a frio. O propósito desta seção é explicar o que ocorre com as propriedades mecânicas significativas de um material quando este é trabalhado a frio.

Considere o diagrama de tensão-deformação da Figura 3-5(*a*). Aqui, o material foi tensionado além da resistência ao escoamento em y, até algum ponto i, na região plástica, e com a carga então removida. Nesse ponto, o material apresenta uma deformação plástica permanente ϵ_p. Se a carga correspondente ao ponto i for agora reaplicada, o material será deformado elasticamente pela quantidade ϵ_e. Dessa forma, no ponto i, a deformação unitária total consiste em duas componentes, ϵ_p e ϵ_e, e é dada pela equação

$$\epsilon = \epsilon_p + \epsilon_e \qquad (a)$$

Esse material pode ser descarregado e recarregado quantas vezes se quiser, desde o (e até o) ponto i, e diz-se que a ação sempre ocorre ao longo de uma linha reta, que é aproximadamente paralela à linha elástica inicial Oy. Logo,

$$\epsilon_e = \frac{\sigma_i}{E} \qquad (b)$$

O material agora tem um ponto de escoamento mais elevado, é menos dúctil – como resultado de uma redução na capacidade de deformação – e é considerado *endurecido por deformação*. Se o processo for continuado, aumentando ϵ_p, esse material poderá se tornar frágil e exibir fratura súbita.

É possível construir um diagrama similar, como na Figura 3-5(*b*), em que a abscissa é a área de deformação e a ordenada, a carga aplicada. A *redução na área* correspondendo à carga P_f, na fratura, é definida como

$$R = \frac{A_0 - A_f}{A_0} = 1 - \frac{A_f}{A_0} \qquad (3\text{-}8)$$

Em que A_0 é a área original. A quantidade R, na Equação (3-8), é geralmente expressa em percentagem e tabulada, em listas de propriedades mecânicas, como uma medida da *ductilidade*. Veja o Apêndice Tabela A-20, por exemplo. A ductilidade é uma propriedade importante, porque mede a habilidade de um material em absorver sobrecargas e em ser trabalhado a frio. Assim sendo, flexão, repuxamento, encabeçamento e conformação por estiramento são operações de processamento de metais que requerem materiais dúcteis.

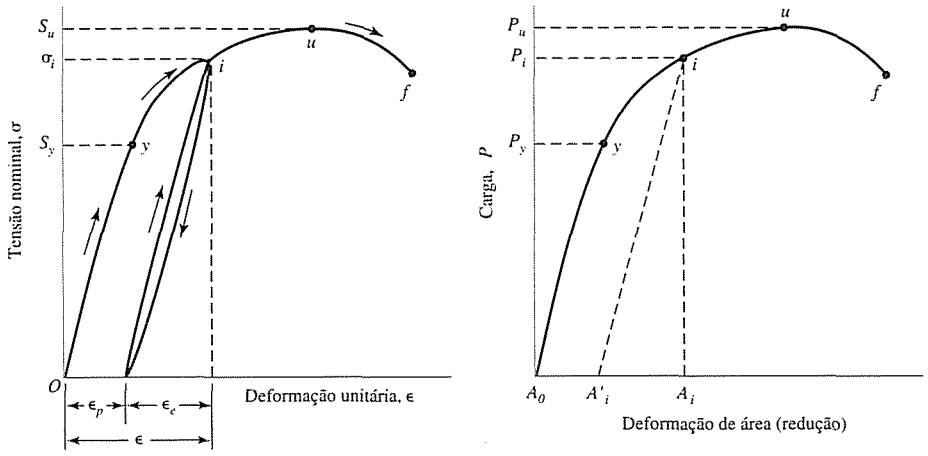


Figura 3-5 *(a) Diagrama de tensão-deformação mostrando descarregamento e recarregamento no ponto i da região plástica; (b) Diagrama análogo de carga-deformação.*

A Figura 3-5(*b*) também pode ser utilizada para definir a quantidade de trabalho a frio. Dessa forma, o *fator de trabalho a frio* W é definido como

$$W = \frac{A_0 - A'_i}{A_0} \approx \frac{A_0 - A_i}{A_0} \tag{3-9}$$

em que A'_i corresponde à área, depois de a carga P_i ter sido removida. A aproximação na Equação (3-9) resulta devido à dificuldade de medida das mudanças diametrais pequenas na região elástica. Se a quantidade de trabalho a frio for conhecida, então a referida equação poderá ser solucionada para a área A'_i. O resultado é

$$A'_i = A_0(1 - W) \tag{3-10}$$

Trabalhar a frio um material produz um novo conjunto de valores para as resistências, como se pode observar a partir dos diagramas de tensão-deformação. Datsko[3] descreve a região plástica do diagrama de tensão verdadeira-deformação verdadeira pela equação

$$\sigma = \sigma_0 \varepsilon^m \tag{3-11}$$

em que σ = tensão verdadeira

σ_0 = um coeficiente de resistência, ou coeficiente de deformação-enrijecimento

ε = deformação plástica verdadeira

m = expoente de deformação-enrijecimento

Pode ser demonstrado[4] que

$$m = \varepsilon_u \tag{3-12}$$

desde que a curva de carga-deformação exiba um ponto estacionário (de inclinação nula).

Surgem dificuldades ao se usar o comprimento de bitola para avaliar a deformação verdadeira no intervalo plástico, visto que o espescoçamento faz a deformação ser não-uniforme. Uma relação mais satisfatória pode ser obtida utlizando-se a área no pescoço. Admitindo que a mudança em volume do material é pequena, $Al = A_0 l_0$. Logo, $l / l_0 = A_0 / A$, e a deformação verdadeira é dada por

[3] Joseph Datsko, "Solid Materials", Cap. 7, de Joseph E. Shigley e Charles R. Mischke (eds.), *Standard Handbook of Machine Design*, McGraw-Hill, New York, 1996. Ver também Joseph Datsko, "New Look at Material Strength", *Machine Design*, vol. 58, nº 3, 6 de fevereiro de 1986, p.81-85.

[4] Ver a Seção 5-2 de J. E. Shigley e C. R. Mischke, *Mechanical Engineering Design*, 6ª ed., McGraw-Hill, New York, 2001.

$$\varepsilon = \ln \frac{l}{l_0} = \ln \frac{A_0}{A} \tag{3-13}$$

Retornando à Figura 3-5(*b*), se o ponto *i* estiver à esquerda do ponto *u*, ou seja, $P_i < P_u$, então a nova resistência ao escoamento será

$$S'_y = \frac{P_i}{A'_i} = \sigma_0 \varepsilon_i^m \qquad P_i \leq P_u \tag{3-14}$$

Devido à redução de área, isto é, $A'_i < A_0$, a resistência à tração também muda e é

$$S'_u = \frac{P_u}{A'_i} \tag{c}$$

Visto que $P_u = S_u A_0$, descobrimos, com a Equação (3-10), que

$$S'_u = \frac{S_u A_0}{A_0(1 - W)} = \frac{S_u}{1 - W} \qquad \varepsilon_i \leq \varepsilon_u \tag{3-15}$$

que é válida somente quando o ponto *i* estiver à esquerda do ponto *u*.

Para pontos à direita do ponto *u*, a resistência ao escoamento aproxima-se da resistência à tração, e, com pequena perda de precisão,

$$S'_u \approx S'_y \approx \sigma_0 \varepsilon_i^m \qquad \varepsilon_i \leq \varepsilon_u \tag{3-16}$$

Uma pequena reflexão revelará que uma barra terá a mesma carga última em tração, após ser enrijecida por deformação em tração, tal como tivera sido antes. A nova resistência nos é de interesse não porque a carga estática última aumenta, mas – visto que as resistências à fadiga estão relacionadas com as resistências últimas localizadas – porque a resistência à fadiga melhora. Também a resistência ao escoamento aumenta, proporcionando um intervalo maior de sustentabilidade de carregamento *elástico*.

EXEMPLO 3-1

Um aço AISI 1018 recozido (ver Tabela A-22) tem $S_y = 32{,}0$ kpsi, $S_u = 49{,}5$ kpsi, $\sigma_f = 91{,}1$ kpsi, $\sigma_0 = 90$ kpsi, $m = 0{,}25$ e $\varepsilon_f = 1{,}05$ in/in. Encontre os novos valores das resistências se o material for submetido a 15% de trabalho a frio.

Solução

A partir da Equação (3-12), descobrimos que a deformação verdadeira correspondente à resistência à tração é

$$\varepsilon_u = m = 0{,}25$$

A razão A_0 / A_i é, a partir da Equação (3-9),

$$\frac{A_0}{A_i} = \frac{1}{1 - W} = \frac{1}{1 - 0{,}15} = 1{,}176$$

A deformação verdadeira correspondente a 15% de trabalho a frio é obtida a partir da Equação (3-13). Logo,

$$\varepsilon_i = \ln \frac{A_0}{A_i} = \ln 1{,}176 = 0{,}1625$$

Sendo $\varepsilon i < \varepsilon_u$, as Equações (3-14) e (3-15) se aplicam. Portanto,

Resposta

$$S'_y = \sigma_0 \varepsilon_i^m = 90(0{,}1625)^{0{,}25} = 57{,}1 \text{ kpsi}$$

Resposta

$$S'_u = \frac{S_u}{1 - W} = \frac{49{,}5}{1 - 0{,}15} = 58{,}2 \text{ kpsi}$$

3-4 Dureza

A resistência de um material à penetração por uma ferramenta pontiaguda é denominada *dureza*. Embora existam muitos sistemas de medida de dureza, consideraremos aqui apenas os dois de maior uso.

Os ensaios de *dureza Rockwell* são descritos pelo método de dureza da norma E-18 da ASTM, e as medidas são rápida e facilmente tomadas; além disso, eles têm boa reprodutibilidade e a máquina de ensaio lhes é de fácil uso. De fato, o número de dureza é lido diretamente de um mostrador. As escalas de dureza Rockwell são designadas como *A*, *B*, *C*, etc. Os indentadores são descritos como um diamante, uma bola de diâmetro de $\frac{1}{16}$ in e um diamante para as escalas *A*, *B* e *C*, respectivamente, em que a carga aplicada é de 60, 100 ou 150 kg. Assim, a escala Rockwell *B*, designada como R_B, utiliza uma carga de 100 kg e um indentador nº 2, que é uma bola de diâmetro de $\frac{1}{16}$ in. A escala Rockwell *C*, R_C, utiliza um cone de diamante, que é o indentador nº 1, e uma carga de 150 kg. Os números de dureza assim obtidos são relativos. Por tal razão, uma dureza $R_C = 50$ tem significado somente em relação a um outro número de dureza usando a mesma escala.

A *dureza Brinell* é um outro ensaio de uso bastante generalizado. Nele, a ferramenta de indentação por meio da qual a força é aplicada é uma bola e o número de dureza H_B é tido como igual à carga aplicada, dividido pela área da superfície esférica da indentação. Dessa forma, as unidades de H_B são as mesmas que aquelas de tensão, embora sejam raramente usadas. O ensaio de dureza Brinell demanda mais tempo, sendo que H_B deve ser computado a partir dos dados de ensaio. Ambos estão empírica e diretamente relacionados à resistência à tração do material ensaiado. Isso significa que a resistência das peças poderia, se desejado, ser testada, peça por peça, durante a manufatura.

Para *aços*, a relação entre a resistência à tração mínima e o número de dureza Brinell para $200 \leq H_B \leq 450$ deve ser

$$S_u = \begin{cases} 0{,}495 H_B & \text{kpsi} \\ 3{,}41 H_B & \text{MPa} \end{cases} \tag{3-17}$$

a qual também pode ser denominada mínimo da ASTM (ver Seção 1-11).

Relações similares para *ferro fundido* podem ser derivadas de dados supridos por Krause.[5] Dados de 72 ensaios de ferro cinzento produzidos por uma fundição e derramados em barras de ensaio de dois tamanhos foram relatados graficamente. A resistência mínima, como definida pela ASTM, a partir desses dados deve ser

$$S_u = \begin{cases} 0{,}23 H_B - 12{,}5 \text{ kpsi} \\ 1{,}58 H_B - 86 \text{ MPa} \end{cases} \tag{3-18}$$

Walton[6] mostra um diagrama a partir do qual a resistência mínima SAE pode ser obtida. O resultado é

EXEMPLO 3-2

É necessário assegurar que uma certa peça suprida por uma fundição sempre satisfaça ou exceda às especificações nº 20 da ASTM para ferro fundido (ver Tabela A-24). Que dureza deve ser especificada?

Solução

A partir da Equação (3-18), com $(S_u)_{\min} = 20$ kpsi, temos

Resposta

$$H_B = \frac{S_u + 12{,}5}{0{,}23} = \frac{20 + 12{,}5}{0{,}23} = 141$$

Se a fundição puder controlar a dureza dentro de 20 pontos, rotineiramente, então especifique $145 < H_B < 165$. Isso não impõe dificuldades à fundição e assegura ao projetista que o grau 20 da ASTM será sempre suprido a um custo previsível.

[5] D. E. Krause, "Gray Iron – A Unique Engineering Material", Publicação Especial ASTM 455, 1969, p. 3-29, como relatado em Charles F. Walton (ed.), *Iron Castings Handbook*, Iron Founders Society, Inc., Cleveland, 1971, p. 204, 205.

[6] *Ibid.*

$$S_u = 0{,}2375H_B - 16 \text{ kpsi} \tag{3-19}$$

o que é ainda mais conservador que os valores obtidos a partir da Equação (3-18).

Resultados Estocásticos

Para 111 pares de dados de aço carbono e aços de baixa liga forjados, $200 \leq H_B \leq 450$,

$$S_{ut} = \begin{cases} 0{,}495(1, 0{,}041)H_B \text{ kpsi} \\ 3{,}41(1, 0{,}041)H_B \text{ MPa} \end{cases} \tag{3-20}$$

Quando a dureza for uma variável aleatória, então, correspondendo às Equações (3-20),

$$\mathbf{S}_{ut} = \begin{cases} 0{,}495(1, 0{,}041)\mathbf{H}_B \text{ kpsi} \\ 3{,}41(1, 0{,}041)\mathbf{H}_B \text{ MPa} \end{cases} \tag{3-21}$$

Para ferros fundidos, as equações correspondentes às Equações (3-18) tornam-se

$$\mathbf{S}_{ut} = \begin{cases} 0{,}23\mathbf{H}_B - 9 + (0, 1{,}5) \text{ kpsi} \\ 1{,}58\mathbf{H}_B - 62 + (0, 10) \text{ MPa} \end{cases} \tag{3-22}$$

EXEMPLO 3-3

Ensaios de dureza Brinell foram realizados em uma amostra aleatória de cinco peças de aço, durante processamento. Os resultados foram 248, 253, 247, 244 e 246.

(*a*) Estime a média e o desvio-padrão da resistência à tração em unidades SI.

(*b*) O mínimo da ASTM é estabelecido a um nível que 99% da população podem satisfazer ou exceder. Com base em tal definição, que resistência à tração mínima corresponde a esse ensaio de amostra?

Solução

(*a*) Utilizando as equações da distribuição normal, primeiro obtemos a média e o desvio-padrão da dureza como

$$\bar{H}_B = 247{,}6 \text{ MPa} \qquad \hat{\sigma}_{HB} = 3{,}36 \text{ MPa} \qquad C_{HB} = 0{,}0136$$

A resistência à tração é o produto de duas quantidades estatísticas. Logo, a partir da Equação (3-21) temos

$$\mathbf{S}_u = 3{,}41(1, 0{,}041)\mathbf{H}_B = 3{,}41(1, 0{,}041)247{,}6(1, 0{,}0136) \text{ MPa}$$

A partir da Tabela 2-6, descobrimos que a média do produto de duas quantidades estocásticas é $\mu_{xy} = \mu_x\mu_y$. Por isso, o valor médio de $\mathbf{S}_u$ é

Resposta

$$S_u = 3{,}41(247{,}6) = 844{,}3 \text{ MPa}$$

O coeficiente de variação é encontrado a partir da mesma tabela, sendo

$$C_{Su} = \left(C_x^2 + C_y^2\right)^{1/2} = [0{,}041^2 + 0{,}0136^2]^{1/2} = 0{,}0432$$

Portanto,

Resposta

$$\hat{\sigma}_{Su} = \bar{S}_u C_{Su} = 844{,}3(0{,}0432) = 36{,}5 \text{ MPa}$$

(*b*) Para $\Phi(z) = 0{,}01$, a partir da Tabela A-10, encontramos $z = -2{,}326$. Logo, a resistência à tração mínima (determinística) é

Resposta

$$S_u = \bar{S}_u(1 + z_{0{,}99}C_{Su}) = 844{,}3[1 + (-2{,}326)(0{,}0432)] = 760 \text{ MPa}$$

3-5 Propriedades de Impacto

Uma força externa aplicada a uma estrutura ou peça é denominada *carga de impacto*, se o tempo de aplicação for inferior a um terço do menor período de vibração natural da peça ou estrutura. Do contrário, ela é chamada simplesmente de *carga estática*.

Os *ensaios de barras entalhadas de Charpy* (normalmente usados) e *Izod* (raramente usados) utilizam barras de geometrias especificadas, para determinar a fragilidade e a resistência ao impacto. Esses testes são úteis na comparação de vários materiais e na determinação de fragilidade a baixas temperaturas. Em ambos os ensaios, o espécime é atingido por um pêndulo solto de uma altura fixa, e a energia absorvida por esse espécime, chamada de *valor de impacto*, pode ser calculada a partir da altura do balanço após a fratura, mas é lida de um mostrador que essencialmente "computa" o resultado.

O efeito da temperatura nos valores de impacto é apresentado, na Figura 3-6, para um material exibindo uma transição dúctil-frágil. Nem todos os materiais mostram essa transição. Observe a região estreita de temperaturas críticas na qual o valor do impacto aumenta muito rapidamente. Na região de baixa temperatura, a fratura aparece como uma fratura frágil, do tipo estilhaçada, ao passo que sua aparência é bruta, do tipo rasgada, acima da região de temperatura crítica. A temperatura crítica parece ser dependente tanto do material quanto da geometria do entalhe. Por essa razão, os projetistas não devem confiar cegamente nos resultados de ensaios de barras entalhadas.

A taxa média de deformação empregada na obtenção do diagrama de tensão-deformação é de cerca de 0,001 in/(in · s) ou menos. Quando a taxa de deformação é aumentada, tal como ocorre sob condições de impacto, as resistências também aumentam, como ilustra a Figura 3-7. De fato, em taxas de deformação muito altas, a resistência ao escoamento parece se aproximar da resistência à tração como um limite. Entretanto, observe que as curvas mostram pouca mudança na elongação. Isso significa que a ductilidade permane-

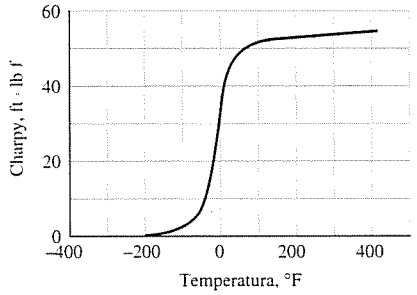


Figura 3-6 O traço médio mostra o efeito da temperatura nos valores de impacto. O resultado de interesse é a temperatura de transição frágil-dúctil, freqüentemente definida como aquela na qual o traço médio passa pelo nível de 15 ft · lbf. A temperatura crítica é dependente da geometria do entalhe, razão pela qual o entalhe em V de Charpy é definido rigorosamente.

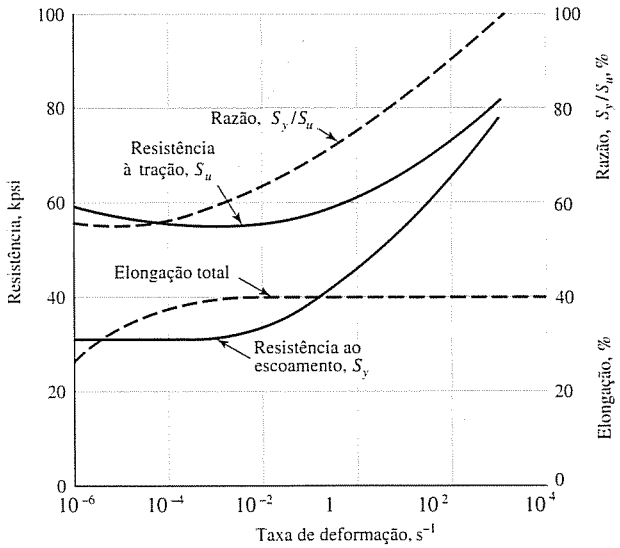


Figura 3-7 Influência da taxa de deformação nas propriedades de tração.

ce aproximadamente a mesma. Além disso, em vista do aumento pronunciado da resistência ao escoamento, poder-se-ia esperar que um aço brando se comportasse de forma elástica praticamente de um extremo a outro de seu intervalo de resistência sob condições de impacto.

Os ensaios Charpy e Izod realmente produzem dados de tenacidade sob condições dinâmicas, em vez de estáticas. Pode muito bem ser que os dados de impacto obtidos desses ensaios sejam tão dependentes da geometria do entalhe quanto da taxa da deformação. Por tais razões, pode ser melhor utilizar os conceitos de sensibilidade a entalhe, tenacidade de fratura e mecânica de fratura, discutidos nos Capítulos 6 e 7, para estimar a possibilidade de trinca ou fratura.

3-6 Efeitos da Temperatura

Resistência e ductilidade, ou fragilidade, são propriedades afetadas pela temperatura do ambiente operacional.

O efeito da temperatura nas propriedades estáticas do aço é tipificado pelo diagrama de resistência contra temperatura da Figura 3-8. Observe que a resistência à tração muda somente uma pequena quantidade até uma certa temperatura ser alcançada. Nesse ponto, ela cai rapidamente. A resistência ao escoamento, contudo, decresce continuamente, à medida que a temperatura ambiental é aumentada. Há uma elevação substancial na ductilidade, como se poderia esperar, a temperaturas mais altas.

Muitos ensaios foram feitos de metais ferrosos sujeitos a cargas constantes, por longos períodos de tempo, a elevadas temperaturas. Descobriu-se que os espécimes ficaram deformados permanentemente, durante os ensaios, embora às vezes as tensões reais fossem menores que a resistência ao escoamento do material obtida de ensaios de curta duração, realizados à mesma temperatura. Essa deformação contínua sob carga é denominada *deformação lenta.*

Um dos ensaios mais úteis planejados é o de deformação lenta por períodos longos e sob carga constante. A Figura 3-9 ilustra uma curva típica desse tipo de ensaio. Ela é obtida a uma temperatura constante

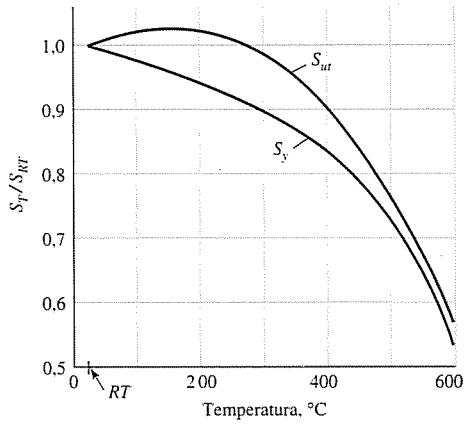


Figura 3-8 Um gráfico dos resultados de 145 ensaios de 21 aços carbono e de liga mostrando o efeito da temperatura de operação na resistência ao escoamento S_y e na resistência à tração S_{ut}. A ordenada é a razão da resistência à temperatura de operação para a resistência à temperatura ambiente. Os desvios-padrão foram $0{,}0442 \le \hat{\sigma}_{Sy} \le 0{,}152$ S_y e $0{,}099 \le \hat{\sigma}_{Sut} \le 0{,}11$ para S_{ut}. *(Fonte: E. A. Brandes (ed.),* Smithells Metal Reference Book, *6ª ed., Butterworth, London, 1983, p. 22-128 a 22-131.)*

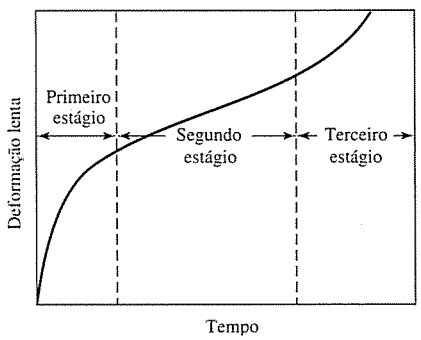


Figura 3-9 Curva deformação lenta-tempo.

declarada. Mais de um ensaio costuma ser realizado simultaneamente, a diferentes intensidades de tensão. A curva exibe três regiões distintas. No primeiro estágio, são incluídas as deformações plástica e elástica. Esse estágio mostra uma taxa de deformação lenta descrescente, que é devida a um endurecimento por deformação. O segundo estágio mostra uma taxa constante mínima de deformação lenta, causada pelo efeito de recozimento. No terceiro estágio, o espécime mostra uma considerável redução na área, a tensão verdadeira é aumentada e uma deformação lenta mais elevada finalmente leva à fratura.

Quando as temperaturas operacionais são mais baixas que a temperatura de transição (Figura 3-6), surge a possibilidade de que uma peça possa falhar por uma fratura frágil. Esse assunto será discutido mais adiante, no Capítulo 6.

Naturalmente, o tratamento térmico, como será mostrado, é empregado para produzir mudanças substanciais nas propriedades mecânicas de um material.

O aquecimento decorrente de corrente elétrica ou de solda a gás também altera as propriedades mecânicas. Tais mudanças podem ocorrer devido à fixação durante o processo de soldagem, bem como ao aquecimento; as tensões resultantes então permanecem quando as peças esfriam e as fixações são removidas. Os testes de dureza podem ser usados para saber se a resistência foi modificada pela soldagem; todavia, tais ensaios não revelarão a presença de tensões residuais.

3-7 Sistemas de Numeração

A Society of Automotive Engineers (SAE) foi a primeira a reconhecer a necessidade, e a adotar um sistema, de numeração de aços. Posteriormente, o American Iron and Steel Institute (AISI) adotou um sistema similar. Em 1975, a SAE publicou o Sistema Unificado de Numeração para Metais e Ligas (*Unified Numbering System for Metals and Alloys* – UNS); esse sistema também contém números de referência cruzados para especificações de outros materiais.[7] O UNS utiliza uma letra de prefixo para designar o material – por exemplo, G para aços de carbono e aços de liga, A para ligas de alumínio, C para ligas baseadas em cobre e S para aços inoxidáveis ou resistentes à corrosão. Para alguns materiais, não houve um acordo suficiente na indústria, até o momento, para garantir o estabelecimento de uma designação.

Para os aços, os primeiros dois números seguindo a letra de prefixo indicam a composição, excluindo o conteúdo de carbono. As várias composições empregadas dão-se como segue:

G10	Carbono simples	G46	Níquel-molibdênio
G11	Aço carbono de corte livre com mais enxofre e fósforo	G48	Níquel-molibdênio
G13	Manganês	G50	Cromo
G23	Níquel	G51	Cromo
G25	Níquel	G52	Cromo
G31	Níquel-cromo	G61	Cromo-vanádio
G33	Níquel-cromo	G86	Cromo-níquel-molibdênio
G40	Molibdênio	G87	Cromo-níquel-molibdênio
G41	Cromo-molibdênio	G92	Manganês-silício
G43	Níquel-cromo-molibdênio	G94	Níquel-cromo-molibdênio

O segundo par de números refere-se ao conteúdo aproximado de carbono. Assim, G10400 é um aço simples de carbono com um conteúdo de carbono de 0,40% (0,37 a 0,44%). O quinto número seguindo o prefixo é usado para situações especiais. Por exemplo, a antiga designação AISI 52100 representa uma liga de cromo com cerca de cem pontos de carbono. A designação UNS é G52986.

As designações UNS para aços inoxidáveis, prefixo S, utilizam as designações mais antigas AISI para os três primeiros números seguindo o prefixo. Os dois números seguintes são reservados para propósitos especiais. O primeiro número do grupo indica a composição aproximada. Assim, 2 é um aço cromo-níquel-manganês, 3 é um aço cromo-níquel e 4 é um aço de liga de cromo. Às vezes, aços inoxidáveis são referidos por seus conteúdos de liga. Dessa forma, o S30200 é freqüentemente considerado um aço inoxidável 18-8, significando 18% de cromo e 8% de níquel.

O prefixo para o grupo do alumínio é a letra A. O primeiro número seguindo o prefixo indica o processamento. Por exemplo, A9 é um alumínio forjado, ao passo que A0 é um alumínio fundido. O segundo número designa o grupo principal da liga, como mostrado na Tabela 3-1. O terceiro número do grupo é usado

[7] Muitos dos materiais discutidos no balanço deste capítulo estão listados nas tabelas do Apêndice.

Tabela 3-1 Designações de ligas de alumínio

Alumínio de pureza 99,00% ou mais	Ax1xxx
Ligas de cobre	Ax2xxx
Ligas de manganês	Ax3xxx
Ligas de silício	Ax4xxx
Ligas de magnésio	Ax5xxx
Ligas de magnésio-silício	Ax6xxx
Ligas de zinco	Ax7xxx

para modificar a liga original ou para designar limites de impureza. Os dois últimos números referem-se a outras ligas usadas com o grupo básico.

O sistema de numeração da American Society of Testing and Materials (ASTM) para ferro fundido é amplamente utilizado. Ele se baseia na resistência à tração. Portanto, a ASTM A18 fala das classes; por exemplo, o ferro fundido 30 tem uma resistência à tração mínima de 30 kpsi. Observe, pelo Apêndice A-24, contudo, que a resistência à tração *típica* é de 31 kpsi. Você deve ser cuidadoso ao decidir qual desses dois valores é usado no projeto e nos problemas por causa da significância do fator de segurança.

3-8 Fundição em Areia

A fundição em areia é um processo básico, de baixo custo, que se presta à produção econômica, em grandes quantidades, com praticamente nenhum limite de tamanho, forma ou complexidade da peça produzida.

Nela, a fundição é feita derramando-se metal fundido em moldes de areia. Um padrão (modelo), construído de metal ou madeira, é utilizado para dar forma à cavidade na qual o fundido é derramado. Reentrâncias ou cavidades no fundido são produzidas por "machos"* de areia introduzidos no molde. O projetista deve fazer um esforço para visualizar o padrão e o fundido no molde. Dessa maneira, os problemas de colocação de macho, remoção do padrão, respiro e solidificação podem ser estudados. Os fundidos a serem usados como barras de ensaio do ferro fundido são preparados separadamente, e as propriedades podem variar.

As peças fundidas de aço são as mais difíceis de produzir, uma vez que o aço tem a temperatura mais elevada de fundição de todos os materiais normalmente usados em tal processo. Essa alta temperatura agrava todos os problemas de fundição.

As seguintes regras serão reconhecidas como bastante úteis no projeto de qualquer fundição em areia:

1. Todas as secções devem ser projetadas com uma espessura uniforme.
2. A fundição deve ser projetada para produzir uma mudança gradual de secção a secção, onde isso for necessário.
3. Secções adjacentes devem ser projetadas com filetes generosos ou raios.
4. Uma peça complicada deve ser projetada em duas ou mais fundições simples de ser montadas por fixadores ou soldagem.

Aço, ferro cinzento, latão, bronze e alumínio são os materiais mais freqüentemente utilizados em fundição. A espessura mínima de parede para qualquer um deles é de cerca de 5 mm, ainda que, com um cuidado especial, secções mais finas possam ser obtidas com alguns materiais.

3-9 Moldagem em Casca

O processo de moldagem em casca emprega um padrão de metal aquecido, normalmente feito de ferro fundido, alumínio ou latão, que é posto na máquina de moldagem em casca contendo uma mistura de areia seca e resina termorrígida. O padrão quente funde o plástico, que, juntamente com a areia, forma uma casca de cerca de 5 a 10 mm de espessura ao redor do padrão. Essa casca é então cozida de 400 a 700°F, por um curto período de tempo, enquanto ainda está no padrão. A seguir, ela é arrancada deste e colocada em armazenagem, para uso em fundição.

* N. de T.: Machos são peças de areia especialmente preparadas e servem para a obtenção de cavidades internas nas peças reentrantes ou sem saída.

No próximo passo, as cascas são montadas por grampeamento, aparafusamento ou colagem e colocadas em um material de suporte, como um aço lançado, e o metal fundido é derramado na cavidade. A fina casca permite que o calor seja conduzido para fora, de modo que a solidificação ocorre rapidamente. À medida que esta ocorre, a união plástica é queimada e o molde colapsa. A permeabilidade do material de suporte permite que os gases escapem e que a peça fundida resfrie ao ar. Tudo isso auxilia na obtenção de grãos finos, peças fundidas sem tensões.

As peças fundidas por molde em casca caracterizam-se por uma superfície lisa, um respiro bem pequeno e tolerâncias apertadas. Em geral, as regras que governam a fundição em areia também se aplicam à fundição em molde de casca.

3-10 Fundição em Revestimento

A fundição em revestimento utiliza um padrão que pode ser feito de cera, plástico ou outro material. Depois que o molde é feito, o padrão é derretido. Assim, um método mecanizado para fundir uma grande quantidade de padrões é necessário. O material do molde é dependente do ponto de fundição do metal despejado. Conseqüentemente, um molde de argamassa pode ser usado para alguns materiais, ao passo que outros requeririam um molde cerâmico. Depois que o padrão é derretido completamente, o molde é cozido ou queimado; quando a queima estiver completa, o metal fundido pode ser derramado no molde quente e deixado para esfriar.

Se várias peças fundidas devem ser produzidas, então moldes metálicos ou permanentes podem ser convenientes, uma vez que têm a vantagem de suas superfícies serem lisas, brilhantes e precisas, de modo que pouca, se alguma, usinagem é requerida. A *fundição em molde metálico* é também conhecida como *fundição em matriz* (ou *sob pressão*) e *fundição centrífuga*.

3-11 Processo de Metalurgia do Pó

O processo de metalurgia do pó é um processo de produção em quantidade que utiliza pós de um único metal, de vários metais ou de uma mistura de metais e não-metais. Consiste essencialmente na mistura mecânica de pós, compactando-os em matriz a altas temperaturas, e no aquecimento da peça compactada a uma temperatura menor que a do ponto de fundição do ingrediente majoritário. As partículas são unidas em uma peça única forte, similar ao que seria obtido por derretimento dos mesmos ingredientes juntos. As vantagens de tal processo são: (1) eliminação de sucata ou material desperdiçado; (2) eliminação de operações de usinagem; (3) baixo custo da unidade em produções em massa; e (4) controle exato da composição. Algumas desvantagens são: (1) alto custo das matrizes; (2) baixas propriedades físicas; (3) alto custo dos materiais; (4) limitações no projeto; e (5) limitada série de materiais que podem ser usados. As peças comumente feitas por esse processo são mancais impregnados de óleo, filamentos de lâmpada incandescente, pontas de carbeto cementado para ferramentas e magnetos permanentes. Alguns produtos só podem ser feitos por metalurgia do pó, como os implantes cirúrgicos. A estrutura é diferente daquilo que pode ser obtido pela fundição dos mesmos ingredientes.

3-12 Processos de Trabalho a Quente

Por *trabalho a quente* são entendidos processos como laminação, forjamento, extrusão a quente e prensagem a quente. Em tais processos, o metal é aquecido acima de sua temperatura de recristalização.

A *laminação a quente* é geralmente usada para criar uma barra de material de forma e dimensão particulares. A Figura 3-10 mostra algumas das várias formas comumente produzidas pelo processo de laminação a quente. Todas estão disponíveis em diferentes tamanhos e materiais. Os materiais com maior disponibilidade em tamanhos de barras de laminados a quente são o aço, o alumínio, o magnésio e as ligas de cobre.

Tubos podem ser manufaturados por laminação de tiras ou chapas. As bordas da tira são laminadas juntas, criando costuras que são extremidades soldadas ou sobreposição soldada. Tubos sem costura são manufaturados ao se laminar e perfurar uma barra sólida aquecida com um mandril (punção) de perfuração.

Extrusão é o processo pelo qual grande pressão é aplicada a uma barra bruta ou rebolo de metal aquecido, causando seu escoamento por um orifício restrito. Esse processo é mais comum com materiais de baixo ponto de fusão, como alumínio, cobre, magnésio, chumbo, estanho e zinco. Extrusões de aços inoxidáveis são viáveis em uma base mais limitada.

Forjamento é o trabalho a quente de metal por martelos, prensas ou máquinas de forjamento. Em comum com outros processos de trabalho a quente, ele produz uma estrutura de grão refinado que resulta em

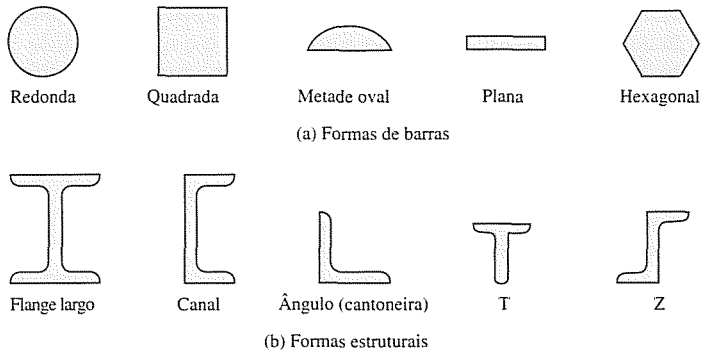


Figura 3-10 Formas comuns disponíveis para laminação a quente.

resistência e ductilidade aumentadas. Em comparação com as fundições, os forjamentos apresentam maior resistência para o mesmo peso. Além disso, o forjamento de queda livre pode ser feito com mais lisura e precisão do que a fundição em areia, de modo que menos usinagem é necessária. Todavia, o custo inicial de matrizes de forjamento geralmente é maior que o custo de padrões para peças fundidas, embora a maior resistência da unidade, e não o custo, costume ser o fator decisivo entre esses dois processos.

3-13 Processos de Trabalho a Frio

Por *trabalho a frio* é entendida a conformação de metal enquanto a uma temperatura baixa (normalmente, a temperatura ambiente). Em contraste com as peças produzidas por trabalho a quente, as produzida por trabalho a frio têm um acabamento mais brilhante, são mais precisas e requerem menos usinagem.

Barras e eixos acabados a frio são produzidos por laminação, repuxe, torneamento, esmerilhamento e polimento. Desses métodos, os mais utilizados na manufatura de produtos são a laminação a frio e o repuxamento a frio. A laminação a frio é usada, hoje, predominantemente para a produção de placas largas e lâminas. Praticamente todas as barras acabadas a frio são feitas por repuxe a frio, mas mesmo assim são às vezes erroneamente chamadas de "barras laminadas a frio". No processo de repuxe, as barras laminadas a quente têm primeiro suas escamas removidas para então serem repuxadas por uma matriz que reduz sua medida em cerca de $\frac{1}{32}$ a $\frac{1}{16}$ in. Esse processo não remove material da barra, mas reduz, ou "puxa" para baixo, o tamanho. Muitas formas diferentes de barras laminadas a quente podem ser usadas no repuxe a frio.

A laminação e o repuxe a frio têm o mesmo efeito sobre as propriedades mecânicas. O processo de trabalho a frio não muda o tamanho do grão, mas tão-somente o distorce. O trabalho a frio resulta em um grande aumento na resistência ao escoamento, um aumento na resistência à tração e na dureza, e um decréscimo na ductilidade. Na Figura 3-11, as propriedades de uma barra repuxada a frio são comparadas com as de uma laminada a quente do mesmo material.

Encabeçamento é um processo de trabalho a frio no qual o metal é agrupado ou recalcado. Esta operação é usada comumente para fabricar cabeças de parafusos e rabites, sendo capaz de produzir uma larga variedade de formas. Rosqueamento por rolo é o processo de laminar roscas por aperto e rolagem de uma for-

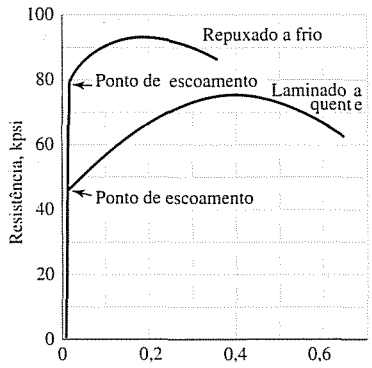


Figura 3-11 Diagrama de tensão-deformação para aço UNS G10350 laminado a quente e repuxado a frio.

ma bruta entre duas matrizes serrilhadas. Revoltear é a operação de conformação em perfil de material de chapas ao redor de uma forma rotativa, para gerar uma forma circular. Estampagem é o termo utilizado para descrever as operações de prensa em punção, como corte de peças, cunhagem, conformação e estiramento raso.

3-14 Tratamento Térmico do Aço

O tratamento térmico do aço refere-se a processos de temperatura e tempo controlados que aliviam tensões residuais e/ou modificam propriedades do material, tais como dureza (resistência), ductilidade e tenacidade. Outras operações mecânicas ou químicas são às vezes agrupadas sob o título de tratamento térmico. As operações comuns de termotratamento são recozimento, têmpera, revenido e cementação em caixa (endurecimento superficial).

Recozimento

Quando um material é trabalhado a frio ou a quente, tensões residuais são introduzidas e, como resultado, normalmente ele apresenta uma dureza maior devido a essas operações de trabalho, que mudam sua estrutura de maneira que ele não mais seja representado pelo diagrama de equilíbrio. Normalização e recozimento completo são operações de aquecimento que lhe permitem transformar-se de acordo com o diagrama de equilíbrio. O material a ser recozido é aquecido a uma temperatura 100°F acima da temperatura crítica, aproximadamente. Ele é então mantido nessa temperatura pelo tempo necessário, para que o carbono seja dissolvido e difundido. Assim, o objeto pode esfriar devagar, geralmente no mesmo forno em que foi tratado. Quando a transformação estiver completa, pode-se dizer que houve um recozimento completo também. O recozimento é usado para amolecer um material e torná-lo mais dúctil, bem como para abrandar as tensões residuais e refinar a estrutura de grão.

O termo *recozimento* inclui o processo chamado *normalização.* As peças a serem normalizadas podem ser tratadas a uma temperatura ligeiramente mais alta do que no recozimento completo. Isso produz uma estrutura de grão mais grosseira, que é mais facilmente usinada se o material for um aço de baixo carbono. No processo de normalização, a peça é resfriada em ar calmo, à temperatura ambiente. Sendo que esse resfriamento é mais rápido que o resfriamento lento usado no recozimento completo, menos tempo é disponibilizado para o equilíbrio, e o material fica mais duro que o aço completamente recozido. A normalização é freqüentemente usada como uma operação final de tratamento para aço. O resfriamento em ar calmo equivale a uma têmpera lenta.

Têmpera

O aço eutectóide completamente recozido consiste inteiramente em perlita, que é obtida da austenita sob condições de equilíbrio. Já um aço hipoeutectóide completamente recozido consistiria em perlita mais ferrita, ao passo que um aço hipereutectóide, na condição completamente recozida, consistiria em perlita mais cementita. A dureza do aço de um dado conteúdo de carbono depende da estrutura que substitui a perlita quando o recozimento completo não é realizado.

A ausência de recozimento completo indica uma taxa mais rápida de esfriamento. Essa taxa é o fator que determina a dureza. Uma taxa de esfriamento controlado é chamada *têmpera.* Uma têmpera branda é obtida por esfriamento em ar calmo, o que, como vimos, é obtido pelo processo de normalização. Os dois meios mais amplamente empregados para têmpera são água e óleo. A têmpera a óleo é muito lenta, mas previne trincas causadas pela rápida expansão do objeto em tratamento. A têmpera em água é usada para aços carbono, bem como para aços médio carbono e aços de baixa liga.

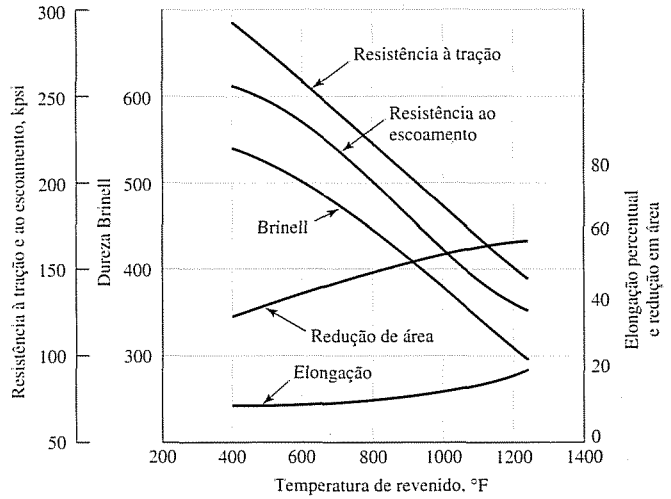
A efetividade da têmpera depende do fato de que, quando a austenita é esfriada, não se transforma em perlita instantaneamente, mas requer um tempo para iniciar e completar o processo. Sendo que tal transformação cessa por volta de 800°F, ela pode ser prevenida ao esfriar rapidamente o material a uma temperatura menor. Quando esse material é resfriado rapidamente a 400°F, ou menos, a austenita é então transformada em uma estrutura chamada *martensita.* A martensita é uma solução sólida supersaturada de carbono em ferrita e é a forma mais dura e forte do aço.

Se o aço for esfriado rapidamente a uma temperatura variando entre 400 e 800°F e nela for mantido por tempo suficiente, a austenita será então transformada em um material comumente chamado de *bainita.* A bainita é uma estrutura intermediária entre a perlita e a martensita. Embora existam várias estruturas que podem ser identificadas entre as temperaturas dadas, dependendo da temperatura empregada, são elas coletivamente conhecidas como bainita. Pela escolha dessa temperatura de transformação, praticamente qualquer variação de estrutura pode ser obtida. Tal variação aplica-se a todas as formas, desde a perlita grosseira até a martensita fina.

Revenido

Depois de um espécime de aço ser completamente endurecido, ele se torna muito duro e frágil, apresentando tensões residuais altas. O aço é instável e tende a se contrair à medida que envelhece. Essa tendência aumenta quando o espécime está sujeito a cargas externas, uma vez que as tensões resultantes contribuem ainda mais para essa instabilidade. Tais tensões internas podem ser aliviadas por um processo de aquecimento modesto denominado *alívio de tensão*, ou por uma combinação de alívio de tensão e amolecimento chamada *revenido*. Após o espécime ter sido completamente endurecido, ao ser temperado além da temperatura crítica, por um certo período de tempo ele é reaquecido a uma temperatura abaixo daquela, podendo então esfriar em ar calmo. A temperatura à qual ele é reaquecido depende da composição e do grau de dureza ou tenacidade desejado.[8] Essa operação de reaquecimento liberta o carbono preso na martensita, formando cristais de carboneto. A estrutura obtida é denominada *martensita revenida*. Nesse momento, ela é essencialmente uma dispersão superfina de carboneto(s) de ferro em perlita de grão fino.

O efeito das operações de tratamento térmico nas várias propriedades mecânicas de um aço de baixa liga é mostrado graficamente na Figura 3-12.



Condição	Resistência à tração, kpsi	Resistência ao escoamento, kpsi	Redução em área %	Elongação em 2 in, %	Dureza Brinell, Bhn
Normalizado	200	147	20	10	410
Como laminado	190	144	18	9	380
Recozido	120	99	43	18	228

Figura 3-12 O efeito da história termomecânica nas propriedades mecânicas do aço AISI 4340. (*Preparada pela Internation Nickel Company.*)

Endurecimento de Camada*

O propósito do endurecimento de camada (cementação) é produzir uma superfície externa dura em um espécime de aço de baixo carbono e, ao mesmo tempo, reter a ductilidade e a tenacidade no núcleo. Isso é feito aumentando-se o conteúdo de carbono na superfície. Tanto materiais carbonantes sólidos quanto líquidos ou

* N. de T.: Em geral, o tratamento termoquímico – em meio sólido, líquido ou gasoso – de aumento do teor de um elemento na superfície de um metal, visando ao endurecimento da camada superficial, é conhecido como *cementação*. Tradicionalmente, o carvão puro socado, chamado cemento, é posto no fundo de uma caixa metálica. Sobre essa camada são colocadas as peças a serem cementadas. A seguir, as peças são cobertas com o cemento. Por fim, a caixa tampada é posta no forno, no qual a difusão dos elementos cementantes para a superfície das peças metálicas ocorre pelo efeito do calor.

[8] Para os aspectos quantitativos do revenido em aços carbono e de baixa liga, ver Charles R. Mischke, "The Strength of Cold-Worked and Heat-Treated Steels", Cap. 8, de Joseph E. Shigley e Charles R. Mischke (eds.), *Standard Handbook of Machine Design*, 2ª ed., McGraw-Hill, New York, 1996.

gasosos podem ser utilizados. O processo consiste na introdução da peça a ser carbonada em um material carbonante por um período de tempo definido e a uma temperatura definida, dependendo da profundidade da camada desejada e da composição da peça. Esta última pode então ser temperada diretamente a partir da temperatura de carbonação e revenida, ou, em alguns casos, deve passar por um tratamento térmico duplo, a fim de assegurar que o núcleo e a camada estejam em condições apropriadas. Alguns dos processos de endurecimento superficiais mais úteis são o carbonante de pacote, o carbonante gasoso, a nitretação, a cianetação, o endurecimento por indução e o endurecimento por chama. Nos últimos dois casos, o carbono não é adicionado ao aço em questão, geralmente um aço de médio conteúdo de carbono (p. ex., SAE/AISI 1144).

Estimativa Quantitativa de Propriedades de Aços Tratados Termicamente

Os cursos de metalurgia (ou de ciência de materiais) para engenheiros mecânicos normalmente apresentam o método de adição de Crafts e Lamont para a predição de propriedades tratadas termicamente a partir do ensaio Jominy para aços carbono simples.[9] Caso isso não conste de sua experiência prévia, consulte o livro *Standard Handbook of Machine Design*, no qual o método de adição é abordado com exemplos.[10] Se este for um livro-texto para um curso de elementos de máquina, um bom projeto de aula (muitas mãos tornam o trabalho leve) será estudar o método e relatá-lo à classe.

Para aços de baixa liga, o método de multiplicação de Grossman[11] e Field[12] é explicado no supramencionado *Standard Handbook of Machine Design* (p. 13-27 a 13-30).

O manual *Modern Steels and Their Properties* explica como predizer a curva de Jominy pelo método de Grossman e Field, a partir de uma análise de cadinho e tamanho de grão.[13] Bethlehem Steel desenvolveu uma régua móvel plástica circular conveniente para esse propósito.

3-15 Aços de Liga

Embora um aço carbono comum seja uma liga de ferro e carbono com pequenas quantidades de manganês, silício, enxofre e fósforo, o termo *aço de liga* é aplicado quando um ou mais elementos diferentes do carbono são introduzidos em quantidades suficientes para modificar suas propriedades substancialmente. Os aços de liga não somente têm propriedades físicas mais desejáveis, mas também permitem uma latitude maior no processo de tratamento térmico.

Cromo

A adição de cromo resulta na formação de vários carbonetos de cromo muito duros; apesar disso, o aço resultante é mais dúctil que um aço da mesma dureza produzido por um simples aumento no conteúdo de carbono. O cromo também refina a estrutura de grão, de modo que esses dois efeitos combinados resultam em tenacidade e dureza aumentadas. O acréscimo do cromo aumenta o intervalo crítico de temperaturas e move o ponto eutectóide para a esquerda. Trata-se, portanto, de um elemento de liga muito útil.

Níquel

A adição de níquel ao aço também faz com que o ponto eutectóide se mova para a esquerda e aumente o intervalo crítico de temperaturas. O níquel é solúvel em ferrita e não forma carbonetos ou óxidos. Isso aumenta a resistência sem reduzir a ductilidade. O endurecimento de camada de aços de níquel resulta em um núcleo melhor do que aquele que poderia ser obtido com aços comuns de carbono. O cromo é freqüentemente usado em combinação com o níquel, a fim de obter a tenacidade e a ductilidade providas por este e a resistência ao desgaste e a dureza fornecidas por aquele.

Manganês

O manganês é adicionado a todos os aços como um agente desoxidante e dessulfurante; todavia, se o conteúdo de enxofre (súlfur) for baixo e o de manganês, superior a 1%, o aço é classificado como uma liga de

[9] W. Crafts e J. L. Lamont, *Hardenability and Steel Selection*, Pitman and Sons, London, 1949.
[10] Charles R. Mischke, Cap. 8, de Joseph E. Shigley e Charles R. Mischke (eds.), *Standard Handbook of Machine Design*, 2ª ed., McGraw-Hill, New York, 1996, p. 8-10 a 8-32.
[11] M. A. Grossman, *AIME*, fevereiro de 1942.
[12] J. Field, *Metals Progress*, março de 1943.
[13] *Modern Steels and Their Properties*, 7ª ed., Handbook 2757, Bethlehem Steel, 1972, p. 46-50.

manganês. De fato, o manganês dissolve-se na ferrita e também forma carbonetos. Faz com que o ponto eutectóide mova-se para a esquerda e diminui o intervalo crítico de temperaturas. Além disso, aumenta o tempo requerido para transformação, de modo que têmpera a óleo torna-se possível.

Silício

O silício é adicionado a todos os aços como agente desoxidante. Quando acrescido a aços de muito pouco carbono, produz um material frágil, com baixa perda de histerese e alta permeabilidade magnética. Seu uso principal ocorre com outros elementos ligantes, tais como manganês, cromo e vanádio, para estabilizar os carbonetos.

Molibdênio

Ainda que o molibdênio seja empregado sozinho em poucos aços, sua maior utilização ocorre quando combinado com outros elementos ligantes, tais como níquel, cromo ou ambos. Ele forma carbonetos e também se dissolve na ferrita até certo ponto, de modo que adiciona dureza e tenacidade. Além disso, aumenta o intervalo crítico de temperaturas e diminui substancialmente o ponto de transformação. Em decorrência dessa diminuição, o molibdênio é mais efetivo na produção de propriedades desejáveis de endurecimento em óleo e no ar. Exceto pelo carbono, ele tem o maior efeito endurecedor; ademais, por também contribuir para um tamanho de grão fino, isso resulta na retenção de uma boa parte da tenacidade.

Vanádio

O vanádio tem uma tendência considerável a formar carbonetos, sendo, por isso, utilizado somente em pequenas quantidades. É um forte agente desoxidante e promove um tamanho de grão fino. Visto que alguma quantidade sua é dissolvida na ferrita, ele também enrijece o aço. Além disso, fornece a este um amplo intervalo de endurecimento, de modo que a liga pode ser endurecida a partir de uma temperatura mais elevada. É muito difícil amolecer aço de vanádio por revenimento; por tal razão, ele é amplamente empregado em aços para ferramentas.

Tungstênio

O tungstênio é amplamente utilizado em aços de ferramenta, uma vez que estes devem manter sua dureza mesmo se aquecidos até a incandescência. Ele produz uma estrutura fina e densa e adiciona tanto tenacidade quanto dureza. Seu efeito é similar ao do molibdênio, à exceção de que deve ser acrescentado em maiores quantidades.

3-16 Aços Resistentes à Corrosão

Ligas à base de ferro contendo pelo menos 12% de cromo são chamadas *aços inoxidáveis*. A característica mais importante desses aços é sua resistência a muitas condições corrosivas, ainda que não a todas elas. Os quatro tipos disponíveis são os seguintes: aços cromo ferríticos, aços cromo-níquel austeníticos, aços inoxidáveis martensíticos e aços inoxidáveis de precipitação endurecível.

Os aços cromo ferríticos têm um conteúdo de cromo que varia de 12 a 27%. A resistência à corrosão é uma função desse conteúdo, de modo que as ligas que contêm menos de 12% ainda exibem alguma resistência à corrosão, embora possam enferrujar. A endurecibilidade de têmpera desses aços é função do conteúdo tanto de cromo como de carbono. Aços de muito carbono apresentam boa endurecibilidade de têmpera até cerca de 18% de cromo, enquanto, em intervalos inferiores de carbono, ela cessa em torno de 13%. Se um pouco de níquel for adicionado, esses aços reterão algum grau de endurecibilidade até 20% de cromo. Se o conteúdo de cromo exceder a 18%, eles se tornarão difíceis de soldar; em níveis muito altos de cromo, a dureza se tornará tão grande que muito cuidado e atenção deverão ser prestados às condições de serviço. Como o cromo é caro, o projetista escolherá o mais baixo conteúdo de cromo, conforme as condições corrosivas.

Os aços inoxidáveis cromo-níquel retêm a estrutura austenítica à temperatura ambiente; portanto, não são receptivos a tratamento térmico. Sua resistência pode ser melhorada pelo trabalho a frio. De fato, esses aços não são magnéticos, a menos que trabalhados a frio. As propriedades de endurecibilidade por trabalho também fazem com que sejam difíceis de usinar. Todos os aços cromo-níquel podem ser soldados. Eles têm propriedades de resistência à corrosão melhores que as dos aços cromo comuns. Quanto mais cromo é adicionado para maior resistência à corrosão, mais níquel deve também ser adicionado se as propriedades austeníticas forem retidas.

3-17 Materiais de Fundição

Ferro Fundido Cinza

De todos os materiais fundidos, o ferro fundido cinza é o mais amplamente utilizado, pois apresenta um custo muito baixo e é facilmente fundido em grandes quantidades, sendo também fácil de usinar. As principais objeções à sua utilização apontam para o fato de ser frágil e fraco em tração. Além de um conteúdo alto de carbono (acima de 1,7% e normalmente superior a 2%), o ferro fundido também apresenta um conteúdo elevado de silício, com percentagens baixas de enxofre, manganês e fósforo. A liga resultante é composta de perlita, ferrita e grafita, sendo que, sob certas condições, a primeira pode se decompor nas duas últimas. Dessa forma, o produto resultante contém ferrita e grafita. Esta, na forma de flocos finos distribuídos uniformemente por toda a estrutura, escurece-a – daí o nome de *ferro fundido cinza.*

O ferro fundido cinza não é soldável prontamente, uma vez que pode trincar, mas essa tendência pode ser reduzida se a peça for pré-aquecida cuidadosamente. Embora as peças fundidas sejam geralmente usadas na condição bruta de fundição, um recozimento brando reduz as tensões de esfriamento e melhora a usinabilidade. A resistência à tração do ferro fundido cinza varia de 100 a 400 MPa (15 a 60 kpsi), e as resistências à compressão são 3 a 4 vezes as resistências à tração. O módulo de elasticidade varia amplamente, com valores estendendo-se por todo o intervalo de 75 a 150 GPa (11 a 22 Mpsi).

Ferro Fundido Dúctil e Nodular

Devido ao longo tratamento térmico requerido para produzir ferro fundido maleável, os engenheiros desejaram por muito tempo um ferro fundido que combinasse as propriedades dúcteis do ferro maleável com a facilidade de fundição e usinagem do ferro cinza e que, ao mesmo tempo, tivesse essas propriedades nas condições de fundição. Um processo de produção de um material desse tipo usando material contendo magnésio parece preencher tais requerimentos.

O *ferro fundido dúctil* – ou *ferro fundido nodular*, como às vezes é chamado – é essencialmente o mesmo que o ferro fundido maleável, pois ambos contêm grafita na forma de esferóides. Entretanto, o ferro fundido dúctil, conforme as condições de fundição, exibe propriedades muito próximas às do ferro maleável; além disso, se um recozimento simples de 1 hora for administrado e seguido de um esfriamento lento, ele exibirá ainda mais ductilidade do que o produto maleável. O ferro dúctil é feito adicionando-se MgFeSi ao fundido; como o magnésio borbulha a essa temperatura, é necessário ligá-lo com outros elementos antes de ser introduzido.

O ferro dúctil apresenta um alto módulo de elasticidade (172 GPa ou 25 Mpsi), quando comparado com o ferro fundido cinza, e é elástico no sentido de que parte da curva de tensão-deformação é uma linha reta. O ferro fundido cinza, por outro lado, não obedece à lei de Hooke, pois o módulo de elasticidade diminui continuamente com o aumento da tensão. Tal como o ferro fundido cinza, contudo, o ferro nodular tem uma resistência à compressão superior à resistência à tração, embora essa diferença não seja tão grande. Em 40 anos, ele passou a ser amplamente usado.

Ferro Fundido Branco

Se todo o carbono no ferro fundido estiver na forma de cementita e perlita, sem qualquer grafita presente, então a estrutura resultante é branca e conhecida como *ferro fundido branco.* Essa estrutura pode ser produzida de duas maneiras. A composição pode ser ajustada mantendo-se os conteúdos de carbono e silício baixos, ou então a composição de ferro fundido cinza pode ser fundida em molde metálico (coquilha), a fim de promover um esfriamento rápido. Por qualquer de ambos os métodos, um fundido com grandes quantidades de cementita é produzido; como resultado, o produto é muito frágil e duro para usinar, mas também muito resistente ao desgaste. Uma coquilha é comumente usada na produção de fundidos de ferro cinza para prover uma superfície dura, dentro de uma área particular da peça fundida, ao mesmo tempo em que retém a estrutura cinza mais desejável dentro da porção restante. Isso produz uma peça fundida relativamente tenaz, com uma área resistente ao desgaste.

Ferro Fundido Maleável

Se um ferro fundido branco, dentro de um certo intervalo de composição, for recozido, um produto chamado *ferro fundido maleável* será formado. O processo de recozimento libera o carbono, de modo que ele fica presente como a grafita, justamente como no ferro fundido cinza, mas em uma forma diferente. No ferro fundido cinza, a grafita está presente na forma de flocos finos, ao passo que, no ferro fundido maleável, ela

tem uma forma nodular e é conhecida como *carbono de revenido*. Um ferro fundido maleável de boa qualidade pode ter uma resistência à tração acima de 350 MPa (50 kpsi), com uma elongação de até 18%. A percentagem de elongação de um ferro fundido cinza, por outro lado, é raramente superior a 1%. Por causa do tempo requerido para recozimento (até seis dias, para peças fundidas grandes e pesadas), o ferro maleável é necessariamente mais caro que o ferro fundido cinza.

Ligas de Ferros Fundidos

Níquel, cromo e molibdênio são os elementos de liga mais comumente usados no ferro fundido. O níquel é um elemento ligante de propósito geral, normalmente adicionado em quantidades de até 5%. Ele aumenta a resistência e a densidade, melhora as qualidades de desgaste e eleva a usinabilidade. Se seu conteúdo for aumentado em 10 a 18%, disso resultará uma estrutura austenítica com propriedades valiosas de resistência ao calor e à corrosão. O cromo, por sua vez, aumenta a dureza e a resistência ao desgaste e, quando usado com uma coquillha, aumenta também a tendência a formar ferro branco. Quando cromo e níquel são ambos adicionados, a dureza e a resistência são melhoradas sem que haja uma redução na taxa de usinabilidade. Já molibdênio adicionado em quantidades de até 1,25% aumenta a rigidez, a dureza e a resistência à tração e ao impacto. Trata-se de um elemento ligante amplamente utilizado.

Aços Fundidos

A vantagem do processo de fundição é que peças de formas complexas podem ser manufaturadas a custos menores de fabricação do que seriam por outros meios, como a soldagem. Assim, a escolha de aços fundidos é lógica quando a peça é complexa e quando deve também ter uma alta resistência. As temperaturas de fundição mais elevadas para aços agravam verdadeiramente os problemas de fundição e requerem uma atenção mais próxima a detalhes como projeto do núcleo, espessuras de secção, filetes e processo de esfriamento. Os mesmos elementos ligantes usados para aços forjados podem ser igualmente usados para aços fundidos, de modo a melhorar a resistência e outras propriedades mecânicas. Peças de aço fundido podem também ser tratadas termicamente, a fim de alterar propriedades mecânicas, e, à diferença dos ferros fundidos, podem ser soldadas.

3-18 Metais Não-Ferrosos

Alumínio

As características destacadas do alumínio e de suas ligas são a razão resistência-peso, suas resistências à corrosão e suas altas condutividades térmica e elétrica. Sua densidade aproxima-se de 2.770 kg/m^3 (0,10 lbf/in^3), se comparada com 7.750 kg/m^3 (0,28 lbf/in^3) para o aço. O alumínio puro tem uma resistência à tração de cerca de 90 MPa (13 kpsi), que, no entanto, pode ser melhorada consideravelmente pelo trabalho a frio e também ligando-se com outros materiais. O módulo de elasticidade do alumínio, bem como o de suas ligas, é de 71,7 GPa (10,4 Mpsi), o que significa que ele tem aproximadamente um terço da rigidez do aço.

Considerando o custo e a resistência do alumínio e de suas ligas, cumpre ressaltar que eles estão entre os materiais mais versáteis do ponto de vista de fabricação. O alumínio pode ser processado por fundição em areia, fundição em matriz (sob pressão), trabalho a quente e a frio ou extrusão. Suas ligas podem ser usinadas, trabalhadas por prensa, soldadas por deposição de liga metálica, de metais não-ferrosos ou por difusão. O alumínio puro funde a 660°C (1215°F), o que o torna muito desejável para a produção de peças fundidas, seja em molde permanente ou de areia. Além disso, ele está comercialmente disponível na forma de chapas, barras, lâminas, folhas, bastões e tubos, bem como em formas estruturais e extrudadas. Certas precauções devem ser tomadas em junções de alumínio por soldagem, por deposição de liga metálica, de liga não-ferrosa ou por difusão, uma vez que esses métodos de união não são recomendados para todas as ligas.

A resistência à corrosão de ligas de alumínio depende da formação de um recobrimento fino de óxido. Esse filme forma-se de maneira espontânea, pois o alumínio é inerentemente muito reativo. A erosão constante, ou abrasão, remove tal filme e permite que a corrosão ocorra. Um filme de óxido extrapesado pode ser produzido pelo processo de *anodização*. Nele, o espécime é usado como o ânodo em uma eletrólise, que pode ter ácido crômico, ácido oxálico ou ácido sulfúrico. É possível, nesse processo, controlar a cor do filme resultante com muita precisão.

Os elementos ligantes mais úteis para o alumínio são o cobre, o silício, o manganês, o magnésio e o zinco. As ligas de alumínio são classificadas como ligas de fundição ou de forjamento. As ligas de fundição

têm maiores percentagens de elementos ligantes para facilitar a fundição, mas isso dificulta o trabalho a frio. Muitas dessas ligas, e algumas das de forjamento, não podem ser endurecidas por tratamento térmico. As ligas que são tratáveis termicamente utilizam um elemento de liga que se dissolve no alumínio. O tratamento térmico consiste em aquecimento do espécime a uma temperatura que permita ao elemento ligante passar à solução, seguindo-se então um resfriamento tão rápido que o elemento em questão não é precipitado. O processo de envelhecimento pode ser acelerado a partir de um leve aquecimento, o que resulta em maior dureza e resistência. Uma das ligas tratáveis termicamente mais conhecidas é o duralumínio, ou 2017 (4% de Cu; 0,5% de Mg; 0,5% de Mn). Essa liga endurece, em quatro dias, à temperatura ambiente. Devido a esse rápido envelhecimento, ela deve ser guardada sob refrigeração após têmpera e antes de conformação, ou então ser conformada imediatamente após têmpera. Outras ligas (como as 5053) têm sido desenvolvidas de modo a endurecer e envelhecer mais vagarosamente, de modo que apenas refrigeração branda é requerida antes da conformação. Depois desta, elas são envelhecidas artificialmente em um forno e apresentam aproximadamente a mesma resistência e dureza das ligas 2024. As ligas de alumínio impossibilitadas de ser tratadas termicamente podem ser endurecidas somente por trabalho a frio. Tanto o endurecimento por trabalho como o por tratamento térmico podem ser evitados por um processo de recozimento.

Magnésio

A densidade do magnésio é de cerca de 1.800 kg/m^3 (0,065 lbf/in^3), o que corresponde a dois terços da densidade do alumínio e a um quarto da do aço. Por ser o mais leve de todos os metais comerciais, sua maior utilização está na indústria aeroespacial e automotiva, ainda que outros usos estejam atualmente sendo encontrados para ele. Embora as ligas de magnésio não apresentem grande resistência, devido a seu pouco peso a razão resistência-peso compara-se favoravelmente com a das ligas mais fortes de alumínio e aço. Mesmo assim, as ligas de magnésio são mormente utilizadas em aplicações em que resistência não é uma consideração muito importante. O magnésio não resiste a temperaturas elevadas; o ponto de escoamento é definitivamente reduzido quando a temperatura é elevada à da água fervendo.

O magnésio e suas ligas têm um módulo de elasticidade de 45 GPa (6,5 Mpsi) em tração e compressão, embora algumas delas não sejam tão fortes em compressão como em tração. Curiosamente, o trabalho a frio reduz o módulo de elasticidade. Uma série de ligas de magnésio fundidas também está disponível.

Titânio

O titânio e suas ligas são similares, em resistência, ao aço de resistência moderada, mas pesam praticamente a metade deste. O material exibe muito boa resistência à corrosão, tem baixa condutividade térmica, não é magnético e apresenta também resistência a altas temperaturas. Seu módulo de elasticidade está entre aqueles do aço e do alumínio a 16,5 Mpsi (114 GPa). Devido a suas muitas vantagens sobre esses dois últimos elementos, suas aplicações incluem o seguinte: estruturas aeroespaciais e de aeronaves militares e componentes, equipamento marinho, tanques químicos e equipamento de processamento, sistemas de manipulação de fluido, bem como dispositivos de substituição interna para humanos. Suas desvantagens são o seu alto custo, se comparado ao do aço e do alumínio, e a dificuldade de usiná-lo.

Ligas Baseadas em Cobre

Quando o cobre é ligado ao zinco, geralmente é denominado *latão*. Se é ligado a um outro elemento, freqüentemente é chamado de *bronze*. Às vezes, o outro elemento é também especificado, como, por exemplo, *bronze de estanho* ou *bronze de fósforo*. Existem centenas de variações em cada categoria.

Latão com 5 a 15% de Zinco

Latões com baixo zinco são fáceis de trabalhar a frio, especialmente aqueles com um conteúdo de zinco mais alto. São dúcteis, mas freqüentemente duros de usinar, e sua resistência à corrosão é boa. As ligas incluídas nesse grupo são o *latão dourado* (5% de Zn), o *bronze comercial* (10% de Zn) e o *bronze vermelho* (15% de Zn). O latão dourado é usado principalmente em jóias e artigos a serem revestidos com ouro; ele tem a mesma ductilidade que o cobre, mas maior resistência, acompanhado por características de usinagem inferior. O bronze comercial é utilizado em jóias, forjamento e estampagem, devido à sua ductilidade. Suas propriedades de usinagem são pobres, mas ele tem excelentes propriedades de trabalho a frio. Já o bronze vermelho apresenta boa resistência à corrosão, bem como a altas temperaturas. Por isso, é usado muito na forma de tubo ou cano, de modo a transportar água quente em aplicações como radiadores e condensadores.

Latão com 20 a 36% de Zinco

Incluídos no grupo intermediário do zinco estão o *baixo latão* (20% de Zn), o *latão cartucho* (30% de Zn) e o *latão amarelo* (35% de Zn). Sendo o zinco mais barato que o cobre, essas ligas custam menos que aquelas com mais cobre e menos zinco. Apresentam também melhor usinabilidade e uma resistência ligeiramente maior; isso, contudo, é contrabalanceado por sua baixa resistência à corrosão e pela possibilidade de trincamento em pontos de tensões residuais. O baixo latão é muito similar ao latão vermelho, sendo usado para artigos que requerem operações de repuxamento profundo. Das ligas de cobre-zinco, o latão cartucho apresenta a melhor combinação de ductilidade e resistência. Os estojos de cartucho foram, em sua totalidade, originalmente manufaturados por trabalho a frio; o processo consistia em uma série de repuxes profundos, cada qual sendo seguido por um recozimento, de modo a colocar o material em condição para o próximo repuxe – daí o nome latão de cartucho. Embora a habilidade de trabalho a quente do latão amarelo seja pobre, ele pode ser utilizado praticamente em qualquer outro processo de fabricação, sendo por esse motivo empregado em uma grande variedade de produtos.

Quando pequenas quantidades de chumbo são adicionadas a latões, a usinabilidade destes é grandemente melhorada, ocorrendo alguma melhoria na habilidade de serem trabalhados a quente. A adição de chumbo prejudica as propriedades de soldagem e trabalho a frio. Nesse grupo estão o *latão baixo em chumbo* ($32\frac{1}{2}$% de Zn, $\frac{1}{2}$% de Pb), o *latão alto em chumbo* (34% de Zn, 2% de Pb) e o *latão isento de afiação* ($35\frac{1}{2}$% de Zn, 3% de Pb). O latão baixo em chumbo não é fácil de usinar, mas tem boas propriedades de trabalho a frio. É usado para várias peças aparafusadas de máquina. Já o latão alto em chumbo, às vezes chamado de *latão de gravador*, é utilizado para instrumentos, trincos e peças de relógio. O latão isento de afiação, por sua parte, é também utilizado em peças aparafusadas de máquina e apresenta boa resistência à corrosão, com excelentes propriedades mecânicas.

O *metal almirantado* (28% de Zn) contém 1% de estanho, o que possibilita excelente resistência à corrosão, especialmente por água salgada. Além disso, ele apresenta boa resistência e ductilidade, ainda que apenas características satisfatórias de usinabilidade e trabalhabilidade. Devido à sua resistência à corrosão, é usado em centrais elétricas e em equipamentos químicos. O *latão de alumínio* (22% de Zn) contém 2% de alumínio e é utilizado para os mesmos propósitos que o metal almirantado, pois tem aproximadamente as mesmas propriedades e características. Na forma de tubos ou canos, ele é preferido em relação ao metal almirantado, uma vez que conta com uma melhor resistência à corrosão causada pela água em alta velocidade.

Latão com 36 a 40% de Zinco

Os latões com mais de 38% de zinco são menos dúcteis que o latão de cartucho e não podem ser trabalhados a frio tão intensamente. Eles com freqüência são trabalhados a quente e extrudados. O *metal Muntz* (40% de Zn) é baixo quanto ao custo e moderadamente resistente à corrosão. Já o *latão naval* tem a mesma composição do metal Muntz, exceto pela adição de 0,75% de estanho, o que contribui para sua resistência à corrosão.

Bronze

O *bronze de silício*, que contém 3% de silício e 1% de manganês, além do cobre, apresenta propriedades mecânicas iguais às do aço brando, bem como uma boa resistência à corrosão. Pode ser trabalhado a quente ou a frio, usinado ou soldado. É útil onde quer que a resistência à corrosão, combinada com a resistência mecânica, seja requerida.

O *bronze de fósforo*, feito com até 11% de estanho e contendo pequenas quantidades de fósforo, é especialmente resistente à fadiga e à corrosão. Apresenta uma alta resistência à tração e alta capacidade de absorver energia; além disso, é também resistente ao desgaste. Tais propriedades o fazem muito útil como material de molas.

O *bronze de alumínio* é uma liga tratável termicamente, contendo até 12% de alumínio. Essa liga apresenta resistência e propriedades de resistência à corrosão melhores que as do latão; além disso, suas propriedades podem ser variadas, em ampla extensão, por trabalho a frio, tratamento térmico ou mudança de composição. Quando ferro é adicionado em quantidades de até 4%, a liga tem um alto limite de resistência, uma alta resistência a choques e uma excelente resistência ao desgaste.

O *bronze de berílio* é outra liga tratável termicamente, contendo cerca de 2% de berílio. Essa liga é muito resistente à corrosão e conta com alta resistência mecânica, dureza e resistência ao desgaste. Embora cara, ela é usada em molas e outras peças sujeitas a carregamento de fadiga em que resistência à corrosão é requerida.

Com uma leve modificação, a maioria das ligas baseadas em cobre está disponível na forma fundida.

3-19 Plásticos

O termo *termoplástico* é empregado para significar qualquer plástico que flui ou que é moldável quando recebe calor; às vezes, esse termo é também aplicado a plásticos moldáveis sob pressão, os quais podem ser remoldados quando aquecidos.

Um termorrígido é um plástico para o qual o processo de polimerização é concluído em uma prensa de moldagem quente, na qual o plástico é liquefeito sob pressão. Os plásticos termorrígidos não podem ser remoldados.

A Tabela 3-2 lista alguns dos termoplásticos mais amplamente usados, junto com algumas de suas características e a série de suas propriedades. A Tabela 3-3, listando alguns dos termorrígidos, é similar. Essas

Tabela 3-2 Os termoplásticos. *Fonte*: Estes dados foram obtidos do *Machine Design Materials Reference Issue*, publicado por Penton/IPC, Cleveland. Esses pontos de referência são publicados aproximadamente a cada dois anos e constituem uma fonte excelente de dados sobre uma grande variedade de materiais

Nome	S_u, kpsi	E, Mpsi	Dureza Rockwell	% Elongação	Estabilidade dimensional	Resistência térmica	Resistência química	Processamento
Grupo ABS	2-8	0,10-0,37	60-110R	3-50	Boa	*	Moderada	EMST
Grupo acetal	8-10	0,41-0,52	80-94M	40-60	Excelente	Boa	Alta	M
Acrílico	5-10	0,20-0,47	92-110M	3-75	Alta	*	Moderada	EMS
Grupo fluoroplástico	0,50-7	...	50-80D	100-300	Alta	Excelente	Excelente	MPR†
Náilon	8-14	0,18-0,45	112-120R	10-200	Pobre	Pobre	Boa	CEM
Óxido de fenileno	7-18	0,35-0,92	115R, 106L	5-60	Excelente	Boa	Moderada	EFM
Policarbonato	8-18	0,34-0,86	62-91M	10-125	Excelente	Excelente	Moderada	EMS
Poliéster	8-18	0,28-1,6	65-90M	1-300	Excelente	Pobre	Excelente	CLMR
Poliamida	6-50	...	88-120M	Muito baixo	Excelente	Excelente	Excelente†	CLMP
Sulfito de polifenileno	14-19	0,11	122R	1,0	Boa	Excelente	Excelente	M
Grupo poliestireno	1,5-12	0,14-0,60	10-90M	0,5-60	...	Pobre	Pobre	EM
Polissulfona	10	0,36	120R	50-100	Excelente	Excelente	Excelente†	EFM
Cloreto de polivinil	1,5-7,5	0,35-0,60	65-85D	40-450	...	Pobre	Pobre	EFM

* Graus de termorresistência disponíveis.
† Com exceções.
C: revestimento; L: laminados; R: resinas; E: extrusões; M: molde; S: chapa; F: espumas; P: prensa e métodos de sinterização; T: tubos.

Tabela 3-3 Os termorrígidos. *Fonte*: Estes dados foram obtidos do *Machine Design Materials Reference Issue*, publicado por Penton/IPC, Cleveland. Esses pontos de referência são publicados aproximadamente a cada dois anos e constituem uma fonte excelente de dados sobre uma grande varidade de materiais

Nome	S_u, kpsi	E, Mpsi	Dureza Rockwell	% Elongação	Estabilidade dimensional	Resistência térmica	Resistência química	Processamento
Alkyd	3-9	0,05-0,30	99M*	...	Excelente	Boa	Moderada	M
Allylic	4-10	...	105-120M	...	Excelente	Excelente	Excelente	CM
Grupo amino	5-8	0,13-0,24	110-120M	0,30-0,90	Boa	Excelente*	Excelente*	LR
Epóxi	5-20	0,03-0,30*	80-120M	1-10	Excelente	Excelente	Excelente	CMR
Fenólicos	5-9	0,10-0,25	70-95E	...	Excelente	Excelente	Boa	EMR
Silicones	5-6	...	80-90M	...	...	Excelente	Excelente	CLMR

* Com exceções.
C: revestimento; L: laminados; R: resinas; E: extrusões; M: molde; S: chapa; F: espumas; P: prensa e métodos de sinterização; T: tubos.

tabelas são apresentadas apenas para informação, não devendo ser utilizadas para se tomar uma decisão final de projeto. O total de propriedades e características que podem ser obtidas com plásticos é muito grande. A influência de diversos fatores, tais como custo, moldabilidade, coeficiente de atrito, ação do tempo, resistência ao impacto e efeito de recheios e reforços, deve ser considerada. Os catálogos dos fabricantes serão muito úteis ao se fazer escolhas possíveis.

3-20 Materiais Compósitos[14]

Os materiais compósitos são formados a partir de dois ou mais materiais dissimilares, cada qual contribuindo para as propriedades finais. À diferença das ligas metálicas, os materiais em um compósito permanecem separados um do outro em nível microscópico.

A maioria dos compósitos de engenharia consiste em dois materiais: um reforço denominado *enchimento* e uma *matriz*. O enchimento provê rigidez e resistência; a matriz mantém o material coeso e serve para transferir carga entre os reforços descontínuos. Os reforços mais comuns, ilustrados na Figura 3-13, são fibras contínuas, sejam elas retas ou entrelaçadas, fibras cortadas miúdas e particuladas. As matrizes mais comuns são várias resinas plásticas, embora outros materiais, incluindo metais, sejam usados.

Os metais e outros materiais tradicionais de engenharia são uniformes, ou isotrópicos, por natureza. Isso significa que suas propriedades materiais, como resistência, rigidez e condutividade térmica, independem da posição dentro do material e da escolha do sistema de coordenadas. A natureza descontínua dos reforços compostos, contudo, significa que as propriedades materiais podem variar em posição e direção. Por exemplo, uma resina de epóxi reforçada com fibras contínuas de grafite terá resistência muito alta e rigidez na direção dessas fibras, mas muito baixas propriedades normais ou transversais a elas. Por essa razão, as estruturas de materiais compósitos são normalmente construídas a partir de múltiplas camadas (laminados), cada uma das quais orientada a atingir rigidez estrutural ótima e desempenho de resistência.

Altas razões de resistência por peso, até cinco vezes maiores que aquelas de aços de alta resistência, podem ser conseguidas. Da mesma forma, podem ser obtidas altas razões de rigidez por peso até mesmo oito vezes maiores que aquelas de metais estruturais. Por essa razão, os materiais compósitos estão se tornando muito populares em aplicações automotivas, aeronáuticas e aeroespaciais, nas quais o peso é muito importante.

A direcionabilidade das propriedades dos materiais compósitos aumenta a complexidade da análise estrutural. Os materiais isotrópicos são completamente definidos por duas constantes de engenharia: o módulo de Young E e a razão de Poisson ν. Uma única camada de um material compósito, entretanto, requer quatro constantes, definidas com respeito ao sistema de coordenadas da camada. As constantes são dois módulos de Young (o módulo longitudinal na direção das fibras, E_1, e o módulo transversal normal às fibras, E_2), uma razão de Poisson (ν_{12}, denominada razão maior de Poisson) e um módulo de cisalhamento (G_{12}). Uma quinta constante, a razão menor de Poisson, ν_{21}, é determinada pela relação de reciprocidade $\nu_{21} / E_2 = \nu_{12} / E_1$. Combinar isso com múltiplas camadas orientadas a diferentes ângulos torna a análise estrutural de estruturas complexas impraticável mediante técnicas manuais. Por essa razão, existem programas de computador para calcular as propriedades de uma construção de compósitos laminados.[15]

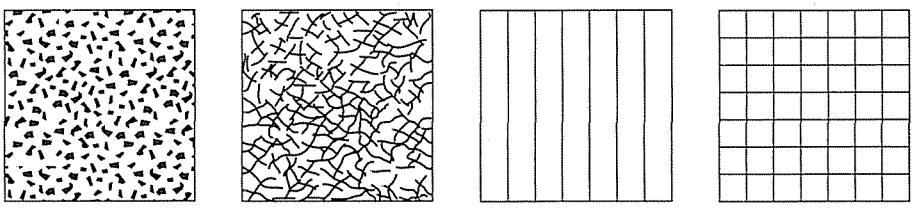


Figura 3-13 Compósitos categorizados pelo tipo de reforço.

[14] Para referências, ver I. M. Daniel e O. Ishai, *Engineering Mechanics of Composite Materials*, Oxford University Press, 1994, e *ASM Engineered Materials Handbook: Composites*, ASM International, Materials Park, OH, 1988.

[15] Para a listagem de programas de materiais compósitos, consultar http://composite.about.com/cs/software/index.htm.

PROBLEMAS

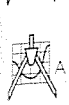
3-1 Determine as resistências mínimas à tração e ao escoamento para o aço repuxado a frio SAE 1020.

3-2 Determine as resistências mínimas à tração e ao escoamento para o aço laminado a quente UNS G10500.

3-3 Para os materiais apresentados nos Problemas 3-1 e 3-2, compare as seguintes propriedades: resistências mínimas à tração e ao escoamento, ductilidade e rigidez.

3-4 Admitindo que você estivesse especificando um aço AISI 1040 para uma aplicação em que desejasse maximizar a resistência ao escoamento, como você o faria?

3-5 Admitindo que você estivesse especificando um aço AISI 1040 para uma aplicação em que desejasse maximizar a ductilidade, como você o faria?



3-6 Determine as razões da resistência ao escoamento para densidade em peso (denominada *resistência específica*), em unidades de polegadas, para o aço laminado a quente UNS G10350, para o alumínio 2024-T4, para a liga de titânio Ti-6A1-4V e para o ferro fundido cinza ASTM nº 30.

3-7 Determine as razões de rigidez para densidade em peso (denominada *módulo específico*), em unidades de polegadas, para o aço laminado UNS G10350, para o alumínio 2024-T4, para a liga de titânio Ti-6A1-4V e para o ferro fundido cinza ASTM nº 30.

3-8 A *razão de Poisson* v é uma propriedade do material, bem como a razão da deformação lateral e da deformacão longitudinal para um membro em tração. Para um material homogêneo e isotrópico, o módulo de rigidez G está relacionado ao módulo de Young como

$$G = \frac{E}{2(1 + v)}$$

Usando os valores tabelados de G e E, determine a razão de Poisson para o aço, o alumínio, o berílio-cobre e o ferro fundido cinza.

3-9 Um espécime de aço médio em carbono, com um diâmetro inicial de 0,503 in, foi testado em tração usando-se um comprimento de bitola de 2 in. Os seguintes dados foram obtidos para os estados elástico e plástico:

Estado elástico		Estado plástico	
Carga P, lbf	Elongação, in	Carga P, lbf	Área A_f, in^2
1 000	0,0004	8 800	0,1984
2 000	0,0006	9 200	0,1978
3 000	0,0010	9 100	0,1963
4 000	0,0013	13 200	0,1924
7 000	0,0023	15 200	0,1875
8 400	0,0028	17 000	0,1563
8 800	0,0036	16 400	0,1307
9 200	0,0089	14 800	0,1077

Observe que existe um pouco de sobreposição nos dados. Trace o diagrama tensão-deformação nominal ou de engenharia utilizando duas escalas para a unidade de deformação ϵ, uma de zero até cerca de 0,02 in/in e outra de zero até a deformação máxima. A partir desse diagrama, encontre o módulo de elasticidade, a resistência à deformação de 0,2% de desvio, a resistência à tração e a redução percentual em área.

3-10 Compute a tensão verdadeira e a deformação logarítmica utilizando os dados do Problema 3-9 e trace os resultados em papel *log-log*. A seguir, encontre o coeficiente de resistência plástica σ_0 e o expoente m de deformação-enrijecimento. Encontre também a resistência ao escoamento e a resistência à tração depois que o espécime tiver 20% de trabalho a frio.

3-11 Os dados de tensão-deformação para um ensaio de tração em um espécime de ferro fundido são

Tensão de engenharia, kpsi	5	10	16	19	26	32	40	46	49	54
Deformação de engenharia $\epsilon \cdot 10^{-3}$ in/in	0,20	0,44	0,80	1,0	1,5	2,0	2,8	3,4	4,0	5,0

Trace o local geométrico tensão-deformação e encontre a resistência ao escoamento de 0,1% de desvio, bem como o módulo tangente de elasticidade na tensão zero e em 20 kpsi.

ANÁLISE **3-12** Tendo completado a tarefa do Problema 3-11, um engenheiro ficou insatisfeito com a precisão do resultado, dependendo, como ela depende, das tangentes traçadas às curvas desconhecidas. Observando que o local geométrico tensão-deformação em coordenadas cartesianas parece suave e parabólico, o engenheiro escreve

$$\epsilon = c_1\sigma + c_2\sigma^2$$

Encontre as constantes c_1 e c_2 por regressão (ver Problema 2-8). A partir dessa equação de regressão, determine o módulo tangente na carga zero e a 20 kpsi, bem como a resistência ao escoamento por desvio de 0,1%. Como tais determinações se comparam com a técnica do Problema 3-11? O que você tem a dizer a respeito do erro?

ANÁLISE **3-13** *Uma barra reta de secção transversal arbitrária e espessura h é trabalhada a frio, a um raio interno R ao redor de uma bigorna, como mostra a figura. Alguma superfície à distância N, tendo um comprimento original* L_{AB}, permanecerá inalterada em comprimento após a flexão. Tal comprimento é

$$L_{AB} = L_{AB'} = \frac{\pi(R+N)}{2}$$

Os comprimentos das superfícies externa e interna, após flexão, são

$$L_o = \frac{\pi}{2}(R+h) \qquad L_i = \frac{\pi}{2}R$$

Utilizando a Equação (5-8), verificamos que as deformações verdadeiras são

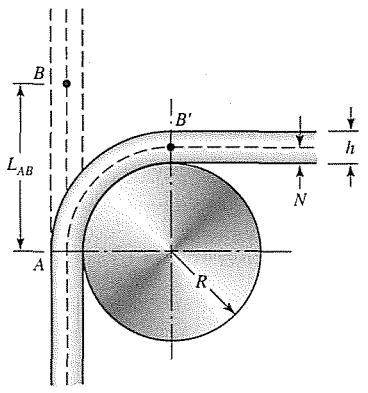
$$\varepsilon_o = \ln\frac{R+h}{R+N} \qquad \varepsilon_i = \ln\frac{R}{R+N}$$

Os ensaios mostram que $|\varepsilon_0| = |\varepsilon_i|$. *Mostre que*

$$N = R\left[\left(1+\frac{h}{R}\right)^{1/2} - 1\right]$$

e que

$$\varepsilon_o = \ln\left(1+\frac{h}{R}\right)^{1/2}$$



Problema 3-13

ANÁLISE **3-14** Os dados tabelados para um ensaio de torque-torção de um espécime sólido de torção de diâmetro de 12,5 mm, com um comprimento de bitola de 350 mm, são fornecidos a seguir. Trace esses dados e, utilizando uma regressão linear, determine o módulo de cisalhamento para o material. Estime também a resistência ao escoamento por cisalhamento a partir desse conjunto de dados.

T (N · m)	0	7,7	15,3	23,0	30,7	38,3	46,0	53,7	61,4	69,0	76,7	80,0	85,0	90,0	95,0	100,0
θ (deg.)	0	0,38	0,80	1,24	1,64	2,01	2,40	2,85	3,25	3,80	4,50	5,10	6,48	8,01	9,58	11,18

ANÁLISE **3-15** Os seguintes dados para a resistência ao escoamento por desvio foram tirados de 500 amostras de um tipo de material. Determine o valor médio, o desvio-padrão e o coeficiente de variação. Assumindo uma distribuição *lognormal*, expresse a variante $\mathbf{S}_y$, a distribuição de probabilidade de S_y e trace juntas as distribuições contínuas e descontínuas de probabilidade.

Freqüência de classe f_i	2	9	30	65	101	112	90	54	25	9	2	1
Ponto médio de classe x_i, kpsi	38,5	39,5	40,5	41,5	42,5	43,5	44,5	45,5	46,5	47,5	48,5	49,5

ANÁLISE **3-16** Um aço laminado a quente AISI 1212 recebe 20% de trabalho a frio. Determine os novos valores das resistências ao escoamento e última.

ANÁLISE **3-17** Um membro de aço tem uma dureza Brinell de $H_B = 250$. Estime a resistência à tração do aço em MPa.

3-18 Ensaios de dureza Brinell foram feitos em uma amostra aleatória de 10 peças de aço durante processamento. Os resultados foram valores de H_B de 252 (2), 260, 254, 257 (2), 249 (3) e 251. Estime a média e o desvio-padrão da resistência à tração em kpsi.

ANÁLISE **3-19** Repita o Problema 3-18 assumindo que o material seja ferro fundido.

3-20 *Tenacidade* é um termo que se relaciona à resistência e à ductilidade. A tenacidade de fratura, por exemplo, é definida como a área total, sob a curva de tensão-deformação, até a fratura, $u_T = \int_0^{\epsilon_f} \sigma \, d\epsilon$. Essa área, denominada *módulo de tenacidade*, é a energia de deformação por unidade de volume requerida para fazer o material fraturar. Um termo similar, mas definido dentro do limite elástico do material, é denominado *módulo de resiliência*, $u_R = \int_0^{\epsilon_y} \sigma \, d\epsilon$, em que ϵ_y é a deformação no escoamento. Se a tensão-deformação for linear até $\sigma = S_y$, então pode ser mostrado que $u_R = S_y^2/2E$.

Para o material no Problema 3-9: (*a*) determine o módulo de resiliência e (*b*) estime o módulo de tenacidade, assumindo que os últimos pontos de dados correspondem à fratura.

ANÁLISE **3-21** Qual é a composição do material do aço AISI 4340?

PESQUISA **3-22** Pesquise a página da Internet referida na Seção 3-20 e relate suas descobertas.

3-23 Pesquise o material Inconel, brevemente descrito na Tabela A-5. Compare-o com vários aços carbono e aços de liga quanto a fatores como rigidez, resistência, ductilidade e tenacidade. O que faz esse material tão especial?

PESQUISA **3-24** Escolha um material especial fornecido nas tabelas (p. ex., alumínio 2024-T4, aço SAE 1040) e consulte um distribuidor local ou regional (pesquisando as páginas amarelas ou o *Thomas Register*) para obter tanta informação quanto puder a respeito de seu custo, disponibilidade e forma (barra, chapa, etc.).

CAPÍTULO 4

Carga e Análise de Tensão

4-1 Equilíbrio e Diagramas de Corpo Livre 116
4-2 Força de Cisalhamento e Momentos Flexores em Vigas 119
4-3 Funções de Singularidade 120
4-4 Tensão 123
4-5 Componentes Cartesianas de Tensão 124
4-6 Círculo de Mohr para Tensão Plana 125
4-7 Tensão Tridimensional Geral 130
4-8 Deformação Elástica 131
4-9 Tensões Uniformemente Distribuídas 132
4-10 Tensões Normais para Vigas em Flexão 133
4-11 Vigas com Secções Assimétricas 136
4-12 Tensões de Cisalhamento para Vigas em Flexão 136
4-13 Torção 144
4-14 Concentração de Tensão 153
4-15 Tensões em Cilindros Pressurizados 155
4-16 Tensões em Anéis Rotativos 158
4-17 Ajustes por Pressão e por Contração 158
4-18 Efeitos da Temperatura 160
4-19 Vigas Curvas em Flexão 161
4-20 Tensões de Contato 168
4-21 Resumo 172

Um dos principais objetivos deste livro é descrever como componentes específicas de máquina funcionam e como projetá-las ou especificá-las de modo que operem com segurança, sem falhar estruturalmente. Embora discussões anteriores tenham descrito a resistência estrutural no que diz respeito à carga ou à relação tensão *versus* resistência, a falha de funcionamento por razões estruturais pode surgir de outros fatores, como, por exemplo, deformações excessivas ou deflexões.

Supomos que o leitor tenha concluído cursos básicos em estática de corpos rígidos e em mecânica de materiais e que esteja bastante familiarizado com a análise de cargas e com as tensões e deformações associadas aos estados básicos de carga de elementos prismáticos simples. Neste capítulo, bem como no Capítulo 5, vamos rever e estender esses tópicos brevemente. Derivações completas não serão aqui apresentadas, de modo que o leitor deve retornar aos livros-texto básicos e a notas sobre tais assuntos.

O presente capítulo inicia com uma revisão do equilíbrio e dos diagramas de corpo livre associados às componentes transmissoras de carga. Deve-se entender a natureza das forças antes de tentar realizar uma análise extensa de tensão ou deflexão de uma componente mecânica. Uma ferramenta extremamente útil ao manipular carregamentos descontínuos de estruturas emprega as *funções de singularidade* ou *Macaulay*. Essas funções serão descritas na Seção 4-3 quanto ao modo como são aplicadas às forças de cisalhamento e aos momentos flexores em vigas. No Capítulo 5, o uso de funções de singularidade será expandido para mostrar o poder real delas ao manipular deflexões de geometria complexa e problemas estaticamente indeterminados.

Componentes de máquina transmitem forças e movimento de um ponto a outro. A transmissão de forças pode ser imaginada como um fluxo ou uma distribuição de forças que podem ser visualizados mais extensamente isolando-se superfícies internas dentro da componente. As forças distribuídas sobre uma superfície levam ao conceito, às componentes e às transformações de tensão (círculo de Mohr) para todas as superfícies possíveis em um ponto.

O restante do capítulo será dedicado às tensões associadas ao carregamento básico de elementos prismáticos, tais como carregamento uniforme, flexão e torção, bem como a tópicos com ramificações maiores de projeto, tais como concentrações de tensão, cilindros pressurizados de parede fina e parede espessa, anéis rodando, ajustes de pressão e contração, tensões térmicas, vigas curvas e tensões de contato.

4-1 Equilíbrio e Diagramas de Corpo Livre

Equilíbrio

A palavra *sistema* será usada para denotar qualquer parte *isolada* ou porção de uma máquina ou estrutura – inclusive sua totalidade, se desejarmos. Um sistema, sob tal definição, pode consistir numa partícula, em várias partículas, numa parte de um corpo rígido, num corpo rígido completo, ou até mesmo em vários corpos rígidos.

Se assumirmos que o sistema a ser estudado encontra-se parado ou, no máximo, movendo-se com velocidade constante, então a aceleração desse sistema é zero. Sob tal condição, diz-se que ele está em *equilíbrio*. O termo *equilíbrio estático* é também utilizado para indicar que o sistema está em *repouso*. Para o equilíbrio, as forças e os momentos que atuam sobre o sistema se balanceiam, de modo que

$$\sum \mathbf{F} = 0 \tag{4-1}$$

$$\sum \mathbf{M} = 0 \tag{4-2}$$

o que significa que *a soma de todos os vetores de força* e *a soma de todos os vetores de momento* atuando sobre um sistema em equilíbrio são zero.

Diagramas de Corpo Livre

Ao examinar o problema de analisar fatores como comportamento, desempenho ou eficiência de uma estrutura complexa ou de um dispositivo, tal como um automóvel, uma fotocopiadora ou um trem mecânico de transmissão, por exemplo, o principiante é confrontado com uma lista desnorteadora de peças e geometrias complicadas. Felizmente, esse problema não é tão difícil quanto parece. Uma das técnicas analíticas mais eficazes da mecânica é a de isolar ou liberar, em nossa imaginação, uma porção do sistema total, a fim de poder estudar o comportamento de um dos seus segmentos. Quando determinado segmento é isolado, o efeito original do sistema sobre ele é substituído pelas forças e pelos momentos de interação. A Figura 4-1 é uma

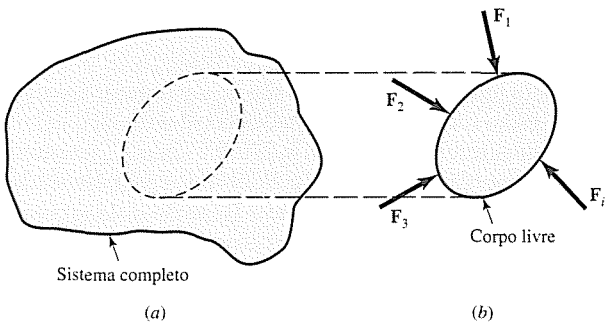


Figura 4-1 O isolamento de um subsistema.

ilustração simbólica desse processo. Suponha que a Figura 4-1(*a*) seja um sistema completo, como um trem mecânico de transmissão. Dessa forma, podemos decidir analisar somente uma peça ou um segmento desse sistema, como um eixo, ou ainda vários membros unidos entre si. Removemos tal segmento, como mostrado na Figura 4-1(*b*), e substituímos a ação de todo o sistema sobre ele por várias forças e momentos que atuariam, necessariamente, nas interfaces do segmento e do sistema. Embora essas forças possam ser consideradas efeitos internos sobre o sistema todo, elas são efeitos externos quando aplicadas ao segmento. Tais forças de interface são representadas simbolicamente, na Figura 4-1(*b*), pelos vetores de força $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ e $\mathbf{F}_i$. O subsistema isolado resultante, juntamente com todas as forças e momentos causados por quaisquer efeitos externos, assim como pelas reações com o sistema principal, é chamado de *diagrama de corpo livre*.[1]

Podemos simplificar a análise de uma estrutura bastante complexa ou mesmo de uma máquina completa isolando, de forma sucessiva, cada elemento, estudando-o e analisando-o por meio da construção de diagramas de corpo livre. Quando todos os membros tiverem sido tratados dessa maneira, um conhecimento apurado poderá ser organizado para produzir informação a respeito do comportamento do sistema total. Assim, desenhar diagramas de corpo livre representa, essencialmente, uma maneira de dividir um problema complicado em segmentos manejáveis, analisar cada um desses problemas mais simples e, então, reunir a informação novamente.

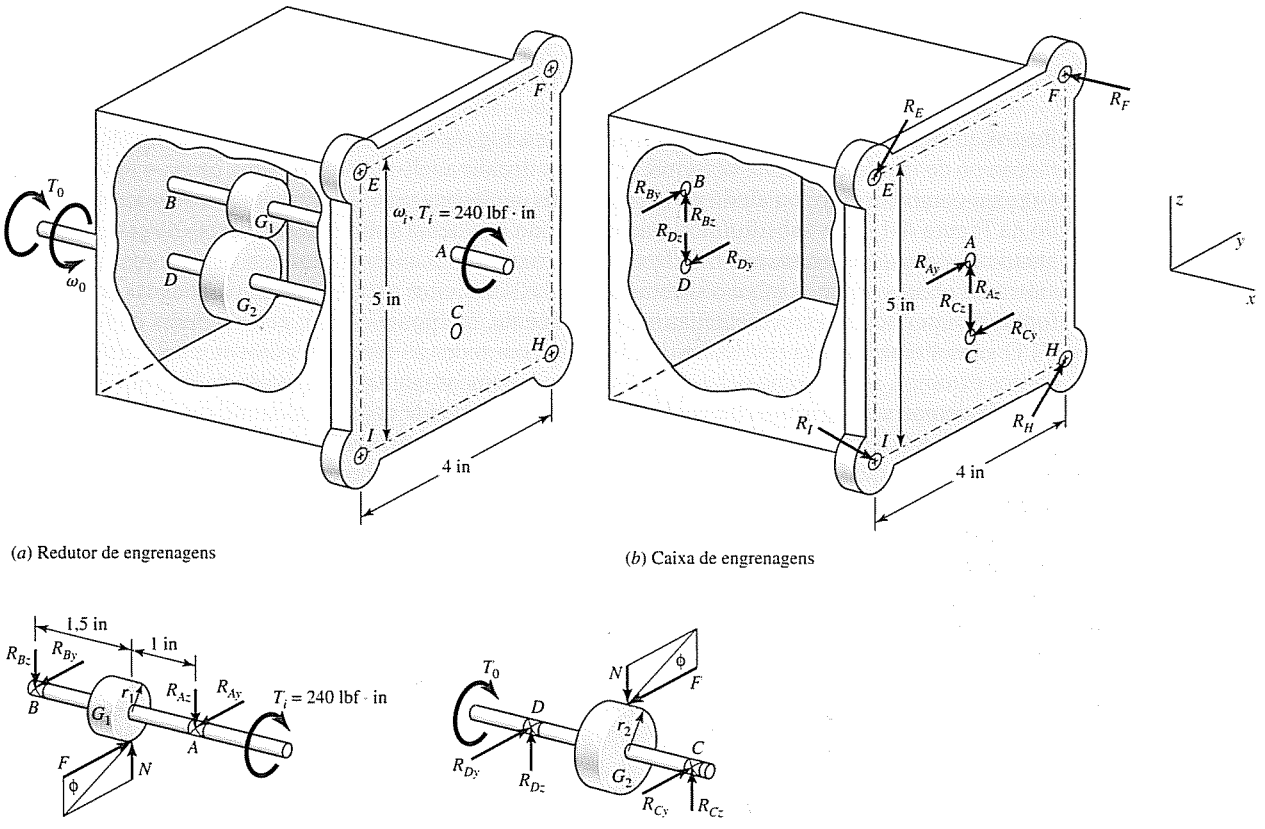
O uso de diagramas de corpo livre para a análise de forças serve para os importantes propósitos a seguir:

- O diagrama estabelece as direções dos eixos de referência, provê um espaço para registrar as dimensões do subsistema, bem como as magnitudes e as direções das forças conhecidas, e auxilia na suposição das direções das forças desconhecidas.
- O diagrama simplifica o pensar, uma vez que fornece um lugar para guardar um pensamento enquanto se prossegue para o seguinte.
- O diagrama fornece uma maneira de comunicar seus pensamentos, de forma clara e sem ambigüidade, às demais pessoas.
- A construção cuidadosa e completa do diagrama clarifica pensamentos confusos, ao trazer à luz vários pontos que nem sempre estão aparentes na declaração ou na geometria de um problema completo. Assim, o diagrama auxilia na compreensão de todas as facetas do problema.
- O diagrama ajuda no planejamento de uma abordagem lógica ao problema e no estabelecimento das relações matemáticas.
- O diagrama ajuda a registrar o progresso na solução e também auxilia na ilustração dos métodos usados.
- O diagrama permite a outros seguir seu pensamento, mostrando *todas* as forças.

[1] O professor Gaetano Lanza, do MIT, em 1885, na publicação *Applied Mechanics*, utilizou o "método das secções" em treliças, mas o "diagrama de corpo livre", como agora o conhecemos, foi defendido pelo professor Irving Church, da Cornell, na publicação *Mechanics of Engineering*, em 1887. Entretanto, foi posteriormente, no desenvolvimento da mecânica, que o professor Church convenceu os engenheiros a se educarem quanto àquilo de que rigorosamente necessitavam saber. "Desenhe um diagrama de corpo livre" é uma advertência crucial para você se tornar um engenheiro.

EXEMPLO 4-1

A Figura 4-2(*a*) mostra uma versão simplificada de um redutor de engrenagem no qual os eixos de entrada e saída *AB* e *CD* estão rodando a velocidades constantes ω_i e ω_o, respectivamente. Os torques de entrada e saída (momentos torcionais) são $T_i = 240$ lbf · in e T_o, respectivamente. Os eixos estão apoiados no compartimento por mancais em *A*, *B*, *C* e *D*. Os raios primitivos (de referência) das engrenagens G_1 e G_2 são $r_1 = 0{,}75$ in e $r_2 = 1{,}5$ in, respectivamente. Desenhe os diagramas de corpo livre de cada membro e determine as forças de reação resultantes e os momentos em todos os pontos.



(*a*) Redutor de engrenagens

(*b*) Caixa de engrenagens

(*c*) Eixo de entrada

(*d*) Eixo de saída

Figura 4-2 (*a*) Redutor de engrenagens; (*b-d*) diagramas de corpo livre. Os diagramas não estão desenhados em escala.

Solução

Primeiramente, listaremos todas as hipóteses simplificadoras.

1. As engrenagens G_1 e G_2 são simples engrenagens de dentes retos, com um ângulo de pressão padronizado $\phi = 20°$ (ver Seção 13-5).
2. Os mancais são auto-alinhantes, podendo-se considerar que os eixos estão simplesmente apoiados.
3. O peso de cada membro é desprezível.
4. A fricção é desprezível.
5. Os parafusos de porca de montagem em *E*, *F*, *H* e *I* são do mesmo tamanho.

Os diagramas separados de corpos livres dos membros são mostrados nas Figuras 4-2(*b-d*). Observe que a terceira lei de Newton, denominada *lei da ação e reação*, é empregada extensivamente onde cada membro se encaixa. A força transmitida entre as engrenagens retas não é tangencial senão a um ângulo de pressão ϕ. Logo, $N = F \tan \phi$.

Somando os momentos em relação ao eixo *x* do eixo *AB*, na Figura 4-9(*d*), obtemos

$$\sum M_x = F(0{,}75) - 240 = 0$$

$$F = 320 \text{ lbf}$$

A força normal é = 320 tan 20° = 116,5 lbf.

Utilizando as equações de equilíbrio para as Figuras 4-2(*c*) e (*d*), o leitor deve verificar que: $R_{Ay} = 192$ lbf, $R_{Az} = 69{,}9$ lbf, $R_{By} = 128$ lbf, $R_{Bz} = 46{,}6$ lbf, $R_{Cy} = 192$ lbf, $R_{Cz} = 69{,}9$ lbf, $R_{Dy} = 128$ lbf, $R_{Dz} = 46{,}6$ lbf e $T_o = 480$ lbf · in. A direção do torque de saída T_o é oposta a ω_o +, uma vez que ele é a carga resistiva no sistema opondo-se ao movimento ω_o

Observe, na Figura 4-2(*b*), que a força resultante das reações de mancal é zero, ao passo que o momento resultante relativamente ao eixo *x* é 2,25(192) + 2,25(128) = 720 lbf · in. Esse valor é o mesmo que $T_i + T_o$ = 240 + 480 = 720 lbf · in, como mostrado na Figura 4-2(*a*). As forças de reação R_E, R_F, R_H e R_I procedentes dos parafusos de montagem não podem ser determinadas a partir das equações de equilíbrio, pois existem muitas incógnitas. Somente três equações estão disponíveis: $\sum F_y = \sum F_z = \sum M_x = 0$. Caso esteja se perguntando a respeito da hipótese 5, é aqui que você a usará (ver Seção 8-12). A caixa de engrenagem tende a rodar relativamente ao eixo *x*, devido a um momento torcional puro de 720 lbf · in. As forças dos parafusos de porca devem prover um momento torcional igual, mas oposto. O centro de rotação relativo aos parafusos situa-se no centróide das áreas da secção transversal dos mesmos. Dessa forma, se as áreas de parafuso são iguais, o centro de rotação encontra-se no centro dos quatro parafusos, a uma distância de $\sqrt{(4/2)^2 + (5/2)^2} = 3{,}202$ in a partir da cada parafuso; as forças de parafuso são iguais ($R_E = R_F = R_H = R_I = R$), e cada força de parafuso é perpendicular à linha do parafuso até o centro de rotação. Isso fornece um torque líquido, resultante dos quatro parafusos de $4R(3{,}202) = 720$. Logo, $R_E = R_F = R_H = R_I = 56{,}22$ lbf.

4-2 Força de Cisalhamento e Momentos Flexores em Vigas

A Figura 4-3(*a*) mostra uma viga suportada por forças reativas R_1 e R_2 e carregada por forças concentradas F_1, F_2 e F_3. Se ela for cortada em alguma secção arbitrária situada em $x = x_1$ e se a porção esquerda desta for removida como um corpo livre, uma *força de cisalhamento (cortante) interna V* e *um momento flexor M* deverão atuar na superfície cortada de modo a assegurar o equilíbrio. A força cortante é obtida pela soma das forças agentes à esquerda do corte. O momento flexor é a soma dos momentos causados pelas forças situadas à esquerda da secção de corte relativamente a um eixo que passa pela secção isolada. As convenções de sinais utilizados para momento flexor e força de cisalhamento neste livro são exibidas na Figura 4-4. A força cortante e o momento flexor são relacionados pela equação

$$V = \frac{dM}{dx} \tag{4-3}$$

Algumas vezes, a flexão é causada por uma carga distribuída $q(x)$, como mostrado na Figura 4-5; $q(x)$ é denominada *intensidade de carga* com unidades de força por unidade de comprimento e é positiva na direção *y* positiva. É possível ver que, diferenciando a Equação (4-3), obtemos

$$\frac{dV}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2} = q \tag{4-4}$$

Normalmente, a carga distribuída aplicada é dirigida para baixo e rotulada *w* (por exemplo, ver Figura 4-7). Nesse caso, $w = -q$.

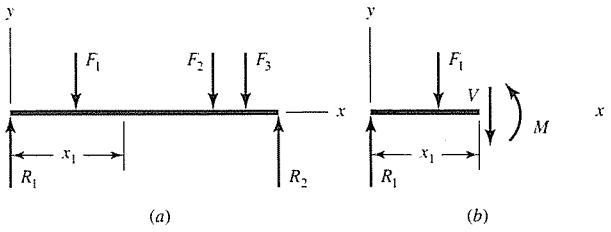


Figura 4-3 Diagrama de corpo livre de uma viga simplesmente apoiada, com *V* e *M* mostrados nas direções positivas.

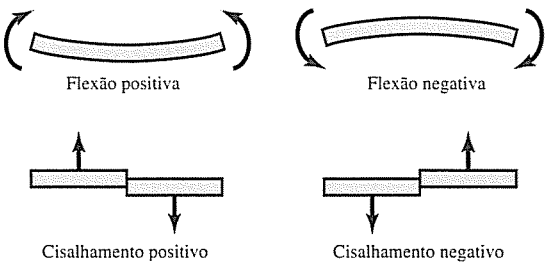


Figura 4-4 Convenção de sinais para flexão e cisalhamento.

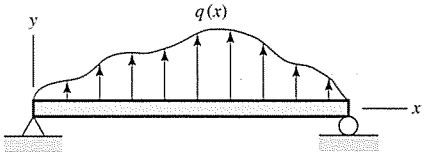


Figura 4-5 Carga distribuída na viga.

As Equações (4-3) e (4-4) revelarão relações adicionais se forem integradas. Logo, se integrarmos entre, digamos, x_A e x_B, obteremos

$$\int_{V_A}^{V_B} dV = \int_{x_A}^{x_B} q\,dx = V_B - V_A \tag{4-5}$$

o que sustenta que *a mudança na força de cisalhamento de A a B é igual à área do diagrama de carregamento entre x_A e x_B.*

De maneira similar,

$$\int_{M_A}^{M_B} dM = \int_{x_A}^{x_B} V\,dx = M_B - M_A \tag{4-6}$$

o que sustenta que a *mudança no momento de A a B é igual à área do diagrama de força cortante entre x_A e x_B.*

4-3 Funções de Singularidade

As cinco funções de singularidade definidas na Tabela 4-1 constituem um meio útil e fácil de integrar quando se cruzam descontinuidades. Utilizando essas funções, expressões gerais para a força cortante e o momento flexor em vigas podem ser escritas quando a viga é carregada por forças ou momentos concentrados. Como ilustrado na tabela, as funções de momento e força cortante concentrados são zero para todos os valores de x diferentes de a. As funções são indefinidas para valores $x = a$. Observe que as funções de degrau unitário, de rampa, bem como as funções parabólicas, são nulas apenas para valores de x menores que a. As propriedades de integração mostradas na tabela constituem também uma parte da definição matemática. As primeiras duas integrações de $q(x)$ para $V(x)$ e $M(x)$ não requerem constantes de integração, contanto que *todas* as cargas na viga sejam computadas em $q(x)$. Os exemplos a seguir mostram como essas funções são utilizadas.

EXEMPLO 4-2

Derive expressões para o diagrama de carregamento, de força de cisalhamento e de momento flexor para a viga da Figura 4-6.

Solução

Utilizando a Tabela 4-1 e $q(x)$ para a função de carregamento, encontramos

$$q = R_1\langle x\rangle^{-1} - F_1\langle x - a_1\rangle^{-1} - F_2\langle x - a_2\rangle^{-1} + R_2\langle x - l\rangle^{-1} \tag{1}$$

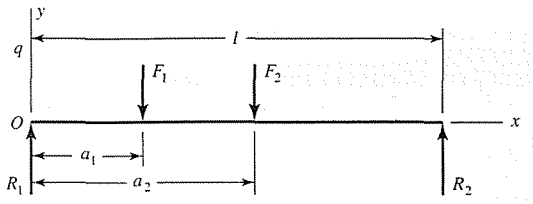


Figura 4-6

A seguir, usamos a Equação (4-5) para obter a força cortante (de cisalhamento)

$$V = \int q\,dx = R_1\langle x\rangle^0 - F_1\langle x - a_1\rangle^0 - F_2\langle x - a_2\rangle^0 + R_2\langle x - l\rangle^0 \tag{2}$$

Observe que $V = 0$ em $x = 0$.
Uma segunda integração, de acordo com a Equação (4-6), produz

$$M = \int V\,dx = R_1\langle x\rangle^1 - F_1\langle x - a_1\rangle^1 - F_2\langle x - a_2\rangle^1 + R_2\langle x - l\rangle^1 \tag{3}$$

As reações R_1 e R_2 podem ser encontradas efetuando-se uma soma dos momentos e das forças, como de costume, *ou* observando-se que a força de cisalhamento e o momento flexor devem ser zero em toda parte, exceto na região $0 \le x \le l$. Isso significa que a Equação (2) deve produzir $V = 0$ em x ligeiramente maior que l. Logo,

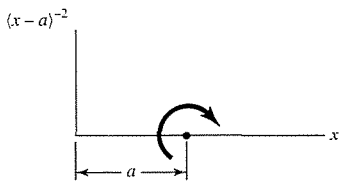
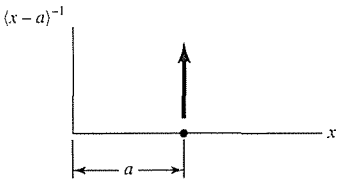
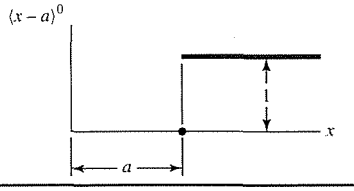
$$R_1 - F_1 - F_2 + R_2 = 0 \tag{4}$$

Visto que o momento flexor deve também ser zero na mesma região, temos, a partir da Equação (3),

$$R_1 l - F_1(l - a_1) - F_2(l - a_2) = 0 \tag{5}$$

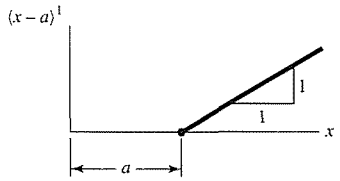
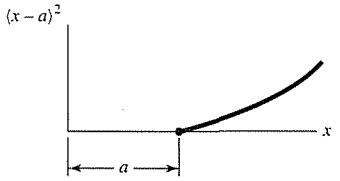
As Equações (4) e (5) podem agora ser solucionadas para as reações R_1 e R_2.

Tabela 4-1 Funções de singularidade (Macaulay†)

Função	Gráfico de $f_n\langle x\rangle$	Significado
Momento concentrado binário (ou conjugado) unitário		$\langle x-a\rangle^{-2} = 0 \quad x \neq a$ $\langle x-a\rangle^{-2} = \pm\infty \quad x = a$ $\int \langle x-a\rangle^{-2}\,dx = \langle x-a\rangle^{-1}$
Força concentrada (impulso unitário)		$\langle x-a\rangle^{-1} = 0 \quad x \neq a$ $\langle x-a\rangle^{-1} = +\infty \quad x = a$ $\int \langle x-a\rangle^{-1}\,dx = \langle x-a\rangle^{0}$
Degrau unitário		$\langle x-a\rangle^{0} = \begin{cases} 0 & x < a \\ 1 & x \ge a \end{cases}$ $\int \langle x-a\rangle^{0}\,dx = \langle x-a\rangle^{1}$

(continua...)

Tabela 4-1 Funções de singularidade (Macaulay[†]) *(continuação)*

Função	Gráfico de $f_n\langle x\rangle$	Significado
Rampa		$\langle x-a\rangle^1 = \begin{cases} 0 & x < a \\ x-a & x \geq a \end{cases}$ $\int \langle x-a\rangle^1\, dx = \frac{\langle x-a\rangle^2}{2}$
Parabólica		$\langle x-a\rangle^2 = \begin{cases} 0 & x < a \\ (x-a)^2 & x \geq a \end{cases}$ $\int \langle x-a\rangle^2\, dx = \frac{\langle x-a\rangle^3}{3}$

[†] W. H. Macaulay, "Note on the deflecion of beams", *Messenger of Mathematics*, vol. 48, p. 129-130, 1919.

EXEMPLO 4-3

A Figura 4-7(*a*) mostra o diagrama de carregamento para uma viga em balanço em A, com uma carga uniforme de 20 lbf/in atuando na porção 3 in $\leq x \leq$ 7 in, e um momento concentrado de 240 lbf · in anti-horário em $x = 10$ in. Derive as relações para a força de cisalhamento e o momento flexor, bem como as reações de apoio M_1 e R_1.

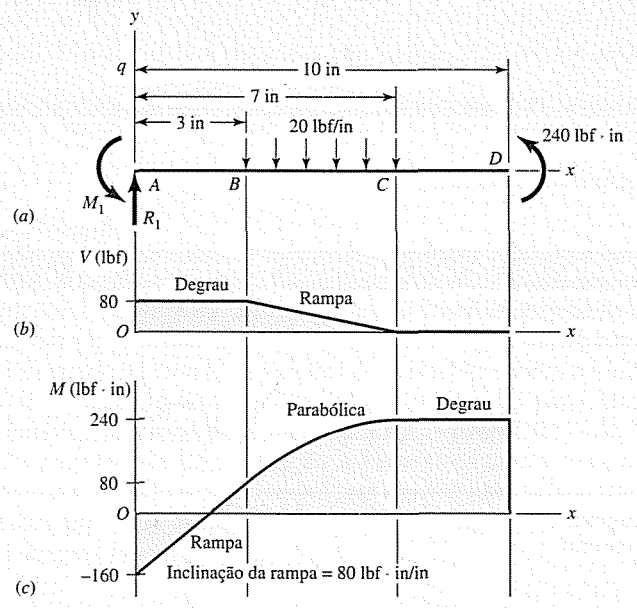


Figura 4-7 (*a*) Diagrama de carregamento para uma viga em balanço em A. (*b*) Diagrama de força cortante (de cisalhamento). (*c*) Diagrama de momento flexor.

Solução

Seguindo o procedimento do Exemplo 4-2, encontramos a função de intensidade de carga valendo

$$q = -M_1\langle x\rangle^{-2} + R_1\langle x\rangle^{-1} - 20\langle x-3\rangle^0 + 20\langle x-7\rangle^0 - 240\langle x-10\rangle^{-2} \qquad (1)$$

Observe que o termo $20\langle x-7\rangle^0$ foi necessário para "interromper" a carga uniforme em C. Ao integrar sucessivamente, produzimos

$$V = -M_1\langle x\rangle^{-1} + R_1\langle x\rangle^0 - 20\langle x-3\rangle^1 + 20\langle x-7\rangle^1 - 240\langle x-10\rangle^{-1} \quad (2)$$

$$M = -M_1\langle x\rangle^0 + R_1\langle x\rangle^1 - 10\langle x-3\rangle^2 + 10\langle x-7\rangle^2 - 240\langle x-10\rangle^0 \quad (3)$$

As reações são encontradas tornando-se x ligeiramente maior que 10 in, sendo V e M ambos zero nessa região. A Equação (2) então produzirá

$$-M_1(0) + R_1(1) - 20(10-3) + 20(10-7) - 240(0) = 0$$

o que produz $R_1 = 80$ lbf.

A partir da Equação (3), obtemos

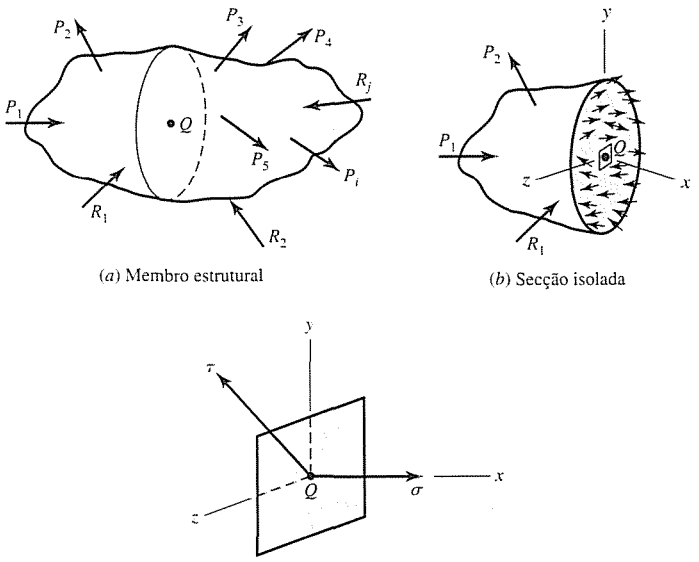
$$-M_1(1) + 80(10) - 10(10-3)^2 + 10(10-7)^2 - 240(1) = 0$$

o que produz $M_1 = 160$ lbf · in.

As Figuras 4-7(*b*) e (*c*) apresentam os diagramas de força de cisalhamento e de momento flexor. Observe que os termos de impulso na Equação (2), $-M_1\langle x\rangle^{-1}$ e $-240\langle x-10\rangle^{-1}$, não são fisicamente forças e, portanto, não são mostrados no diagrama de V. Observe, também, que ambos os momentos M_1 e 240 lbf · in são anti-horários e que as funções de singularidade são negativas; contudo, pela convenção mostrada na Figura 4-3, M_1 e 240 lbf · in são momentos flexores negativo e positivo, respectivamente, o que se reflete na Figura 4-7(*c*).

4-4 Tensão

Considere um corpo sólido geral carregado, como mostra a Figura 4-8(*a*). P_i são as forças aplicadas e R_i, as forças possíveis de apoio. Para determinar o estado de tensão em um ponto Q nesse corpo, é necessário expor uma superfície que contenha tal ponto Q. Isso é feito realizando-se um corte plano, ou uma divisão, no corpo que intersecciona Q. A orientação desse corte é arbitrária, mas geralmente feita em um plano conveniente, no qual o estado de tensão pode ser determinado de maneira fácil ou certas relações geométricas podem ser utilizadas. O corte, ilustrado na Figura 4-8(*b*), é arbitrariamente orientado pela normal à superfície x. Esta estabelece o plano yz. As forças externas na porção do corpo remanescente, bem como a distribuição de forças internas pela superfície exposta, são mostradas. As unidades da distribuição de força são força por unidade de área. Em geral, essa distribuição não será uniforme ao longo da superfície, tampouco normal ou tangencial a esta em um dado ponto.



(*a*) Membro estrutural

(*b*) Secção isolada

(*c*) Tensões normal e de cisalhamento em uma superfície infinitesimal em Q

Figura 4-8 Distribuições de forças internas (tensão).

Contudo, a distribuição de força em um ponto terá componentes nas direções normal e tangencial, dando surgimento a uma *tensão normal* e a uma *tensão tangencial de cisalhamento*, respectivamente. As tensões normal e de cisalhamento são rotuladas com os símbolos gregos σ e τ, respectivamente, como mostrado na Figura 4-8(*c*). Se a direção de σ é para o exterior da superfície, ela é considerada uma *tensão de tração*, sendo uma tensão normal positiva. Se a direção de σ é para o interior da superfície, ela é uma *tensão de compressão*, sendo comumente considerada uma quantidade negativa.

4-5 Componentes Cartesianas de Tensão

O corte na Figura 4-8(*b*) estabelece a direção normal ao plano do corte, a direção x, e, a partir do equilíbrio, as distribuições de tensão normal e de cisalhamento são estabelecidas. A Figura 4-9 mostra as tensões normal e resultante de cisalhamento em uma área de superfície infinitesimal no ponto Q. A tensão normal é rotulada como σ_x. O símbolo σ indica uma tensão normal e o subscrito x, a direção da normal de superfície. Para componentes cartesianas, é necessário estabelecer a direção y, que novamente é arbitrária. Uma vez que isso é estabelecido, a direção z resulta imediata para um sistema de coordenadas cartesianas retangular destro. A tensão de cisalhamento resultante $(\tau_x)_{\text{resultante}}$ pode então ser decomposta em componentes nas direções y e z rotuladas como τ_{xy} e τ_{xz}, respectivamente (ver Figura 4-9). Observe que os subscritos são necessariamente para cisalhamento. O primeiro subscrito indica a direção da normal de superfície, ao passo que o segundo é a direção da tensão.

Para descrever completamente o estado de tensão em um ponto seria necessário examinar todas as superfícies realizando-se cortes planos passando pelo ponto. Visto que diferentes cortes planos necessitariam de diferentes coordenadas e de diferentes diagramas de corpo livre, as tensões em cada corte seriam, em geral, muito distintas. Assim, para entender o estado completo de tensão em um ponto, cada superfície possível interseccionando esse ponto deveria ser examinada. Isso, contudo, requereria um número infinito de cortes que o interseccionassem. Ou seja, se o ponto tivesse de ser completamente isolado do corpo, seria descrito por uma esfera infinitesimal. Naturalmente, isso seria impossível de fazer, além de desnecessário, haja vista existir um método simples para obter o mesmo resultado, método esse denominado *transformação de coordenadas* ou *círculos de Mohr*, a ser descrito nas duas próximas seções.

Retornando ao corpo geral da Figura 4-8(*a*), um corte plano pode ser feito passando pelo ponto Q perpendicularmente à direção y. O procedimento para descrever o estado de tensão em uma área infinitesimal normal à direção y é idêntico à técnica empregada na Figura 4-9. Contudo, as tensões na superfície cuja normal está na direção y serão designadas como σ_y, τ_{yx} e τ_{yz}(ver Figura 4-10(*a*)). Um terceiro corte ortogonal é feito perpendicularmente à direção z, e as tensões resultantes são σ_z, τ_{zx} e τ_{zy}. Logo, o estado de tensão em um ponto descrito por três superfícies mutuamente perpendiculares é exibido na Figura 4-10(*a*). Pode-se ver, mediante a transformação de coordenadas, que isso é suficiente para determinar o estado de tensão em *qualquer* superfície interseccionando o ponto. À medida que as dimensões do cubo na Figura 4-10(*a*) aproximam-se de zero, as tensões nas faces ocultas tornam-se iguais e opostas àquelas nas faces visíveis opostas.

Em geral, um estado completo de tensão é definido por nove componentes: σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yx}, τ_{yz}, τ_{zx} e τ_{zy}. Para o equilíbrio, "as componentes opostas" de cisalhamento devem ser iguais; logo,

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} \qquad \tau_{zy} = \tau_{yz} \qquad \tau_{xz} = \tau_{zx} \tag{4-7}$$

Isso reduz o número de componentes de tensão para a maioria dos estados tridimensionais de tensão de nove a seis quantidades: σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz} e τ_{zx}.

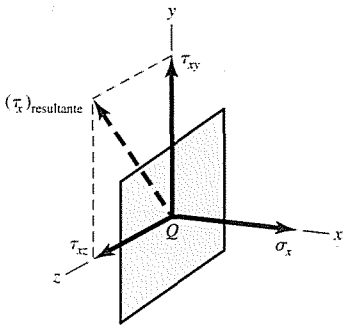


Figura 4-9 Componentes de tensão na superfície normal à direção x.

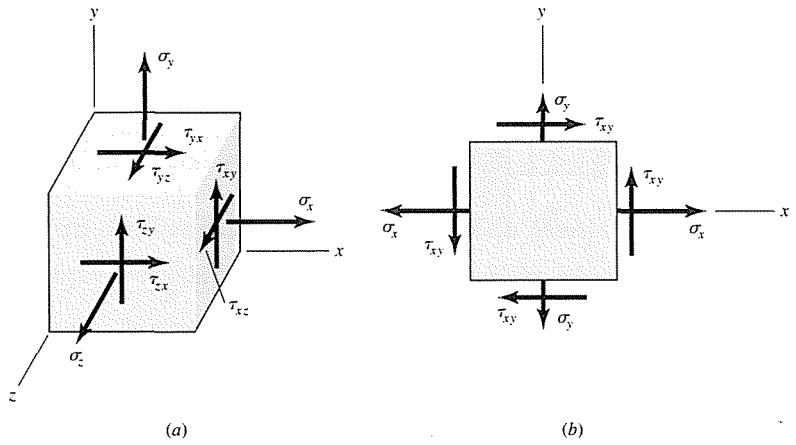


Figura 4-10 (*a*) Tensão geral tridimensional. (*b*) Tensão plana com componentes de cisalhamento contrárias de igual magnitude.

Um estado muito comum de tensão ocorre quando as tensões em uma superfície são zero. Nesse caso, ele é denominado *estado de tensão plana.* A Figura 4-10(*b*) mostra um estado desse tipo, arbitrariamente assumindo que a normal para a superfície livre de tensão é a direção z, de modo que $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$. É importante observar que o elemento na Figura 4-10(*b*) ainda é um cubo tridimensional. Além disso, é assumido aqui que as tensões de cisalhamento em faces opostas são iguais, de modo que $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ e $\tau_{yz} = \tau_{zy} = \tau_{xz} = \tau_{zx} = 0$.

4-6 Círculo de Mohr para Tensão Plana

Suponha que o elemento *dx dy dz* da Figura 4-10(*b*) seja cortado por um plano oblíquo, com uma normal n, a um ângulo arbitrário ϕ anti-horário, a partir do eixo x, como mostrado na Figura 4-11. Esta seção destina-se às tensões σ e τ que atuam sobre esse plano oblíquo. Somando as forças causadas por todas as componentes de tensão e igualando-as a zero, as tensões σ e τ são

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\phi + \tau_{xy}\,\text{sen}\,2\phi \tag{4-8}$$

$$\tau = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\,\text{sen}\,2\phi + \tau_{xy}\cos 2\phi \tag{4-9}$$

As Equações (4-8) e (4-9) são denominadas *equações de transformação de tensões planas.*

Diferenciando a Equação (4-8) relativamente a ϕ e estabelecendo o resultado igual a zero, obtemos

$$\tan 2\phi_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \tag{4-10}$$

A Equação (4-10) define dois valores particulares para o ângulo $2\phi_p$, um dos quais determina a máxima tensão normal σ_1 e o outro, a mínima tensão normal σ_2. Essas duas tensões são denominadas *tensões principais* e as direções que lhes correspondem, *direções principais.* O ângulo entre tais direções corresponde a 90°. É importante salientar que a Equação (4-10) pode ser escrita como

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\,\text{sen}\,2\phi_p - \tau_{xy}\cos 2\phi_p = 0 \tag{a}$$

Comparando essa equação com a (4-9), vemos que $\tau = 0$, indicando que as *superfícies que contêm as tensões principais não apresentam tensões de cisalhamento.*

De maneira semelhante, podemos diferenciar a Equação (4-9), estabelecer o resultado igual a zero e obter

$$\tan 2\phi_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \tag{4-11}$$

A Equação (4-11) define os dois valores de ângulo $2\phi_s$ para os quais a tensão de cisalhamento τ atinge um valor extremo. O ângulo entre as superfícies contendo as máximas tensões de cisalhamento é de 90°. A Equação (4-11) pode também ser escrita como

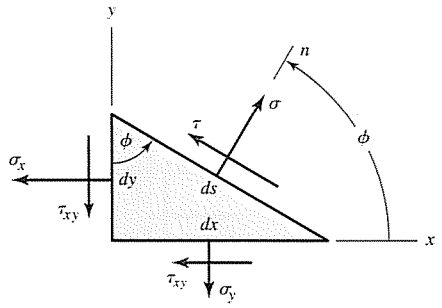


Figura 4-11

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\phi_p + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\phi_p = 0 \qquad (b)$$

Substituindo isso na Equação (4-8), produzimos

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \qquad (4\text{-}12)$$

A Equação (4-12) indica que as duas superfícies contendo as tensões máximas de cisalhamento também contêm tensões normais iguais de $(\sigma_x + \sigma_y)/2$.

Comparando as Equações (4-10) e (4-11), vemos que tan $2\phi_s$ é o recíproco negativo de tan $2\phi_p$. Isso significa que $2\phi_s$ e $2\phi_p$ são ângulos separados um do outro em 90°, de modo que os ângulos entre as superfícies contendo as tensões de cisalhamento máximas e as superfícies contendo as tensões principais são de ±45°.

Fórmulas para ambas as tensões principais podem ser obtidas substituindo-se o ângulo $2\phi_p$ da Equação (4-10) na Equação (4-8). O resultado é

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad (4\text{-}13)$$

De maneira semelhante, os dois valores extremos de tensão de cisalhamento são encontrados a partir de

$$\tau_1, \tau_2 = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad (4\text{-}14)$$

Sua atenção deve se voltar para o fato de que um valor extremo de tensão de cisalhamento *pode não ser idêntico a um valor máximo dessa grandeza.* Ver Seção 4-7.

É importante observar que as equações fornecidas até esse ponto são suficientes para desenvolver qualquer transformação de tensão plana. Contudo, um cuidado extremo deve ser tomado ao usá-las. Por exemplo, digamos que você esteja tentando determinar o estado principal de tensão para um problema em que σ_x = 14 MPa, σ_y = –10 MPa e τ_{xy} = –16 MPa. A Equação (4-10) produz ϕ_p = –26,57° e 63,43° para localizar as superfícies de tensões principais, ao passo que a Equação (4-13) mostra σ_1 = 22 MPa e σ_2 = –18 MPa para essas mesmas tensões principais. Se tudo o que desejássemos fossem as tensões principais, teríamos terminado. Porém, o que ocorreria se quiséssemos desenhar o elemento contendo as tensões principais propriamente orientadas em relação aos eixos x, y? Bem, temos dois valores de ϕ_p e dois valores para as tensões principais. Como sabemos que valor de ϕ_p corresponde a que valor da tensão principal? A fim de esclarecer isso, necessitaríamos substituir o valor de ϕ_p na Equação (4-8), para determinar a tensão normal correspondente para aquele ângulo.

Um método gráfico de expressar as relações desenvolvidas nesta seção, denominado *diagrama do Círculo de Mohr*, constitui-se em uma maneira bastante efetiva de visualizar o estado de tensão em um ponto e de manter o controle das direções das várias componentes de tensão associadas a um estado de tensão plana. Pode-se ver que as Equações (4-8) e (4-9) são um conjunto de equações paramétricas para σ e τ, em que o parâmetro é 2ϕ. A relação entre σ e τ é aquela de um círculo desenhado no plano σ, τ, cujo centro está localizado em $C = (\sigma, \tau) = [(\sigma_x + \sigma_y)/2, 0]$ e tem um raio de $R = \sqrt{[(\sigma_x - \sigma_y)/2]^2 + \tau_{xy}^2}$. Um problema surge

no sinal da tensão de cisalhamento. As equações de transformação são baseadas em um ϕ sendo positivo em sentido anti-horário, como mostrado na Figura 4-11. Se um τ positivo fosse traçado acima do eixo de σ, os pontos rodariam 2ϕ em sentido horário no círculo, ou seja, na direção oposta de rotação no elemento. Seria conveniente que as rotações se dessem na mesma direção. Seria possível solucionar o problema facilmente traçando-se τ positivo abaixo do eixo. Contudo, a abordagem clássica para o círculo de Mohr emprega uma convenção diferente para a tensão de cisalhamento.

Convenção de Cisalhamento do Círculo de Mohr

Esta convenção é seguida no desenho do círculo de Mohr:

- Tensões de cisalhamento tendendo a rodar o elemento em sentido horário são desenhadas *acima* do eixo σ.
- Tensões de cisalhamento tendendo a rodar o elemento em sentido anti-horário são desenhadas *abaixo* do eixo σ.

Por exemplo, considere a face direita do elemento na Figura 4-10(*b*). Pela convenção do círculo de Mohr, a tensão de cisalhamento mostrada é traçada *abaixo* do eixo σ, pois tende a rodar o elemento em sentido anti-horário. Já a tensão de cisalhamento na face superior desse elemento é traçada *acima* do eixo σ, pois tende a rodá-lo em sentido horário.

Na Figura 4-12 criamos um sistema de coordenadas, com as tensões normais traçadas ao longo da abscissa e as tensões de cisalhamento traçadas como ordenadas. Na abscissa, as tensões normais de tração (positivas) são traçadas para a direita da origem O e as tensões normais de compressão (negativas), para a esquerda. Na ordenada, as tensões de cisalhamento horárias são traçadas para cima e as tensões de cisalhamento anti-horárias, para baixo.

Utilizando o estado de tensão da Figura 4-10(*b*), desenhamos o diagrama do círculo de Mohr, Figura 4-12, primeiramente olhando para a superfície direita do elemento contendo σ_x, a fim de estabelecer o sinal de σ_x e a direção horária ou anti-horária da tensão de cisalhamento. A face direita é denominada *face x*, na qual $\phi = 0°$. Se σ_x for positivo e a tensão de cisalhamento τ_{xy} for anti-horária, como exibido na Figura 4-10(*b*), poderemos estabelecer o ponto A com coordenadas $(\sigma_x, \tau_{xy}^{\text{anti-horário}})$ na Figura 4-12. A seguir, olhamos para a *face y* superior, em que $\phi = 90°$, a qual contém σ_y, e repetimos o processo para obter o ponto B com coordenadas $(\sigma_y, \tau_{xy}^{\text{horário}})$, como mostrado na Figura 4-12. Os dois estados de tensão para o elemento têm $\Delta\phi = 90°$ de um ao outro, de modo que terão $2\Delta\phi = 180°$ de um ao outro no círculo de Mohr. Os pontos A e B estão à mes-

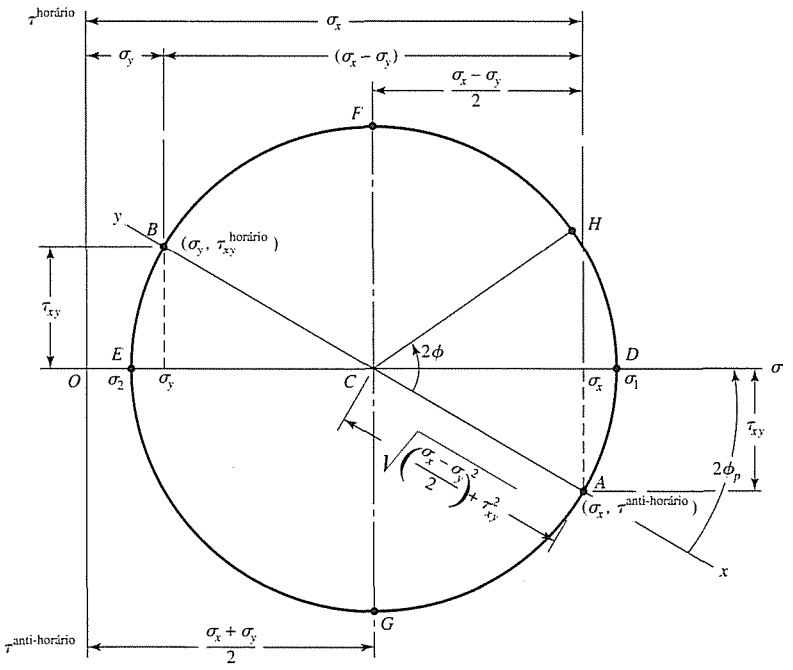


Figura 4-12 Diagrama do círculo de Mohr.

ma distância vertical do eixo σ. Logo, AB deve estar no diâmetro do círculo, e o centro do círculo C é o local em que AB intercepta o eixo σ. Com os pontos A e B no círculo, e o centro C, o círculo completo pode então ser desenhado. Observe que as extremidades estendidas da linha AB são rotuladas, em referência às normais das superfícies para as quais os pontos A e B representam as tensões.

O círculo de Mohr completo representa o estado de tensão em um *único* ponto de uma estrutura. Cada ponto nesse círculo representa o estado de tensão para uma superfície *específica* interceptando o ponto na estrutura. Cada par de pontos no círculo distanciados em 180° um do outro representa o estado de tensão em um elemento cujas superfícies estão separadas em 90°. Uma vez estando o círculo desenhado, os estados de tensão podem ser visualizados para várias superfícies interceptando o ponto em análise. Por exemplo, as tensões principais σ_1 e σ_2 são os pontos D e E, respectivamente, e seus valores obviamente concordam com a Equação (4-13). Vemos também que as tensões de cisalhamento são zero nas superfícies contendo σ_1 e σ_2. As duas tensões de valores extremos, uma horária e a outra anti-horária, ocorrem em F e G, com magnitudes iguais ao raio do círculo. As superfícies em F e G também contêm cada uma tensões normais de $(\sigma_x + \sigma_y)/2$, como observado anteriormente na Equação (4-12). Por fim, o estado de tensão em uma superfície arbitrária, localizada a um ângulo ϕ anti-horário da face x, é o ponto H.

Outrora, o círculo de Mohr foi utilizado graficamente onde era desenhado em escala, de forma muito precisa, e onde os valores eram medidos usando-se uma régua e um transferidor. Aqui, estamos utilizando-o estritamente como um assistente de visualização e, para tanto, empregaremos uma abordagem semigráfica, calculando os valores a partir de propriedades do círculo. Isso será ilustrado pelo seguinte exemplo.

EXEMPLO 4-4

Um elemento de tensão apresenta $\sigma_x = 80$ MPa e $\tau_{xy} = -50$ MPa em sentido horário, como mostrado na Figura 4-13(*a*).

(*a*) Utilizando o círculo de Mohr, encontre as tensões principais e as direções; a seguir, mostre-as em um elemento de tensão corretamente alinhadas em relação às coordenadas xy. Desenhe um outro elemento de tensão para mostrar τ_1 e τ_1, encontre as tensões normais correspondentes e rotule o desenho completamente.

(*b*) Repita (*a*) empregando uma abordagem algébrica.

Solução

(*a*) Na abordagem semigráfica aqui utilizada, primeiro realizamos um esboço à mão livre aproximado do círculo de Mohr e então usamos a geometria da figura para obter a informação desejada.

Desenhe os eixos σ e τ primeiramente (Figura 4-13(*b*)) e, a partir da face x, localize $\sigma_x = 80$ MPa ao longo do eixo σ. Na face x do elemento, vemos que a tensão de cisalhamento é de 50 MPa na direção horária. Logo, para a face x, isso estabelece o ponto A $(80{,}50^{\text{horário}})$ MPa. Correspondendo à face y, a tensão é $\sigma = 0$ e $\tau = 50$ MPa na direção anti-horária. Isso localiza o ponto B $(0{,}50^{\text{anti-horário}})$ MPa. A linha AB forma o diâmetro de círculo requerido, que pode agora ser desenhado. A intersecção desse círculo com o eixo σ define σ_1 e σ_2, como mostrado. Agora, observando o triângulo ACD, indicamos no esboço o comprimento das pernas AD e CD como 50 e 40 MPa, respectivamente. O comprimento da hipotenusa AC é

$$\tau_1 = \sqrt{(50)^2 + (40)^2} = 64{,}0 \text{ MPa}$$

e isso também deve ser rotulado no esboço. Visto que a intersecção C é de 40 MPa a partir da origem, as tensões principais são encontradas agora valendo

$$\sigma_1 = 40 + 64 = 104 \text{ MPa} \qquad \text{e} \qquad \sigma_2 = 40 - 64 = -24 \text{ MPa}$$

O ângulo 2ϕ, a partir do eixo x, em sentido anti-horário, até σ_1, é

$$2\phi_p = \tan^{-1}\frac{50}{40} = 51{,}3°$$

Para desenhar o elemento das tensões principais (Figura 4-13(*c*)), esboce os eixos x e y paralelos aos eixos originais. O ângulo ϕ_p no elemento de tensão deve ser medido na *mesma* direção em que é medido o ângulo $2\phi_p$ no círculo de Mohr. Assim, a partir de x, meça 25,7° (metade de 51,3°), em sentido horário, para localizar o eixo de σ_1. O eixo de σ_2 está a 90°, a partir do eixo de σ_1, e o elemento de tensão pode agora ser completado e rotulado como mostrado. Observe que *não* existem tensões de cisalhamento nesse elemento.

A duas tensões máximas de cisalhamento ocorrem nos pontos E e F da Figura 4-13(*b*). As duas tensões normais que correspondem a essas tensões de cisalhamento são cada uma de 40 MPa, como indica-

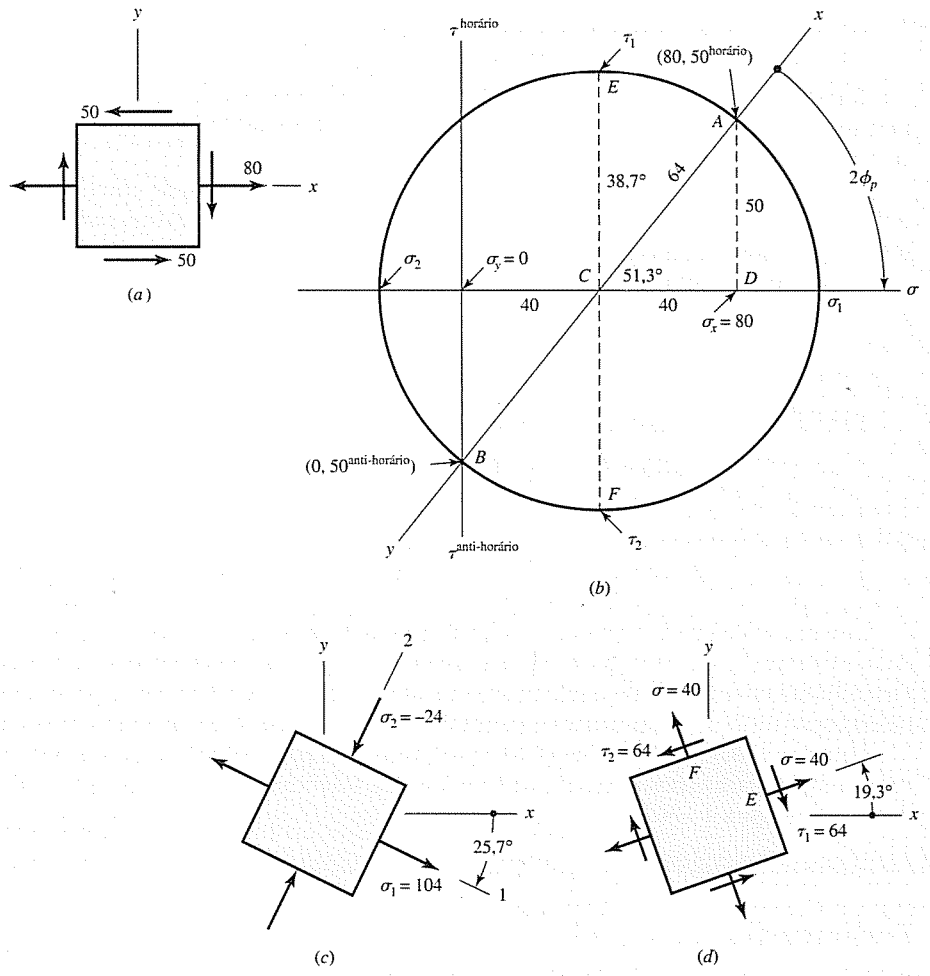


Figura 4-13 Todas as tensões em MPa.

do. O ponto E está a 38,7°, em sentido anti-horário, a partir do ponto A, no círculo de Mohr. Portanto, na Figura 4-13(d), desenhe um elemento de tensão orientado a 19,3° (metade de 38,7°), em sentido anti-horário, a partir de x. O elemento deve então ser rotulado com as magnitudes e direções, conforme mostrado.

Ao construir esses elementos de tensão, é importante indicar as direções x e y do sistema de referência original. Isso completa a ligação entre o elemento original de máquina e a orientação de suas tensões principais.

(b) Uma abordagem algébrica é programável. A partir da Equação (4-10),

$$\phi_p = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right) = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2(-50)}{80}\right) = -25{,}7°, 64{,}3°$$

A partir da Equação (4-8), para o primeiro ângulo $\phi_p = -25{,}7°$,

$$\sigma = \frac{80+0}{2} + \frac{80-0}{2}\cos[2(-25{,}7)] + (-50)\,\text{sen}[2(-25{,}7)] = 104{,}03 \text{ MPa}$$

O cisalhamento nessa superfície é obtido, a partir da Equação (4-9), como

$$\tau = -\frac{80-0}{2}\,\text{sen}[2(-25{,}7)] + (-50)\cos[2(-25{,}7)] = 0 \text{ MPa}$$

o que confirma que 104,03 MPa é a tensão principal. A partir da Equação (4-8), para $\phi_p = 64{,}3°$,

$$\sigma = \frac{80+0}{2} + \frac{80-0}{2}\cos[2(64{,}3)] + (-50)\,\text{sen}[2(64{,}3)] = -24{,}03 \text{ MPa}$$

Substituir $\phi_p = 64{,}3°$ na Equação (4-9) novamente produz $\tau = 0$, indicando que –24,03 MPa é também uma tensão principal. Uma vez calculadas as tensões principais, elas podem ser ordenadas de modo que $\sigma_1 \geq \sigma_2$. Logo, $\sigma_1 = 104{,}03$ MPa e $\sigma_2 = -24{,}03$ MPa.

Haja vista que, para $\sigma_1 = 104{,}03$ MPa, $\phi_p = -25{,}7°$ e que ϕ é definido como positivo em sentido anti-horário, nas equações de transformação, rodamos 25,7°, *em sentido horário*, para atingir a superfície contendo σ_1. Vemos, na Figura 4-13(*c*), que isso concorda totalmente com o método semigráfico.

De modo a determinar τ_1 e τ_2, utilizamos primeiramente a Equação (4-11), para calcular ϕ_s:

$$\phi_s = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}\right) = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(-\frac{80}{2(-50)}\right) = 19{,}3°,\ 109{,}3°$$

Para $\phi_s = 19{,}3°$, as Equações (4-8) e (4-9) produzem

$$\sigma = \frac{80+0}{2} + \frac{80-0}{2}\cos[2(19{,}3)] + (-50)\,\text{sen}[2(19{,}3)] = 40{,}0 \text{ MPa}$$

$$\tau = -\frac{80-0}{2}\,\text{sen}[2(19{,}3)] + (-50)\cos[2(19{,}3)] = -64{,}0 \text{ MPa}$$

Lembre-se de que as Equações (4-8) e (4-9) são de *transformação de coordenadas*. Imagine que rodemos os eixos x, y a 19,3°, em sentido anti-horário, e que y agora apontará para cima e para a esquerda. Dessa forma, uma tensão de cisalhamento negativa apontará para baixo e para a direita, como mostrado na Figura 4-13(*d*). Logo, novamente os resultados concordam com o método semigráfico.

Para $\phi_s = 109{,}3°$, as Equações (4-8) e (4-9) fornecem $\sigma = 40{,}0$ MPa e $\tau = +64{,}0$ MPa. Fazendo uso da mesma lógica para a transformação de coordenadas, verificamos que os resultados uma vez mais concordam com a Figura 4-13(*d*).

4-7 Tensão Tridimensional Geral

Como no caso de um estado plano, uma orientação particular de um elemento de tensão ocorre no espaço para o qual todas as componentes de tensão de cisalhamento são nulas. Quando um elemento apresenta tal orientação particular, as normais às faces correspondem às direções principais, e as tensões associadas a essas faces são as tensões principais. Na medida em que existem seis faces, há três direções principais e três tensões principais: σ_1, σ_2 e σ_3.

Em nossos estudos de tensão plana, fomos capazes de especificar qualquer estado de tensão σ_x, σ_y e τ_{xy} e de encontrar as tensões e direções principais. No entanto, seis componentes de tensão são requeridas para especificar um estado geral de tensão em três dimensões, de modo que o problema de determinar as tensões principais e as direções torna-se mais difícil. Em projeto, transformações tridimensionais são raramente realizadas, uma vez que a maioria dos estados de tensão máxima ocorre sob condições de tensão plana. Uma exceção notável é a tensão de contato, que não constitui um caso de tensão plana, na qual as três tensões principais são fornecidas na Seção 4-20. De fato, *todos* os estados de tensão são verdadeiramente tridimensionais, quer possam ser descritos de forma uni ou bidimensional relativamente a eixos coordenados *específicos*. Aqui, o mais importante é entender o relacionamento entre as *três* tensões principais. O processo de encontrá-las a partir das seis componentes de tensão (σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{xyz} e τ_{zx}) envolve encontrar as raízes da equação cúbica[2]

$$\begin{aligned}\sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\sigma^2 + (\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2)\sigma \\ - (\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2) = 0\end{aligned} \tag{4-15}$$

Ao desenhar os círculos de Mohr para tensão tridimensional, as tensões normais principais são ordenadas de modo que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Assim, o resultado aparece como na Figura 4-14(*a*). As coordenadas de tensão para qualquer plano arbitrariamente localizado situar-se-ão sempre nos contornos ou dentro da área sombreada.

[2] Para o desenvolvimento desta equação e elaborações adicionais de transformações tridimensionais de tensão, ver Richard G. Budynas, *Advanced Strength and Applied Stress Analysis*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1999, p. 46-78.

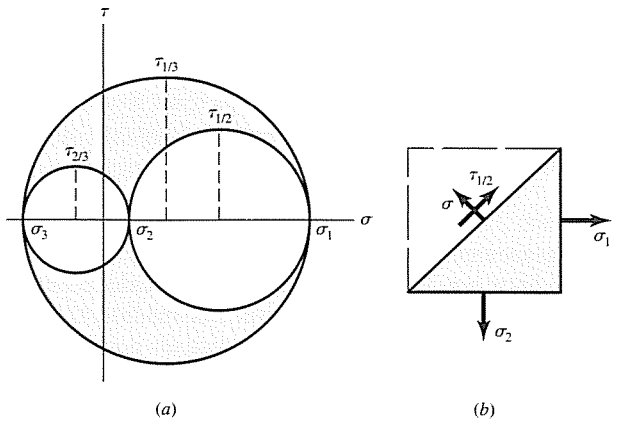


Figura 4-14 Círculos de Mohr para tensão tridimensional.

A Figura 4-14(*a*) também apresenta as três *tensões principais de cisalhamento*: $\tau_{1/2}$, $\tau_{2/3}$ e $\tau_{1/3}$.[3] Cada uma delas ocorre em dois planos, um dos quais está ilustrado na Figura 4-14(*b*). A Figura mostra que as tensões principais de cisalhamento são fornecidas pelas equações

$$\tau_{1/2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \qquad \tau_{2/3} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \qquad \tau_{1/3} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \tag{4-16}$$

Naturalmente, $\tau_{max} = \tau_{1/3}$ quando as tensões normais principais estão ordenadas ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$); portanto, sempre ordene suas tensões principais. Faça isso em qualquer código computacional que criar, pois, assim, você sempre gerará τ_{max}.

4-8 Deformação Elástica

A deformação normal é definida e discutida na Seção 3-1 para o espécime de tração. A elongação por comprimento unitário da barra é denominada *elongação unitária*, ou *deformação*, e é fornecida por

$$\epsilon = \frac{\delta}{l} \tag{4-17}$$

em que δ é a elongação total da barra dentro do comprimento l. A lei de Hooke para o espécime de tração é provida pela Equação (3-3) como

$$\sigma = E\epsilon \tag{4-18}$$

em que a constante E é denominada *módulo de Young* ou *módulo de elasticidade.*

Ao substituir $\sigma = F/A$ e $\epsilon = \delta/l$ na Equação (4-18), e rearranjando, obtemos a equação para a elongação total de uma barra carregada axialmente em tração como

$$\delta = \frac{Fl}{AE} \tag{a}$$

Essa equação também se aplica à contração, em decorrência da compressão axial em que F é negativa.

Experimentos demonstram que, quando um material é colocado em tração, existe não somente uma deformação axial, mas também uma deformação lateral negativa (contração). Poisson mostrou que essas duas deformações são proporcionais uma à outra, dentro do intervalo da lei de Hooke. Tal constante é expressa como

$$\nu = -\frac{\text{deformação lateral}}{\text{deformação axial}} \tag{4-19}$$

e é conhecida como *razão de Poisson*, que corresponde a cerca de 0,3 para a maioria dos metais. Essa relação também se aplica para a compressão axial, a não ser que, em vez disso, ocorra uma expansão lateral. Veja a Tabela A-5 para valores da razão de Poisson ν para materiais comuns.

[3] Observe a diferença entre esta notação e aquela para uma tensão de cisalhamento, digamos, τ_{xy}. O uso da marca de fração não é um costume aceitável, mas é aqui feito para enfatizar a distinção.

A deformação de cisalhamento γ é a mudança no ângulo reto de um elemento de tensão quando submetido à tensão de cisalhamento pura, e a lei de Hooke para cisalhamento é fornecida por

$$\tau = G\gamma \tag{4-20}$$

Pode-se verificar que, para um material linear, isotrópico e homogêneo, as três constantes elásticas estão relacionadas entre si, como segue, por

$$E = 2G(1 + \nu) \tag{4-21}$$

Existem muitas técnicas experimentais que podem ser utilizadas para medir a deformação. Portanto, se o relacionamento entre tensão e deformação for conhecido, o estado de tensão em um ponto poderá ser calculado depois que o estado de deformação tiver sido medido. Definimos as deformações principais como as deformações normais na direção das tensões principais normais. É verdade que as deformações de cisalhamento são nulas, exatamente como o são as tensões de cisalhamento, em um elemento alinhado nas direções principais. A Tabela 4-2 contém as relações para todos os três tipos de tensão normal.

Tabela 4-2 Relações elásticas de tensão-deformação

Tipos de tensão	Deformações principais	Tensões principais
Uniaxial	$\epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E}$	$\sigma_1 = E\epsilon_1$
	$\epsilon_2 = -\nu\epsilon_1$	$\sigma_2 = 0$
	$\epsilon_3 = -\nu\epsilon_1$	$\sigma_3 = 0$
Biaxial	$\epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\nu\sigma_2}{E}$	$\sigma_1 = \frac{E(\epsilon_1 + \nu\epsilon_2)}{1 - \nu^2}$
	$\epsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\nu\sigma_1}{E}$	$\sigma_2 = \frac{E(\epsilon_2 + \nu\epsilon_1)}{1 - \nu^2}$
	$\epsilon_3 = -\frac{\nu\sigma_1}{E} - \frac{\nu\sigma_2}{E}$	$\sigma_3 = 0$
Uniaxial	$\epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\nu\sigma_2}{E} - \frac{\nu\sigma_3}{E}$	$\sigma_1 = \frac{E\epsilon_1(1 - \nu) + \nu E(\epsilon_2 + \epsilon_3)}{1 - \nu - 2\nu^2}$
	$\epsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\nu\sigma_1}{E} - \frac{\nu\sigma_3}{E}$	$\sigma_2 = \frac{E\epsilon_2(1 - \nu) + \nu E(\epsilon_1 + \epsilon_3)}{1 - \nu - 2\nu^2}$
	$\epsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E} - \frac{\nu\sigma_1}{E} - \frac{\nu\sigma_2}{E}$	$\sigma_3 = \frac{E\epsilon_3(1 - \nu) + \nu E(\epsilon_1 + \epsilon_2)}{1 - \nu - 2\nu^2}$

Nota 1: A situação de tensão plana requer que uma tensão principal seja nula. A situação de deformação plana requer que uma deformação principal associada a uma tensão principal seja nula.
Nota 2: Uniaxial, biaxial e triaxial são terminologias para casos especiais de estados de tensão unidimensional, bidimensional e tridimensional, respectivamente, nos quais as faces ortogonais de um elemento contêm tensões normais apenas, sem tensões de cisalhamento.

4-9 Tensões Uniformemente Distribuídas

A hipótese de distribuição uniforme de tensões é freqüentemente aventada em projeto. O resultado é então conhecido como *tração pura*, *compressão pura* ou *cisalhamento puro*, dependendo da forma como a carga externa é aplicada ao corpo em estudo. A palavra *simples* é utilizada algumas vezes, em vez de *pura*, para indicar que não há outros fatores complicadores. A barra de tração é um caso típico. Aqui, uma força de tração F é aplicada, por meio de pinos, às extremidades de uma barra. A hipótese de tensão uniforme significa que, se cortarmos essa barra em uma secção distante das extremidades e removermos uma das partes, poderemos repor os efeitos dessa parte sobre o restante aplicando uma força uniformemente distribuída, de magnitude σA, na extremidade do corte. Assim, diz-se que a tensão σ é uniformemente distribuída. Ela é calculada a partir da equação

$$\sigma = \frac{F}{A} \tag{4-22}$$

Tal hipótese de distribuição uniforme de tensão requer que

- A barra seja reta e feita de um material homogêneo
- A linha de ação da força contenha o centróide da secção
- A secção seja escolhida longe das extremidades e de qualquer descontinuidade ou mudança abrupta de secção transversal

Para compressão simples, a Equação (4-22) é aplicável, com F normalmente sendo considerada uma quantidade negativa. Ademais, uma barra esbelta em compressão pode falhar por flambagem, de modo que tal possibilidade deve ser desconsiderada antes que a Equação (4-22) seja utilizada.[4]

O uso da equação

$$\tau = \frac{F}{A} \tag{4-23}$$

para um corpo – digamos, um parafuso de porta – em cisalhamento supõe também uma distribuição uniforme de tensão. É muito difícil, na prática, obter uma distribuição uniforme de tensão de cisalhamento. A equação é incluída porque surgem ocasiões nas quais tal suposição é feita.

4-10 Tensões Normais para Vigas em Flexão

Ao derivar as relações para as tensões normais de flexão em vigas, aventamos as seguintes hipóteses:

1. A viga é submetida a flexão pura; isso significa que a força de cisalhamento (cortante) é zero e que nenhuma carga que cause torção ou cargas axiais estão presentes.
2. O material é isotrópico e homogêneo.
3. O material obedece à lei de Hooke.
4. A viga é inicialmente reta, com secção transversal constante ao longo de seu comprimento.
5. A viga tem um eixo de simetria no plano de flexão.
6. As proporções da viga são tais que esta falharia por flexão, e não por esmagamento, flambagem por cisalhamento ou flambagem lateral.
7. As secções transversais planas da viga permanecem planas durante a flexão.

Na Figura 4-15(a), visualizamos parte de uma viga sob a ação do momento flexor positivo M. O eixo y é o eixo de simetria. O eixo x coincide com o *eixo neutro* da secção, e o plano xz, que contém os eixos neutros de todas as secções transversais, é denominado *plano neutro*. Os elementos da viga coincidentes com esse plano têm deformação nula. A localização do eixo neutro, relativamente à secção transversal da viga, não foi ainda definida.

A aplicação de um momento flexor positivo fará com que a superfície superior da viga curve-se para baixo, de modo que o eixo neutro também se curvará, como mostrado na Figura 4-15(b). Devido à curvatura, a secção AB, originalmente paralela a CD, uma vez que a viga era reta, rodará por um ângulo $d\phi$ até chegar a $A'B'$. Visto que tanto AB quanto $A'B'$ são linhas retas, está implícita a utilização da hipótese de que secções planas permanecem planas durante a flexão. Se agora especificarmos o raio de curvatura do eixo neutro como ρ, o comprimento de um elemento diferencial desse eixo como ds e o ângulo subentendido pelos dois lados adjacentes CD e $A'B'$ como $d\phi$, então, a partir da definição de curvatura, temos

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\phi}{ds} \tag{a}$$

Como ilustrado na Figura 4-15(b), a elongação de uma "fibra", a uma distância y do eixo neutro, é

$$dx = -y\,d\phi \tag{b}$$

A deformação é a elongação dividida pelo comprimento original, ou

$$\epsilon = \frac{dx}{ds} \tag{c}$$

[4] Ver Seção 5-11.

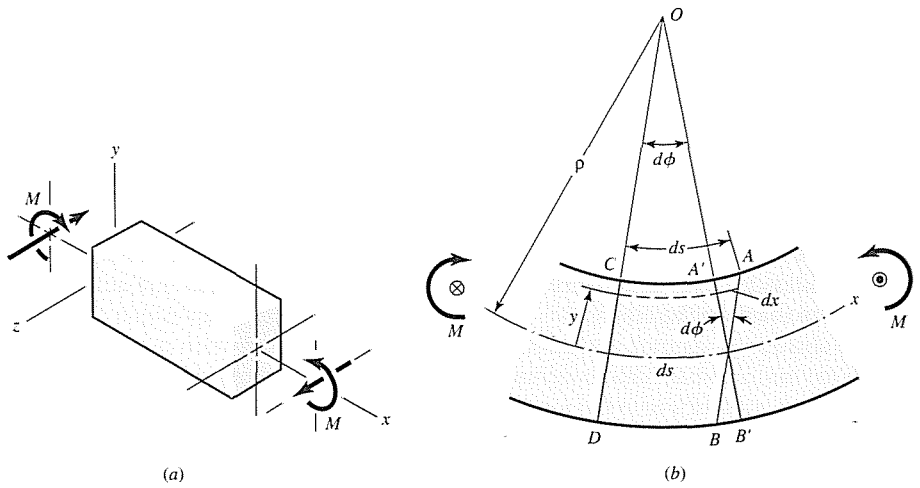


Figura 4-15 Viga reta em flexão positiva.

Solucionar as Equações (*a*), (*b*) e (*c*) simultaneamente produz

$$\epsilon = -\frac{y}{\rho} \tag{d}$$

Logo, a deformação é proporcional à distância y a partir do eixo neutro. Agora, já que $\sigma = E\epsilon$, podemos escrever as tensões como

$$\sigma = -\frac{Ey}{\rho} \tag{e}$$

Estamos lidando, no momento, com flexão pura, o que significa não haver forças axiais agindo na viga. Podemos declarar isso de uma forma matemática, somando todas as forças horizontais atuando na secção transversal e igualando essa soma a zero. A força agente em um elemento de área dA é $\sigma\, dA$; portanto,

$$\int \sigma\, dA = -\frac{E}{\rho}\int y\, dA = 0 \tag{f}$$

A Equação (*f*) define a localização do eixo neutro. O momento da área em relação a ele é zero; dessa forma, o eixo passa pelo centróide da área transversal.

Observamos, a seguir, que o equilíbrio requer que o momento flexor interno criado pela tensão σ seja o mesmo que o momento externo M. Em outras palavras,

$$M = -\int y\sigma\, dA = \frac{E}{\rho}\int y^2\, dA \tag{g}$$

A segunda integral na Equação (*g*) é o *segundo momento da área* relativamente ao eixo z:

$$I = \int y^2\, dA \tag{4-24}$$

Se a seguir solucionarmos as Equações (*g*) e (4-24), rearranjando-as, obteremos

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \tag{4-25}$$

Essa é uma equação importante para determinar a deflexão de vigas, de modo que a utilizaremos no Capítulo 5. Por fim, eliminamos ρ das Equações (*e*) e (4-25) e obtemos

$$\sigma = -\frac{My}{I} \tag{4-26}$$

A Equação (4-26) mostra que a tensão de flexão σ é diretamente proporcional à distância y do eixo neutro e ao momento flexor M, como exibido na Figura 4-16. É usual designar $c = y_{max}$, omitir o sinal negativo e escrever

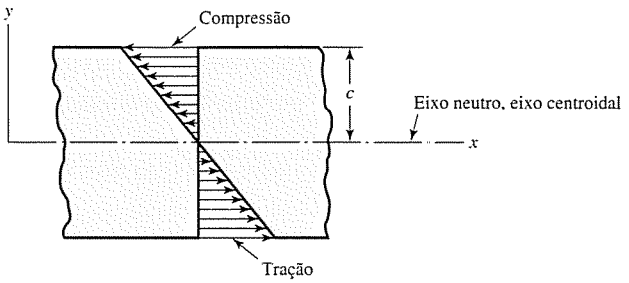


Figura 4-16 Tensões de flexão conforme a Equação (4-26).

$$\sigma = \frac{Mc}{I} \tag{4-27}$$

ficando entendido que a Equação (4-27) calcula a tensão máxima. Daí as máximas tensões de tração ou compressão serem determinadas por inspeção sempre que o sentido do momento for conhecido.

A Equação (4-27) é freqüentemente escrita em duas formas alternativas

$$\sigma = \frac{M}{I/c} = \frac{M}{Z} \tag{4-28}$$

em que $Z = I/c$ é conhecido como *módulo seccional.*

EXEMPLO 4-5

Uma viga tendo uma secção T com as dimensões mostradas na Figura 4-17 está sujeita a um momento flexor de 1600 N · m que causa tensão na superfície do topo (superior). Localize o eixo neutro e encontre as tensões de flexão máximas de tração e compressão.

Solução

A área da secção composta é $A = 1956$ mm^2. Agora, divida a secção T em dois retângulos, 1 e 2, e some os momentos dessas áreas relativamente à borda do topo. Temos, então,

$$1956c_1 = 12(75)(6) + 12(88)(56)$$

e, portanto, $c_1 = 33{,}0$ mm. Conseqüentemente, $c_2 = 100 - 33{,}0 = 67{,}0$ mm.

Agora, calculamos o segundo momento de área de cada retângulo relativamente a seu próprio eixo centroidal. Utilizando a Tabela A-18, encontramos, para o retângulo de topo,

$$I_1 = \frac{bh^3}{12} = \frac{7{,}5(1{,}2)^3}{12} = 1{,}08 \text{ cm}^4$$

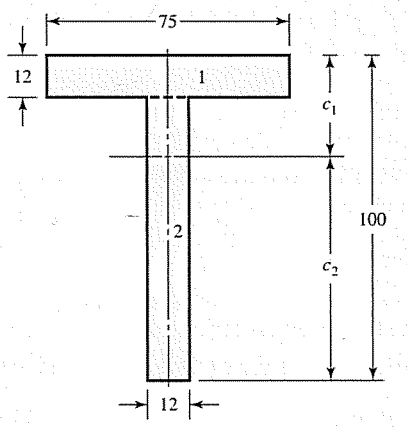


Figura 4-17 Dimensões em milímetros.

Como indicado na Seção 1-14, é permissível utilizar os prefixos não-preferenciais ao elevarmos unidades prefixadas a uma potência. Nesse caso, o uso de cm em tal equação, em vez de mm ou de m, produz a menor série de números e, portanto, é preferível. Para o retângulo da parte inferior, temos

$$I_2 = \frac{bh^3}{12} = \frac{1{,}2(8{,}8)^3}{12} = 68{,}15 \text{ cm}^4$$

Agora, aplicamos o teorema dos eixos paralelos para obter o segundo momento de área da figura composta relativamente a seu próprio eixo centroidal. Esse teorema sustenta que

$$I_x = I_{cg} + Ad^2$$

em que I_{cg} é o segundo momento de área ao redor de seu próprio eixo centroidal e I_x é o segundo momento de área ao redor de qualquer eixo paralelo a uma distância d (medida a partir do eixo passando pelo centróide). Para o retângulo do topo, a distância é

$$d_1 = 33{,}0 - 6 = 27{,}0 \text{ mm}$$

e, para o retângulo da parte inferior,

$$d_2 = 67{,}0 - 44 = 23{,}0 \text{ mm}$$

Utilizando o teorema dos eixos paralelos para ambos os retângulos, verificamos que

$$I = [1{,}08 + 9(2{,}70)^2] + [68{,}15 + 10{,}56(2{,}30)^2]$$
$$= 190{,}7 \text{ cm}^4$$

Por fim, a tensão máxima de tração, que ocorre na superfície do topo, é encontrada como

$$\sigma = \frac{Mc_1}{I} = \frac{1600(3{,}30)}{190{,}7} = 27{,}69 \text{ MPa}$$

Observe que empregamos a Tabela A-3 para solucionar essa equação. De maneira semelhante, a tensão máxima de compressão na superfície inferior é encontrada valendo

Resposta

$$\sigma = -\frac{Mc_2}{I} = -\frac{1600(6{,}70)}{190{,}7} = -56.21 \text{ MPa}$$

EXEMPLO 4-6

Determine o diâmetro para o eixo sólido redondo, com comprimento de 18 in, mostrado na Figura 4-18(*a*), o qual se encontra apoiado em mancais auto-alinhantes nas extremidades. Montadas sobre tal eixo estão uma polia de correia V, que exerce nele uma carga radial de 400 lbf, e uma engrenagem, que exerce uma carga radial de 150 lbf. As duas cargas estão no mesmo plano e apresentam as mesmas direções. A tensão de flexão não deve exceder a 10 kpsi.

Solução

Como indicado no Capítulo 1, certas hipóteses se fazem necessárias. Nesse problema, decidimos a respeito das seguintes condições:

- O peso do eixo é desprezado.
- Visto que os mancais são auto-alinhantes, supõe-se que o eixo esteja simplesmente apoiado e que as cargas e reações de mancal estejam concentradas.
- A tensão normal de flexão deve governar o projeto na localidade do momento de flexão máximo.

O diagrama de carregamento assumido é ilustrado na Figura 4-18(*b*). Somando os momentos ao redor do eixo C, obtemos

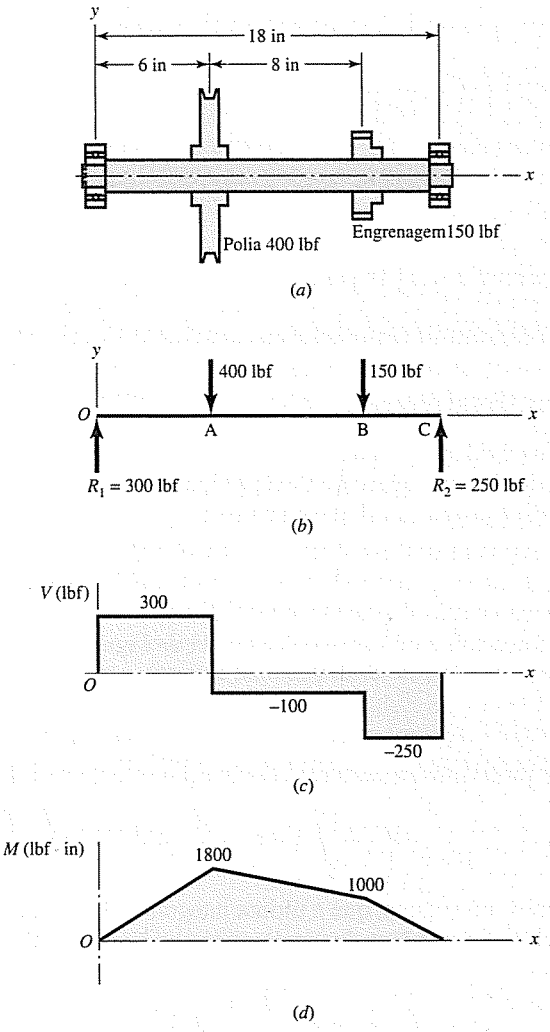


Figura 4-18 (*a*) Desenho do eixo, dimensões em polegadas; (*b*) diagrama de carregamento; (*c*) diagrama de força de cisalhamento; (*d*) diagrama de momento flexor.

$$\sum M_C = -18R_1 + 12(400) + 4(150) = 0$$

$$R_1 = 300 \text{ lbf}$$

Para obter R_2, podemos somar as forças ou os momentos ao redor do ponto O. Com um ou outro método, encontramos

$$R_2 = 250 \text{ lbf}$$

O próximo passo é desenhar os diagramas de força cortante e momento flexor (Figuras 4-18(*c*) e (*d*)). O momento flexor máximo é encontrado como

$$M = 300(6) = 1800 \text{ lbf} \cdot \text{in}$$

O módulo da secção é

$$Z = \frac{I}{c} = \frac{\pi d^4/64}{d/2} = \frac{\pi d^3}{32} = 0{,}0982d^3$$

Assim, utilizando a Equação (4-28),

$$\sigma = \frac{M}{Z} = \frac{1800}{0{,}0982d^3}$$

Substituindo $\sigma = 10\,000$ psi e solucionando para d, produzimos

$$d = \sqrt[3]{\frac{1800}{0{,}0982(10000)}} = 1{,}22 \text{ in}$$

Resposta Portanto, selecionamos $d = 1\frac{1}{4}$ in para o diâmetro do eixo.

4-11 Vigas com Secções Assimétricas

As relações desenvolvidas na Seção 4-10 podem também ser aplicadas a vigas com secções assimétricas (não-simétricas), desde que o plano de flexão coincida com um dos dois eixos principais da secção. Descobrimos que a tensão à distância y do eixo neutro é

$$\sigma = -\frac{Ey}{\rho} \tag{a}$$

Portanto, a força sobre o elemento de área dA da Figura 4-19 é

$$dF = \sigma\, dA = -\frac{Ey}{\rho}\, dA$$

Tomando os momentos dessa força com relação ao eixo y e integrando através da secção, obtemos

$$M_y = \int z\, dF = \int \sigma z\, dA = -\frac{E}{\rho}\int yz\, dA \tag{b}$$

Reconhecemos, no entanto, que a última integral da Equação (b) é o produto de inércia I_{yz}. Se o momento flexor na viga está no plano de um dos eixos principais, então

$$I_{yz} = \int yz\, dA = 0 \tag{c}$$

Com essa restrição, as relações desenvolvidas na Seção 4-10 valem para qualquer forma de secção transversal. Naturalmente, isso significa que o projetista tem uma responsabilidade especial, que é a de assegurar que as cargas de flexão atuem, de fato, em um plano principal da viga!

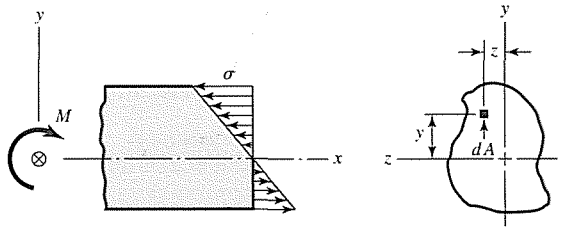


Figura 4-19

4-12 Tensões de Cisalhamento para Vigas em Flexão

A maioria das vigas tem *ambos*, forças cortantes e momentos flexores, presentes. Apenas ocasionalmente encontramos vigas submetidas a flexão pura, isto é, vigas com força cortante nula. Apesar disso, a fórmula de flexão foi desenvolvida sob a premissa de flexão pura. De fato, a razão para assumirmos a flexão pura foi eliminar os efeitos complicadores da força de cisalhamento na derivação. Para aplicações de engenharia, a

fórmula de flexão é válida não obstante a força cortante esteja presente ou não. Por tal razão, iremos utilizar a mesma distribuição de tensões normais de flexão [Equações (4-26) e (4-27)] quando forças cortantes também estiverem presentes.

Na Figura 4-20, mostramos uma viga de secção transversal constante, submetida a uma força cortante V e a um momento flexor M. A direção do momento flexor é mais fácil de visualizar ao associarmos um vetor vazado em forma de lança à mão direita. Tal vetor aponta na direção negativa do eixo z. Se você colocar o polegar da mão direita na direção negativa desse eixo, então seus dedos, quando dobrados, irão indicar a direção do momento M. De acordo com a Equação (4-3), a relação entre V e M é

$$V = \frac{dM}{dx} \tag{a}$$

Em alguma posição ao longo da viga, cortamos uma secção transversal de comprimento dx, para baixo, até uma distância y_1 acima do eixo neutro, como ilustrado. Removemos essa secção para estudar as forças que nela atuam. Como uma força cortante está presente, o momento flexor muda à medida que nos movemos ao longo do eixo x. Assim, podemos designar o momento flexor como M no lado anterior próximo da secção e como $M + dM$ no lado posterior. O momento M produz uma tensão normal σ, ao passo que o momento $M + dM$ produz uma tensão normal $\sigma + d\sigma$, como mostrado. Essas tensões normais produzem forças normais nas faces verticais do elemento, sendo a força compressiva normal no lado posterior maior que a no lado anterior. A resultante dessas duas forças normais faria com que a secção tendesse a escorregar na direção $-x$, de modo que essa resultante deve ser balanceada por uma força cortante agindo na face inferior, na direção $+x$. Essa força cortante resulta em uma tensão de cisalhamento τ, como mostrado. Há, portanto, três forças resultantes agindo no elemento situado na direção x: F_N, decorrente de σ, atua na face anterior do elemento; F_F, decorrente de $\sigma + d\sigma$, atua na face posterior; e F_B, decorrente de τ, atua na face inferior. Avaliemos essas forças.

Para a face anterior, selecione um elemento de área dA. A tensão agindo nessa área é σ, de modo que a força é a tensão vezes a área, ou $\sigma\, dA$. A força agindo na face anterior completa é a soma de todos esses produtos $\sigma\, dA$, ou

$$F_N = \int_{y_1}^{c} \sigma\, dA \tag{b}$$

em que os limites indicam que integramos desde o fundo, $y = y_1$, até o topo, $y = c$. Utilizando a expressão $\sigma = My/I$ [Equação (4-26)], a Equação (b) torna-se

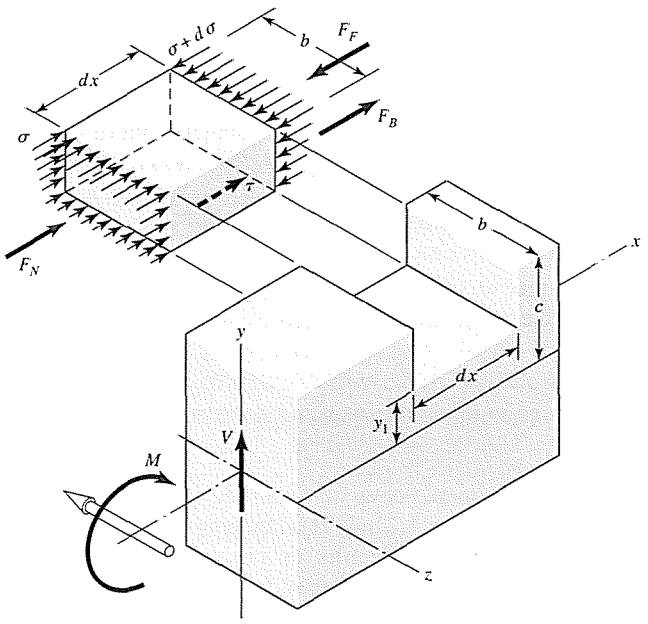


Figura 4-20 Isolamento da secção de viga. *Nota:* Somente forças na direção x são mostradas no elemento dx.

$$F_N = \frac{M}{I}\int_{y_1}^{c} y\,dA \tag{c}$$

Observe que o sinal negativo na Equação (4-26) foi omitido, pois se supõe que σ seja de compressão na Figura 4-19.

A força na face posterior é encontrada de maneira similar. Ela vale

$$F_F = \int_{y_1}^{c} (\sigma + d\sigma)\,dA = \frac{M + dM}{I}\int_{y_1}^{c} y\,dA \tag{d}$$

A força na face inferior iguala a tensão de cisalhamento τ multiplicada pela área da face de fundo. Uma vez que esta área vale bdx, temos

$$F_B = \tau b\,dx \tag{e}$$

Somando essas três forças na direção x, obtemos

$$\sum F_x = +F_N - F_F + F_B = 0 \tag{f}$$

Se substituirmos as Equações (*c*) e (*d*) pelas expressões de F_N e F_F, e solucionarmos a equação obtida para F_B, obteremos

$$F_B = F_F - F_N = \frac{M + dM}{I}\int_{y_1}^{c} y\,dA - \frac{M}{I}\int_{y_1}^{c} y\,dA = \frac{dM}{I}\int_{y_1}^{c} y\,dA \tag{g}$$

A seguir, utilizando a Equação (*e*) para F_B, e solucionando para as tensões de cisalhamento, obtemos

$$\tau = \frac{dM}{dx}\frac{1}{Ib}\int_{y_1}^{c} y\,dA \tag{h}$$

Então, utilizando a Equação (*a*), finalmente obtemos a fórmula da tensão de cisalhamento,

$$\tau = \frac{V}{Ib}\int_{y_1}^{c} y\,dA \tag{4-29}$$

Nessa equação, a integral mostrada é o primeiro momento de área da face vertical isolada em relação ao eixo neutro. Tal momento costuma ser designado como Q. Logo,

$$Q = \int_{y_1}^{c} y\,dA = \bar{y}'A' \tag{4-30}$$

em que, para a área isolada desde y_1 até c, $\bar{y}'$ é a distância a partir do eixo y até o centróide de área e A' é a área. Com essa simplificação final, a Equação (4-29) pode ser escrita como

$$\tau = \frac{VQ}{Ib} \tag{4-31}$$

Ao utilizar tal equação, observe que b é a largura da secção na distância particular – considerada y_1, nesse caso – a partir do eixo neutro. Além disso, I é o segundo momento de área da secção *completa* em relação ao eixo neutro.

EXEMPLO 4-7

Uma viga de 12 in de comprimento deve suportar uma carga de 488 lbf atuando 3 in a partir do apoio esquerdo, como mostrado na Figura 4-21(*a*). Baseando o projeto somente na tensão de flexão, um projetista selecionou um perfil U (canal) de alumínio de 3 in, com as dimensões da secção transversal mostradas. Se o cisalhamento direto for desprezado, a tensão na viga poderá ser realmente maior do que pensa o projetista. Determine as tensões principais considerando a flexão e o cisalhamento direto e as compare com aquelas considerando somente a flexão.

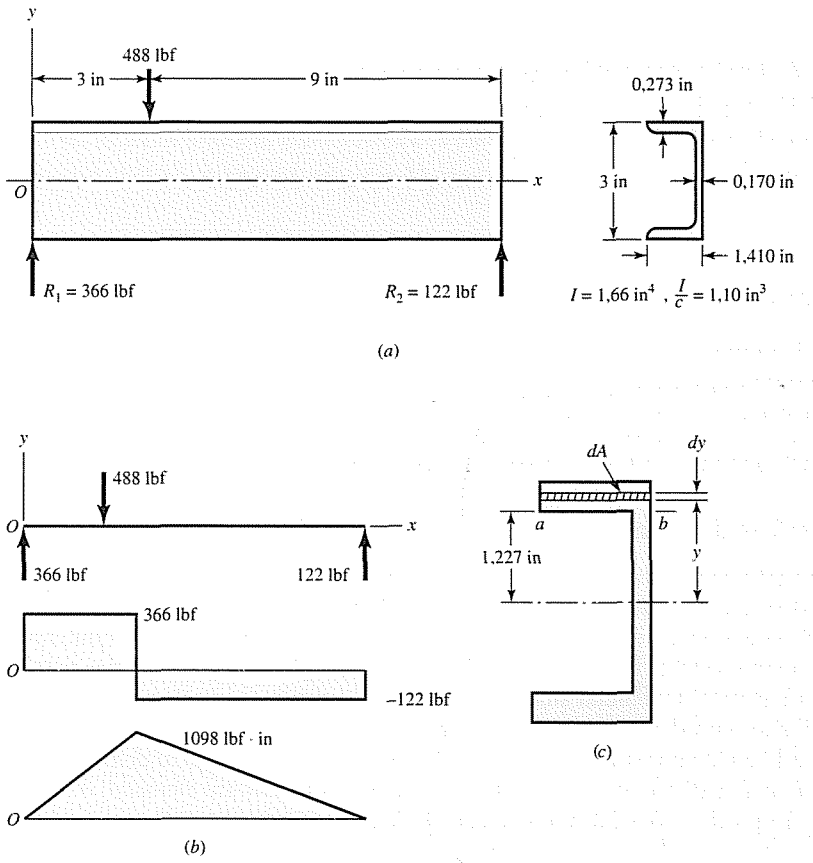


Figura 4-21

Solução

Os diagramas de carregamento, força cortante (cisalhamento) e momento flexor são exibidos na Figura 4-21(b). Se a força de cisalhamento direto for incluída na análise, as tensões máximas no topo e no fundo da viga serão as mesmas que seriam se somente a flexão fosse considerada. Tais tensões são

$$\sigma = \pm\frac{Mc}{I} = \pm\frac{1098(1,5)}{1,66} = \pm 992 \text{ psi}$$

Contudo, a tensão máxima decorrente das tensões combinadas de flexão e cisalhamento direto pode também ser máxima no ponto (3^-, 1,227), que está justamente à esquerda da carga aplicada, onde a alma se une ao flange. Para simplificar os cálculos, assumimos uma secção transversal com cantos quadrados (Figura 4-21(c)). A tensão normal na secção ab, com $x = 3$ in, é

$$\sigma = -\frac{My}{I} = -\frac{1098(1,227)}{1,66} = -812 \text{ psi}$$

Para a tensão de cisalhamento na secção ab, considerando a área acima de ab e empregando a Equação (4-30), obtemos

$$Q = \bar{y}'A' = \frac{1}{2}(1,5 + 1,227)(1,410)(0,273) = 0,525 \text{ in}^3$$

Utilizando a Equação (4-33) com $V = 366$ lbf, $I = 1,66$ in^4, $Q = 0,525$ in^3 e $b = 0,170$ in, produzimos

$$\tau_{xy} = -\frac{VQ}{Ib} = -\frac{366(0,525)}{1,66(0,170)} = -681 \text{ psi}$$

O sinal negativo vem do reconhecimento de que a tensão de cisalhamento é para baixo na face x de um elemento $dx\,dy$ situado na localidade sendo considerada.

As tensões principais no ponto podem ser agora determinadas. Utilizando a Equação (4-13), verificamos que em $x = 3^-$ in, $y = 1{,}277$ in,

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$= \frac{-813 + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-813 - 0}{2}\right)^2 + (-681)^2} = 387, -1200 \text{ psi}$$

Para um ponto em $x = 3^-$ in, $y = 1{,}277$ in, as tensões principais são σ_1, $\sigma_2 = 1200, -387$ psi. Logo, vemos que as tensões principais máximas são ±1200 psi, 21% mais elevadas que aquelas pensadas pelo projetista.

Tensões de Cisalhamento em Vigas de Secção Padronizada

A distribuição de tensão de cisalhamento em uma viga depende da forma como Q/b varia como função de y_1. Mostraremos aqui como determinar a distribuição de tensão de cisalhamento para uma viga com uma secção transversal retangular e forneceremos os resultados dos valores máximos da tensão de cisalhamento para outras secções transversais padronizadas. A Figura 4-22 mostra uma porção de uma viga com uma secção transversal retangular sujeita a uma força de cisalhamento V e a um momento flexor M. Como um dos resultados do momento flexor, uma tensão normal σ é desenvolvida em uma secção transversal como A-A, que está em compressão acima do eixo neutro e em tração abaixo dele. Para investigar a tensão de cisalhamento a uma distância y_1 acima desse eixo, selecionamos um elemento de área dA a uma distância y acima dele. Logo, $dA = b\,dy$, de modo que a Equação (4-30) torna-se

$$Q = \int_{y_1}^{c} y\,dA = b\int_{y_1}^{c} y\,dy = \frac{by^2}{2}\bigg|_{y_1}^{c} = \frac{b}{2}\left(c^2 - y_1^2\right) \qquad (a)$$

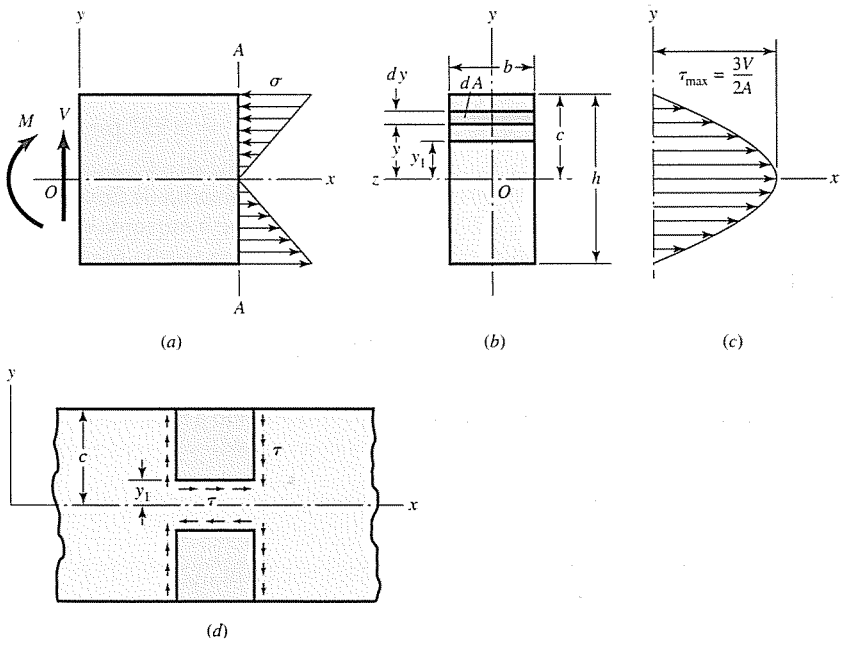


Figura 4-22 Tensões de cisalhamento em uma viga retangular.

Substituindo esse valor de Q na Equação (4-31), obtemos

$$\tau = \frac{V}{2I}\left(c^2 - y_1^2\right) \tag{4-32}$$

Essa é uma equação geral para tensão de cisalhamento em uma viga retangular. Para aprender algo a respeito dela, façamos algumas substituições. A partir da Tabela A-18, aprendemos que o segundo momento de área para uma secção retangular é $I = bh^3/12$; substituindo $h = 2c$ e $A = bh = 2bc$, produzimos

$$I = \frac{Ac^2}{3} \tag{b}$$

Se agora usarmos esse valor de I para a Equação (4-32) e rearranjarmos, obteremos

$$\tau = \frac{3V}{2A}\left(1 - \frac{y_1^2}{c^2}\right) \tag{4-33}$$

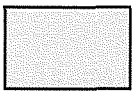
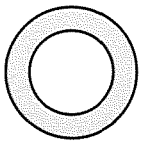
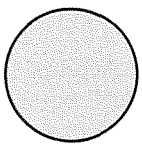
Observamos que a tensão máxima de cisalhamento existe quando $y_1 = 0$, que está situado no eixo neutro de flexão. Logo,

$$\tau_{\max} = \frac{3V}{2A} \tag{4-34}$$

para uma secção retangular. À medida que nos movemos para longe do eixo neutro, a tensão de cisalhamento decresce parabolicamente, até que seja zero nas superfícies externas onde $y_1 = \pm c$, como mostrado na Figura 4-22(*c*). É particularmente interessante e significativo observar aqui que a tensão de cisalhamento é máxima no eixo neutro de flexão, onde a tensão normal decorrente da flexão é zero, e que é zero nas superfícies externas, onde a tensão de flexão é máxima. A tensão de cisalhamento horizontal é sempre acompanhada pela tensão de cisalhamento vertical de mesma magnitude, de modo que a distribuição pode ser diagramada como ilustrado na Figura 4-22(*d*). A Figura 4-22(*c*), por sua vez, mostra que a tensão de cisalhamento τ nas superfícies verticais varia com y. Estamos quase sempre interessados na tensão de cisalhamento horizontal, τ na Figura 4-22(*d*), que é aproximadamente uniforme com y constante. A tensão de cisalhamento horizontal máxima ocorre onde a tensão de cisalhamento vertical é a maior. Isso se dá normalmente no eixo neutro, mas pode não ocorrer se a largura b for menor em algum outro lugar. Ademais, se a secção é tal que b pode ser minimizado em um plano não-horizontal, então a tensão de cisalhamento horizontal ocorre em um plano inclinado. Por exemplo, com tubos, ela ocorre em um plano radial e a correspondente "tensão de cisalhamento vertical" não é vertical, mas tangencial.

Fórmulas para a tensão de cisalhamento máxima flexora para a maioria das secções comumente usadas estão listadas na Tabela 4-3.

Tabela 4-3 Fórmulas para a tensão máxima de cisalhamento decorrente de flexão

Forma da viga	Fórmula	Forma da viga	Fórmula
 Retangular	$\tau_{\max} = \frac{3V}{2A}$	 Redonda de parede fina, vazada	$\tau_{\max} = \frac{2V}{A}$
 Circular	$\tau_{\max} = \frac{4V}{3A}$	Viga I estrutural (parede fina)	$\tau_{\max} = \frac{V}{A_{\text{alma da viga}}}$

4-13 Torção

Qualquer vetor de momento que seja colinear com um eixo de um elemento mecânico é denominado *vetor de torque*, pois o momento faz com que o elemento seja torcido ao redor daquele eixo. Diz-se que uma barra submetida a um momento dessa classe está *sob torção*.

Como ilustrado na Figura 4-23, o torque T aplicado a uma barra pode ser designado desenhando-se setas na superfície desta, para indicar a direção, ou setas de vetores de torque ao longo dos seus eixos de torção. Vetores de torque são as setas vazadas desenhadas ao longo do eixo x, na Figura 4-23. Observe que elas se conformam com a regra da mão direita para vetores.

O *ângulo de torção*, em radianos, de uma barra sólida redonda é

$$\theta = \frac{Tl}{GJ} \tag{4-35}$$

em que T = torque
l = comprimento
G = módulo de rigidez
J = segundo momento polar de área

Para uma barra redonda sólida, a tensão de cisalhamento é zero no centro e máxima na superfície. A distribuição é proporcional ao raio ρ, sendo

$$\tau = \frac{T\rho}{J} \tag{4-36}$$

Designando como r o raio da superfície externa, temos

$$\tau_{\max} = \frac{Tr}{J} \tag{4-37}$$

As hipóteses aventadas na análise são as seguintes:

- Atua sobre a barra somente um torque puro, e as secções sob consideração estão bastante distantes do ponto de aplicação da carga, bem como de qualquer mudança de diâmetro.
- Secções transversais adjacentes originalmente planas e paralelas permanecem planas e paralelas após a torção, e qualquer linha radial permanece reta.
- O material obedece à lei de Hooke.

A Equação (4-37) aplica-se *apenas* a secções circulares. Para uma secção circular sólida,

$$J = \frac{\pi d^4}{32} \tag{4-38}$$

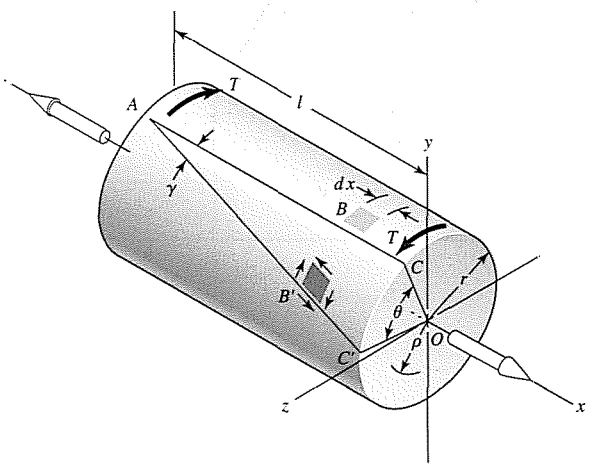


Figura 4-23

em que d é o diâmetro da barra. Para uma secção redonda oca,

$$J = \frac{\pi}{32}(d_o^4 - d_i^4) \tag{4-39}$$

em que os subscritos o e i referem-se aos diâmetros externo e interno, respectivamente.

Ao utilizar a Equação (4-37), freqüentemente é necessário obter o torque T a partir de considerações de potência e velocidade de um eixo rodante. Por conveniência, quando unidades USC são usadas, três formas dessa relação são

$$H = \frac{FV}{33\,000} = \frac{2\pi Tn}{33\,000(12)} = \frac{\pi Tn}{198\,000} = \frac{Tn}{63\,025} \tag{4-40}$$

em que H = *potência*, hp
T = *torque*, lbf · in
n = *velocidade do eixo*, rpm
F = *força*, lbf
V = *velocidade*, ft/min

Quando unidades SI são utilizadas, a equação é

$$H = T\omega \tag{4-41}$$

em que H = *potência*, W
T = *torque*, N · m
ω = velocidade angular, rad/s

O torque T correspondente à potência em watts é dado, aproximadamente, por

$$T = 9{,}55\frac{H}{n} \tag{4-42}$$

em que n é o número de revoluções por minuto (rpm).

Há algumas aplicações em maquinaria para membros de secção transversal não-circular e eixos nos quais uma secção transversal poligonal regular é útil ao transmitir torque para uma engrenagem ou polia que pode apresentar mudança axial na posição. Devido à desnecessidade do uso de chaveta ou rasgo de chaveta, a possibilidade de uma chaveta perdida é evitada. Saint Venant (1855) mostrou que a máxima tensão de cisalhamento em uma barra de secção retangular medindo $b \times c$ ocorre no meio do lado mais longo b e tem por magnitude

$$\tau_{\max} = \frac{T}{\alpha bc^2} \doteq \frac{T}{bc^2}\left(3 + \frac{1{,}8}{b/c}\right) \tag{4-43}$$

em que b é o lado mais longo; c, o mais curto; e α, um fator que é função da razão b/c, como mostrado na tabela seguinte.[5] O ângulo de torção é fornecido por

$$\theta = \frac{Tl}{\beta bc^3 G} \tag{4-44}$$

em que β é uma função de b/c, como mostrado na tabela.

b/c	1,00	1,50	1,75	2,00	2,50	3,00	4,00	6,00	8,00	10	∞
α	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
β	0,141	0,196	0,214	0,228	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333

Nas Equações (4-43) e (4-44), b e c são a largura (lado mais longo) e a espessura (lado mais curto) da barra, respectivamente. Elas não podem ser intercambiadas. A Equação (4-43) é também válida aproximadamente para ângulos de lados iguais; estes podem ser considerados dois retângulos, cada um dos quais sendo capaz de carregar metade do torque.[6]

[5] S. Timoshenko, *Strength of Materials*, Part I, 3rd ed., D. Van Nostrand Company, New York, 1955, p. 290.
[6] Para outras seções, ver W. C. Young e R. G. Budynas, *Roarks's Formulas for Stress and Strain*, 7th ed., McGraw-Hill, New York, 2002.

EXEMPLO 4-8

A Figura 4-24 mostra uma manivela carregada por uma força $F = 300$ lbf que causa a torção e flexão de um eixo de $\frac{3}{4}$ in de diâmetro fixado a um suporte na origem do sistema de referência. Em realidade, tal suporte pode ter uma inércia que desejemos rodar, mas, para os propósitos de uma análise de tensão, podemos considerar esse um problema de estática.

(*a*) Desenhe diagramas separados de corpo livre do eixo *AB* e o braço *BC* e compute os valores de todas as forças, momentos e torques atuantes. Rotule as direções dos eixos coordenados nesses diagramas.

(*b*) Compute a tensão máxima de torção do eixo e a tensão de flexão no braço *BC* e indique onde elas atuam.

(*c*) Localize um elemento de tensão na superfície de topo do eixo em *A* e calcule todas as componentes de tensão que atuam sobre esse elemento.

(*d*) Determine as tensões normal máxima e de cisalhamento em *A*.

Solução

(*a*) Os dois diagramas de corpo livre são mostrados na Figura 4-25. Os resultados são

EM *C*: $\mathbf{F} = -300\mathbf{j}$ lbf, $\mathbf{T} = -450\mathbf{k}$ lbf · in

NA EXTREMIDADE *B* DO BRAÇO *BC*: $\mathbf{F} = 300\mathbf{j}$ lbf, $\mathbf{M} = 1200\mathbf{i}$ lbf · in, $\mathbf{T} = 450\mathbf{k}$ lbf · in

NA EXTREMIDADE *B* DO EIXO *AB*: $\mathbf{F} = -300\mathbf{j}$ lbf, $\mathbf{T} = -1200\mathbf{i}$ lbf · in, $\mathbf{M} = -450\mathbf{k}$ lbf · in

EM *A*: $\mathbf{F} = 300\mathbf{j}$ lbf, $\mathbf{M} = 1950\mathbf{k}$ lbf · in, $\mathbf{T} = 1200\mathbf{i}$ lbf · in

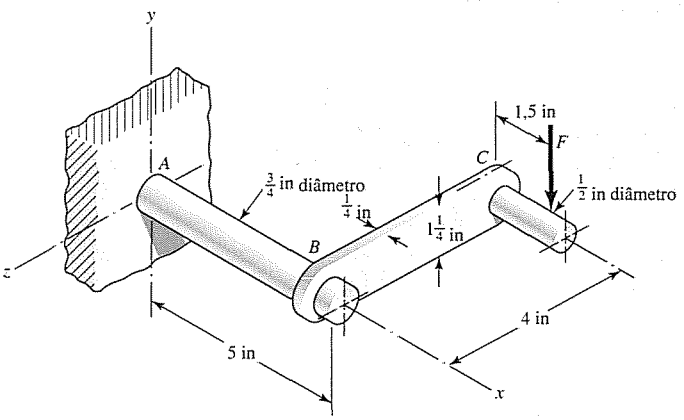


Figura 4-24

(*b*) Para o braço *BC*, o momento flexor alcançará um máximo próximo do eixo em *B*. Se assumirmos que este seja de 1200 lbf · in, então a tensão de flexão para uma secção retangular será

Resposta

$$\sigma = \frac{M}{I/c} = \frac{6M}{bh^2} = \frac{6(1200)}{0{,}25(1{,}25)^2} = 18\,400 \text{ psi}$$

De fato, isso não está exatamente correto, pois em *B* o momento está na verdade sendo transferido para o eixo, provavelmente através de uma soldagem.

Para a tensão de torção, utilize a Equação (4-43). Logo,

Resposta

$$\tau_{\max} = \frac{T}{bc^2}\left(3 + \frac{1{,}8}{b/c}\right) = \frac{450}{1{,}25(0{,}25^2)}\left(3 + \frac{1{,}8}{1{,}25/0{,}25}\right) = 19\,400 \text{ psi}$$

Essa tensão ocorre na metade do lado de $1\frac{1}{4}$ in.

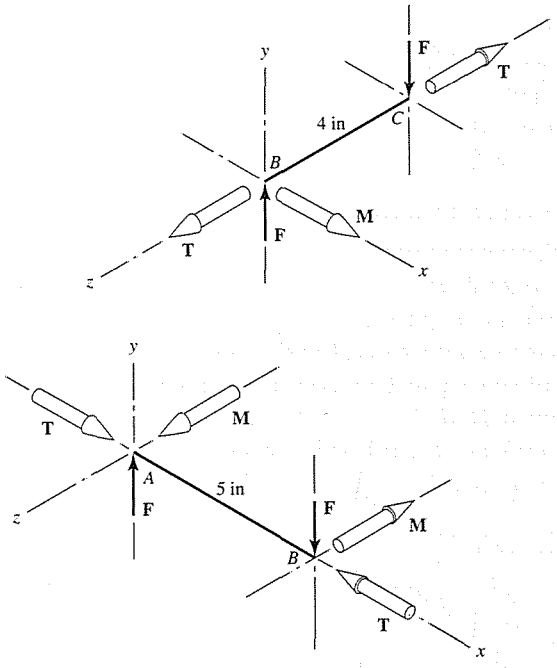


Figura 4-25

(*c*) Para um elemento de tensão em A, a tensão de flexão é de tração e

Resposta
$$\sigma_x = \frac{M}{I/c} = \frac{32M}{\pi d^3} = \frac{32(1950)}{\pi(0{,}75)^3} = 47\,100 \text{ psi}$$

A tensão de torção é

Resposta
$$\tau_{xz} = \frac{-T}{J/c} = \frac{-16T}{\pi d^3} = \frac{-16(1200)}{\pi(0{,}75)^3} = -14\,500 \text{ psi}$$

sendo que o leitor deve verificar que o sinal negativo leva em conta a direção de τ_{xz}.

(*d*) O ponto A encontra-se em um estado de tensão plana no qual as tensões estão no plano xz. Logo, as tensões principais são fornecidas pela Equação (4-13), com subscritos correspondendo aos eixos x, z.

Resposta A tensão normal máxima é então fornecida por

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}$$

$$= \frac{47{,}1 + 0}{2} + \sqrt{\left(\frac{47{,}1 - 0}{2}\right)^2 + (-14{,}5)^2} = 51{,}2 \text{ kpsi}$$

Resposta A tensão máxima de cisalhamento em A ocorre em superfícies diferentes daquelas que contêm as tensões principais ou de cisalhamento de flexão e torção. A tensão máxima de cisalhamento é fornecida pela Equação (4-14), uma vez mais com subscritos modificados, e por

$$\tau_1 = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \sqrt{\left(\frac{47{,}1 - 0}{2}\right)^2 + (-14{,}5)^2} = 27{,}7 \text{ kpsi}$$

EXEMPLO 4-9

O eixo sólido de aço de 1,5 in de diâmetro mostrado na Figura 4-26(*a*) está simplesmente apoiado nas extremidades. Duas polias são chavetadas a ele, tendo a polia *B* diâmetro de 4,0 in e a polia *C*, diâmetro de 8,0 in. Considerando somente as tensões de flexão e torção, determine as localizações e magnitudes das maiores tensões de tração, compressão e cisalhamento no eixo.

Solução

A Figura 4-26(*b*) exibe as forças resultantes, as reações e os momentos de torção no eixo. Embora esse seja um problema tridimensional e os vetores possam parecer apropriados, olharemos as componentes do vetor de momento realizando uma análise em dois planos. A Figura 4-26(*c*) mostra o carregamento no plano *x*, *y*, como visto abaixo do eixo *z*, em que os momentos de flexão são realmente vetores na direção *z*. Logo, rotulamos o diagrama de momento como M_z *versus* *x*. Para o plano *xz*, olhamos para baixo do eixo *y*, e o diagrama de momento é M_y *versus* *x*, como ilustrado na Figura 4-26(*d*).

O momento resultante em uma secção é o vetor da soma das componentes. Isto é,

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} \tag{1}$$

No ponto *B*,

$$M_B = \sqrt{2000^2 + 8000^2} = 8246 \text{ lbf} \cdot \text{in}$$

No ponto *C*,

$$M_C = \sqrt{4000^2 + 4000^2} = 5657 \text{ lbf} \cdot \text{in}$$

Logo, o momento máximo de flexão é de 8246 lbf · in e a tensão máxima de flexão na polia *B* é

$$\sigma = \frac{M\,d/2}{\pi d^4/64} = \frac{32M}{\pi d^3} = \frac{32(8246)}{\pi(1{,}5^3)} = 24\ 890 \text{ psi}$$

A tensão máxima de cisalhamento torcional ocorre entre *B* e *C* e é

$$\tau = \frac{T\,d/2}{\pi d^4/32} = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{16(1600)}{\pi(1{,}5^3)} = 2414 \text{ psi}$$

As tensões máximas de flexão e cisalhamento torcional ocorrem justamente para a direita da polia *B*, nos pontos *E* e *F*, como mostrado na Figura 4-26(*e*). No ponto *E*, a tensão máxima de tração será σ_1, dada por

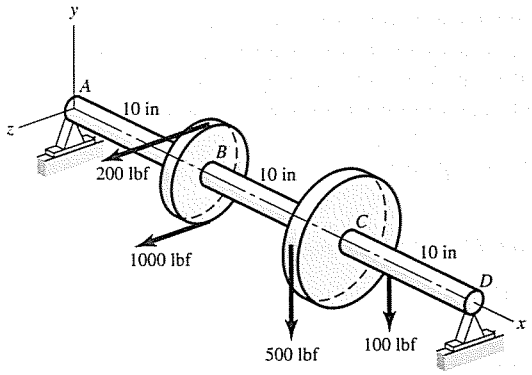
$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{24\ 890}{2} + \sqrt{\left(\frac{24\ 890}{2}\right)^2 + 2414^2} = 25\ 120 \text{ psi}$$

No ponto *F*, a tensão máxima de compressão será σ_2, dada por

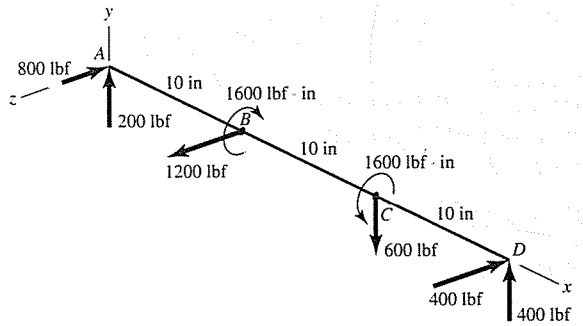
$$\sigma_2 = \frac{-\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{-\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{-24\ 890}{2} - \sqrt{\left(\frac{-24\ 890}{2}\right)^2 + 2414^2} = -25\ 120 \text{ psi}$$

A tensão extrema de cisalhamento também ocorre em *E* e *F* e é

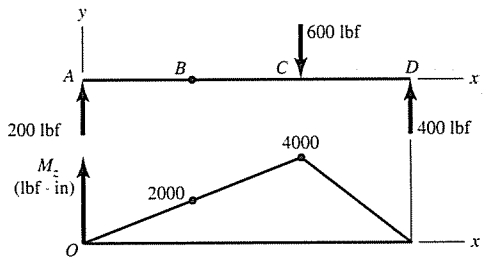
$$\tau_1 = \sqrt{\left(\frac{\pm\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = \sqrt{\left(\frac{\pm 24\ 890}{2}\right)^2 + 2414^2} = 12\ 680 \text{ psi}$$



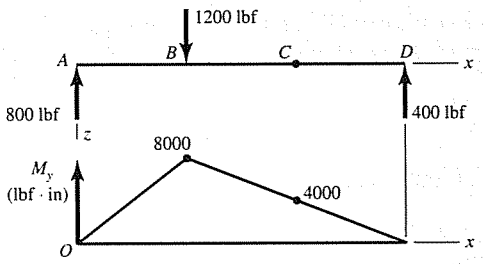
(*a*)



(*b*)

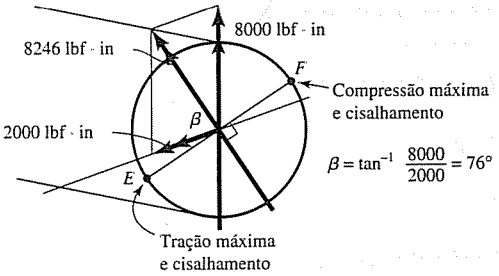


(*c*)



(*d*)

Localização: em B ($x = 10^+$)



(*e*)

Figura 4-26

Tubos Fechados de Paredes Finas ($t \ll r$)[7]

No caso de tubos fechados de parede fina, pode-se verificar, a partir de uma analogia de membrana, que o produto da tensão de cisalhamento multiplicado pela espessura da parede τt é constante, significando que a tensão de cisalhamento τ é inversamente proporcional à espessura de parede t. O torque total T em um tubo, tal como representado na Figura 4-27, é fornecido por

$$T = \int \tau t r \, ds = (\tau t) \int r \, ds = \tau t (2A_m) = 2A_m t \tau$$

em que A_m é a *área incluída pela linha mediana da secção*. Solucionando para τ, obtemos

$$\tau = \frac{T}{2A_m t} \tag{4-45}$$

Para uma espessura de parede t constante, o ângulo de torção (radianos) por unidade de comprimento do tubo θ_1 é fornecido por

$$\theta_1 = \frac{T L_m}{4 G A_m^2 t} \tag{4-46}$$

em que L_m é o *perímetro da linha mediana da secção*. Essas equações presumem que a flambagem do tubo seja evitada por meio de perfis, reforçadores, anteparas, e assim por diante, e que as tensões estejam abaixo do limite de proporcionalidade.

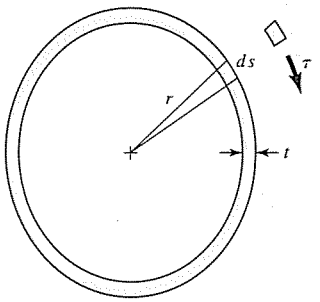


Figura 4-27 A secção transversal representada na figura é elíptica, mas não necessita ser simétrica nem de espessura constante.

EXEMPLO 4-10

Um tubo de aço soldado tem um comprimento de 40 in, $\frac{1}{8}$ in de espessura de parede e uma secção transversal retangular de 2,5 in por 3,6 in, como mostrado na Figura 4-28. Assuma uma tensão admissível de cisalhamento de 11 500 psi e um módulo de cisalhamento de $11{,}5(10^6)$ psi.

(*a*) Estime o torque admissível T.

(*b*) Estime o ângulo de torção devido ao torque.

Solução (*a*) Dentro da linha média da secção, a área incluída é

$$A_m = (2{,}5 - 0{,}125)(3{,}6 - 0{,}125) = 8{,}253 \text{ in}^2$$

e o comprimento do perímetro da linha média é

$$L_m = 2[(2{,}5 - 0{,}125) + (3{,}6 - 0{,}125)] = 11{,}70 \text{ in}$$

Resposta A partir da Equação (4-45), o torque T é

[7] Ver a Seção 3-13 de F. P. Beer, E. R. Johnston e J. T. De Wolf, *Mechanics of Materials*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 2001.

$$T = 2A_m t\tau = 2(8{,}253)0{,}125(11\,500) = 23\,728 \text{ lbf} \cdot \text{in}$$

Resposta O ângulo de torção θ, a partir da Equação (4-46), é

$$\theta = \theta_1 l = \frac{TL_m}{4GA_m^2 t} l = \frac{23\,728(11{,}70)}{4(11{,}5 \times 10^6)(8{,}253^2)(0{,}125)}(40) = 0{,}0284 \text{ rad} = 1{,}63°$$

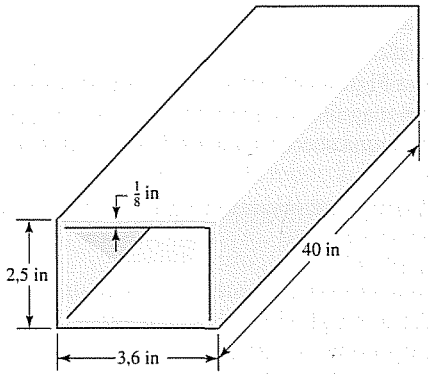


Figura 4-28 Um tubo retangular de aço produzido por soldagem.

EXEMPLO 4-11

Compare a tensão de cisalhamento em um tubo circular cilíndrico com um diâmetro externo de 1 in e um diâmetro interno de 0,9 in, prevista pela Equação (4-37), com aquela estimada pela Equação (4-45).

Solução A partir da Equação (4-37),

$$\tau_{\max} = \frac{Tr}{J} = \frac{Tr}{(\pi/32)\left(d_o^4 - d_i^4\right)} = \frac{T(0{,}5)}{(\pi/32)(1^4 - 0{,}9^4)} = 14{,}809T$$

A partir da Equação (4-45),

$$\tau = \frac{T}{2A_m t} = \frac{T}{2(\pi 0{,}95^2/4)0{,}05} = 14{,}108T$$

Considerando correta a Equação (4-37), o erro na estimativa de parede fina é de –4,7%.

Secções Abertas de Paredes Finas

Quando a linha mediana de parede não é fechada, diz-se que é *aberta*. A Figura 4-29 apresenta alguns exemplos. Secções abertas sob torção, quando a parede é fina, obedecem a relações derivadas da análise de membrana, como segue:

$$\tau = G\theta_1 c = \frac{3T}{Lc^2} \tag{4-47}$$

em que τ é a tensão de cisalhamento, G é o módulo de cisalhamento, θ_1 é o ângulo de torção por unidade de comprimento, T é o torque e L é o comprimento da linha mediana. A espessura de parede é designada como c (em vez de t), para lembrar que se trata de uma secção aberta. Estudando a tabela que segue à Equação (4-44), você observará que a teoria de membrana pressupõe que $b/c \to \infty$. Observe que as secções abertas de paredes

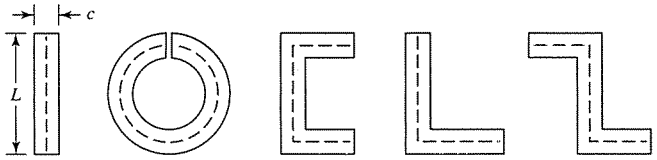


Figura 4-29 Algumas secções abertas de parede fina.

finas em torção devem ser evitadas em projeto. Conforme indicado na Equação (4-47), a tensão de cisalhamento e o ângulo de torção são inversamente proporcionais a c^2 e c^3, respectivamente. Portanto, para pequenas espessuras de parede, a tensão e a torção podem se tornar bem grandes. Por exemplo, considere o tubo redondo fino com uma abertura, na Figura 4-29. Para uma razão da espessura de parede para o diâmetro externo de $c/d_0 = 0{,}1$, a secção aberta tem magnitudes maiores de tensão e ângulo de torção por fatores de 12,3 e 61,5, respectivamente, se comparada a uma secção fechada de mesmas dimensões.

EXEMPLO 4-12

Uma tira de aço com 12 in de comprimento tem 1/8 in de espessura e 1 in de largura, como mostrado na Figura 4-30. Se a tensão admissível de cisalhamento é de 11 500 psi e o módulo de cisalhamento, de $11{,}5(10^6)$ psi, encontre o torque correspondente à tensão admissível de cisalhamento e o ângulo de torção, em graus, (*a*) utilizando a Equação (4-47) e (*b*) as Equações (4-43) e (4-44).

Solução (*a*) O comprimento da linha média é de 1 in. A partir da Equação (4-47),

$$T = \frac{Lc^2\tau}{3} = \frac{(1)(1/8)^2 11\,500}{3} = 59{,}90 \text{ lbf} \cdot \text{in}$$

$$\theta = \theta_1 l = \frac{3Tl}{Lc^3G} = \frac{3(59{,}90)12}{(1)(1/8)^3 11{,}5(10^6)} = 0{,}0960 \text{ rad} = 5{,}5°$$

A razão de mola torcional k_t pode ser expressa como T/θ:

$$k_t = 59{,}90/0{,}0960 = 624 \text{ lbf} \cdot \text{in/rad}$$

(*b*) A partir da Equação (4-43),

$$T = \frac{\tau_{max} bc^2}{3 + 1{,}8/(b/c)} = \frac{11\,500(1)(0{,}125)^2}{3 + 1{,}8/(1/0{,}125)} = 55{,}72 \text{ lbf} \cdot \text{in}$$

A partir da Equação (4-44), com $b/c = 1/0{,}125 = 8$,

$$\theta = \frac{Tl}{\beta bc^3 G} = \frac{55{,}72(12)}{0{,}307(1)0{,}125^3(11{,}5)10^6} = 0{,}0970 \text{ rad} = 5{,}6°$$

$$k_t = 55{,}72/0{,}0970 = 574 \text{ lbf} \cdot \text{in/rad}$$

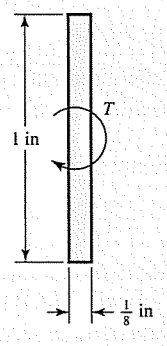


Figura 4-30 A secção transversal de uma tira fina de aço sujeita a um momento de torção *T*.

4-14 Concentração de Tensão

No desenvolvimento das equações básicas de tensão para tração, compressão, flexão e torção, assumiu-se que nenhuma irregularidade geométrica ocorria no membro considerado. Todavia, é muito difícil projetar uma máquina sem permitir algumas mudanças nas secções transversais dos membros. Eixos rotativos devem ter mangas projetadas neles, para que os mancais possam assentar-se apropriadamente e, assim, responder às cargas axiais; devem ter também rasgos de chaveta neles usinados, a fim de sustentar polias e engrenagens. Um parafuso de porca tem uma cabeça em uma extremidade e roscas na outra extremidade, ambas responsáveis por mudanças abruptas de secção transversal. Outras peças requerem furos, ranhuras e entalhes de várias espécies. Qualquer descontinuidade em uma peça de uma máquina altera a distribuição de tensão na circunjacência, de modo que as equações elementares das tensões não mais descrevem o estado de tensão da peça nesses locais. Tais descontinuidades são denominadas *aumentadores de tensão*, e as regiões em que ocorrem são conhecidas como áreas de *concentração de tensão.*

A distribuição de tensão elástica ao longo de uma secção transversal de um membro pode ser uniforme, como ocorre em uma barra sob tração; linear, como no caso de uma viga em flexão; ou, ainda, rápida e cheia de curvas, como em uma viga curvada de modo acentuado. A concentração de tensão pode surgir de alguma irregularidade não-inerente ao membro, tal como marcas de ferramentas, furos, entalhes, ranhuras ou roscas. Diz-se que haverá *tensão nominal* se o membro estiver livre de aumentadores de tensão. Essa definição nem sempre é seguida; portanto, verifique a definição na carta do concentrador de tensão ou na tabela que você estiver utilizando.

Para auxiliar na compreensão desse efeito, examine a Figura 4-31. Observe que as trajetórias de tensão são uniformes em todos os locais, exceto nas proximidades do furo; nele, entretanto, essas linhas de força têm de se curvar para dar a volta. A concentração de tensão é um efeito altamente localizado. A tensão na placa sob tração é máxima na borda do furo no plano *A-A*; essa tensão cai rapidamente, à medida que pontos mais afastados da beira do furo são examinados, e de imediato torna-se uniforme novamente.

Um *fator de concentração de tensão teórico*, ou *geométrico*, K_t ou K_{ts} é utilizado para relacionar a máxima tensão real na descontinuidade à tensão nominal. Os fatores são definidos pelas equações

$$K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_0} \qquad K_{ts} = \frac{\tau_{\max}}{\tau_0} \tag{4-48}$$

em que K_t é utilizado para tensões normais e K_{ts}, para tensões de cisalhamento. A tensão nominal σ_0 ou τ_0 é mais difícil de definir. Geralmente, é a tensão calculada utilizando-se as equações elementares de tensão e a área líquida, ou secção transversal líquida. No entanto, algumas vezes a secção transversal bruta é utilizada em seu lugar, de modo que é sempre prudente verificar sua fonte de K_t ou K_{ts} antes de calcular a tensão máxima.

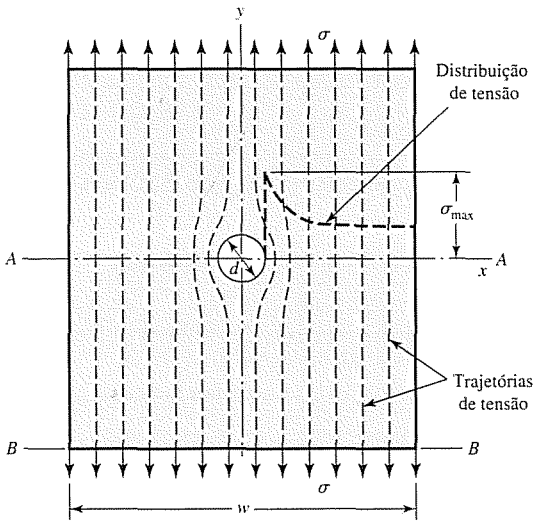


Figura 4-31 Distribuição de tensão próxima a um orifício em uma placa carregada em tração. A tensão de tração em uma secção *B-B* distante do orifício é $\sigma = F/A$, em que $A = wt$ e t é a espessura da placa. Na secção em *A-A*, passando pelo orifício, a área é $A_0 = (w - d)t$ e a tensão nominal é $\sigma_0 = F/A_0$. Observe a diferença entre a tensão nominal e a tensão em uma secção distante da descontinuidade.

O subscrito t em K_t significa que esse fator de concentração de tensão depende, para sua quantificação, apenas da *geometria* da peça. Isto é, o tipo de material utilizado não tem qualquer efeito sobre o valor de K_t – daí este ser denominado *fator de concentração de tensão teórico*.

A análise de formas geométricas para determinar fatores de concentração de tensão é um problema difícil, de modo que não muitas soluções podem ser encontradas. Uma delas é a da placa infinita, com um furo elíptico, carregada em tração uniforme. O resultado é

$$K_t = 1 + \frac{2b}{a} \tag{4-49}$$

em que, depois que o furo na Figura 4-31 é substituído por uma elipse, b identifica a semilargura, a é a semi-altura e $w \to \infty$. Logo, para um furo circular, $b = a$ e $K_t = 3$, tal como $w \to \infty$.

Observe que a Equação (4-49) pode ser aplicada a uma trinca transversal, onde $b >> a$, ou a uma trinca longitudinal ($b << a$). Esta é útil na mecânica de fraturas, que será discutida no Capítulo 6.

A maioria dos fatores de concentração de tensão é encontrada mediante técnicas experimentais.[8] Embora o método dos elementos finitos venha sendo utilizado, o fato de os elementos serem realmente finitos evita a determinação da tensão máxima verdadeira. Abordagens experimentais quase sempre incluem fotoelasticidade e métodos de malha, de película frágil e de medidas elétricas de deformação. Naturalmente, os métodos de malha e de medida de deformação enfrentam a mesma desvantagem que o método dos elementos finitos.

Fatores de concentração de tensão para várias geometrias podem ser encontrados nas Tabelas A-15 e A-16.

Em *carregamento estático*, tais fatores são aplicados como segue. Em materiais dúcteis ($\epsilon_f \geq 0{,}05$), o fator de concentração de tensão *não* costuma ser utilizado para predizer a tensão crítica, pois a deformação plástica nessa região de tensão é localizada e tem um efeito de enrijecimento. Em *materiais frágeis* ($\epsilon_f \geq 0{,}05$), o fator de concentração de tensão geométrico K_t é aplicado à tensão nominal antes de compará-la com a resistência. O ferro fundido cinza tem tantos aumentadores de tensão inerentes que aqueles porventura introduzidos pelo projetista têm somente um efeito modesto (porém aditivo).

EXEMPLO 4-13 Atenção para o Ponto de Vista

Em uma extremidade de barra (ou alça), uma carga é transferida, por meio de um pino, a uma barra de secção transversal retangular ou tira. O fator teórico ou geométrico de concentração de tensão para essa geometria é conhecido como segue, na base da área líquida $A = (w - d)t$, conforme mostrado na Figura 4-32.

d/w	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
K_t	7,4	5,4	4,6	3,7	3,2	2,8	2,6	2,45

Como apresentado na tabela, K_t é uma função monotônica decrescente. Essa extremidade de barra é similar à alça de terminação quadrada representada na Tabela A-15-12.

$$\sigma_{\max} = K_t \sigma_0 \tag{a}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{K_t F}{A} = K_t \frac{F}{(w - d)t} \tag{b}$$

É instrutivo basear o fator de concentração de tensão na área *não-entalhada*, wt. Estabeleça

$$\sigma_{\max} = K_t' \frac{F}{wt} \tag{c}$$

Igualando as Equações (b) e (c) e solucionando para K_t', obtemos

$$K_t' = \frac{wt}{F} \frac{F}{(w - d)t} = \frac{K_t}{1 - d/w} \tag{d}$$

[8] O melhor livro para consulta é o de R. E. Peterson, *Stress Concentration Factors*, Wiley, New York, 1974.

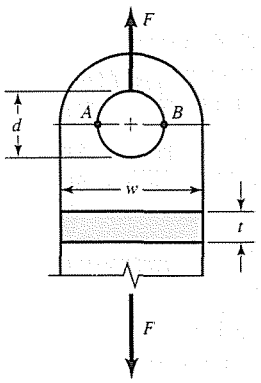


Figura 4-32 Uma extremidade de alça de terminação redonda para uma barra de secção transversal retangular. A máxima tensão de tração nessa alça ocorre nas posições *A* e *B*. A área líquida $A = (w-d)t$ é usada na definição de K_t, mas há uma vantagem em utilizar a área total *wt*.

Um ajuste de curva por regressão para os dados apresentados na tabela supracitada na forma $K_t = a(d/w)^b$, com a ajuda de uma transformação, provê o resultado $a = \exp(0{,}204\ 521\ 2) = 1{,}227$, $b = -0{,}935$ e $r = -0{,}997$. Logo,

$$K_t = 1{,}227\left(\frac{d}{w}\right)^{-0{,}935} \tag{e}$$

o que é uma função monotônica (e não-excitante) decrescente. Contudo, a partir da Equação (*d*),

$$K_t' = \frac{1{,}227}{1 - d/w}\left(\frac{d}{w}\right)^{-0{,}935} \tag{f}$$

Forme uma outra tabela a partir da Equação (*f*):

d/w	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60
K_t'	8,507	6,907	5,980	5,403	5,038	4,817	4,707	4,692	4,769	4,946

o que mostra um ponto mínimo estacionário para K_t'. Este pode ser encontrado diferenciando-se a Equação (*f*), relativamente a d/*w*, e tornando-a igual a zero:

$$\frac{dK_t'}{d(d/w)} = \frac{(1 - d/w)ab(d/w)^{b-1} + a(d/w)^b}{[1 - (d/w)]^2} = 0$$

em que $b = -0{,}935$, a partir do que

$$\left(\frac{d}{w}\right)^* = \frac{b}{b-1} = \frac{-0{,}935}{-0{,}935 - 1} = 0{,}483$$

com um K_t' correspondente de 4,687 – sabendo que a secção $w \times t$ permite ao projetista determinar a alça mais forte imediatamente ao especificar um diâmetro de pino de $0{,}483w$ (ou, como regra prática, da metade da largura). Os dados teóricos de K_t na forma original, ou um gráfico baseado nos dados usando a área líquida, não sugeririam isso. O ponto de vista correto pode sugerir percepções valiosas.

4-15 Tensões em Cilindros Pressurizados

Vasos de pressão cilíndricos, cilindros hidráulicos, canos de armas e tubos carregando fluidos a altas pressões desenvolvem tensões radial e tangencial com valores que dependem do raio do elemento considerado. Ao determinar a tensão radial σ_r e a tensão tangencial σ_t, utilizamos a hipótese de que a elongação longitu-

dinal é constante ao redor da circunferência do cilindro. Em outras palavras, uma secção reta do cilindro permanece plana após tensionamento.

Referindo-nos à Figura 4-33, designamos o raio interno do cilindro por r_i, o raio externo por r_O, a pressão interna por p_i e a pressão externa por p_O. Podemos então verificar que as componentes radial e tangencial de tensão existem e que suas magnitudes são fornecidas por

$$\sigma_t = \frac{p_i r_i^2 - p_o r_o^2 - r_i^2 r_o^2 (p_o - p_i)/r^2}{r_o^2 - r_i^2}$$
$$\sigma_r = \frac{p_i r_i^2 - p_o r_o^2 + r_i^2 r_o^2 (p_o - p_i)/r^2}{r_o^2 - r_i^2} \tag{4-50}$$

Como habitualmente, valores positivos indicam tração e valores negativos, compressão.
O caso especial em que $p_O = 0$ produz

$$\sigma_t = \frac{r_i^2 p_i}{r_o^2 - r_i^2}\left(1 + \frac{r_o^2}{r^2}\right)$$
$$\sigma_r = \frac{r_i^2 p_i}{r_o^2 - r_i^2}\left(1 - \frac{r_o^2}{r^2}\right) \tag{4-51}$$

As equações do conjunto (4-51) estão representadas graficamente na Figura 4-34, para mostrar a distribuição de tensões através da espessura de parede. Deve-se compreender que tensões longitudinais existem quando as reações de extremidade à pressão interna são absorvidas pelo próprio vaso de pressão. Essa tensão é encontrada a partir de

$$\sigma_l = \frac{p_i r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} \tag{4-52}$$

Observamos, ademais, que as Equações (4-50), (4-51) e (4-52) aplicam-se apenas a secções selecionadas a uma distância suficiente das extremidades e longe de quaisquer áreas de concentração de tensão.

Vasos de Parede Fina

Quando a espessura da parede de um vaso de pressão cilíndrico corresponde a cerca de um vigésimo, ou menos, de seu raio, a tensão radial resultante da pressurização desse vaso é bastante pequena se comparada à tensão tangencial. Sob tais condições, essa última tensão pode ser obtida da seguinte forma: considere p a pressão interna exercida na parede interna de um cilindro de espessura t e diâmetro interno d_i. A força que tende a separar as duas metades desse cilindro, por unidade de comprimento, vale pd_i. Ela é resistida pela tensão tangencial, também chamada de tensão circunferente, que atua de maneira uniforme sobre a área tencionada. Temos, então, $pd_i = 2t\sigma_t$, ou

$$(\sigma_t)_{av} = \frac{pd_i}{2t} \tag{4-53}$$

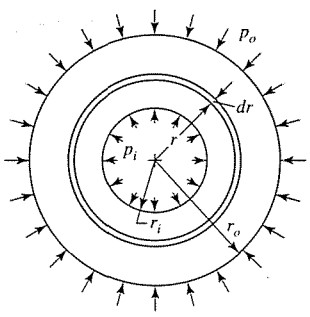
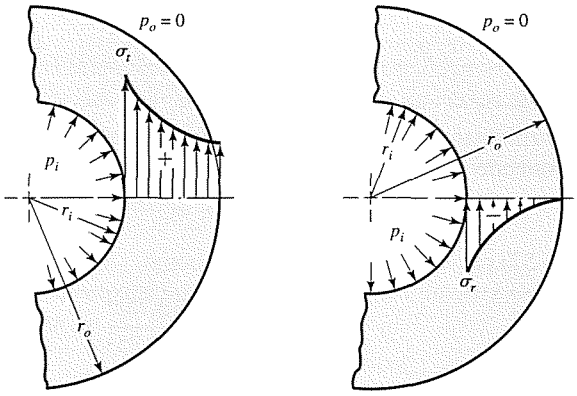


Figura 4-33 Um cilindro sujeito a pressão interna e externa.



(*a*) Distribuição de tensão tangencial

(*b*) Distribuição de tensão radial

Figura 4-34 Distribuição de tensões em um cilindro de parede espessa sujeito a pressão interna.

Essa equação produz uma tensão tangencial *média* e é válida independentemente da espessura da parede. Para um vaso de pressão de parede fina, uma aproximação para a máxima tensão tangencial é

$$(\sigma_t)_{\max} = \frac{p(d_i + t)}{2t} \tag{4-54}$$

em que $d_i + t$ é o diâmetro médio.

Em um cilindro fechado, há uma tensão longitudinal σ_l, além da tensão supramencionada, devido à pressão que age sobre as secções de extremidade do vaso. Se assumirmos que essa tensão também está distribuída de maneira uniforme através da espessura, poderemos facilmente verificar que ela obedece a

$$\sigma_l = \frac{pd_i}{4t} \tag{4-55}$$

EXEMPLO 4-14

Um vaso de pressão de liga de alumínio é feito de tubos com um diâmetro externo de 8 in e uma espessura de parede de $\frac{1}{4}$ in.

(*a*) Que pressão o cilindro poderá agüentar se a tensão tangencial admissível for de 12 kpsi e a teoria para vasos de parede fina for aplicável?

(*b*) Com base na pressão encontrada em (*a*), compute todas as componentes de tensão utilizando a teoria para cilindros de parede grossa.

Solução

(*a*) Aqui, $d_i = 8 - 2(0{,}25) = 7{,}5$ in, $r_i = 7{,}5/2 = 3{,}75$ in e $r_o = 8/2 = 4$ in. Logo, $t/r_i = 0{,}25/3{,}75 = 0{,}067$. Visto que essa razão é maior que $\frac{1}{20}$, a teoria para vasos de parede fina pode não produzir resultados seguros.

Primeiramente, solucionamos a Equação (4-54) para obter a pressão admissível. Isso produz

Resposta

$$p = \frac{2t(\sigma_t)_{\max}}{d_i + t} = \frac{2(0{,}25)(12)(10)^3}{7{,}5 + 0{,}25} = 774 \text{ psi}$$

Então, a partir da Equação (4-55), encontramos a tensão longitudinal média valendo

$$\sigma_l = \frac{pd_i}{4t} = \frac{774(7{,}5)}{4(0{,}25)} = 5810 \text{ psi}$$

(*b*) A tensão tangencial máxima ocorrerá no raio interno, de modo que usamos $r = r_i$ na primeira equação da Equação (4-51). Disso resulta

Resposta
$$(\sigma_t)_{\max} = \frac{r_i^2 p_i}{r_o^2 - r_i^2}\left(1 + \frac{r_o^2}{r_i^2}\right) = p_i \frac{r_o^2 + r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} = 774\frac{4^2 + 3{,}75^2}{4^2 - 3{,}75^2} = 12\,000 \text{ psi}$$

De maneira semelhante, a tensão radial máxima é encontrada, a partir da segunda equação da Equação (4-51), valendo

Resposta
$$\sigma_r = -p_i = -774 \text{ psi}$$

A Equação (4-52) provê a tensão longitudinal como

Resposta
$$\sigma_l = \frac{p_i r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} = \frac{774(3{,}75)^2}{4^2 - 3{,}75^2} = 5620 \text{ psi}$$

Estas três tensões, σ_t, σ_r e σ_l, são tensões principais, uma vez que não existe cisalhamento em tais superfícies. Observe que não há diferença significativa nas tensões tangenciais em (*a*) e (*b*), podendo a teoria de parede fina ser considerada satisfatória.

4-16 Tensões em Anéis Rotativos

Vários elementos rotativos, tais como volantes e sopradores, podem ser simplificados a um anel rotativo para determinar as tensões. Quando isso é feito, descobre-se que ocorrem as mesmas tensões tangenciais e radiais encontradas na teoria de cilindros de parede espessa, com a exceção de que agora elas são causadas por forças de inércia atuando em todas as partículas do anel. As tensões tangenciais e radiais assim determinadas são submetidas às seguintes restrições:

- O raio externo do anel, ou disco, é grande, se comparado com a espessura, $r_o \geq 10t$.
- A espessura do anel, ou disco, é constante.
- As tensões são constantes através da espessura.

As tensões são

$$\begin{aligned} \sigma_t &= \rho\omega^2\left(\frac{3+\nu}{8}\right)\left(r_i^2 + r_o^2 + \frac{r_i^2 r_o^2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{3+\nu}r^2\right) \\ \sigma_r &= \rho\omega^2\left(\frac{3+\nu}{8}\right)\left(r_i^2 + r_o^2 - \frac{r_i^2 r_o^2}{r^2} - r^2\right) \end{aligned} \tag{4-56}$$

em que r é o raio para o elemento de tensão considerado; ρ, a densidade de massa; e ω, a velocidade angular do anel em radianos por segundo. Para um disco rotativo, utilize $r_i = 0$ nessas equações.

4-17 Ajustes por Pressão e por Contração

Quando duas peças cilíndricas são montadas pelo ajuste de contração ou de pressão de uma sobre a outra, uma pressão de contato é criada entre elas. As tensões resultantes dessa pressão podem ser facilmente determinadas com as equações das seções anteriores.

A Figura 4-35(*b*) mostra dois membros cilíndricos que foram montados mediante um ajuste por contração. Existe uma pressão de contato p entre os membros no raio de transição R, causando tensões radiais $\sigma_r = -p$ em cada membro nas superfícies em contato. A partir da Seção 4-15, verificamos que a tensão tangencial no raio de transição do membro interior vale

$$(\sigma_t)_i\Big|_{r=R} = -p\frac{R^2 + r_i^2}{R^2 - r_i^2} \tag{4-57}$$

Da mesma maneira, a tensão tangencial na superfície interior do membro externo corresponde a

$$(\sigma_t)_o\Big|_{r=R} = p\frac{r_o^2 + R^2}{r_o^2 - R^2} \tag{4-58}$$

Tais equações não poderão ser solucionadas até que a pressão de contato seja conhecida. Ao obter um ajuste por contração, o raio de transição do membro mais interno é feito maior que o raio do membro mais externo. A diferença entre essas dimensões é denominada *interferência radial*, sendo a deformação radial a que os dois membros devem experimentar. Uma vez que essas dimensões costumam ser conhecidas, a deformação deve ser introduzida a fim de avaliar as tensões. Como mostrado na Figura 4-35(*a*), δ_i e δ_O simbolizam as mudanças nos raios dos membros interno e externo, respectivamente. A interferência radial total é, portanto,

$$\delta = |\delta_i| + |\delta_o| \tag{a}$$

A deformação tangencial no raio de transição do cilindro externo é medida a partir da mudança de circunferência, valendo

$$(\epsilon_t)_o = \frac{2\pi(R + \delta_o) - 2\pi R}{2\pi R} = \frac{\delta_o}{R} \tag{b}$$

e, assim, $\delta_O = R(\epsilon_t)_O$. Supondo um estado de tensão biaxial, a partir da Tabela 4-2, Seção 4-8,

$$(\epsilon_t)_o = \frac{(\sigma_t)_o}{E_o} - \frac{\nu_o(\sigma_r)_o}{E_o} \tag{c}$$

Substituindo as Equações (*b*), (4-58) e $(\sigma_r)_o = -p$ na Equação (*c*), obtemos

$$\delta_o = \frac{pR}{E_o}\left(\frac{r_o^2 + R^2}{r_o^2 - R^2} + \nu_o\right) \tag{d}$$

Essa é a mudança no raio do membro externo na interface. De maneira similar, a mudança no raio do membro interno é encontrada por meio de

$$\delta_i = -\frac{pR}{E_i}\left(\frac{R^2 + r_i^2}{R^2 - r_i^2} - \nu_i\right) \tag{e}$$

Assim, a partir da Equação (*a*), obtemos a deformação total como

$$\delta = \frac{pR}{E_o}\left(\frac{r_o^2 + R^2}{r_o^2 - R^2} + \nu_o\right) + \frac{pR}{E_i}\left(\frac{R^2 + r_i^2}{R^2 - r_i^2} - \nu_i\right) \tag{4-59}$$

Essa equação pode ser solucionada para a pressão p quando a interferência radial δ é fornecida. Se os dois membros são do mesmo material, $E_O = E_i = E$, $\nu_O = \nu_i$ e a relação supracitada simplifica-se em

$$p = \frac{E\delta}{R}\left[\frac{(r_o^2 - R^2)(R^2 - r_i^2)}{2R^2(r_o^2 - r_i^2)}\right] \tag{4-60}$$

O valor da pressão de interface p, seja das Equações (4-59) ou (4-60), pode agora ser utilizado para obter o estado de tensão no raio especificado em um ou outro cilindro.

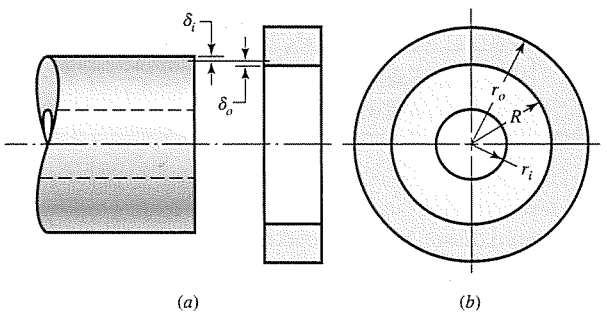


Figura 4-35 Notação para ajustes por pressão e por contração. (*a*) Peças não-montadas; (*b*) após montagem.

Hipóteses

Além das hipóteses, tanto afirmadas como indicadas pelo desenvolvimento, é necessário assumir que ambos os membros têm o mesmo comprimento. No caso de um cubo que foi ajustado por pressão a um eixo, essa hipótese não seria verdadeira, e haveria uma pressão acrescida em cada extremidade desse cubo. É costume levar em conta tal condição empregando-se um fator de concentração de tensão. O valor desse fator depende da pressão de contato e do projeto do elemento fêmea, mas seu valor teórico raramente é maior que 2.

4-18 Efeitos da Temperatura

Quando a temperatura de um corpo não-restringido é aumentada uniformemente, ele se expande, de modo que a deformação normal é

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \alpha(\Delta T) \tag{4-61}$$

em que α é o coeficiente de expansão térmica e ΔT, a mudança de temperatura, em graus. Nessa ação, o corpo experimenta um simples aumento de volume, com as componentes de deformação por cisalhamento todas nulas.

Se uma barra reta é restringida nas extremidades, para evitar expansão ao longo do comprimento, sendo então submetida a um aumento uniforme de temperatura, uma tensão compressiva se desenvolverá, devido à presença da restrição axial. Essa tensão é

$$\sigma = -\epsilon E = -\alpha(\Delta T)E \tag{4-62}$$

De maneira similar, se uma placa plana uniforme é restringida em suas bordas, sendo também submetida a um aumento uniforme de temperatura, a tensão de compressão desenvolvida é fornecida pela equação

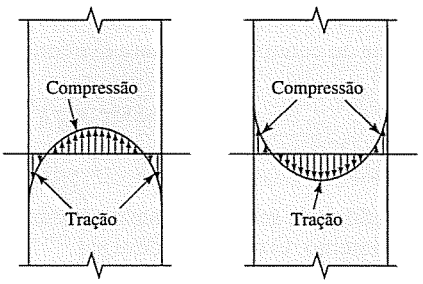
$$\sigma = -\frac{\alpha(\Delta T)E}{1-\nu} \tag{4-63}$$

As tensões expressas pelas Equações (4-62) e (4-63) são denominadas *tensões térmicas*. Elas surgem devido a uma mudança de temperatura em um membro engastado ou restringido. Tais tensões, por exemplo, ocorrem durante a soldagem, uma vez que as peças a serem soldadas são engastadas antes de tal processo. A Tabela 4-4 lista valores aproximados de coeficientes de expansão térmica.

Tabela 4-4 Coeficientes de expansão térmica (coeficientes lineares médios para o intervalo de temperatura de 0-100°C)

Material	Escala Celsius ($°C^{-1}$)	Escala Fahrenheit ($°F^{-1}$)
Alumínio	$23{,}9(10)^{-6}$	$13{,}3(10)^{-6}$
Latão, fundido	$18{,}7(10)^{-6}$	$10{,}4(10)^{-6}$
Aço carbono	$10{,}8(10)^{-6}$	$6{,}0(10)^{-6}$
Ferro fundido	$10{,}6(10)^{-6}$	$5{,}9(10)^{-6}$
Magnésio	$25{,}2(10)^{-6}$	$14{,}0(10)^{-6}$
Aço níquel	$13{,}1(10)^{-6}$	$7{,}3(10)^{-6}$
Aço inoxidável	$17{,}3(10)^{-6}$	$9{,}6(10)^{-6}$
Tungstênio	$4{,}3(10)^{-6}$	$2{,}4(10)^{-6}$

Uma *tensão térmica* pode também surgir devido a um *gradiente de temperatura* em um membro. A Figura 4-36 é um exemplo disso. Nela estão exibidas as distribuições de tensão dentro de uma laje de dimensões infinitas, no decorrer dos processos de aquecimento e resfriamento. Durante o resfriamento, a máxima tensão é a tração superficial. Durante o aquecimento, as superfícies externas ficam quentes e tendem a se expandir, mas são impedidas pela parte central mais fria. Isso causa compressão na superfície e tração no centro, como mostrado.



(*a*) Resfriamento (*b*) Aquecimento

Figura 4-36 Tensões térmicas em uma laje infinita durante aquecimento e resfriamento.

4-19 Vigas Curvas em Flexão

A distribuição de tensão em um elemento de flexão curvado é determinada utilizando-se as seguintes hipóteses:

- A secção transversal tem um eixo de simetria em um plano, ao longo do comprimento da viga.
- Secções transversais planas permanecem planas após flexão.
- O módulo de elasticidade é o mesmo em tração e compressão.

Descobriremos que o eixo neutro e o centróide de uma viga curva, diferentemente do caso de uma viga reta, não são coincidentes e também que a tensão não varia linearmente a partir do eixo neutro. A notação mostrada na Figura 4-37 é definida da seguinte forma:

r_o = raio da fibra mais externa
r_i = raio da fibra mais interna
h = altura da secção
c_o = distância, a partir do eixo neutro, da fibra mais externa
c_i = distância, a partir do eixo neutro, da fibra mais interna
r_n = raio do eixo neutro
r_c = raio do eixo centroidal
e = distância, a partir do eixo centroidal, do eixo neutro
M = momento flexor; M positivo diminui a curvatura

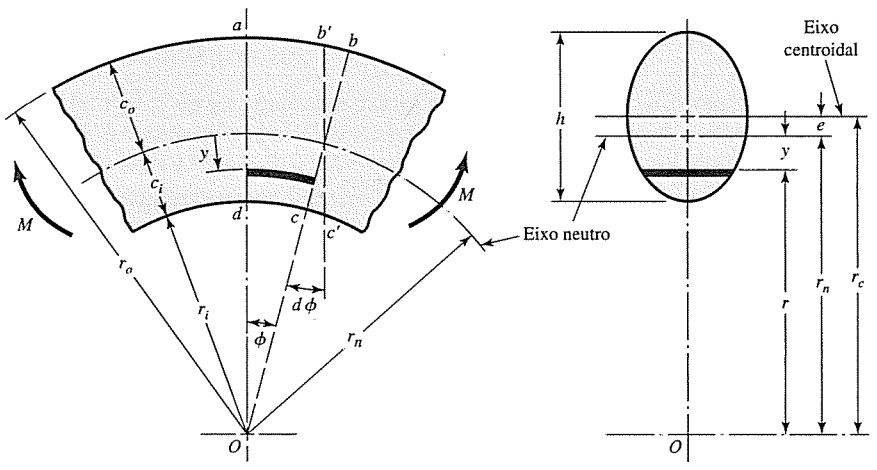


Figura 4-37 Observe que *y* é positivo em direção ao centro de curvatura, ponto *O*.

A Figura 4-37 mostra que os eixos neutro e centroidal não são coincidentes.[9] Sucede que a localização do eixo neutro relativamente ao centro de curvatura O é fornecida pela equação

$$r_n = \frac{A}{\int \frac{dA}{r}} \tag{4-64}$$

A distribuição de tensão pode ser determinada a partir do equilíbrio entre o momento aplicado externo e o momento resistente interno. O resultado deve ser

$$\sigma = \frac{My}{Ae(r_n - y)} \tag{4-65}$$

em que M é positivo na direção indicada na Figura 4-37. A Equação (4-65) mostra que a distribuição de tensão é hiperbólica. As tensões críticas ocorrem nas superfícies interna e externa, onde $y = c_i$ e $y = c_O$, respectivamente, e são

$$\sigma_i = \frac{Mc_i}{Aer_i} \qquad \sigma_o = -\frac{Mc_o}{Aer_o} \tag{4-66}$$

Essas equações são válidas para flexão pura. Em casos comuns e mais gerais – como um gancho de guindaste, a estrutura em U de uma prensa ou o suporte de um engaste –, o momento flexor se deve a forças atuando em um lado da secção transversal considerada. Nesse caso, o momento flexor é calculado relativamente ao *eixo centroidal*, e não ao eixo neutro. Além disso, uma tensão axial de tração ou compressão deve ser adicionada às tensões de flexão fornecidas pelas Equações (4-65) e (4-66), de modo a obter as tensões resultantes atuando na secção.

EXEMPLO 4-15

Trace a distribuição de tensões através da secção A-A do gancho de guindaste exibido na Figura 4-38(a). A secção transversal é retangular, com $b = 0{,}75$ in e $h = 4$ in, e a carga é $F = 5000$ lbf.

Solução

Visto que $A = bh$, temos $dA = b\,dr$ e, a partir da Equação (4-64),

$$r_n = \frac{A}{\int \frac{dA}{r}} = \frac{bh}{\int_{r_i}^{r_o} \frac{b}{r}\,dr} = \frac{h}{\ln \frac{r_o}{r_i}} \tag{1}$$

A partir da Figura 4-38(b), vemos que $r_i = 2$ in, $r_O = 6$ in, $r_c = 4$ in e $A = 3$ in^2. Logo, a partir da Equação (1),

$$r_n = \frac{h}{\ln(r_o/r_i)} = \frac{4}{\ln \frac{6}{2}} = 3{,}641 \text{ in}$$

e, assim, a excentricidade é $e = r_c - r_n = 4 - 3{,}641 = 0{,}359$ in. O momento M é positivo, sendo $M = Fr_c = 5000(4) = 20\,000$ lbf · in. Adicionando a componente axial de tensão à Equação (4-65), produzimos

$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{My}{Ae(r_n - y)} = \frac{5000}{3} + \frac{(20\,000)(3{,}641 - r)}{3(0{,}359)r} \tag{2}$$

Substituir os valores de r de 2 a 6 in resulta na distribuição de tensão exibida na Figura 4-38(c). As tensões nos raios mais internos e mais externos devem ser de 16,9 e –5,6 kpsi, respectivamente, como mostrado.

[9] Para um desenvolvimento completo das relações apresentadas nesta seção, ver Joseph E. Shigley, *Mechanical Engineering Design*, first metric edition, McGraw-Hill, New York, 1986, p. 72-75.

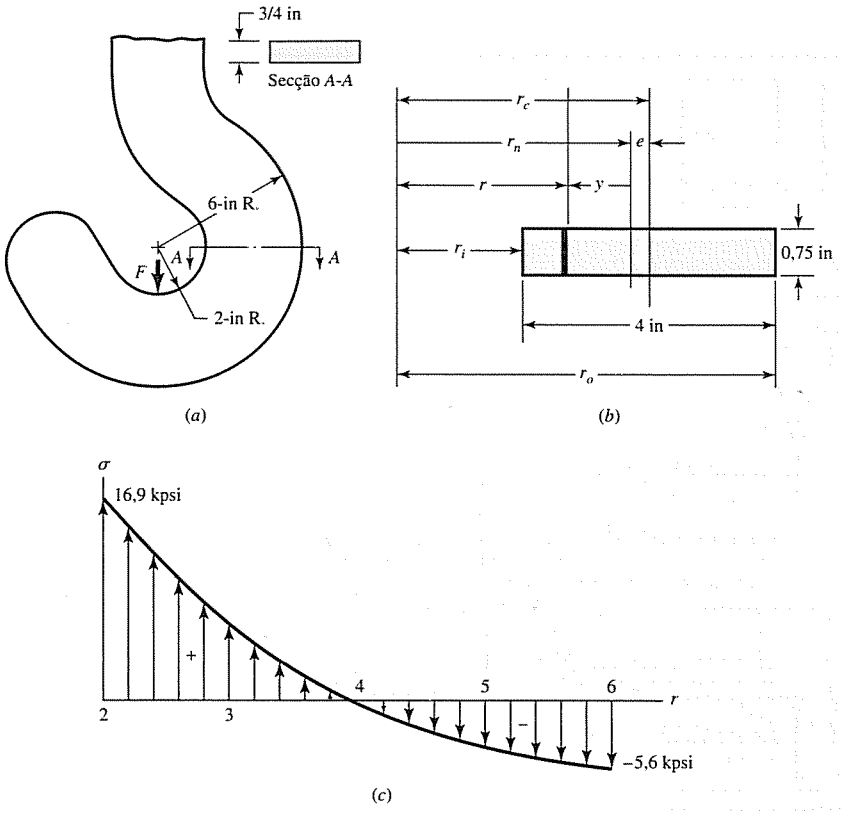


Figura 4-38 (*a*) Vista plana de um gancho de guincho; (*b*) secção transversal e notação; (*c*) distribuição de tensão resultante. Não há concentração de tensões.

Observe, no exemplo do gancho, que a secção transversal retangular simétrica faz a tensão máxima de tração ser três vezes maior que a tensão máxima de compressão. Se quiséssemos projetar o gancho para usar o material mais efetivamente, utilizaríamos mais material no raio mais interno e menos material no raio mais externo. Por essa razão, secções transversais trapezoidais, T ou não-simétricas L são comumente usadas. As secções mais freqüentemente encontradas na análise de tensão de vigas curvas são mostradas na Tabela 4-5.

Cálculos Aproximados

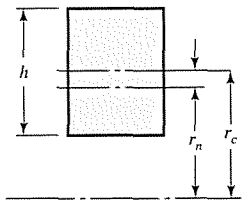
Calcular r_n e r_c numericamente e subtrair a diferença pode levar a erros grandes se não houver cuidado, visto que r_n e r_c são tipicamente valores elevados, se comparados a e. Na medida em que está no denominador das Equações (4-65) e (4-66), um erro grande nele pode levar a um cálculo inexato da tensão. Ademais, se você tiver uma secção complexa com a qual as tabelas não lidem, métodos alternativos para determinar r_n, r_c e e são necessários. Para uma aproximação rápida e simples de e, retornemos à definição de r_n. A Equação (4-64) pode ser escrita na forma

$$\int \frac{r_n - r}{r}\, dA = 0 \qquad (a)$$

Considere uma nova variável de coordenada s medida a partir do *eixo centroidal*, onde $s = r_c - r$. Substituindo r = $r_c - s$ e $r_n = r_c - e$ na Equação (*a*), obtemos

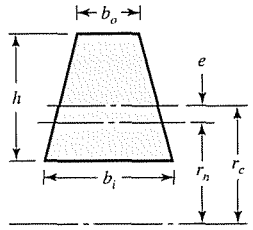
$$\int \frac{r_c - e - (r_c - s)}{r_c - s}\, dA = \int \frac{s - e}{r_c - s}\, dA = 0 \qquad (b)$$

Tabela 4-5 Fórmulas para secções de vigas curvas



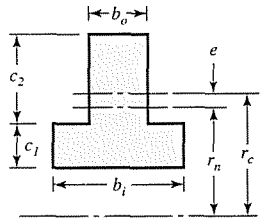
$$r_c = r_i + \frac{h}{2}$$

$$r_n = \frac{h}{\ln(r_o/r_i)}$$



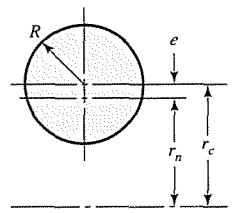
$$r_c = r_i + \frac{h}{3}\frac{b_i + 2b_o}{b_i + b_o}$$

$$r_n = \frac{A}{b_o - b_i + [(b_i r_o - b_o r_i)/h]\ln(r_o/r_i)}$$



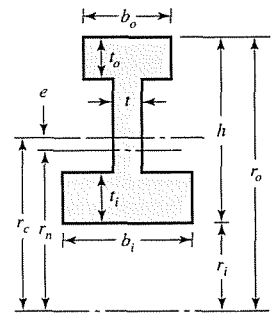
$$r_c = r_i + \frac{b_i c_1^2 + 2b_o c_1 c_2 + b_o c_2^2}{2(b_o c_2 + b_i c_1)}$$

$$r_n = \frac{b_i c_1 + b_o c_2}{b_i \ln[(r_i + c_1)/r_i)] + b_o \ln[r_o/(r_i + c_1)]}$$



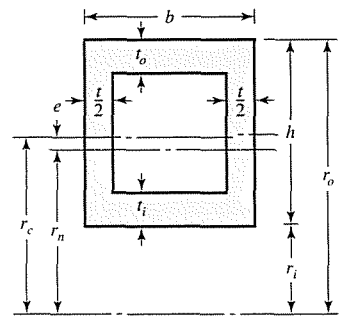
$$r_c = r_i + R$$

$$r_n = \frac{R^2}{2\left(r_c - \sqrt{r_c^2 - R^2}\right)}$$



$$r_c = r_i + \frac{\frac{1}{2}h^2 t + \frac{1}{2}t_i^2(b_i - t) + t_o(b_o - t)(h - t_o/2)}{t_i(b_i - t) + t_o(b_o - t) + ht}$$

$$r_n = \frac{t_i(b_i - t) + t_o(b_o - t) + ht_o}{b_i \ln\frac{r_i + t}{r_i} + t\ln\frac{r_o - t_o}{r_i + t_i} + b_o \ln\frac{r_o}{r_o - t_o}}$$



$$r_c = r_i + \frac{\frac{1}{2}h^2 t + \frac{1}{2}t_i^2(b - t) + t_o(b - t)(h - t_o/2)}{ht + (b - t)(t_i + t_o)}$$

$$r_n = \frac{(b - t)(t_i + t_o) + ht}{b\left(\ln\frac{r_i + t_i}{r_i} + t\ln\frac{r_o}{r_o + t_o}\right) + t\ln\frac{r_o - t_o}{r_i + t_i}}$$

A segunda integral pode ser separada e solucionada para e em

$$e = \frac{\int \frac{s}{r_c - s}\, dA}{\int \frac{dA}{r_c - s}} \tag{4-67}$$

O termo no denominador de ambas as integrais, $(r_c - s)^{-1}$, pode ser expandido binomialmente como

$$(r_c - s)^{-1} \doteq r_c^{-1}\left(1 + \frac{s}{r_c}\right) \tag{c}$$

contanto que $s << r_c$, em que somente o termo linear em s/r_c é retido. Logo, a Equação (4-67) é

$$e \doteq \frac{\int s\left(1 + \frac{s}{r_c}\right) dA}{\int \left(1 + \frac{s}{r_c}\right) dA} \tag{d}$$

Visto que é medido a partir do eixo centroidal, $\int s\, dA = 0$, e, portanto, $\int s^2\, dA = I$ – o segundo momento de área ao redor do eixo centroidal da secção. Assim, a Equação (*d*) reduz-se a

$$e \doteq \frac{I}{r_c A} \tag{4-68}$$

Essa aproximação é boa para uma grande curvatura em que e é pequeno, com $r_n \doteq r_c$ e $s \doteq y$. Nesse caso, a Equação (4-65) pode ser aproximada por $\sigma \doteq Ms/Aer$. Substituir e a partir da Equação (4-68) produz

$$\sigma \doteq \frac{Ms}{I}\,\frac{r_c}{r} \tag{4-69}$$

À medida que $r_c \to \infty$, $r \to r_c$ e $s \to y$, chegamos à equação de tensão de flexão da viga reta $\sigma = My/I$. Observe que o sinal negativo não aparece porque y, na Figura 4-37, está verticalmente para baixo, em oposição àquele da equação de viga reta.

Tenha em mente que as Equações (4-68) e (4-69) são estimativas e degradam-se significativamente à medida que r_c diminui em relação à altura da viga.

Cálculos Numéricos

As integrais da Equação (4-67) podem ser avaliadas numericamente usando-se planilhas, criando-se um programa simples ou utilizando-se um programa de matemática como o Matlab, o Mathcad, o Maple ou o Mathematica. A área pode ser dividida em retângulos infinitesimais de espessura Δs, e a largura b, avaliada em s, como mostrado na Figura 4-39. As equações resultantes para r_c e e seriam, então,

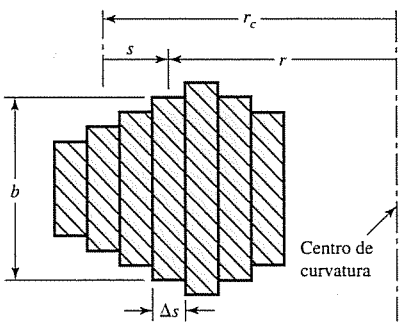


Figura 4-39 Representação discreta de uma secção transversal de viga curva.

$$r_c = \frac{\sum rb\,\Delta s}{\sum b\,\Delta s} \tag{4-70}$$

$$e = \frac{\sum \dfrac{s}{r_c - s} b\,\Delta s}{\sum \dfrac{b\,\Delta s}{r_c - s}} \tag{4-71}$$

EXEMPLO 4-16

Considere a secção circular da Tabela 4-5 com $r_c = 3$ in e $R = 1$ in. Determine e empregando a fórmula a partir dessa tabela, utilizando aproximadamente a Equação (4-68) e numericamente a Equação (4-71). Compare os resultados das três soluções.

Solução Empregar a fórmula a partir da Tabela 4-5 produz

$$r_n = \frac{R^2}{2\left(r_c - \sqrt{r_c^2 - R^2}\right)} = \frac{1^2}{2\left(3 - \sqrt{3^2 - 1}\right)} = 2{,}91421 \text{ in}$$

Isso resulta em uma excentricidade de

$$e = r_c - r_n = 3 - 2{,}91421 = 0{,}08579 \text{ in}$$

O método aproximado, utilizando-se a Equação (4-68), produz

$$e \doteq \frac{I}{r_c A} = \frac{\pi R^4/4}{r_c(\pi R^2)} = \frac{R^2}{4r_c} = \frac{1^2}{4(3)} = 0{,}08333 \text{ in}$$

Isso difere da solução exata em –2,9%.
Para a solução numérica, considere a Figura 4-40. Para um círculo,

$$b = 2\sqrt{R^2 - s^2} \tag{a}$$

Substituindo essa equação na Equação (4-71), obtemos

$$e = \frac{\sum \dfrac{s\sqrt{R^2 - s^2}}{r_c - s} \Delta s}{\sum \dfrac{\sqrt{R^2 - s^2}\,\Delta s}{r_c - s}} \tag{b}$$

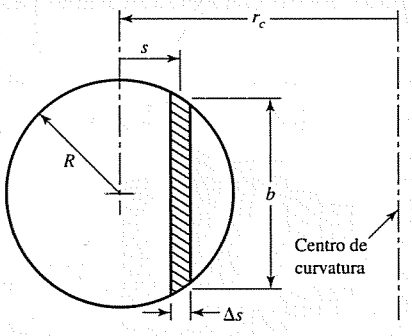


Figura 4-40 Secção transversal circular de uma viga curva.

Embora isso possa parecer complicado, é, entretanto, muito fácil de solucionar numericamente. A Figura 4-41(*a*) apresenta um programa simples de Visual Basic que pode ser implementado em um programa de planilha Excel. No programa, SUM1 e SUM2 são o numerador e o denominador da Equação (*b*), respectivamente. A Figura 4-41(*b*) mostra os registros feitos na linha 1 da planilha. Na primeira linha, substituir $r_c = 3$ na coluna A, $R = 1$ na coluna B e a expressão "= ecc(A1, B1)" na coluna C produz

$$e = 0{,}08579 \text{ in}$$

o que apresenta um erro de 0,0031%.

A tabela a seguir mostra o erro nas soluções aproximada e numérica, à medida que $r_c \rightarrow R$. Pode-se ver que, para um raio grande de curvatura, o método de aproximação é bastante adequado. Contudo, à medida que $r_c \rightarrow R$, o erro torna-se calculável, ao passo que o erro no método numérico permanece muito pequeno.

```
Function ecc (rc, R)
DS = 2 * R/1000  'Divida o diâmetro em 1000 incrementos
S = - R C DS/2  'Comece a soma em s = -R + DS / 2
          'para o cálculo do numerador (SUM1)
          'e do denominador (SUM2)
     SUM1 = 0       'Inicie os somatórios
     SUM2 = 0
     For I = 1 To 1000 Step 1     'Ciclo do somatório
        SUM1 = SUM1 + DS * (S * Sqr (R^2 - S^2)) / (rc - S)
        SUM2 = SUM2 + DS * (Sqr (R^2 - S^2)) / (rc - S)
        S = S + DS     'Incremente S
     Next I
ecc = SUM1/SUM2     'Determine e
End Function
```

(*a*)

	A	B	C
1	3	1	= ecc(A1, B1)

(*b*)

Figura 4-41 Programa de Visual Basic para determinar *e*; (*b*) registros na planilha.

Valores de *e* para uma secção circular em termos de r_c / R

r_c	R	e exato	e aproximado	% de erro	e numérico	% de erro
10	1	0,025063	0,025000	-0,25	0,025064	0,0030
8	1	0,031373	0,031250	-0,39	0,031374	0,0030
6	1	0,041960	0,041667	-0,70	0,041961	0,0030
4	1	0,063508	0,062500	-1,59	0,063510	0,0030
3	1	0,085786	0,083333	-2,86	0,085789	0,0031
2	1	0,133975	0,125000	-6,70	0,133979	0,0033
1,5	1	0,190983	0,166667	-12,73	0,190990	0,0038
1,25	1	0,250000	0,200000	-20,00	0,250012	0,0048

4-20 Tensões de Contato

Quando dois corpos com superfícies curvas são pressionados um contra o outro, o contato pontual ou em linha modifica a área de contato e as tensões desenvolvidas em ambos são de natureza tridimensional. Problemas envolvendo tensões de contato aparecem no contato de uma roda e um trilho, em cames de válvulas automotivas e ressaltos, em dentes de engrenagens engranzadas e na ação de mancais de rolamento. Falhas típicas observadas constam de fissuras, buracos ou descamação do material de superfície.

O caso mais geral de tensão de contato ocorre quando cada corpo tem um raio de curvatura dupla; isto é, quando o raio no plano de rolamento é diferente do raio em um plano perpendicular a este – ambos os planos cruzando-se no eixo da força de contato. Aqui, consideraremos apenas dois casos especiais: o de esferas em contato e o de cilindros em contato.[10] Os resultados apresentados devem-se a Hertz e, portanto, são freqüentemente conhecidos como *tensões hertzianas.*

Contato Esférico

Quando duas esferas sólidas de diâmetros d_1 e d_2 são pressionadas uma contra a outra por meio de uma força F, uma área circular de contato de raio a é obtida. Especificando E_1, ν_1 e E_2, ν_2 como as respectivas constantes elásticas dessas esferas, o raio é fornecido pela equação

$$a = \sqrt[3]{\frac{3F}{8}\frac{\left(1-\nu_1^2\right)/E_1 + \left(1-\nu_2^2\right)/E_2}{1/d_1 + 1/d_2}} \tag{4-72}$$

A pressão dentro da área de contato de cada esfera tem uma distribuição hemisférica, como mostrado na Figura 4-42. A pressão máxima ocorre no centro da área de contato e é

$$p_{\max} = \frac{3F}{2\pi a^2} \tag{4-73}$$

As Equações (4-72) e (4-73) são perfeitamente gerais e também se aplicam ao contato entre uma esfera e uma superfície plana, ou entre uma esfera e uma superfície esférica interna. Para uma superfície plana, utilize $d = \infty$. Para uma superfície interna, o diâmetro é expresso como uma quantidade negativa.

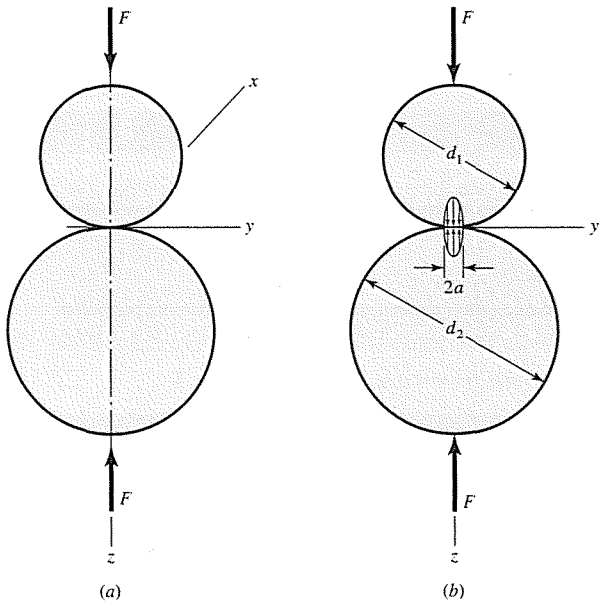


Figura 4-42 (*a*) Duas esferas mantidas em contato pela força F; (*b*) a tensão de contato apresenta uma distribuição hemisférica através do diâmetro $2a$ da zona de contato.

[10] Uma apresentação mais completa das tensões de contato pode ser encontrada em Arthur P. Boresi e Richard J. Schmidt, *Advanced Mechanics of Materials*, 6th ed., Wiley, New York, 2003, p. 589-623.

As tensões máximas ocorrem no eixo z, sendo estas tensões principais. Seus valores correspondem a

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_x = \sigma_y = -p_{\max}\left[\left(1 - \left|\frac{z}{a}\right| \tan^{-1}\frac{1}{|z/a|}\right)(1+\nu) - \frac{1}{2\left(1+\frac{z^2}{a^2}\right)}\right] \tag{4-74}$$

$$\sigma_3 = \sigma_z = \frac{-p_{\max}}{1+\frac{z^2}{a^2}} \tag{4-75}$$

Tais equações são válidas para qualquer uma das esferas, mas o valor utilizado para o coeficiente de Poisson deve corresponder ao da esfera considerada. Essas equações ficam ainda mais complicadas quando estados de tensão fora do eixo z devem ser determinados, pois, nesse caso, as coordenadas x e y também devem ser incluídas. Contudo, elas não são requeridas quando se trata de projeto, já que valores máximos ocorrem no eixo z.

Os círculos de Mohr para o estado de tensão descrito pelas Equações (4-74) e (4-75) reduzem-se a um ponto e dois círculos coincidentes. Uma vez que $\sigma_1 = \sigma_2$, temos $\tau_{1/2} = 0$ e

$$\tau_{\max} = \tau_{1/3} = \tau_{2/3} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \tag{4-76}$$

A Figura 4-43 é um gráfico das Equações (4-74), (4-75) e (4-76) para uma distância igual a $3a$ abaixo da superfície. Observe que a tensão de cisalhamento alcança um valor máximo ligeiramente abaixo da superfície. Na opinião de várias autoridades, essa tensão máxima de cisalhamento é responsável pela falha superficial por fadiga de elementos em contato. A explicação utilizada é a de que uma trinca se origina no ponto de máxima tensão de cisalhamento sob a superfície, daí progredindo em direção a esta, e que a pressão do lubrificante acunha a lasca formada, de modo a soltá-la.

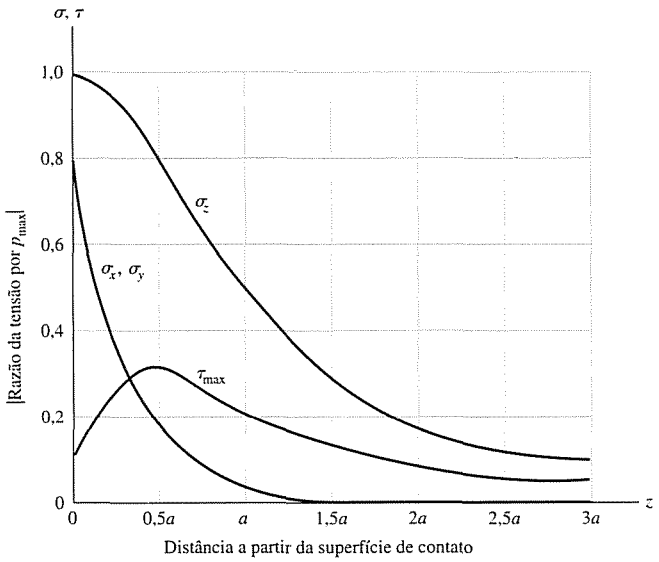


Figura 4-43 Magnitude das componentes de tensão abaixo da superfície, como uma função da pressão máxima de esferas em contato. Observe que a tensão máxima de cisalhamento está ligeiramente abaixo da superfície em $z = 0{,}48a$ e é aproximadamente $0{,}3p_{max}$. O diagrama está baseado em um coeficiente de Poisson de 0,30. Observe também que as tensões normais são todas de compressão.

Contato Cilíndrico

A Figura 4-44 ilustra uma situação similar, na qual os elementos em contato são dois cilindros de comprimento l e diâmetros d_1 e d_2. Como mostrado na Figura 4-44(b), a área de contato é um retângulo estrei-

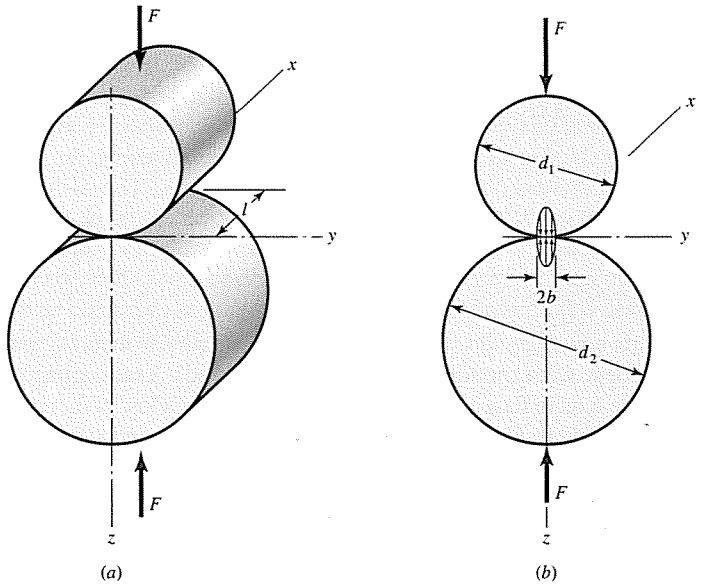


Figura 4-44 (*a*) Dois cilindros circulares retos mantidos em contato por forças *F* uniformemente distribuídas ao longo do comprimento *l* do cilindro. (*b*) A tensão de contato tem uma distribuição elíptica através da largura da zona de contato 2*b*.

to de largura $2b$ e comprimento l, e a distribuição de pressão é elíptica. A semilargura b é calculada a partir da equação

$$b = \sqrt{\frac{2F}{\pi l}\frac{\left(1-\nu_1^2\right)/E_1 + \left(1-\nu_2^2\right)/E_2}{1/d_1 + 1/d_2}} \tag{4-77}$$

A máxima pressão é

$$p_{\max} = \frac{2F}{\pi b l} \tag{4-78}$$

As Equações (4-77) e (4-78) aplicam-se a um cilindro e a uma superfície plana, como um trilho, ao estabelecermos $d = \infty$ para o caso da superfície plana. As equações também se aplicam ao contato de um cilindro e a uma superfície cilíndrica interna; nesse caso, supõe-se que d seja negativo para a superfície interna.

O estado de tensão no eixo z é fornecido pelas equações

$$\sigma_x = -2\nu p_{\max}\left(\sqrt{1+\frac{z^2}{b^2}} - \left|\frac{z}{b}\right|\right) \tag{4-79}$$

$$\sigma_y = -p_{\max}\left(\frac{1+2\dfrac{z^2}{b^2}}{\sqrt{1+\dfrac{z^2}{b^2}}} - 2\left|\frac{z}{b}\right|\right) \tag{4-80}$$

$$\sigma_3 = \sigma_z = \frac{-p_{\max}}{\sqrt{1+z^2/b^2}} \tag{4-81}$$

Essas três equações são traçadas, na Figura 4-45, até uma distância $3b$ abaixo da superfície. Para $0 \le z \le 0{,}436b$, $\sigma_1 = \sigma_x$ e $\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2 = (\sigma_x - \sigma_z)/2$. Para $z \ge 0{,}436b$, $\sigma_1 = \sigma_3$ e $\tau_{\max} = (\sigma_y - \sigma_z)/2$. Um gráfico de $\tau_{\max}$ também está incluído na Figura 4-45, em que o maior valor ocorre em $z/b = 0{,}786$, com um valor de $0{,}300\,p_{\max}$.

Hertz (1881) desenvolveu os modelos matemáticos precedentes do campo de tensão quando a zona de contato é livre de tensão de cisalhamento. Um outro caso importante de tensão de contato é o da *linha de contato* com fricção, produzindo tensão de cisalhamento na zona de contato. Tais tensões de cisalhamento são pequenas em cames e roletes; todavia, em cames com seguidores de face plana, em contatos roda-trilho e em

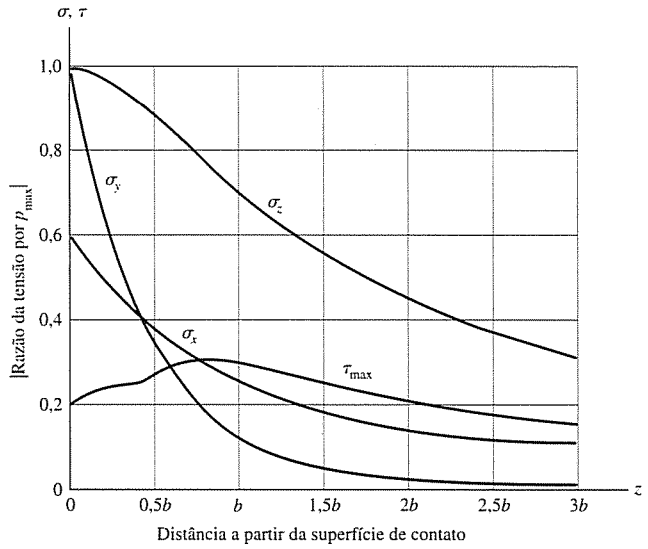


Figura 4-45 Magnitude das componentes de tensão abaixo da pressão máxima para cilindros em contato. A tensão de cisalhamento torna-se a maior entre as três tensões de cisalhamento em torno de $z/b = 0{,}75$. Seu valor máximo é 0,30 p_{max}. O diagrama está baseado em uma razão de Poisson de 0,30. Observe que todas as tensões normais são de compressão.

dentes de engrenagens, elas superam os valores correspondentes ao campo de Hertz. Investigações do efeito das componentes normal e de cisalhamento sobre o campo de tensão na zona de contato foram iniciadas, de forma teórica, por Lundberg (1939) e continuadas por Mindlin (1949), Smith-Liu (1949) e Poritsky (1949), independentemente. As equações de Smith-Liu[11] para cilindros em contato e cilindros deslizando são

$$b = \sqrt{\frac{2F}{\pi l}\frac{(1-\nu_1^2)/E_1 + (1-\nu_2^2)/E_2}{1/d_1 + 1/d_2}}$$

$$M = \sqrt{(b+y)^2 + z^2}$$

$$N = \sqrt{(b-y)^2 + z^2}$$

$$\phi_1 = \frac{\pi(M+N)}{MN\sqrt{2MN + 2y^2 + 2z^2 - 2b^2}}$$

$$\phi_2 = \frac{\pi(M-N)}{MN\sqrt{2MN + 2y^2 + 2z^2 - 2b^2}}$$

$$\Delta' = \frac{2}{1/R_1 + 1/R_2}\left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}\right)$$

$$\sigma_x = -\frac{2\nu b}{\pi\Delta'}\left\{z\left(\frac{b^2+y^2+z^2}{b}\phi_1 - \frac{\pi}{b} - 2y\phi_2\right) + f\left[(y^2-b^2-z^2)\phi_2 + \frac{\pi y}{b} + (b^2-y^2-z^2)\frac{y}{b}\phi_1\right]\right\} \quad (4\text{-}82)$$

$$\sigma_y = -\frac{b}{\pi\Delta'}\left\{z\left(\frac{b^2+2z^2+2y^2}{b}\phi_1 - \frac{2\pi}{b} - 3y\phi_2\right) + f\left[(2y^2-2b^2-3z^2)\phi_2 + \frac{2\pi y}{b} + 2(b^2-y^2-z^2)\frac{y}{b}\phi_1\right]\right\} \quad (4\text{-}83)$$

[11] Uma referência bibliográfica extensa é G. A. Castleberry, "Analyzing Contact Stresses More Accurately", *Machine Design*, 12 de abril de 1984, p. 92-97.

$$\sigma_z = -\frac{b}{\pi \Delta'}[z(b\phi_1 - y\phi_2 + fz\phi_2)] \tag{4-84}$$

$$\tau_{yz} = -\frac{b}{\pi \Delta'}\left\{z^2\phi_2 + f\left[(b^2 + 2y^2 + 2z^2)\frac{z}{b}\phi_1 - 2\pi\frac{z}{b} - 3yz\phi_2\right]\right\} \tag{4-85}$$

em que f é o coeficiente de fricção de deslizamento.

No caso de Smith-Liu, os eixos y e z da Figura 4-41(a) não são mais eixos principais, e σ_y e σ_z, por sua vez, já não são tensões principais. Uma olhada nas equações convencerá o leitor de que, embora relatadas em 1953,[12] as aplicações evoluíram muito lentamente, à medida que os meios computacionais melhoraram. Uma forma de estudar tais equações consiste em programá-las para criar uma tabela no intervalo $-1 \le y/b \le 1$, ao longo do topo, e $0 \le y/b \le 1$, de cima para baixo. Preencha o corpo dessa tabela com uma tensão escolhida entre σ_x, σ_y, σ_z, τ_{yz}, σ_1, σ_2, σ_3, $\tau_{1/2}$, $\tau_{1/3}$, $\tau_{2/3}$ e τ_{max}, normalizada dividindo-se pela máxima tensão hertziana da zona de contato, p_{max}. Investigadores da teoria de falha examinam (1) a máxima tensão de compressão, (2) a máxima tensão de tração, (3) a maior tensão máxima de cisalhamento e (4) a maior amplitude máxima de tensão de cisalhamento alternante. Veja os problemas ao final do capítulo.

4-21 Resumo

A capacidade de quantificar a condição de tensão em uma localização crítica de uma componente de máquina é uma habilidade importante do engenheiro. Por quê? Porque, independentemente de o membro falhar ou não, ele é estimado comparando-se a tensão (dano), em uma localização crítica, com a resistência correspondente do material naquela localização. Este capítulo considerou a descrição da tensão.

As tensões podem ser estimadas com grande precisão quando a geometria é suficientemente simples, de tal forma que a teoria proporciona as relações quantitativas necessárias. Em outros casos, são utilizadas aproximações. Há aproximações numéricas, tais como a análise por elemento finito (FEA), cujos resultados tendem a convergir para os resultados corretos. Há medidas experimentais – a da extensão, por exemplo – que permitem a *inferência* de tensões a partir de condições medidas da deformação. Qual(ais)quer que seja(m) o(s) método(s), o objetivo é chegar a uma descrição consistente da condição de tensão em uma localização crítica.

A natureza dos resultados de pesquisa e da compreensão em qualquer campo está em que, quanto mais trabalhamos nisso, mais complicadas as coisas parecem ser, de modo que novas abordagens são buscadas para ajudar a lidar com as complicações. À medida que novos esquemas são introduzidos, os engenheiros, ávidos por desfrutar das melhorias que a nova abordagem *promete*, começam a utilizá-la. O otimismo, entretanto, geralmente retrocede à medida que uma experiência posterior acrescenta inquietações. Tarefas que prometiam ampliar as capacidades do não-especialista mostram, ao fim e ao cabo, que perícia não é algo opcional.

Na análise de tensões, o computador pode ser muito proveitoso se as equações necessárias estiverem disponíveis. A análise de planilhas pode reduzir rapidamente cálculos complicados para estudos paramétricos, solucionando de maneira fácil questões do tipo "mas, e se..." relacionadas com compensações (por exemplo, menos de um material caro ou mais de um material mais barato?). Permite, inclusive, discernir entre as oportunidades de otimização.

Quando as equações necessárias não estão disponíveis, então métodos como o FEA são atrativos; no entanto, precauções devem ser tomadas. Mesmo quando tiver acesso a um código de elementos finitos poderoso, você deverá contar com um especialista durante o processo de aprendizagem. Há questões maçantes de convergência em descontinuidades. A análise elástica é muito mais fácil que a elastoplástica. Os resultados, contudo, não são melhores que a modelagem da realidade utilizada na formulação do problema.

PROBLEMAS

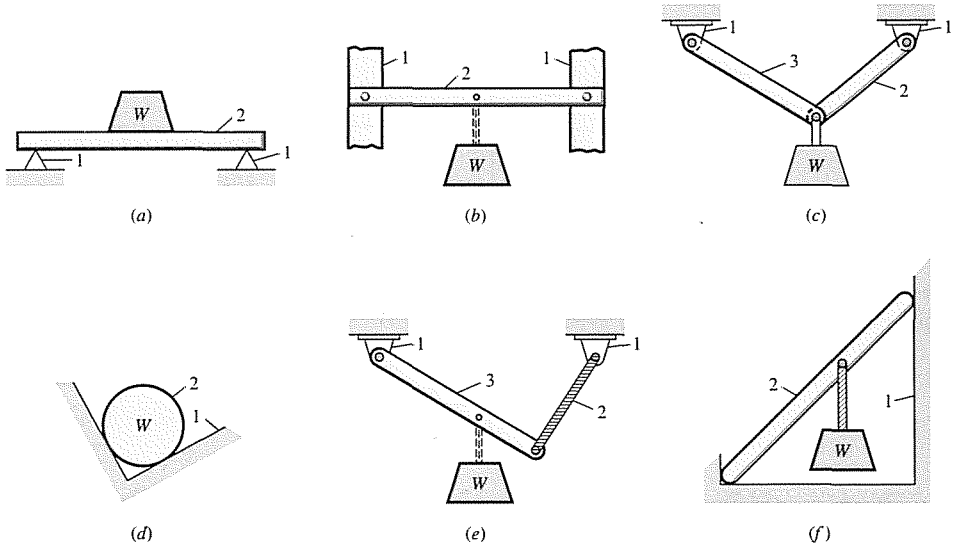
ANÁLISE

4–1 O símbolo W é usado em várias partes das figuras para especificar o peso de um elemento. Se ele não for fornecido, assuma que as partes não têm peso. Para cada parte da figura, esboce um diagrama de corpo livre de cada elemento, incluindo a armação. Tente obter as forças nas direções apropriadas, mas não compute as magnitudes.

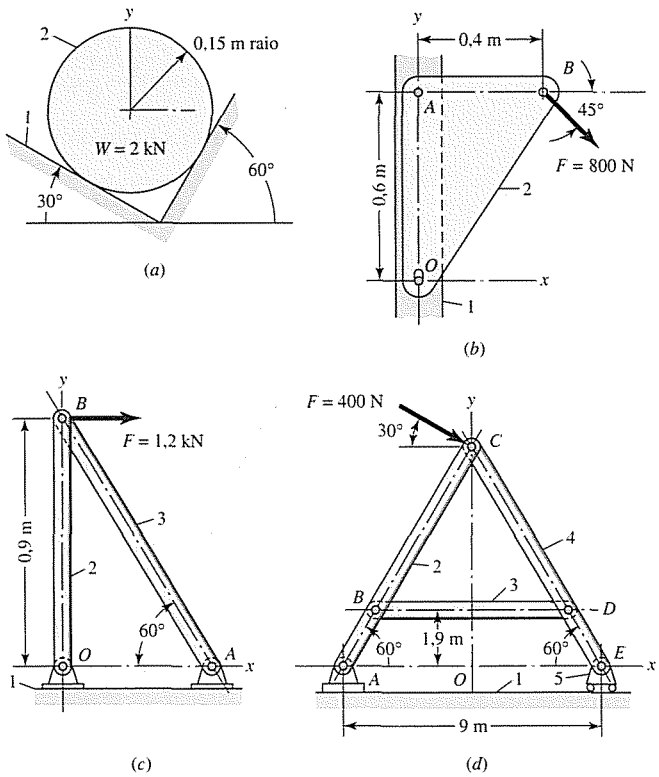
[12] J. O. Smith e Chang Keng Liu, "Stresses Due to Tangential and Normal Loads on an Elastic Solid with Application to Some Contact Stress Problems", *Journal of Applied Mechanics*, junho de 1953.

ANÁLISE **4-2** Usando a parte da figura selecionada pelo instrutor, esboce um diagrama de corpo livre de cada elemento da mesma. Compute a magnitude e a direção de cada força empregando um método algébrico ou vetorial, conforme especificado.

ANÁLISE **4-3** Encontre as reações nos suportes e trace os diagramas de força de cisalhamento (cortante) e momento flexor para cada uma das vigas mostradas na figura da página 178. Rotule os diagramas apropriadamente.



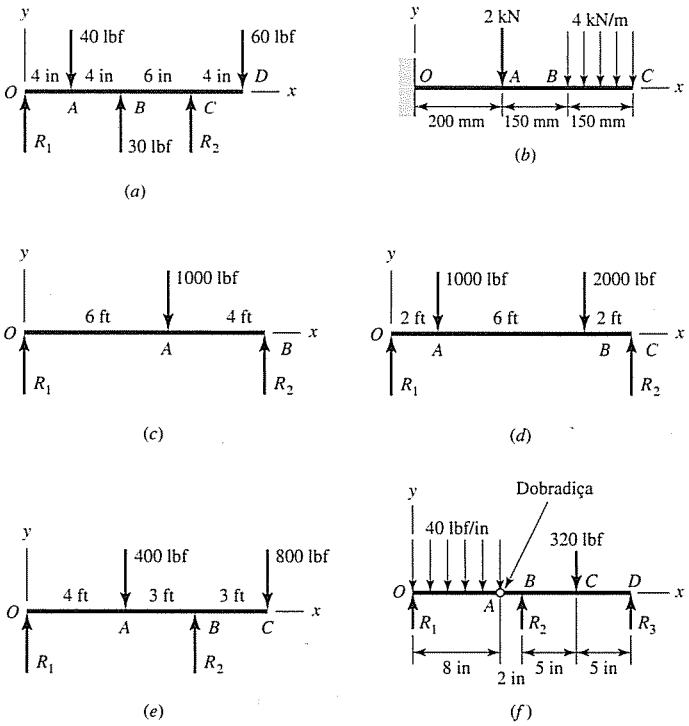
Problema 4-1



Problema 4-2

ANÁLISE **4-4** Repita o Problema 4-3 utilizando funções de singularidade exclusivamente (também para as reações).

4-5 Selecione uma viga da Tabela A-9 e encontre as expressões gerais para o carregamento, a força de cisalhamento, o momento flexor e as reações de suporte. Utilize o método especificado pelo instrutor.



Problema 4-3

PROJETO **4-6** Uma viga sustentando uma carga uniforme está apenas apoiada, com os suportes recuados a uma distância a das extremidades, como mostrado na figura. O momento flexor em x pode ser encontrado igualando-se a soma de momentos a zero na secção x:

$$\sum M = M + \frac{1}{2}w(a+x)^2 - \frac{1}{2}wlx = 0$$

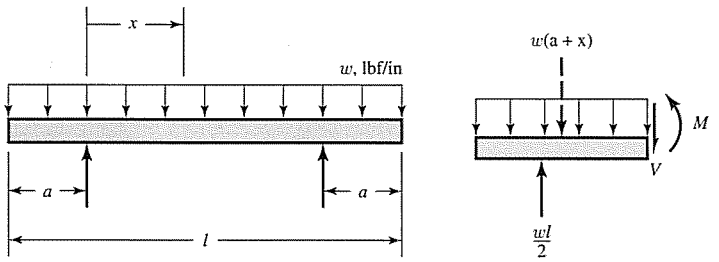
ou

$$M = \frac{w}{2}[lx - (a+x)^2]$$

em que w é a intensidade do carregamento em lbf/in. O projetista deseja minimizar o peso necessário da viga de suporte escolhendo um recuo que resulte na menor tensão de flexão máxima possível.

(a) Se a viga for configurada com $a = 2{,}25$ in, $l = 10$ in e $w = 100$ lbf/in, encontre a magnitude do momento flexor mais intenso na viga.

(b) Visto que a configuração em (*a*) não é ótima, encontre o recuo ótimo a que irá resultar na viga mais leve.

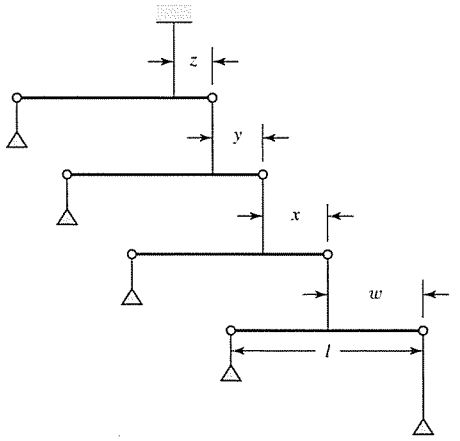


Problema 4-6

ANÁLISE **4-7** Um artista deseja construir um móbile usando pingentes, cordas e arame de vão com ilhós, como mostrado na figura.

(*a*) Em que posições w, x, y e z as cordas de suspensão devem ser atadas aos arames de vão?

(*b*) O móbile é estável? Se o for, justifique; do contrário, sugira uma solução.



Problema 4-7

ANÁLISE **4-8** Para cada um dos estados planos de tensão listados a seguir, desenhe um diagrama do círculo de Mohr rotulado apropriadamente, encontre as tensões principais normais e de cisalhamento e determine o ângulo a partir do eixo até a tensão σ_1. Desenhe elementos de tensão conforme mostrado na Figura 4-13(*c*) e (*d*) e marque todos os detalhes.

(*a*) $\sigma_x = 12, \sigma_y = 6, \tau_{xy} = 4$ horário
(*b*) $\sigma_x = 16, \sigma_y = 9, \tau_{xy} = 5$ anti-horário
(*c*) $\sigma_x = 10, \sigma_y = 24, \tau_{xy} = 6$ anti-horário
(*d*) $\sigma_x = 9, \sigma_y = 19, \tau_{xy} = 8$ horário

ANÁLISE **4-9** Repita o Problema 4-8 para:

(*a*) $\sigma_x = -4, \sigma_y = 12, \tau_{xy} = 7$ anti-horário
(*b*) $\sigma_x = 6, \sigma_y = -5, \tau_{xy} = 8$ anti-horário
(*c*) $\sigma_x = -8, \sigma_y = 7, \tau_{xy} = 6$ horário
(*d*) $\sigma_x = 9, \sigma_y = -6, \tau_{xy} = 3$ horário

ANÁLISE **4-10** Repita o Problema 4-8 para:

(*a*) $\sigma_x = 20, \sigma_y = -10, \tau_{xy} = 8$ horário
(*b*) $\sigma_x = 30, \sigma_y = -10, \tau_{xy} = 10$ anti-horário
(*c*) $\sigma_x = -10, \sigma_y = 18, \tau_{xy} = 9$ horário
(*d*) $\sigma_x = -12, \sigma_y = 22, \tau_{xy} = 12$ horário

ANÁLISE **4-11** Para cada um dos estados de tensão listados a seguir, determine todas as três tensões principais normais e de cisalhamento. Desenhe um diagrama completo de três círculos de Mohr e rotule todos os pontos de interesse.

(*a*) $\sigma_x = 10, \sigma_y = -4$
(*b*) $\sigma_x = 10, \tau_{xy} = 4$ anti-horário
(*c*) $\sigma_x = -2, \sigma_y = -8, \tau_{xy} = 4$ horário
(*d*) $\sigma_x = 10, \sigma_y = -30, \tau_{xy} = 10$ anti-horário

ANÁLISE **4-12** Repita o Problema 4-11 para:

(*a*) $\sigma_x = -80, \sigma_y = -30, \tau_{xy} = 20$ horário
(*b*) $\sigma_x = 30, \sigma_y = -60, \tau_{xy} = 30$ horário
(*c*) $\sigma_x = 40, \sigma_z = -30, \tau_{xy} = 20$ anti-horário
(*d*) $\sigma_x = 50, \sigma_z = -20, \tau_{xy} = 30$ horário

ANÁLISE **4-13** Uma barra de aço sob tração de $\frac{1}{2}$ in de diâmetro tem 72 in de comprimento e sustenta uma carga de 2000 lbf. Determine a tensão de tração, a deformação total, as deformações unitárias e a mudança de diâmetro da barra.

ANÁLISE **4-14** Barras de tração diagonais gêmeas de liga de alumínio com 15 mm de diâmetro são utilizadas em um pórtico retangular, para evitar colapso. Elas podem suportar, de forma segura, uma tensão de tração de 135 MPa. Se tiverem inicialmente comprimento de 3 m, quanto deverão ser estiradas para desenvolver essa tensão?

ANÁLISE **4-15** Extensômetros elétricos foram aplicados a um espécime entalhado, para determinar as tensões no entalhe. Os resultados obtidos foram $\epsilon_x = 0{,}0021$ e $\epsilon_y = -0{,}00067$. Determine σ_x e σ_y se o material for aço carbono.

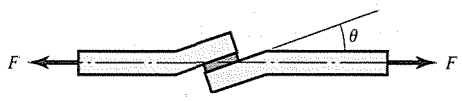
PROJETO **4-16** Um engenheiro deseja determinar a resistência ao cisalhamento de um certo cimento de epóxi. O problema consiste em inventar um espécime de ensaio para que a junção seja submetida a um cisalhamento puro. A junção mostrada na figura, na qual duas barras são dobradas a um ângulo θ, de modo a manter a força de carregamento F ao longo do centróide das hastes retas, parece satisfazer a esse propósito. Usando a área de contato A e designando S_{su} como a *resistência máxima ao cisalhamento*, o engenheiro obtém

$$S_{su} = \frac{F}{A}\cos\theta$$

O supervisor do engenheiro, ao rever os resultados do ensaio, diz que a expressão deve ser

$$S_{su} = \frac{F}{A}\left(1 + \frac{1}{4}\tan^2\theta\right)^{1/2}\cos\theta$$

Solucione essa discrepância. Qual a sua posição?



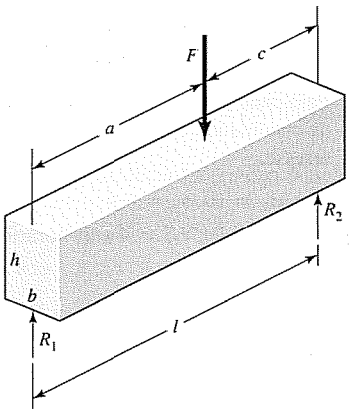
Problema 4-16

ANÁLISE **4-17** O estado de tensão em um ponto é $\sigma_x = -2$, $\sigma_y = 6$, $\sigma_z = -4$, $\tau_{xy} = 3$, $\tau_{yz} = 2$ e $\tau_{zx} = -5$ kpsi. Determine as tensões principais e desenhe um diagrama completo de três círculos de Mohr, rotulando todos os pontos de interesse e relatando a tensão máxima de cisalhamento para esse caso.

ANÁLISE **4-18** Repita o Problema 4-17 com $\sigma_x = 10$, $\sigma_y = 0$, $\sigma_z = 10$, $\tau_{xy} = 20$, $\tau_{yz} = -10\sqrt{2}$ e $\tau_{zx} = 0$ MPa.

4-19 Repita o Problema 4-17 com $\sigma_x = 1$, $\sigma_y = 4$, $\sigma_z = 4$, $\tau_{xy} = 2$, $\tau_{yz} = -4$ e $\tau_{zx} = -2$ kpsi.

ANÁLISE **4-20** O método romano de considerar incertezas em projetos consistia em construir a cópia de um projeto que fosse satisfatório e que tivesse provado sua durabilidade. Embora os antigos romanos não dispusessem das ferramentas intelectuais para lidar com efeitos de escala, para cima ou para baixo, você, no entanto, dispõe. Considere uma viga de secção transversal retangular sobre apoios simples, com uma carga concentrada F, conforme mostrado na figura.



Problema 4-20

(*a*) Mostre que a equação entre carga e tensão é

$$F = \frac{\sigma b h^2 l}{6ac}$$

(*b*) Introduza o subscrito m (de modelo) em cada parâmetro e espalhe-o na equação acima. Introduza um fator de escala, $s = a_m / a = b_m / b = c_m / c$, etc. Uma vez que o método romano não deve "forçar" o material mais do que o projeto comprovado, estabeleça $\sigma_m / \sigma = 1$. Expresse F_m em termos dos fatores de escala e F; teça comentários a respeito do que você aprendeu.

ANÁLISE **4-21** Utilizando nossa experiência com carregamento concentrado sobre uma viga simples (Problema 4-20), considere uma viga simples uniformemente carregada (Tabela A-9-7).

(*a*) Mostre que a equação entre tensão e carga para uma viga de secção transversal retangular é fornecida por

$$W = \frac{2}{3}\frac{\sigma bh^2}{l}$$

em que $W = wl$.

(*b*) Introduza o subscrito m (de modelo) em cada parâmetro e divida a equação do modelo pela equação do protótipo. Introduza o fator de escala, como feito no Problema 4-20, estabelecendo $\sigma_m/\sigma = 1$. Expresse W_m e w_m em termos do fator de escala e teça comentários a respeito do que você aprendeu.

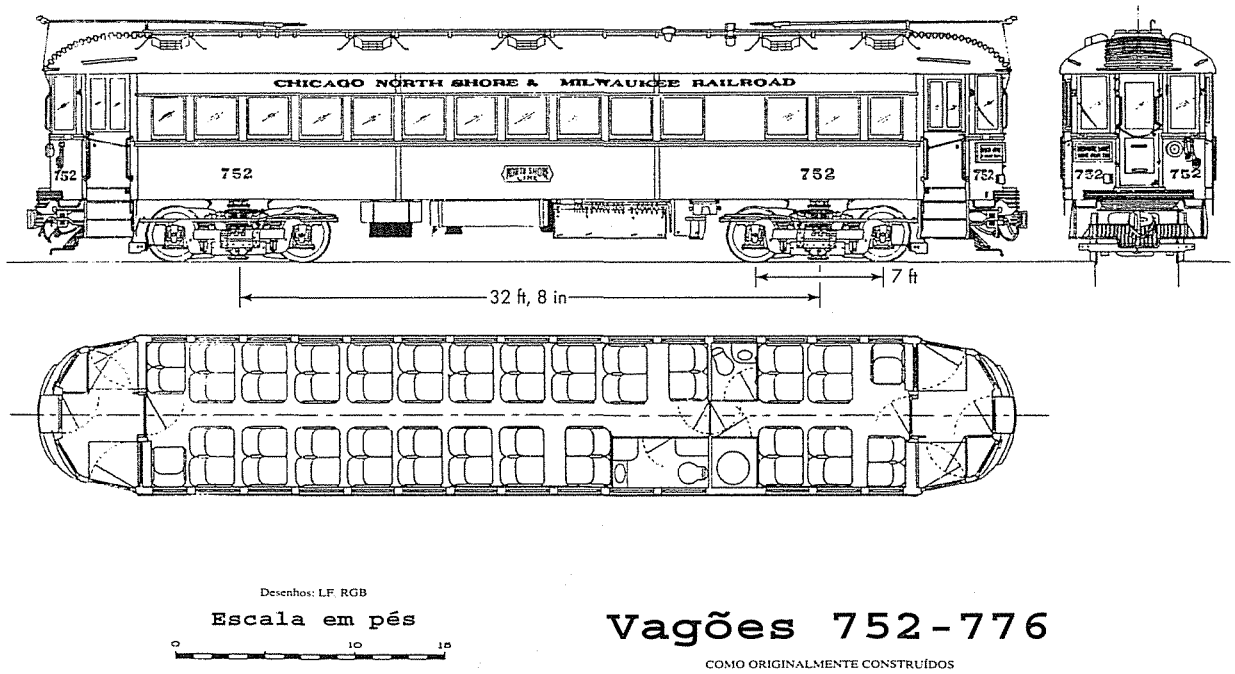
ANÁLISE **4-22** A linha de trem Chicago North Shore & Milwaukee Railroad era eletrificada e corria entre as cidades constantes em seu título corporativo. Tinha carros de passageiros, como o mostrado na figura, que pesavam 104,4 kip, apresentavam distância entre centro de rodas de 32 ft e 8 in, base giratória de rodas de 7 ft e um comprimento acoplado de 55 ft, $3\frac{1}{4}$ in. Considere o caso de um único carro sobre uma ponte de longarina da placa de estrado, em apoios simples, com comprimento de 100 ft.

(*a*) Qual foi o máximo momento flexor na ponte?

(*b*) Onde, na ponte, esse momento ocorreu?

(*c*) Qual era a posição do carro na ponte?

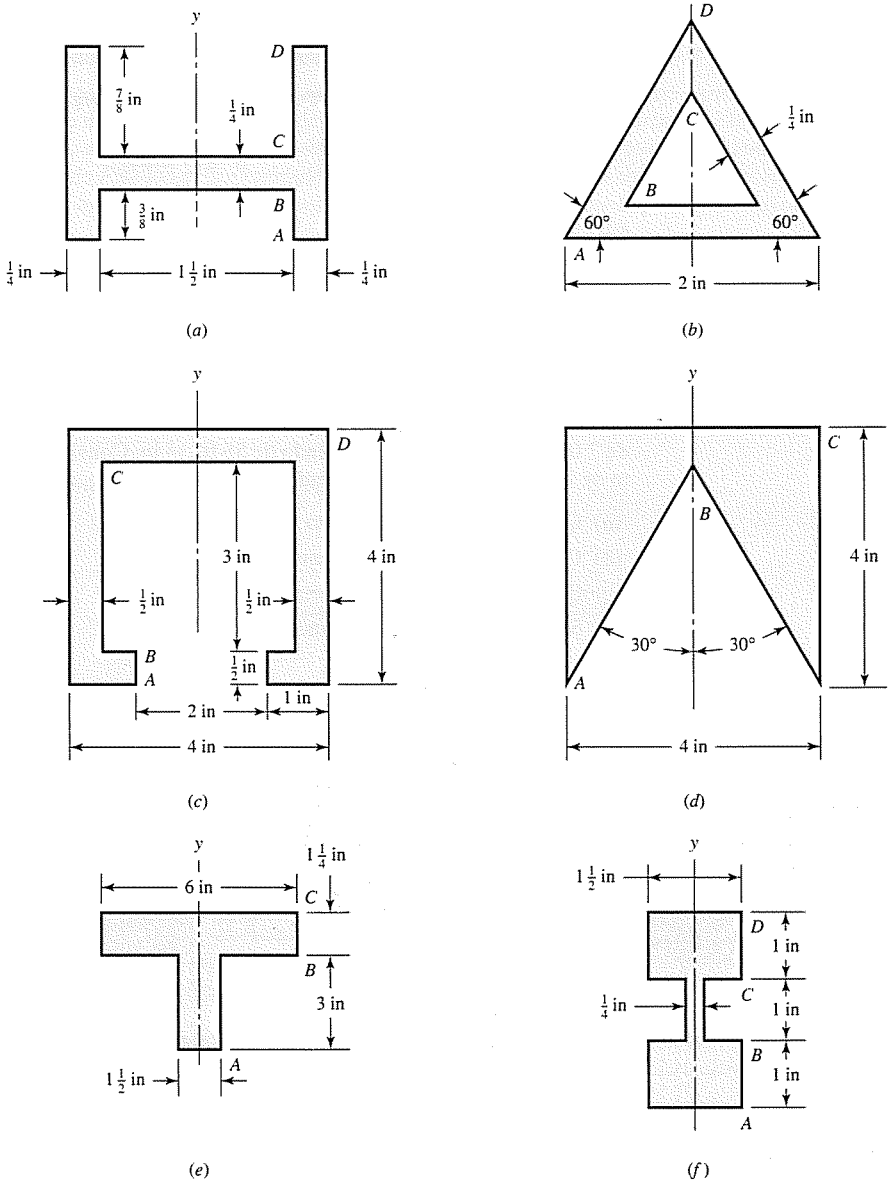
(*d*) Sob qual eixo está esse momento flexor?



Problema 4-22

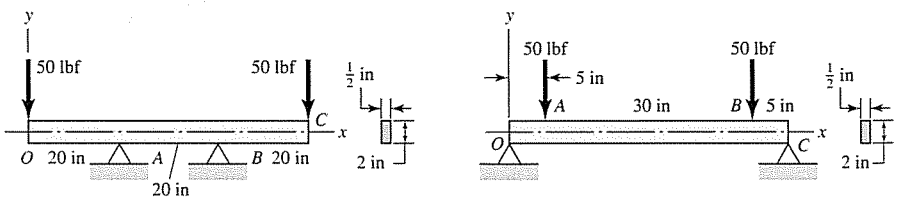
Copyright 1963 da Central Electric Railfans Association, Bull. 107, p. 145, reproduzido com permissão.

ANÁLISE **4-23** Para cada uma das secções ilustradas, determine o segundo momento de área (inércia), a localização do eixo neutro e as distâncias deste às superfícies de topo e fundo. Suponha que um momento flexor positivo de 10 kip · in seja aplicado; encontre as tensões resultantes nas superfícies de topo e fundo, bem como em cada localidade de mudança abrupta na secção.



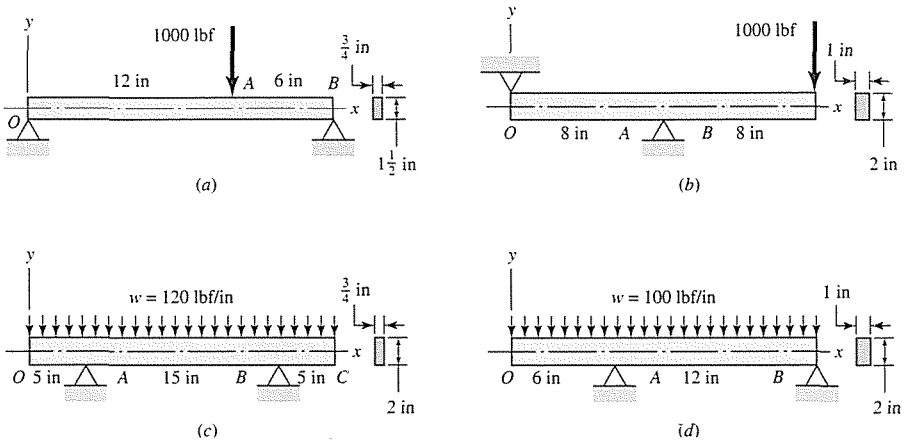
Problema 4-23

ANÁLISE **4-24** Encontre as coordenadas x e y do centro de curvatura correspondendo à posição em que a viga está mais flexionada, para cada uma das vigas mostradas na figura. As vigas são feitas de pinus Douglas (ver Tabela A-5) e têm secção retangular.



Problema 4-24

4-25 Para cada viga ilustrada na figura, determine as posições e magnitudes da tensão máxima de tração de flexão e da tensão máxima de cisalhamento decorrentes de V.



Problema 4-25

ANÁLISE **4-26** A figura ilustra algumas secções de vigas. Utilize uma tensão admissível de 1,2 kpsi para madeira e de 12 kpsi para aço e encontre a máxima carga segura uniformemente distribuída que cada viga pode suportar se os comprimentos (vãos) fornecidos estiverem entre apoios simples.

(*a*) Viga de suporte de madeira de $1\frac{1}{2}$ por $9\frac{1}{2}$ in e comprimento de 12 ft.

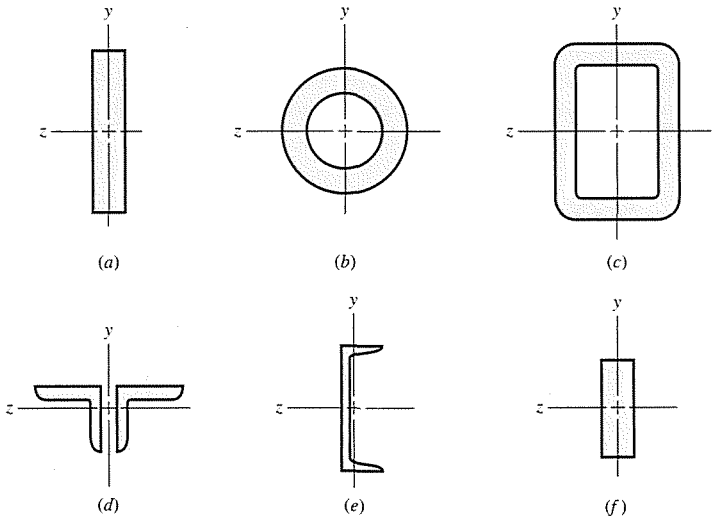
(*b*) Tubo de aço, com 2 in de diâmetro externo por $\frac{3}{8}$ in de espessura de parede, e comprimento de 48 in.

(*c*) Tubo oco de aço de 3 por 2 in de dimensões externas, fabricado de material de $\frac{3}{16}$ in de espessura soldado, com 48 in de comprimento.

(*d*) Ângulos de aço (cantoneiras) de $3 \times 3 \times \frac{1}{4}$ in e comprimento de 72 in.

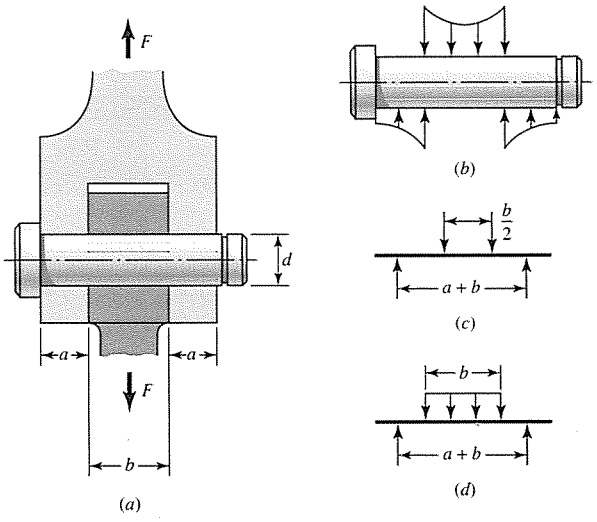
(*e*) Uma viga canal de aço de 4 in, 5,4 lbf e comprimento de 72 in.

(*f*) Uma barra de aço de 4 in por 1 in e comprimento de 72 in.



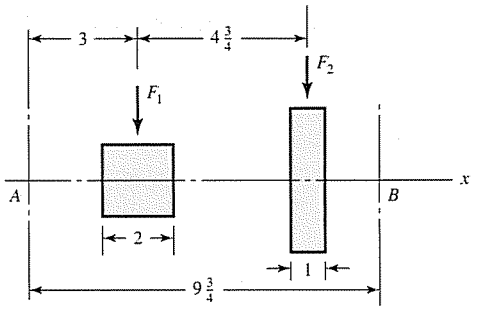
Problema 4-26

ANÁLISE **4-27** Um pino em uma junção de charneira (união articulada) suportando uma carga de tração F deflete algo por conta de seu carregamento, tornando a distribuição da reação e da carga tal como mostrado na parte *b* da figura. A hipótese de carregamento normalmente utilizada por projetistas é exibida na parte *c*; outros projetistas algumas vezes escolhem o carregamento como o apresentado na parte *d*. Se $a = 0{,}5$ in, $b = 0{,}75$ in, $d = 0{,}5$ in e $F = 1000$ lbf, estime a máxima tensão de flexão e a máxima tensão de cisalhamento decorrentes de V para cada aproximação.



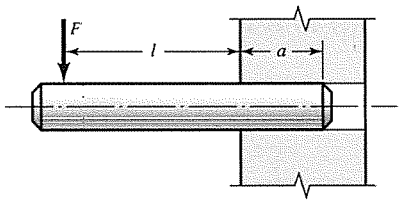
Problema 4-27

PROJETO **4-28** A figura ilustra duas engrenagens que devem ser montadas em um eixo posicionado segundo o eixo x. As cargas sobre essas engrenagens são $F_1 = 2$ kip e $F_2 = 1{,}1$ kip. Se um dos mancais estiver situado em A, deverá o outro mancal ser localizado entre as engrenagens ou depois delas – digamos, próximo a B? Soluções possíveis envolverão projetar para um momento flexor mínimo ou para reações iguais nos mancais.



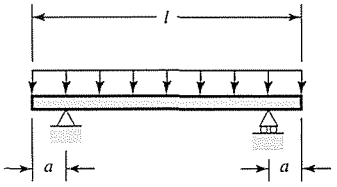
Problema 4-28

PROJETO **4-29** A figura ilustra um pino ajustado de maneira apertada em um orifício de um membro firme. Uma análise usual assume reações concentradas R e M a uma distância l de F. Suponha que a reação seja distribuída ao longo da distância a. A reação de momento resultante é maior ou menor que a reação concentrada? Qual é a intensidade de carregamento q? O que você acha de empregar a hipótese usual?



Problema 4-29

4-30 Para uma dada secção transversal, uma viga uniformemente carregada e de comprimento l está apenas apoiada, como mostra a figura. Se os suportes forem recuados a uma pequena distância, o máximo momento flexor transversal será reduzido. Se este puder ser minimizado, a menor secção da viga poderá ser utilizada. Escreva um programa de computador para descobrir o valor ótimo de recuo a. Submeta uma listagem dos programas que você escrever, com as entradas e saídas de execução, e a análise em que seu programa é baseado.



Problema 4-30

ANÁLISE **4-31** Considere uma viga de secção transversal retangular, apenas apoiada, com largura constante b e uma profundidade variável h, disposta de tal forma que a tensão máxima σ_x na superfície externa decorrente da flexão é constante quando submetida a uma carga F localizada a uma distância a do apoio esquerdo e a uma distância c do apoio direito. Mostre que a profundidade h na localidade x é fornecida por

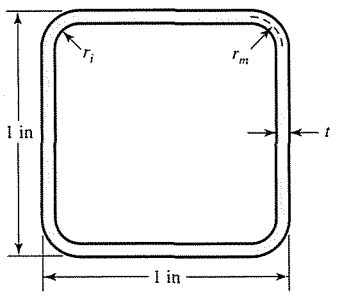
$$h = \sqrt{\frac{6Fcx}{lb\sigma_{\max}}} \qquad 0 \le x \le a$$

ANÁLISE **4-32** Considere uma viga estática de secção transversal circular, apenas apoiada, de diâmetro d, disposta de tal forma que a tensão máxima σ_x na superfície externa decorrente da flexão é constante quando sujeita a uma carga estática F localizada a uma distância a do apoio esquerdo e a uma distância b do apoio direito. Mostre que o diâmetro d em uma localidade x é fornecido por

$$d = \left(\frac{32Fbx}{\pi l\sigma_{\max}}\right)^{1/3} \qquad 0 \le x \le a$$

ANÁLISE **4-33** Dois tubos de aço com paredes finas de comprimento axial z devem ser comparados. O primeiro é de secção transversal quadrada, com lado de comprimento b e espessura de parede t. O segundo é redondo, de diâmetro b e espessura de parede t. A máxima tensão de cisalhamento admissível é τ_{all}, devendo ser a mesma em ambos os casos. Como se comparam os ângulos de torção, por unidade de comprimento, de cada caso?

ANÁLISE **4-34** Comece com um tubo de aço quadrado de parede fina de lado 1 in, espessura de parede $t = 0{,}05$ in e comprimento de 40 in; a seguir, introduza cantos arredondados com raio interno r_i, tensão de cisalhamento admissível τ_{all} de 11 500 psi e módulo de cisalhamento de $11{,}5(10^6)$ psi; por fim, monte uma tabela. Utilize uma coluna, referente aos raios internos de canto, com valores dentro do intervalo $0 \le r_i \le 0{,}45$ in. Outras colunas úteis incluem o raio da linha mediana r_m, o comprimento periférico (perímetro) L_m da linha mediana, a área incluída pela curva mediana, o torque T e o ângulo de torção θ. A secção transversal variará de um quadrado a um círculo. Um programa de computador reduzirá o esforço de cálculo. Estude a tabela. O que você aprendeu?

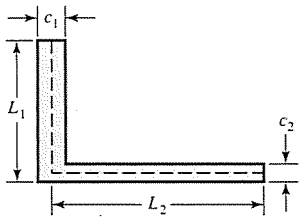


Problema 4-34

ANÁLISE **4-35** O ângulo de lado desigual mostrado na figura carrega um torque T. Mostre que

$$T = \frac{G\theta_1}{3}\sum L_i c_i^3$$

$$\tau_{\max} = G\theta_1 c_{\max}$$



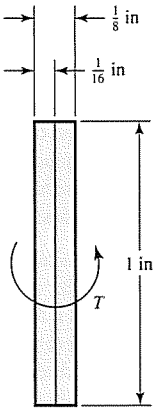
Problema 4-35

ANÁLISE **4-36** No Problema 4-35 o ângulo tem uma espessura de perna (lado) de $\frac{1}{16}$ in e a outra de $\frac{3}{32}$ in, com ambos os comprimentos de pernas de $\frac{1}{2}$ in. A tensão admissível de cisalhamento é $\tau_{all} = 11\,500$ psi para esse ângulo de aço.

(*a*) Encontre o torque carregado por cada perna e a maior tensão de cisalhamento nesse lugar.

(*b*) Encontre o ângulo de torção por unidade de comprimento da secção.

ANÁLISE **4-37** Duas tiras de aço retangulares finas com comprimento de 12 in são colocadas juntas, conforme mostrado. Utilizando a tensão máxima admissível de cisalhamento de 11 500 psi, determine o torque máximo, o ângulo de torção e a razão de torção de mola. Compare-os com uma tira única de secção transversal de 1 in por $\frac{1}{8}$ in.



Problema 4-37

ANÁLISE **4-38** Utilizando a tensão máxima admissível de cisalhamento de 8000 psi, encontre o diâmetro de eixo necessário para transmitir 50 hp quando

(*a*) A velocidade do eixo for de 2000 rpm.

(*b*) A velocidade do eixo for de 200 rpm.

ANÁLISE **4-39** Uma barra de aço com diâmetro de 15 mm deve ser usada como uma mola de torção. Se a tensão de torção sobre ela não tiver de exceder a 110 MPa quando uma extremidade for torcida a um ângulo de 30°, qual deverá ser o comprimento dessa barra?

ANÁLISE **4-40** Um eixo sólido de aço com diâmetro de 70 mm, utilizado como um transmissor de torque, é substituído por um eixo vazado de 70 mm, com uma espessura de parede de 6 mm. Se ambos os materiais têm a mesma resistência, qual é a redução percentual na transmissão de torque? Qual é a redução percentual no peso do eixo?

ANÁLISE **4-41** Um eixo de aço vazado deve transmitir 5400 N · m de torque e ser dimensionado de tal forma que a tensão de torção não exceda a 150 MPa.

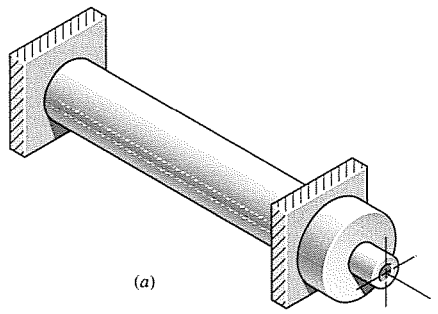
(*a*) Se o diâmetro interno corresponde a três quartos do diâmetro externo, que tamanho o eixo deve ter?

(*b*) Qual é a tensão no interior do eixo, quando o torque total é aplicado?

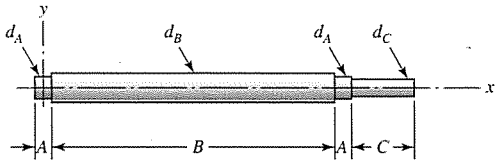
PROJETO **4-42** A figura exibe um rolo motor de esteira transportadora com um diâmetro de 6 in sendo movido a 5 rpm pela potência de motor-engrenagem, estimada em 1 hp. Determine um diâmetro apropriado de eixo d_c para uma tensão admissível de torção de 14 kpsi.

(*a*) Qual seria a tensão no eixo que você dimensionou, se o torque de arranque do motor fosse o dobro do torque de funcionamento?

(*b*) É provável que a tensão de flexão seja um problema? Qual é o efeito na flexão de diferentes comprimentos B do rolo?



(a)



(b)

Problema 4-42

PROJETO **4-43** O rolo motor de esteira ilustrado na figura do Problema 4-42 tem 150 mm de diâmetro e é movido a 8 rpm por uma potência de motor-engrenagem estimada em 1 kW. Encontre um diâmetro apropriado de eixo d_c com base em uma tensão admissível de torção de 75 MPa.

ANÁLISE **4-44** Considerando-se a mesma área de secção transversal $A = s^2 = \pi d^2 / 4$ para um eixo de área de secção transversal quadrada e para um eixo de área de secção transversal circular, qual deles, em torção, apresenta a tensão máxima mais elevada de cisalhamento, e por qual múltiplo ela é mais elevada?

ANÁLISE **4-45** Considerando-se a mesma área de secção transversal $A = s^2 = \pi d^2 / 4$ para um eixo de área de secção transversal quadrada e para um eixo de área de secção transversal circular, ambos de comprimento l, qual deles, em torção, apresenta o maior ângulo de torção, e por qual múltiplo ele é maior?

ANÁLISE **4-46** W. C. Young e R. G. Budynas, em *Roark's Formulas for Stress and Strain*, consideram a torção de uma secção transversal retangular $2a$ por $2b$, na qual $2a$ é o lado mais longo, e a relação para a tensão máxima de cisalhamento no centro do lado mais longo, como uma função de b / a, é fornecida por

$$\tau_{\max} = \frac{3T}{8ab^2}\left[1 + 0{,}6095\frac{b}{a} + 0{,}8865\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 1{,}8023\left(\frac{b}{a}\right)^3 + 0{,}9100\left(\frac{b}{a}\right)^4\right]$$

Compare os primeiros dois termos da expressão polinomial em b / a com a Equação (4-43). Se você encontrar alguma discrepância, comente a respeito da(s) razão(ões) disso. A Equação (4-43) tem a forma

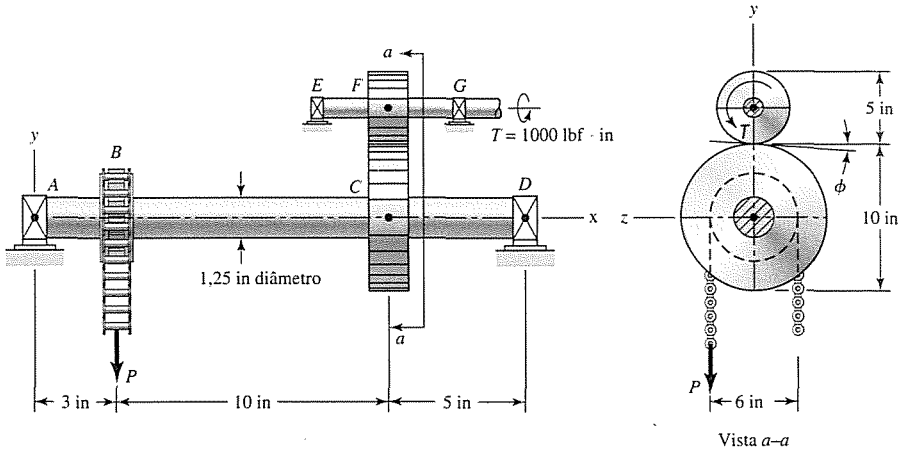
$$\tau_{\max} = \frac{T}{bc^2}\frac{1}{\alpha}$$

A partir da tabulação de α *versus* b/c, trace $1 / \alpha$ como ordenada e $1 / (b / c)$ como abscissa. Se a série de dados for linear, ou aproximadamente linear, encontre a_0 e a_1 de

$$\frac{1}{\alpha} = a_0 + a_1\frac{1}{b/c}$$

por regressão linear. Compare os resultados com a Equação (4-43).

4-47 Um torque de $T = 1000$ lbf · in é aplicado ao eixo EFG, que está funcionando a uma velocidade constante e contém a engrenagem F. Essa engrenagem transmite o torque ao eixo $ABCD$ pela engrenagem C, que comanda a roda dentada de corrente em B, transmitindo uma força P, como mostrado. A roda dentada B, a engrenagem C e a engrenagem F têm diâmetros primitivos (de referência) de 6, 10 e 5 in, respectivamente. A força de contato entre as engrenagens é transmitida pelo ângulo de pressão $\phi = 20°$. Assumindo zero perdas friccionais e considerando os mancais em A, D, E e G suportes simples, localize o ponto no eixo $ABCD$ que contém as tensões máximas de tração de flexão e de cisalhamento por torção. A partir daí, determine as tensões máximas de tração e de cisalhamento no eixo.



Problema 4-47

ANÁLISE **4-48** Se a placa carregada em tração apresentada na Figura 4-31 for infinitamente larga, então o estado de tensão em qualquer ponto dela poderá ser descrito em coordenadas polares como

$$\sigma_r = \frac{\sigma}{2}\left(1 - \frac{d^2}{4r^2}\right) - \frac{\sigma}{2}\left(1 - \frac{d^2}{4r^2}\right)\left(1 - \frac{3d^2}{4r^2}\right)\cos 2\theta$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma}{2}\left(1 + \frac{d^2}{4r^2}\right) + \frac{\sigma}{2}\left(1 + \frac{3d^4}{16r^4}\right)\cos 2\theta$$

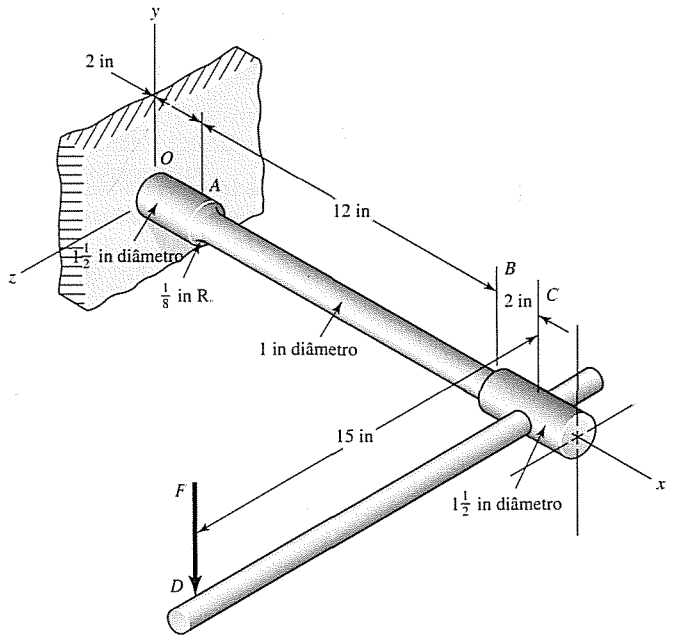
$$\tau_{r\theta} = \frac{\sigma}{2}\left(1 - \frac{d^2}{4r^2}\right)\left(1 + \frac{3d^2}{4r^2}\right)\operatorname{sen} 2\theta$$

para as componentes de tensão radial, tangencial e de cisalhamento, respectivamente. Aqui, r é a distância do centro ao ponto de interesse e θ é medido positivo em sentido anti-horário, a partir do eixo x.

(*a*) Encontre as componentes de tensão, no topo e no lado do orifício, para $r = d/2$.

(*b*) Trace um gráfico da distribuição de tensão para σ_θ, similar àquele da Figura 4-31, até $r = 20$ mm para $d = 10$ mm.

ANÁLISE **4-49** Considerando a concentração de tensão no ponto A da figura, determine as tensões máximas normal e de cisalhamento em A se $F = 200$ lbf.



Problema 4-49

ANÁLISE **4-50** Desenvolva as fórmulas para as tensões máximas radial e tangencial em um cilindro de parede espessa decorrentes de pressão interna apenas.

ANÁLISE **4-51** Repita o Problema 4-50 para o caso em que o cilindro está sujeito a pressão externa apenas. Para quais raios as tensões máximas ocorrem?

4-52 Desenvolva as relações de tensão para um vaso de pressão esférico e de parede fina.

ANÁLISE **4-53** Um cilindro de pressão tem um diâmetro de 6 in e uma espessura de parede de $\frac{1}{4}$ in. Que pressão pode esse vaso suportar se a tensão máxima de cisalhamento não exceder a 4000 psi?

ANÁLISE **4-54** Um vaso de pressão tem um diâmetro externo de 240 mm e uma espessura de parede de 10 mm. Se a pressão interna for de 2400 kPa, qual será a tensão máxima de cisalhamento nas paredes do vaso?

ANÁLISE **4-55** Um tubo de aço AISI 1020 repuxado a frio apresenta um diâmetro interno de $1\frac{1}{4}$ in e um diâmetro externo de $1\frac{3}{4}$ in. Que pressão externa máxima pode esse tubo suportar se a maior tensão normal principal não exceder a 80% da resistência mínima de escoamento do material?

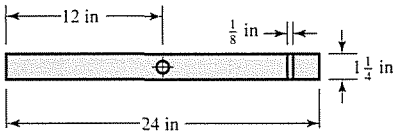
ANÁLISE **4-56** Um tubo de aço AISI 1020 repuxado a frio tem um diâmetro interno de $1\frac{3}{4}$ in e um diâmetro externo de $2\frac{3}{8}$ in. Que pressão interna máxima pode esse tubo suportar se a maior tensão normal principal não exceder a 80% da resistência mínima de escoamento do material?

ANÁLISE **4-57** Encontre a tensão máxima de cisalhamento em uma serra circular de 10 in, se ela rodar em marcha lenta a 7200 rpm. A serra tem bitola 14 (0,0747 in) e é usada em uma árvore de $\frac{3}{4}$ in. A espessura é uniforme. Qual é a máxima componente radial de tensão?

ANÁLISE **4-58** A velocidade máxima recomendada para um roda abrasiva de esmerilhar com 300 mm de diâmetro é de 2069 rpm. Assuma que o material é isotrópico; utilize um orifício de 25 mm, $\nu = 0{,}24$ e uma densidade de massa de 3320 kg/m^3; encontre, então, a tensão máxima de tração a essa velocidade.

ANÁLISE **4-59** Uma roda abrasiva de corte tem um diâmetro de 6 in, espessura de $\frac{1}{16}$ in e um orifício de 1 in. Ela pesa 6 oz e está projetada para girar a 10 000 rpm. Se o material for isotrópico e $\nu = 0{,}20$, encontre a tensão máxima de cisalhamento à velocidade de projeto.

ANÁLISE **4-60** Uma lâmina rotativa de um cortador de grama gira a 3000 rpm. A lâmina de aço tem uma secção transversal uniforme de $\frac{1}{8}$ in de espessura por $1\frac{1}{4}$ in de largura e um orifício com diâmetro de $\frac{1}{2}$ in no centro, conforme ilustrado na figura. Estime a tensão nominal de tração na secção central decorrente da rotação.



Problema 4-60

ANÁLISE **4-61 a 4-66** A tabela lista os orifícios máximo e mínimo e as dimensões de eixo para vários ajustes padronizados de pressão e contração. Os materiais são ambos aço laminado a quente. Encontre os valores máximo e mínimo da interferência radial e a correspondente pressão de interface. Utilize um diâmetro de colar de 80 mm para tamanhos métricos e 3 in para aqueles em unidades de polegadas.

Número do problema	Designação de ajuste*	Tamanho básico	Orifício		Eixo	
			D_{max}	D_{min}	d_{max}	d_{min}
4-61	40H7/p6	40 mm	40,025	40,000	40,042	40,026
4-62	(1,5 in)H7/p6	1,5 in	1,5010	1,5000	1,5016	1,5010
4-63	40H7/s6	40 mm	40,025	40,000	40,059	40,043
4-64	(1,5 in)H7/s6	1,5 in	1,5010	1,5000	1,5023	1,5017
4-65	40H7/u6	40 mm	40,025	40,000	40,076	40,060
4-66	(1,5 in)H7/u6	1,5 in	1,5010	1,5000	1,5030	1,5024

**Notas:* Veja a Tabela 2-8 para a descrição dos ajustes.

ANÁLISE **4-67 a 4-70**

A tabela fornece dados concernentes ao ajuste de contração de dois cilindros de materiais diferentes e especificação dimensional em polegadas. As constantes elásticas para esses materiais podem ser encontradas na Tabela A-5. Identifique a interferência radial δ e então encontre a pressão de interferência p, a tensão tangencial normal em ambos os lados da superfície de ajuste e os deslocamentos radiais interno e externo δ_i e δ_o. Se as tolerâncias dimensionais forem dadas nas superfícies de ajuste, repita o problema para os níveis mais altos e mais baixos de tensão.

Número do problema	Cilindro interno			Cilindro externo		
	Material	d_i	d_o	Material	D_i	D_o
4-67	Aço	0	1,002	Aço	1,000	2,00
4-68	Aço	0	1,002	Ferro fundido	1,000	2,00
4-69	Aço	0	1,002/1,003	Aço	1,000/1,001	2,00
4-70	Aço	0	2,005/2,003	Alumínio	2,000/2,002	4,00

ANÁLISE **4-71**

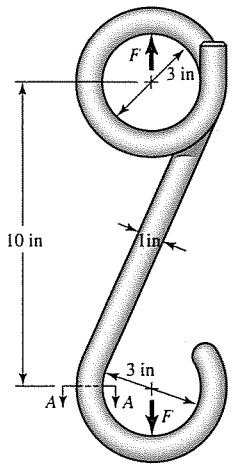
Ajustes forçados de um eixo e uma engrenagem são montados em um eixo-árvore operado a ar. Uma estimativa da força de montagem e da capacidade de torque do ajuste é necessária. Assuma que o coeficiente de fricção seja f, que a pressão na interface de ajuste seja p, que o raio nominal do eixo ou do orifício seja R e que o comprimento longitudinal do orifício de engrenagem seja l.

(*a*) Mostre que a estimativa da força axial é $F_{ax} = 2\pi fRlp$.

(*b*) Mostre que a estimativa da capacidade de torque do ajuste é $T = 2\pi fR^2lp$.

ANÁLISE **4-72**

Um gancho utilitário foi feito de um eixo redondo, com diâmetro de 1 in, na geometria mostrada na figura. Quais serão as tensões nas superfícies interna e externa da secção A-A, se a carga F for de 1000 lbf?



Problema 4-72

ANÁLISE **4-73**

O olhal de aço exibido na figura é carregado com uma força F de 100 lbf. O parafuso é feito de um arame com diâmetro de $\frac{1}{4}$ in, a um raio de $\frac{3}{8}$ in no olho e na haste. Estime as tensões nas superfícies interna e externa das secções A-A e B-B.

ANÁLISE **4-74**

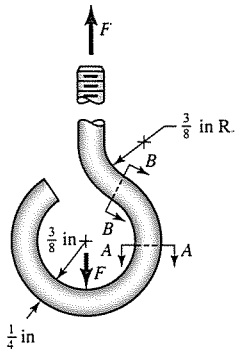
Na figura está ilustrada uma mola de fecho de bitola 12 (0,1094 in) por $\frac{3}{4}$ in, a qual suporta uma carga de $F = 3$ lbf. O raio interno da curva é de $\frac{1}{8}$ in. Estime as tensões nas superfícies interna e externa da secção crítica.

ANÁLISE **4-75**

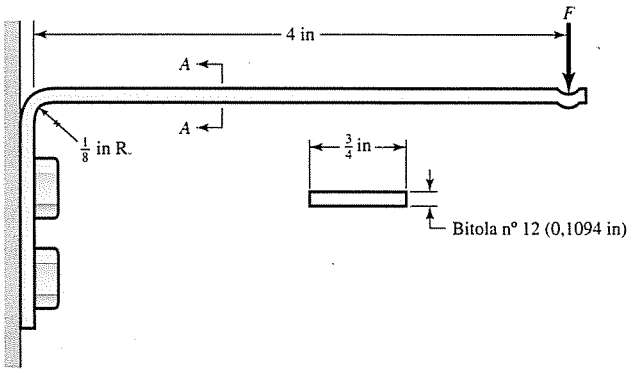
A alavanca de ferro fundido da manivela de tipo sino mostrada na figura é movida pelas forças F_1, de 250 lbf, e F_2, de 333 lbf. A secção A-A, no pivô central, tem uma superfície interna curva com um raio de $r_i = 1$ in. Estime as tensões nas superfícies interna e externa da porção curva da alavanca.

ANÁLISE **4-76**

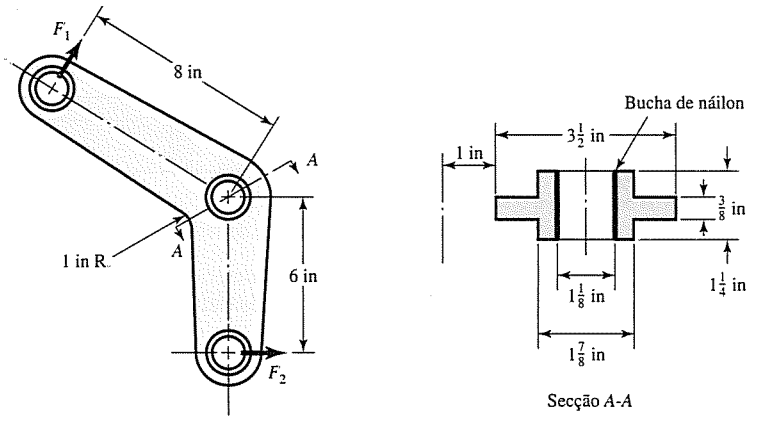
O gancho de guindaste ilustrado na Figura 4-38 tem um orifício com diâmetro de 1 in no centro da secção crítica. Para uma carga de 5 kip, estime as tensões de flexão nas superfícies interna e externa dessa secção.



Problema 4-73

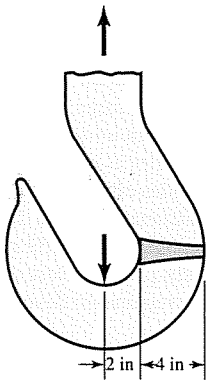


Problema 4-74



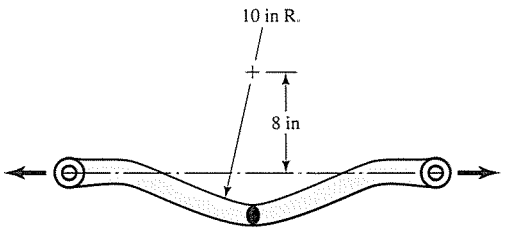
Problema 4-75

ANÁLISE **4-77** Uma carga de 20 kip é carregada pelo gancho de guindaste exibido na figura. A secção transversal desse gancho utiliza dois flancos côncavos. A largura de tal secção é fornecida por $b = 2/r$, em que r é o raio a partir do centro. O raio interno r_i é de 2 in, e o raio externo, $r_o = 6$ in. Encontre as tensões nas superfícies interna e externa da secção crítica mediante (*a*) integração exata e (*b*) solução numérica utilizando 1000 incrementos de Δs. *Nota:* r_c também deve ser avaliado numericamente.



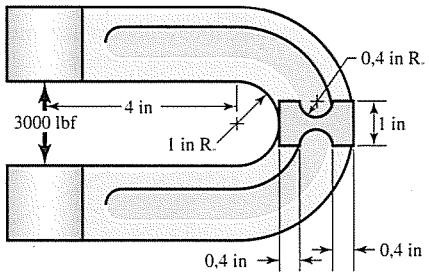
Problema 4-77

ANÁLISE **4-78** Um elo descentrado de tração é moldado para limpar uma obstrução com uma geometria como a mostrada na figura. A secção transversal na localidade crítica é elíptica, com um eixo maior de 4 in e um eixo menor de 2 in. Para uma carga de 20 kip, estime as tensões nas superfícies interna e externa da secção crítica.



Problema 4-78

ANÁLISE **4-79** Uma estrutura em C de aço fundido, conforme exibida na figura, tem uma secção transversal retangular de 1 in por 1,6 in, com um entalhe semicircular de raio de 0,4 in em ambos os lados, o qual forma estrias de meio flanco, como mostrado. Estime A, r_c, r_n e e; para uma carga de 3000 lbf, estime as tensões das superfícies interna e externa na garganta C. *Nota:* A Tabela 4-5 pode ser utilizada de modo a determinar r_n para essa secção. A partir dessa tabela, a integral $\int dA/r$ pode ser estimada, para um retângulo e um círculo, mediante a avaliação de A / r_n para cada forma [ver Equação (4-64)]. Subtrair A / r_n do círculo a partir daquela do retângulo produz $\int dA/r$ para a estrutura em C, de modo que r_n pode então ser avaliada.



Problema 4-79

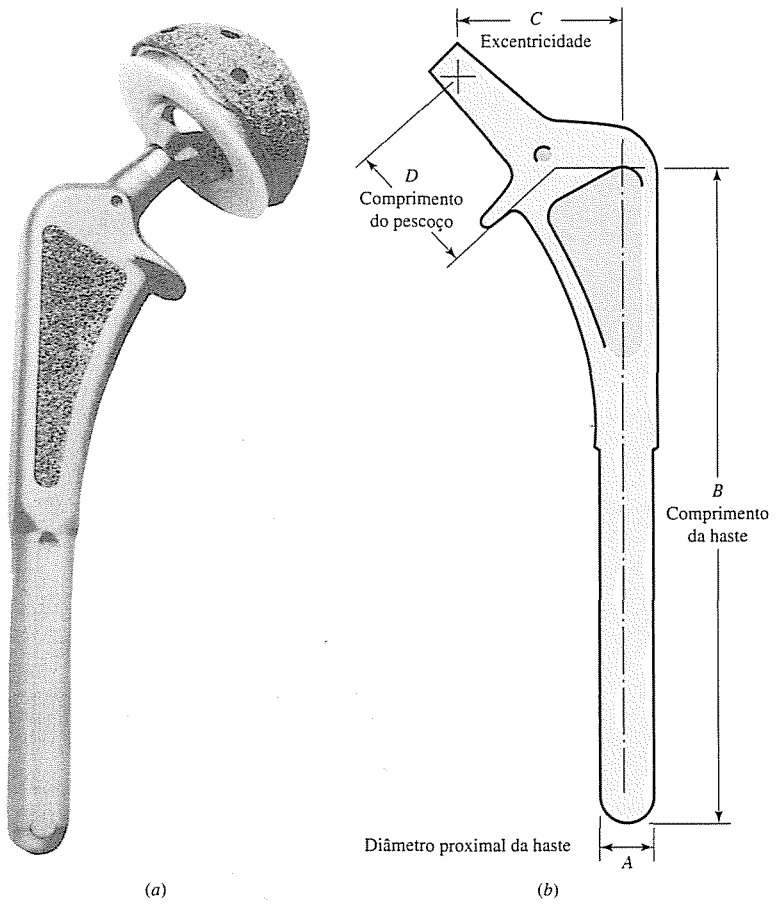
4-80 Solucione o Problema 4-79 numericamente, utilizando 100 e 1000 elementos. Compare seus resultados com o Problema 4-79, se solucionado previamente.

ANÁLISE **4-81** Duas bolas de aço carbono, cada qual com 25 mm de diâmetro, são pressionadas conjuntamente por uma força F. Em termos dessa força, encontre os valores máximos da tensão principal e a tensão máxima de cisalhamento, em MPa.

ANÁLISE **4-82** Uma das bolas do Problema 4-81 é substituída por uma chapa plana de aço carbono. Se $F = 18$ N, a que profundidade a máxima tensão de cisalhamento ocorre?

ANÁLISE **4-83** Um rolo de liga de alumínio com um diâmetro de 1 in e um comprimento de 2 in rola no lado interno de um anel de ferro fundido tendo um raio interno de 4 in, o qual apresenta espessura de 2 in. Encontre a força máxima de contato F que poderá ser utilizada se a tensão de cisalhamento não exceder a 4000 psi.

ANÁLISE **4-84** A figura da página 193 mostra uma prótese de quadril contendo uma haste que é cimentada em uma cavidade escareada no fêmur. A copa é cimentada e parafusada ao quadril com parafusos de osso. São exibidas camadas porosas de titânio nas quais o tecido ósseo crescerá para formar uma união bem mais durável que aquela propiciada pelo cimento apenas. As superfícies de apoio (mancal) são uma copa plástica e uma cabeça femoral de titânio. O lábio mostrado nas figuras resiste contra a extremidade de corte do fêmur, de modo a transferir a carga do quadril para a perna. Caminhadas induzirão vários milhões de flutuações de tensão por ano para uma pessoa mediana, existindo, pois, o perigo de que a prótese afrouxe a ligação cimentada ou que trincas de metal possam ocorrer por causa das muitas repetições de tensão. Próteses como essa são produzidas em muitos tamanhos diferentes. As dimensões típicas são as seguintes: diâmetro de bola de 50 mm, diâmetro da haste de 15 mm, comprimento da haste de 155 mm, excentricidade de 38 mm e comprimento de pescoço de 39 mm. Desenvolva um esquema para seguir, ao efetuar uma análise completa de tensão dessa prótese. Descreva as propriedades necessárias do material, as equações requeridas e de que forma o carregamento deve ser definido.



Problema 4-84
Prótese porosa de quadril. (*Fotografia e desenho* cortesia de Zimmer, Inc., Warsaw, Indiana.)

ANÁLISE **4-85** Simplifique as Equações (4-74), (4-75) e (4-76) estabelecendo $z = 0$ e encontre σ_x / p_{max}, σ_y / p_{max}, σ_z / p_{max} e $\tau_{2/3} / p_{max}$; ademais, para ferro fundido, verifique a ordenada de intersecção dos quatro locais geométricos da Figura 4-43.

ANÁLISE **4-86** Uma roda de ferro fundido, com diâmetro de 6 in e 2 in de largura, rola sobre uma superfície plana de aço sustentando uma carga de 800 lbf.

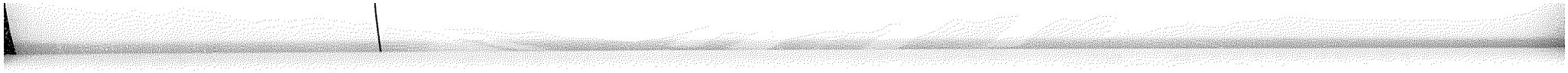
(*a*) Encontre as tensões hertzianas σ_x, σ_y, σ_z e $\tau_{2/3}$.

(*b*) O que acontece com as tensões em um ponto A que está 0,010 in abaixo da superfície do aro da roda durante uma revolução?

4-87 Escreva um programa interativo de computador que avalie as Equações (4-82) a (4-85) e que complete uma tabela de $0 \le y/b \le 1$ para colunas e $0 \le z/b \le 1$ para linhas, tendo o corpo dessa tabela qualquer tensão de interesse: σ_x, σ_y, σ_z, τ_{yz}, σ_1, σ_2, σ_3 e τ_{max}.

4-88 Utilize o programa do Problema 4-87 para solucionar o Problema 4-86.

4-89 Utilize o programa do Problema 4-87 para solucionar o Problema 4-86 com um coeficiente de fricção $f = 0{,}10$. Observe as mudanças.



CAPÍTULO 5

Deflexão e Rigidez

5-1 Razões de Mola 192
5-2 Tração, Compressão e Torção 193
5-3 Deflexão por Flexão 193
5-4 Métodos de Deflexão de Viga 196
5-5 Determinação das Deflexões de Viga por Superposição 197
5-6 Deflexões de Viga por Funções de Singularidade 199
5-7 Energia de Deformação 203
5-8 Teorema de Castigliano 206
5-9 Deflexão de Membros Curvos 210
5-10 Problemas Estaticamente Indeterminados 214
5-11 Membros de Compressão – Geral 219
5-12 Colunas Longas com Carregamento Central 221
5-13 Colunas de Comprimento Intermediário com Carregamento Central 224
5-14 Colunas com Carregamento Excêntrico 224
5-15 Pilarete, ou Membros Curtos de Compressão 228
5-16 Choque e Impacto 230
5-17 Carregamento Aplicado Subitamente 231

Um corpo é considerado *rígido* quando não exibe mudança de forma ou tamanho sob a influência de forças e momentos. Todos os corpos reais deformam-se sob carga, seja elástica ou plasticamente. A classificação de um corpo real como rígido é uma idealização. Um corpo pode ser tão suficientemente insensível à deformação que a presunção de rigidez não afeta a análise a ponto de justificar um tratamento de corpo não-rígido. Ao contrário do tratamento baseado em uma *suposição* de rigidez, o baseado na *decisão* de ignorar a deformação representa um desvio tão pequeno da realidade que o tratamento assumindo rigidez é apropriado. Se mais tarde a deformação do corpo resultar não-desprezível, então declará-lo como rígido terá sido uma má decisão, e não uma má hipótese. Estritamente falando, *flexibilidade* é a habilidade de um corpo distorcer-se por flexão, ou seja, apenas uma forma de distorção – porém, o termo é utilizado de forma intercambiável com distorção. Definir a escolha como bilateral – rígido *ou* flexível – deixa sem resposta outras possibilidades. Um cabo de aço é flexível, ainda que sob tração possa ser fortemente rígido, e distorce-se enormemente quando submetido a carregamento de compressão. Um mesmo corpo, portanto, pode ser considerado rígido e não-rígido.

A análise de deflexões aparece em situações de projeto sob várias formas. Um anel de pressão ou de retenção deve ser flexível o bastante para ser dobrado sem apresentar deflexão permanente e ser montado com outras componentes; portanto, deve ser rígido o suficiente para manter as partes montadas juntas. Em uma transmissão, as engrenagens devem ser suportadas por um eixo rígido. Se tal eixo fletir demasiadamente, isto é, se for muito flexível, os dentes não irão engranzar de forma apropriada, resultando em impacto excessivo, barulho, desgaste e falha prematura. Em chapas laminadas ou aço em tiras com espessuras prescritas, os rolos devem ser coroados, isto é, curvados, de modo que o produto acabado será de espessura uniforme. Assim, para projetar rolos é necessário saber exatamente o quanto eles irão fletir no momento em que uma chapa de aço for passada entre eles. Algumas vezes, elementos mecânicos devem ser projetados para ter uma característica particular de força-deflexão. O sistema de suspensão de um automóvel, por exemplo, deve ser projetado dentro de um intervalo muito estreito, tendo em vista alcançar uma freqüência de rebote ótima para todas as condições de carregamento do veículo, uma vez que o corpo humano só se sente confortável dentro de um intervalo limitado de freqüências.

O tamanho de uma componente de suporte de carga geralmente é determinado com base nas deflexões, em vez de nos limites sobre tensões.

Este capítulo considerará a distorção de corpos individuais devida à geometria (forma) e ao carregamento e então, de modo breve, o comportamento de conjuntos de corpos.

5-1 Razões de Mola

Elasticidade é aquela propriedade de um material que lhe permite recuperar sua configuração original após ter sido deformado. Uma *mola* é um elemento mecânico que exerce uma força quando deformado. A Figura 5-1(*a*) mostra uma viga reta de comprimento l apoiada apenas nas extremidades e carregada por uma força transversal F. A deflexão y está linearmente relacionada à força, desde que o limite elástico do material não seja excedido, como indicado pelo gráfico. Essa viga pode ser descrita como uma *mola linear.*

Na Figura 5-1(*b*), uma viga reta está apoiada em dois cilindros, de modo que o comprimento entre os suportes diminui à medida que ela é defletida pela força F. Uma força maior faz-se mais necessária para defletir uma viga curta do que uma longa; logo, quanto mais essa viga é defletida, tanto mais rígida se torna. Além disso, a força não se relaciona de forma linear com a deflexão, daí essa viga poder ser descrita como uma *mola com enrijecimento não-linear.*

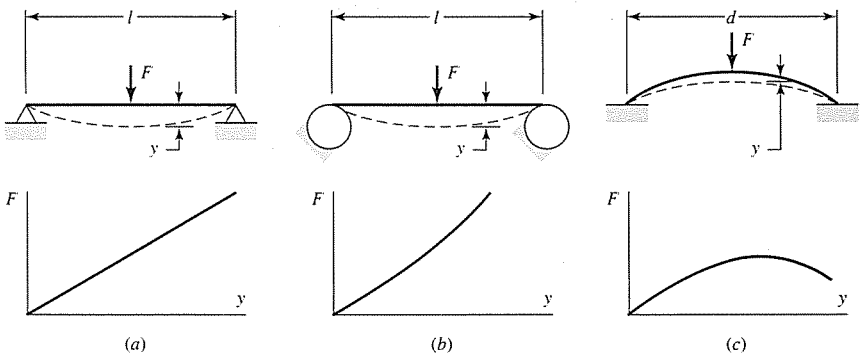


Figura 5-1 (*a*) Uma mola linear; (*b*) uma mola de enrijecimento; (*c*) uma mola de amolecimento.

A Figura 5-1(*c*) apresenta um disco redondo de forma convexa. A força necessária para torná-lo plano aumenta no início e então decai à medida que ele se aproxima da configuração plana, como mostrado pelo gráfico. Qualquer elemento mecânico que tenha tal característica é chamado de *mola com amolecimento não-linear.*

Se designarmos a relação geral entre força e deflexão pela equação

$$F = F(y) \tag{a}$$

então, a *razão de mola* é definida como

$$k(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta y} = \frac{dF}{dy} \tag{5-1}$$

em que y deve ser medido na direção e no ponto de aplicação de F. A maioria dos problemas de força-deflexão encontrados neste livro é linear, como na Figura 5-1(*a*). Para tais problemas, k é uma constante, também chamada de *constante de mola*; conseqüentemente, a Equação (5-1) é escrita como

$$k = \frac{F}{y} \tag{5-2}$$

Podemos observar que as Equações (5-1) e (5-2) são bastante gerais e aplicam-se igualmente bem a torques e momentos, contanto que medidas angulares sejam utilizadas para y. Para deslocamentos lineares, as unidades de k são freqüentemente libras por polegada ou newtons por metro e, para deslocamentos angulares, libra-polegadas por radianos ou newton-metros por radianos.

5-2 Tração, Compressão e Torção

A relação para a extensão total ou deformação de uma barra uniforme já foi desenvolvida na Seção 4-8, Equação (*a*), de modo que é repetida aqui por conveniência:

$$\delta = \frac{Fl}{AE} \tag{5-3}$$

Tal equação não se aplica a uma barra longa carregada em compressão, no caso de existir a possibilidade de flambagem. Utilizando as Equações (5-2) e (5-3), observamos que a razão de mola de uma barra carregada axialmente é

$$k = \frac{AE}{l} \tag{5-4}$$

A deflexão angular de uma barra circular uniforme submetida a um momento torcional T foi introduzida na Equação (4-35) e é

$$\theta = \frac{Tl}{GJ} \tag{5-5}$$

em que θ é medido em radianos. Se multiplicarmos a Equação (5-5) por $180/\pi$ e introduzirmos o valor $J = \pi d^4/32$, no caso de uma barra redonda sólida, obteremos

$$\theta = \frac{583{,}6Tl}{Gd^4} \tag{5-6}$$

em que θ é expresso em graus.

A Equação (5-5) pode ser rearranjada para fornecer a razão de mola torcional na forma

$$k = \frac{T}{\theta} = \frac{GJ}{l} \tag{5-7}$$

Quando a palavra *simples* é utilizada para descrever o carregamento, isso significa que nenhuma outra carga está presente e que complexidades geométricas tampouco o estão. Assim, uma barra carregada em *tração simples* é uma barra uniforme sobre a qual atua uma carga de tração dirigida segundo o eixo centróide, não havendo quaisquer outras cargas agindo sobre a mesma.

5-3 Deflexão por Flexão

Vigas defletem muito mais que membros carregados de forma axial, e o problema de flexão ocorre provavelmente com mais freqüência que qualquer outro de carregamento em projeto. Eixos fixos ou rotativos, virabrequins,

alavancas, molas, cantoneiras e rodas, assim como muitos outros elementos, devem freqüentemente ser tratados como vigas no projeto e análise de estruturas mecânicas e sistemas. A flexão é, contudo, um dos temas que você deve ter estudado como preparativo para a leitura deste livro. É por essa razão que incluímos aqui apenas uma breve revisão para estabelecer a nomenclatura e as convenções a serem utilizadas ao longo do texto.

Na Seção 4-10, desenvolvemos a expressão para a curvatura de uma viga submetida a um momento flexor M [Equação (4-25)]. A relação é

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \tag{5-8}$$

em que ρ é o raio de curvatura. A partir dos estudos de matemática, também aprendemos que a curvatura de uma curva plana é fornecida pela equação

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y/dx^2}{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}} \tag{5-9}$$

em que a interpretação, aqui, é a de que y é a deflexão da viga em qualquer ponto x ao longo do seu comprimento. A inclinação dessa viga para qualquer ponto x é

$$\theta = \frac{dy}{dx} \tag{a}$$

Para diversos problemas de flexão, a inclinação é muito pequena, e para tais casos o denominador na Equação (5-9) pode ser considerado unitário. A Equação (5-8) pode então ser escrita como

$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2} \tag{b}$$

Observando as Equações (4-3) e (4-4) e derivando de forma sucessiva a Equação (b), obtemos

$$\frac{V}{EI} = \frac{d^3y}{dx^3} \tag{c}$$

$$\frac{q}{EI} = \frac{d^4y}{dx^4} \tag{d}$$

É conveniente apresentar essas equações em grupo, como segue:

$$\frac{q}{EI} = \frac{d^4y}{dx^4} \tag{5-10}$$

$$\frac{V}{EI} = \frac{d^3y}{dx^3} \tag{5-11}$$

$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2} \tag{5-12}$$

$$\theta = \frac{dy}{dx} \tag{5-13}$$

$$y = f(x) \tag{5-14}$$

A nomenclatura e as convenções são ilustradas pela viga da Figura 5-2. Aqui, uma viga de comprimento $l = 20$ in é carregada por uma carga uniforme $w = 80$ lbf por in de comprimento de viga. O eixo x é positivo para a direita, e o eixo y é positivo para cima. Todas as quantidades – carregamento, cisalhamento (força cortante), momento, inclinação e deflexão – têm o mesmo sentido que y; são positivas para cima e negativas para baixo.

Os valores das quantidades nas extremidades da viga, em que $x = 0$ e $x = l$, são denominados seus *valores de extremidade (contorno)*. Por essa razão, o problema de viga é freqüentemente chamado de *problema de valor de extremidade (ou contorno)*. As reações $R_1 = R_2 = +800$ lbf e as forças cortantes $V_0 = +800$ lbf e $V_l = -800$ lbf

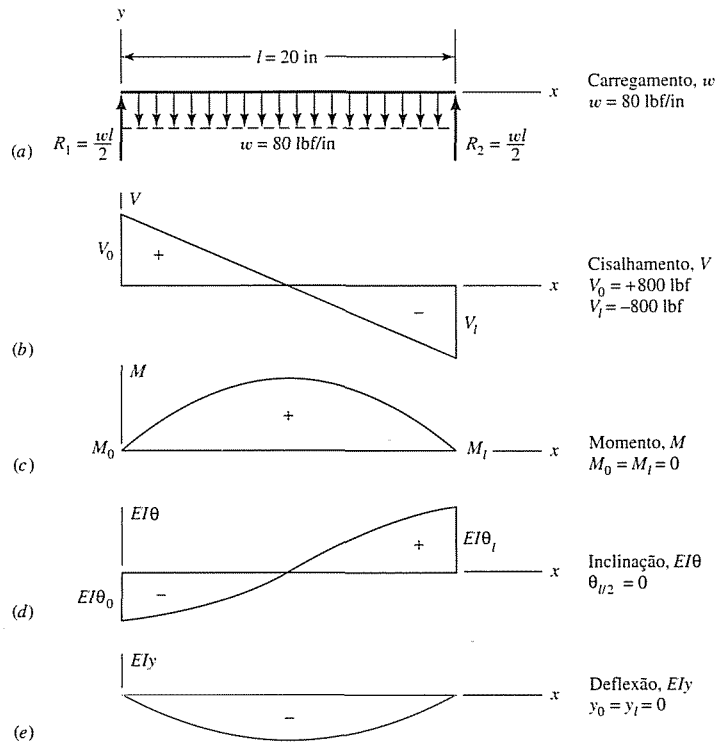


Figura 5-2

são facilmente computadas utilizando-se os métodos do Capítulo 4. O momento flexor é zero em cada extremidade porque a viga está simplesmente apoiada. Para uma viga em tal condição, as deflexões são zero em cada extremidade. As inclinações em cada extremidade são inicialmente desconhecidas, mas observando a Figura 5-2(*e*) é óbvio que a inclinação é negativa na extremidade esquerda e positiva na direita.

EXEMPLO 5-1

Para a viga da Figura 5-2, a equação do momento flexor, para $0 \le x \le l$, é

$$M = \frac{wl}{2}x - \frac{w}{2}x^2$$

Utilizando a Equação (5-12), determine as equações para a inclinação e a deflexão da viga, as inclinações nas extremidades e a deflexão máxima.

Solução

Integrando a Equação (5-12) como uma integral indefinida, temos

$$EI\frac{dy}{dx} = \int M\,dx = \frac{wl}{4}x^2 - \frac{w}{6}x^3 + C_1 \tag{1}$$

em que C_1 é a constante de integração avaliada a partir das condições geométricas de contorno. Podemos impor que a inclinação seja zero no meio da viga, visto que a viga e o carregamento são simétricos relativamente ao meio. Contudo, usaremos as condições de contorno fornecidas pelo problema e verificaremos que essa inclinação é zero no meio da viga. Integrando a Equação (1), obtemos

$$EIy = \iint M\,dx = \frac{wl}{12}x^3 - \frac{w}{24}x^4 + C_1x + C_2 \tag{2}$$

As condições de contorno para a viga simplesmente apoiada são $y = 0$ em $x = 0$ e l. Aplicar a primeira condição, $y = 0$ em $x = 0$, para a Equação (2) resulta em $C_2 = 0$. Aplicando a segunda condição para a mesma equação, com $C_2 = 0$,

$$EIy(l) = \frac{wl}{12}l^3 - \frac{w}{24}l^4 + C_1 l = 0$$

Solucionar para C_1 produz $C_1 = -wl^3/24$. Substituir as constantes de volta nas Equações (1) e (2) e solucionar para a deflexão e a inclinação resulta em

$$y = \frac{wx}{24EI}(2lx^2 - x^3 - l^3) \tag{3}$$

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{w}{24EI}(6lx^2 - 4x^3 - l^3) \tag{4}$$

Comparando a Equação (3) com aquela fornecida na Tabela A-9, viga 7, vemos uma concordância completa.

Para a inclinação na extremidade esquerda, substituindo $x = 0$ na Equação (4), obtemos

$$\theta|_{x=0} = -\frac{wl^3}{24EI}$$

e, em $x = l$,

$$\theta|_{x=l} = \frac{wl^3}{24EI}$$

No meio da viga, substituir $x = l/2$ produz $dy/dx = 0$, como se suspeitava anteriormente.

A deflexão máxima ocorre onde $dy/dx = 0$. Substituir $x = l/2$ na Equação (3) produz

$$y_{\max} = -\frac{5wl^4}{384EI}$$

o que uma vez mais está de acordo com a Tabela A-9-7.

A abordagem utilizada no exemplo é boa para vigas simples com carregamento contínuo. Todavia, para vigas com carregamento descontínuo e/ou geometria tal como um eixo escalonado com múltiplas engrenagens, volantes, polias, etc., essa abordagem torna-se inconveniente. A seção seguinte discute as deflexões por flexão em geral e as técnicas fornecidas neste capítulo.

5-4 Métodos de Deflexão de Viga

As Equações (5-10) a (5-14) são fundamentais para relacionar a intensidade do carregamento q, a força cortante vertical V, o momento flexor M, a inclinação da superfície neutra θ e a deflexão transversal y. As vigas têm intensidades de carregamento que variam de q = constante (carregamento uniforme), intensidade variável $q(x)$, a funções Dirac delta (cargas concentradas).

A intensidade de carregamento geralmente consiste em zonas contíguas por partes, cujas expressões são integradas, por meio das Equações (5-10) a (5-14), com graus variados de dificuldade. Uma outra abordagem é representar a deflexão $y(x)$ como uma série de Fourier, algo capaz de representar funções de valor único por meio de um número finito de descontinuidades finitas, então diferenciando inteiramente desde as Equações (5-14) a (5-10) e parando em algum nível no qual os coeficientes de Fourier possam ser avaliados. Um fator de complicação é a natureza contínua por partes de algumas vigas (eixos) que são corpos de diâmetros escalonados.

Tudo o que foi exposto constitui, de uma forma ou de outra, métodos formais de integração, os quais, com problemas apropriadamente selecionados, resultam em soluções para q, V, M, θ e y. Essas soluções podem ser:

1. Soluções fechadas (analíticas), ou
2. Representadas por séries infinitas, que equivalem à forma fechada se essas séries forem rapidamente convergentes, ou
3. Aproximações obtidas ao avaliar o primeiro ou o primeiro e o segundo termos.

As soluções em série podem ser escritas convenientemente na forma equivalente à solução fechada pelo uso de um computador. As fórmulas de Roark[1] estão incluídas no CD-ROM e podem ser usadas em um computador pessoal.

Existem muitas técnicas para resolver o problema de integração para a deflexão de viga. Alguns dos métodos populares incluem o seguinte:

- Superposição (ver Seção 4-5)
- O método momento-área[2]
- Funções de singularidade (ver Seção 4-6)
- Integração numérica[3]

Os métodos descritos neste capítulo são fáceis de implementar e podem dar conta de uma grande variedade de problemas.

Existem métodos que não lidam com as Equações (5-10) a (5-14) diretamente. Um método de energia, baseado no teorema de Castigliano, é muito poderoso para problemas inapropriados para os métodos mencionados anteriormente e discutidos nas Seções 5-7 a 5-10. Programas de elemento finito são também bastante úteis para determinar as deflexões de viga.

5-5 Determinação das Deflexões de Viga por Superposição

Os resultados de muitos casos simples de carga e condições de contorno foram solucionados e estão disponíveis. A Tabela A-9 provê alguns desses casos. Roark[4] fornece uma listagem mais completa. A superposição resolve o efeito de carregamento combinado em uma estrutura, ao determinar o efeito de cada carga separadamente e ao adicionar os resultados algebricamente. Ela pode ser aplicada, desde que: (1) cada efeito seja linearmente relacionado à carga que o produz, (2) a carga não crie uma condição que afete o resultado de uma outra carga e (3) as deformações resultantes de qualquer carga específica não sejam grandes o bastante para alterar apreciavelmente as relações geométricas das partes do sistema estrutural.

Os seguintes exemplos são ilustrações do uso da superposição.

EXEMPLO 5-2

Considere uma viga uniformemente carregada com uma força concentrada, como mostrado na Figura 5-3. Usando superposição, determine as reações e a deflexão como uma função de x.

Solução Considerando cada estado de carga separadamente, podemos sobrepor as vigas 6 e 7 da Tabela A-9. Para as reações, encontramos

Resposta
$$R_1 = \frac{Fb}{l} + \frac{wl}{2}$$

Resposta
$$R_2 = \frac{Fa}{l} + \frac{wl}{2}$$

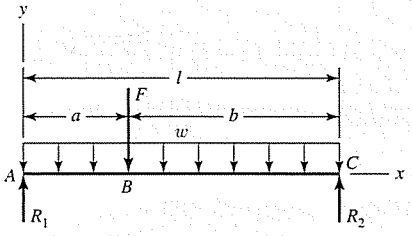


Figura 5-3

[1] Warren C. Young e Richard G. Budynas, *Roark's Formulas for Stress and Strain*, 7th ed., McGraw-Hill, New York, 2002.
[2] Ver Capítulo 9 de F. P. Beer, E. R. Johnston Jr. e J. T. DeWolf, *Mechanics of Materials*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 2001.
[3] Ver Seção 4-4 de J. E. Shigley e C. R. Mischke, *Mechanical Engineering Design*, 6th ed., McGraw-Hill, New York, 2001.
[4] Warren C. Young e Richard G. Budynas, *op. cit.*

O carregamento da viga 6 é descontínuo, e as equações separadas de deflexão são fornecidas para as regiões *AB* e *BC*. O carregamento da viga 7 não é descontínuo, de modo que existe somente uma equação. A superposição produz

Resposta
$$y_{AB} = \frac{Fbx}{6EIl}(x^2 + b^2 - l^2) + \frac{wx}{24EI}(2lx^2 - x^3 - l^3)$$

Resposta
$$y_{BC} = \frac{Fa(l-x)}{6EIl}(x^2 + a^2 - 2lx) + \frac{wx}{24EI}(2lx^2 - x^3 - l^3)$$

Se quiséssemos determinar a deflexão máxima no exemplo anterior, estabeleceríamos $dy/dx = 0$ e solucionaríamos para o valor de x em que a deflexão é um máximo. Se $a = l/2$, a deflexão máxima obviamente ocorreria em $x = l/2$, por causa da simetria. Contudo, se $a < l/2$, onde estaria o máximo? Pode-se ver que, à medida que a força F move-se em direção ao apoio esquerdo, a deflexão máxima também o faz, mas não tanto quanto F (ver o Problema 5-34). Assim, estabeleceríamos $dy_{BC}/dx = 0$ e solucionaríamos para x.

Às vezes pode não ser óbvia a possibilidade que temos de utilizar a superposição com as tabelas em mãos, como demonstrado no próximo exemplo.

EXEMPLO 5-3

Considere a viga na Figura 5-4(a) e determine as equações da deflexão utilizando superposição.

Solução Para a região *AB*, podemos sobrepor as vigas 7 e 10 da Tabela A-9 para obter

Resposta
$$y_{AB} = \frac{wx}{24EI}(2lx^2 - x^3 - l^3) + \frac{Fax}{6EIl}(l^2 - x^2)$$

Para a região *BC*, como representamos a carga uniforme? Considerando *tão-somente* a carga uniforme, a viga deflete como na Figura 5-4(*b*). A região *BC* é reta, visto que não há momento flexor devido a w. A inclinação da viga em *B* é θ_B, sendo obtida tirando-se a derivada de y fornecida na tabela com respeito a x e estabelecendo-se $x = l$. Logo,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\frac{wx}{24EI}(2lx^2 - x^3 - l^3)\right] = \frac{w}{24EI}(6lx^2 - 4x^3 - l^3)$$

Substituir $x = l$ produz

$$\theta_B = \frac{w}{24EI}(6ll^2 - 4l^3 - l^3) = \frac{wl^3}{24EI}$$

A deflexão na região *BC* decorrente de w é $\theta_B(x - l)$, e adicioná-la à deflexão decorrente de F produz

Resposta
$$y_{BC} = \frac{wl^3}{24EI}(x - l) + \frac{F(x-l)}{6EI}[(x-l)^2 - a(3x - l)]$$

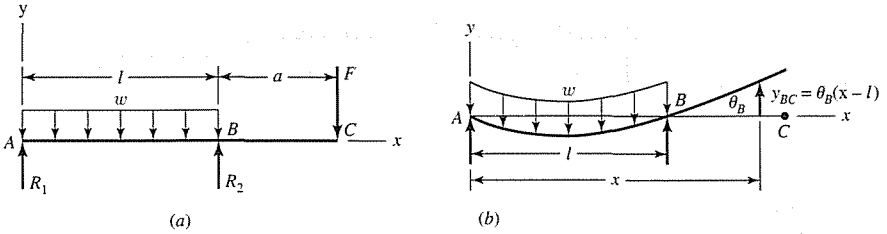


Figura 5-4 Viga com carga uniformemente distribuída; (*b*) deflexões decorrentes de carga uniforme apenas.

EXEMPLO 5-4

A Figura 5-5(*a*) mostra uma viga em balanço com uma carga de extremidade. Normalmente, modelamos esse problema considerando o apoio esquerdo como rígido. Após testar a rigidez da parede, descobrimos que a sua rigidez translacional era k_t força por unidade de deflexão vertical e que a rigidez rotacional era k_r momento por unidade de deflexão angular (radianos) (ver Figura 5-5(*b*)). Determine a equação de deflexão para a viga sob a carga F.

Solução

Sobreporemos aqui os *modos* de deflexão. São eles: (1) a translação decorrente da compressão da mola k_t, (2) a rotação da mola k_r e (3) a deformação elástica da viga fornecida pela Tabela A-9-1. A força na mola k_t é $R_1 = F$, provendo uma deflexão, a partir da Equação (5-2), de

$$y_1 = -\frac{F}{k_t} \tag{1}$$

O momento na mola k_r é $M_1 = Fl$. Isso produz uma rotação horária de $\theta = Fl/k_r$. Considerando esse modo de deflexão apenas, a viga roda rigidamente em sentido anti-horário, levando a uma equação de deflexão de

$$y_2 = -\frac{Fl}{k_r}x \tag{2}$$

Por fim, a deformação elástica da viga, a partir da Tabela A-9-1, é

$$y_3 = \frac{Fx^2}{6EI}(x - 3l) \tag{3}$$

Adicionar as deflexões de cada modo produz

Resposta

$$y = \frac{Fx^2}{6EI}(x - 3l) - \frac{F}{k_t} - \frac{Fl}{k_r}x$$

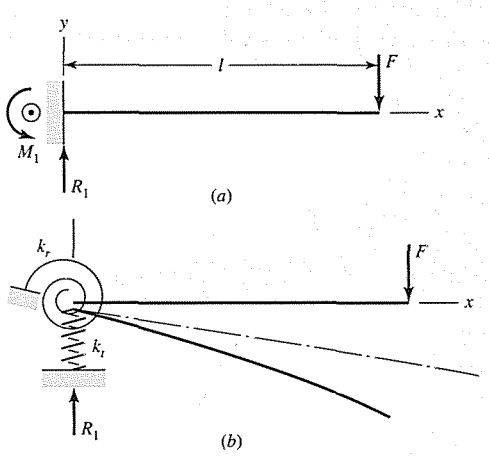


Figura 5-5

5-6 Deflexões de Viga por Funções de Singularidade

Introduzidas na Seção 4-3, as funções de singularidade são excelentes para manejar descontinuidades, sendo que sua aplicação é uma simples extensão daquilo que foi apresentado na seção anterior. Elas são fáceis de programar e, como será visto mais adiante, podem simplificar bastante os problemas estaticamente indeterminados. Os seguintes exemplos ilustram o uso das funções de singularidade para avaliar deflexões de problemas de viga estaticamente determinados.

EXEMPLO 5-5

Considere o exemplo da Tabela A-9-6: uma viga simplesmente apoiada, com uma carga concentrada F que não está no centro. Desenvolva as equações de deflexão utilizando as funções de singularidade.

Solução

Primeiro, escreva a equação da intensidade de carga a partir do diagrama de corpo livre,

$$q = R_1\langle x\rangle^{-1} - F\langle x-a\rangle^{-1} + R_2\langle x-l\rangle^{-1} \tag{1}$$

Integrar duas vezes resulta em

$$V = R_1\langle x\rangle^{0} - F\langle x-a\rangle^{0} + R_2\langle x-l\rangle^{0} \tag{2}$$

$$M = R_1\langle x\rangle^{1} - F\langle x-a\rangle^{1} + R_2\langle x-l\rangle^{1} \tag{3}$$

Lembre-se: contanto que a equação de q esteja completa, as constantes de integração são desnecessárias; por isso, não foram incluídas até este ponto. A partir da estática, estabelecer $V = M = 0$ para x ligeiramente maior que l produz $R_1 = Fb/l$ e $R_2 = Fa/l$. Logo, a Equação (3) torna-se

$$M = \frac{Fb}{l}\langle x\rangle^{1} - F\langle x-a\rangle^{1} + \frac{Fa}{l}\langle x-l\rangle^{1}$$

Integrando as Equações (5-12) e (5-13) como integrais indefinidas, obtemos

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{Fb}{2l}\langle x\rangle^{2} - \frac{F}{2}\langle x-a\rangle^{2} + \frac{Fa}{2l}\langle x-l\rangle^{2} + C_1$$

$$EIy = \frac{Fb}{6l}\langle x\rangle^{3} - \frac{F}{6}\langle x-a\rangle^{3} + \frac{Fa}{6l}\langle x-l\rangle^{3} + C_1x + C_2$$

Observe que o primeiro termo de singularidade em ambas as equações sempre existe, de modo que $\langle x\rangle^2 = x^2$ e $\langle x\rangle^3 = x^3$. Além disso, o último termo de singularidade nelas não existe até que $x = l$, onde ele é zero, e, visto que não existe viga para $x > l$, podemos eliminar o último termo. Logo,

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{Fb}{2l}x^2 - \frac{F}{2}\langle x-a\rangle^{2} + C_1 \tag{4}$$

$$EIy = \frac{Fb}{6l}x^3 - \frac{F}{6}\langle x-a\rangle^{3} + C_1x + C_2 \tag{5}$$

As constantes de integração C_1 e C_2 são avaliadas usando-se as duas condições de contorno $y = 0$ em $x = 0$ e $y = 0$ em $x = l$. A primeira condição, substituída na Equação (5), produz $C_2 = 0$ (lembre-se de que $\langle 0-a\rangle^3 = 0$). A segunda condição, substituída também na Equação (5), produz

$$0 = \frac{Fb}{6l}l^3 - \frac{F}{6}(l-a)^3 + C_1l = \frac{Fbl^2}{6} - \frac{Fb^3}{6} + C_1l$$

Solucionando para C_1,

$$C_1 = -\frac{Fb}{6l}(l^2 - b^2)$$

Finalmente, substituindo C_1 e C_2 na Equação (5) e simplificando, obtemos

$$y = \frac{F}{6EIl}[bx(x^2 + b^2 - l^2) - l\langle x-a\rangle^3] \tag{6}$$

Comparando a Equação (6) com as duas equações de deflexão na Tabela A-9-6, observamos que o uso das funções de singularidade nos habilita a expressar a equação de deflexão com uma única equação.

EXEMPLO 5-6

Determine a equação de deflexão para a viga simplesmente apoiada com a carga distribuída, mostrada na Figura 5-6.

Solução

Esta é uma boa viga para adicionarmos à nossa tabela, para uso posterior com superposição. A equação de intensidade de carga para tal viga é

$$q = R_1\langle x\rangle^{-1} - w\langle x\rangle^0 + w\langle x-a\rangle^0 + R_2\langle x-l\rangle^{-1} \tag{1}$$

em que $w\langle x-a\rangle^0$ é necessário para "desligar" a carga uniforme em $x = a$.

A partir da estática, as reações são

$$R_1 = \frac{wa}{2l}(2l-a) \qquad R_2 = \frac{wa^2}{2l} \tag{2}$$

Por simplicidade, manteremos a forma da Equação (1) para integração e substituiremos os valores das duas reações posteriormente.

Duas integrações da Equação (1) revelam

$$V = R_1\langle x\rangle^0 - w\langle x\rangle^1 + w\langle x-a\rangle^1 + R_2\langle x-l\rangle^0 \tag{3}$$

$$M = R_1\langle x\rangle^1 - \frac{w}{2}\langle x\rangle^2 + \frac{w}{2}\langle x-a\rangle^2 + R_2\langle x-l\rangle^1 \tag{4}$$

Como no exemplo anterior, as funções de singularidade de ordem zero ou maior começando em $x = 0$ podem ser substituídas por funções polinomiais normais. Além disso, uma vez que as reações estejam determinadas, as funções de singularidade começando na extremidade direita da viga podem ser omitidas. Logo, a Equação (4) pode ser reescrita como

$$M = R_1x - \frac{w}{2}x^2 + \frac{w}{2}\langle x-a\rangle^2 \tag{5}$$

Integrando duas vezes mais para a inclinação e a deflexão, obtemos

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{R_1}{2}x^2 - \frac{w}{6}x^3 + \frac{w}{6}\langle x-a\rangle^3 + C_1 \tag{6}$$

$$EIy = \frac{R_1}{6}x^3 - \frac{w}{24}x^4 + \frac{w}{24}\langle x-a\rangle^4 + C_1x + C_2 \tag{7}$$

As condições de contorno são $y = 0$ em $x = 0$ e $y = 0$ em $x = l$. Substituir a primeira condição na Equação (7) produz $C_2 = 0$. Para a segunda condição,

$$0 = \frac{R_1}{6}l^3 - \frac{w}{24}l^4 + \frac{w}{24}(l-a)^4 + C_1l$$

Solucionando para C_1 e substituindo na Equação (7), obtemos

$$EIy = \frac{R_1}{6}x(x^2-l^2) - \frac{w}{24}x(x^3-l^3) - \frac{w}{24l}x(l-a)^4 + \frac{w}{24}\langle x-a\rangle^4$$

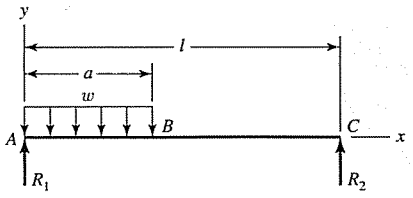


Figura 5-6

Por fim, substituir R_1 da Equação (2) e simplificar os resultados produz

Resposta
$$y = \frac{w}{24EIl}[2ax(2l - a)(x^2 - l^2) - xl(x^3 - l^3) - x(l - a)^4 + l\langle x - a\rangle^4]$$

EXEMPLO 5-7

A Figura 5-7(a) mostra um eixo escalonado em balanço, carregado na extremidade. As reações de extremidade já foram determinadas usando-se estática. Determine a curva de deflexão e as deflexões em B e C.

Solução

A equação de intensidade de carga é

$$q = F\langle x\rangle^{-1} - Fl\langle x\rangle^{-2} - F\langle x - l\rangle^{-1} \tag{1}$$

As integrações produzem

$$V = F\langle x\rangle^{0} - Fl\langle x\rangle^{-1} - F\langle x - l\rangle^{0} \tag{2}$$

$$M = F\langle x\rangle^{1} - Fl\langle x\rangle^{0} - F\langle x - l\rangle^{1} = Fx - Fl \tag{3}$$

O diagrama resultante de M é mostrado na Figura 5-7(b).

Uma vez que o segundo momento de área varia para essa viga, desenharemos o diagrama M/I como apresentado na Figura 5-7(c). A queda-degrau no diagrama pode ser obtida facilmente subtraindo-se o termo de degrau de magnitude $(F\,l)/(4\,I_1)$ em $x = l/2$ na equação de singularidade. Ademais, a inclinação do diagrama M/I aumenta de $F/2I_1$ em $x = l/2$, requerendo uma função adicional de rampa nessa localidade. Logo,

$$\frac{M}{I} = \frac{F}{2I_1}x - \frac{Fl}{2I_1} - \frac{Fl}{4I_1}\left\langle x - \frac{l}{2}\right\rangle^{0} + \frac{F}{2I_1}\left\langle x - \frac{l}{2}\right\rangle^{1} \tag{4}$$

Visto que $Ed^2y/dx^2 = M/I$, duas integrações da Equação (4) produzem

$$E\frac{dy}{dx} = \frac{F}{4I_1}x^2 - \frac{Fl}{2I_1}x - \frac{Fl}{4I_1}\left\langle x - \frac{l}{2}\right\rangle^{1} + \frac{F}{4I_1}\left\langle x - \frac{l}{2}\right\rangle^{2} + C_1 \tag{5}$$

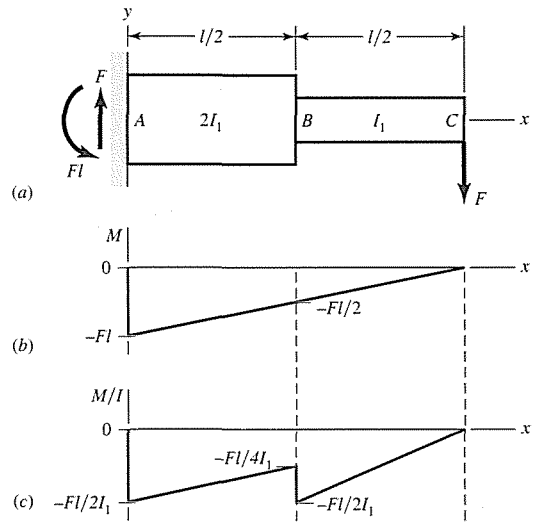


Figura 5-7

$$Ey = \frac{F}{12I_1}x^3 - \frac{Fl}{4I_1}x^2 - \frac{Fl}{8I_1}\left\langle x - \frac{l}{2}\right\rangle^2 + \frac{F}{12I_1}\left\langle x - \frac{l}{2}\right\rangle^3 + C_1x + C_2 \tag{6}$$

As condições de contorno para a viga em balanço são $dy/dx = 0$ e $y = 0$ em $x = 0$. Substituindo-as nas Equações (5) e (6), obtemos $C_1 = C_2 = 0$, e a Equação (6) simplifica-se em

Resposta
$$y = \frac{F}{24EI_1}\left(2x^3 - 6lx^2 - 3l\left\langle x - \frac{l}{2}\right\rangle^2 + 2\left\langle x - \frac{l}{2}\right\rangle^3\right) \tag{7}$$

Em $x = l/2$ e l,

Resposta
$$y|_{x=l/2} = \frac{F}{24EI_1}\left[2\left(\frac{l}{2}\right)^3 - 6l\left(\frac{l}{2}\right)^2 - 3l(0) + 2(0)\right] = -\frac{5Fl^3}{96EI_1}$$

Resposta
$$y|_{x=l} = \frac{F}{24EI_1}\left[2(l)^3 - 6l(l)^2 - 3l\left(l - \frac{l}{2}\right)^2 + 2\left(l - \frac{l}{2}\right)^3\right] = -\frac{3Fl^3}{16EI_1}$$

Como declarado anteriormente, as funções de singularidade são relativamente simples de programar, visto que são omitidas quando seus argumentos são negativos e que os colchetes $\langle\ \rangle$ são substituídos por parênteses ( ) quando os argumentos são positivos.

Na Seção 5-9, demonstraremos a utilidade das funções de singularidade na solução de problemas estaticamente indeterminados.

5-7 Energia de Deformação

O trabalho externo feito sobre um membro elástico para deformá-lo é transformado em *energia de deformação*, ou *energia potencial*. Se o membro é deformado de uma distância y, essa energia é igual ao produto da força média pela deflexão, ou

$$U = \frac{F}{2}y = \frac{F^2}{2k} \tag{a}$$

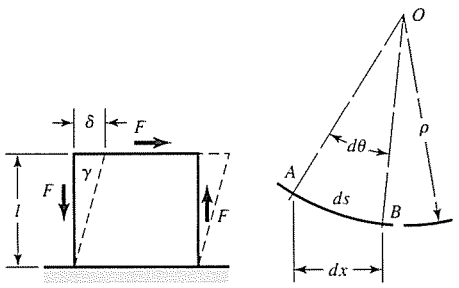
Essa equação é geral na medida em que a força F também pode significar torque, ou momento, contanto que, naturalmente, unidades consistentes sejam utilizadas para k. Substituindo as expressões apropriadas de k, fórmulas da energia de deformação para vários carregamentos simples podem ser obtidas. Para tração e compressão, assim como para torção, por exemplo, utilizamos as Equações (5-4) e (5-7) e obtemos

$$U = \frac{F^2l}{2AE} \qquad \text{tração e compressão} \tag{5-15}$$

$$U = \frac{T^2l}{2GJ} \qquad \text{torção} \tag{5-16}$$

Para obter uma expressão para a energia de deformação decorrente de cisalhamento direto, considere o elemento com um lado fixo da Figura 5-8(a). A força F põe tal elemento sob estado de cisalhamento puro, e o trabalho feito é $U = F\delta/2$. Uma vez que a deformação por cisalhamento é $\gamma = \delta/l = \tau/G = F/AG$, temos

$$U = \frac{F^2l}{2AG} \qquad \text{cisalhamento direto} \tag{5-17}$$



(*a*) Elemento em cisalhamento puro (*b*) Elemento da viga em flexão

Figura 5-8

A energia de deformação armazenada em uma viga ou alavanca sob forma flexional pode ser obtida ao nos referirmos à Figura 5-8(*b*). Aqui, AB é uma secção de uma curva elástica de comprimento ds que tem um raio de curvatura ρ. A energia de deformação armazenada nesse elemento da viga é $dU = (M/2)d\theta$. Uma vez que $\rho d\theta = ds$, temos

$$dU = \frac{M\,ds}{2\rho} \tag{b}$$

Podemos eliminar ρ utilizando a Equação (5-8). Logo,

$$dU = \frac{M^2\,ds}{2EI} \tag{c}$$

Para pequenas deflexões, $ds \doteq dx$. Assim, para a viga completa,

$$U = \int \frac{M^2\,dx}{2EI} \qquad \text{flexão} \tag{5-18}$$

Algumas vezes, a energia armazenada em uma unidade de volume u é uma quantidade útil. Dividindo as Equações (5-15) a (5-17) pelo volume total lA e estabelecendo $F/A = \pm\sigma$ para tração ou compressão, $F/A = \tau$ para cisalhamento direto e $Td/(2J) = \tau_{max}$ para torção, obtemos

$$u = \begin{cases} \dfrac{\sigma^2}{2E} & \text{tração e compressão} \\ \dfrac{\tau^2}{2G} & \text{cisalhamento direito} \\ \dfrac{\tau_{max}^2}{4G} & \text{torção} \end{cases} \tag{5-19}$$

É interessante observar, a partir da Equação (5-19), que o desenvolvimento de uma alta tensão em um material com um módulo baixo de elasticidade, ou rigidez, resultará na máxima quantidade de energia armazenada.

A Equação (5-18) será exata somente quando uma viga estiver sujeita a flexão pura. Mesmo quando o cisalhamento estiver presente, essa equação continuará a dar resultados bastante bons, exceto para vigas muito curtas. A energia de deformação decorrente do carregamento de cisalhamento de uma viga é um problema complicado. Uma solução aproximada pode ser obtida utilizando-se a Equação (5-17) com um fator de correção cujo valor depende da forma da secção transversal. Se utilizarmos C para esse fator de correção e V para a força cortante, então a energia de deformação decorrente do cisalhamento em flexão será a integral da Equação (5-17), ou

$$U = \int \frac{CV^2\,dx}{2AG} \qquad \text{cisalhamento de flexão} \tag{5-20}$$

Os valores do fator C estão listados na Tabela 5-1.

Tabela 5-1 Fatores de correção da energia de deformação para cisalhamento

Forma da secção transversal da viga	Fator C
Retangular	1,2
Circular	1,11
Tubular de parede fina, circular	2,00
Secções em forma de caixa†	1,00
Secções estruturais†	1,00

Fonte: Richard G. Budynas, *Advanced Strengh and Applied Stress Analysis*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1999. Copyright © 1999 The McGraw-Hill Companies.
† Use a área da alma apenas.

EXEMPLO 5-8

Encontre a energia de deformação decorrente de cisalhamento em uma viga de secção transversal retangular, simplesmente apoiada, com uma carga uniformemente distribuída.

Solução

Usando a Tabela A-9-7 do Apêndice, encontramos a força de cisalhamento valendo

$$V = \frac{wl}{2} - wx$$

Substituindo na Equação (5-20), com $C = 1{,}2$, obtemos

Resposta

$$U = \frac{1{,}2}{2AG}\int_0^l \left(\frac{wl}{2} - wx\right)^2 dx = \frac{w^2 l^3}{20AG}$$

EXEMPLO 5-9

Uma viga em balanço tem uma carga concentrada F na extremidade, como mostrado na Figura 5-9. Encontre a energia de deformação nessa viga desprezando o cisalhamento.

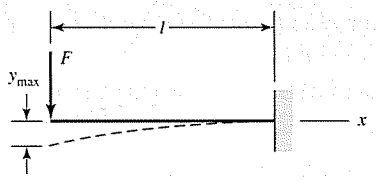


Figura 5-9

Solução

Em qualquer ponto x ao longo da viga, o momento é $M = -Fx$. Substituindo esse valor de M na Equação (5-18), encontramos

Resposta

$$U = \int_0^l \frac{F^2 x^2\, dx}{2EI} = \frac{F^2 l^3}{6EI}$$

5-8 Teorema de Castigliano

A mais incomum, poderosa e com freqüência surpreendentemente simples abordagem para a análise da flexão é propiciada por um método de energia denominado *teorema de Castigliano*. Trata-se de uma forma única de analisar deflexões, sendo ainda mais útil para determinar reações de estruturas indeterminadas. Esse teorema expressa que, *quando forças atuam em sistemas elásticos submetidos a pequenos deslocamentos, o deslocamento correspondente a qualquer força, colinear com a mesma, é igual à derivada parcial da energia total de deformação com relação à força.* Os termos *força* e *deslocamento* nessa afirmação são interpretados de maneira ampla, de modo a significar igualmente momentos e deslocamentos angulares. Matematicamente, o teorema de Castigliano é

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial F_i} \tag{5-21}$$

em que δ_i é o deslocamento do ponto de aplicação da força F_i na direção de F_i. Para deslocamento rotacional, a Equação (5-21) pode ser escrita como

$$\theta_i = \frac{\partial U}{\partial M_i} \tag{5-22}$$

em que θ_i é o deslocamento rotacional, em radianos, do momento M_i na direção de M_i.

Como exemplo, aplicamos o teorema de Castigliano utilizando as Equações (5-15) e (5-16) para computar as deflexões axial e torcional. Os resultados são

$$\delta = \frac{\partial}{\partial F}\left(\frac{F^2 l}{2AE}\right) = \frac{Fl}{AE} \tag{a}$$

$$\theta = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{T^2 l}{2GJ}\right) = \frac{Tl}{GJ} \tag{b}$$

Compare as Equações (*a*) e (*b*) com as Equações (5-3) e (5-5). No Exemplo 5-8, a energia de deformação para uma viga em balanço, com uma carga na extremidade livre, foi encontrada. De acordo com o teorema de Castigliano, a deflexão na extremidade dessa viga é

$$y = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{\partial}{\partial F}\left(\frac{F^2 l^3}{6EI}\right) = \frac{Fl^3}{3EI}$$

o que está de acordo com o exposto na Tabela A-9-1.

O teorema de Castigliano pode ser utilizado para determinar a deflexão em um ponto, mesmo quando nenhuma força ou momento atuarem sobre ele. O procedimento é o seguinte:

1. Escreva a equação para a energia total de deformação U, incluindo a energia decorrente da força ou do momento fictício Q_i atuando no ponto cuja deflexão pretende-se determinar.
2. Encontre uma expressão para a deflexão desejada δ_i, na direção de Q_i, calculando a derivada da energia total de deformação com respeito a Q_i.
3. Visto que Q_i é uma força fictícia, solucione a expressão obtida no passo 2 igualando Q_i a zero. Logo,

$$\delta_i = \left.\frac{\partial U}{\partial Q_i}\right|_{Q_i=0} \tag{5-23}$$

EXEMPLO 5-10

A viga em balanço do Exemplo 5-9 é uma barra de aço carbono de comprimento 10 in, com um diâmetro de 1 in, e está carregada por uma força $F = 100$ lbf.

(*a*) Encontre a deflexão máxima usando o teorema de Castigliano, incluindo aquela decorrente do cisalhamento.

(*b*) Que erro será introduzido se o cisalhamento for desprezado?

Solução (*a*) A partir da Equação (5-20) e dos dados do Exemplo 5-9, a energia total de deformação é

$$U = \frac{F^2 l^3}{6EI} + \int_0^l \frac{CV^2\,dx}{2AG} \tag{1}$$

Para a viga em balanço, $V = F$. Ademais, $C = 1{,}11$, a partir da Tabela 5-1. Fazendo a integração e substituindo esses valores na Equação (1), obtemos, para a energia total de deformação,

$$U = \frac{F^2 l^3}{6EI} + \frac{1{,}11F^2 l}{2AG} \tag{2}$$

Assim, conforme o teorema, a deflexão da extremidade é

$$y = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{Fl^3}{3EI} + \frac{1{,}11Fl}{AG} \tag{3}$$

Também verificamos que

$$I = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi(1)^4}{64} = 0{,}0491 \text{ in}^4$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi(1)^2}{4} = 0{,}7854 \text{ in}^2$$

Substituindo esses valores, juntamente com $F = 100$ lbf, $l = 10$ in, $E = 30$ Mpsi e $G = 11{,}5$ Mpsi, na Equação (3), obtemos

Resposta $$y = 0{,}022\,63 + 0{,}000\,12 = 0{,}022\,75 \text{ in}$$

Observe que o resultado é positivo porque a deflexão ocorre na *mesma* direção que a força F.

(*b*) O erro, ao se desprezar o cisalhamento, é de aproximadamente 0,54%.

Ao realizar quaisquer integrações, geralmente é melhor considerar, a princípio, a derivada parcial com respeito à carga F_i. Isso é verdade sobretudo se a força for uma fictícia Q_i, visto que pode ser igualada a zero tão logo a derivada seja calculada. Isso é demonstrado no próximo exemplo. As formas para a deflexão podem então ser reescritas. Assumimos, aqui, para o carregamento axial e torcional, que o material e as propriedades da secção transversal podem variar ao longo do comprimento dos membros. A partir das Equações (5-15), (5-16) e (5-18),

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial F_i} = \int \frac{1}{AE}\left(F\frac{\partial F}{\partial F_i}\right)dx \qquad \text{tração e compressão} \tag{5-24}$$

$$\theta_i = \frac{\partial U}{\partial M_i} = \int \frac{1}{GJ}\left(T\frac{\partial T}{\partial M_i}\right)dx \qquad \text{torção} \tag{5-25}$$

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial F_i} = \int \frac{1}{EI}\left(M\frac{\partial M}{\partial F_i}\right)dx \qquad \text{flexão} \tag{5-26}$$

EXEMPLO 5-11

Para o Exemplo 5-7, determine as deflexões nos pontos B e C utilizando o método de Castigliano.

Solução Com os métodos de energia, os sistemas de coordenadas são arbitrários, pois essa energia é uma quantidade escalar. Retornando à Figura 5-7(*a*), imagine x originando-se na extremidade direita e positivo para a esquerda (isso elimina a necessidade das reações na equação de momento). Isolando a viga, descobriremos que o momento flexor, para $0 \le x < l$, é

$$M = -Fx \tag{1}$$

Visto que F está em C e na direção da deflexão desejada, a deflexão em C, a partir da Equação (5-26), é

$$\delta_C = \frac{\partial U}{\partial F} = \int_0^l \frac{1}{EI}\left(M\frac{\partial M}{\partial F}\right) dx \tag{2}$$

Substituindo a Equação (1) na (2) e observando que $I = I_1$ para $0 \le x \le l/2$ e $I = 2I_1$ para $l/2 \le x \le l$, obtemos

Resposta

$$\delta_C = \frac{1}{E}\left[\int_0^{l/2} \frac{1}{I_1}(-Fx)(-x)\,dx + \int_{l/2}^{l} \frac{1}{2I_1}(-Fx)(-x)\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{E}\left[\frac{Fl^3}{24I_1} + \frac{7Fl^3}{48I_1}\right] = \frac{3Fl^3}{16EI_1}$$

que é positivo, pois está na direção de F e concorda com o Exemplo 5-7.

Para B, uma força fictícia Q_i é necessária no ponto. Assumindo que Q_i atue para baixo em B e que x seja como antes, a equação do momento é

$$M = -Fx \qquad 0 \le x \le l/2$$

$$M = -Fx - Q_i\left(x - \frac{l}{2}\right) \qquad l/2 \le x \le l$$

ou, em termos de funções de singularidade,

$$M = -Fx - Q_i\left\langle x - \frac{l}{2}\right\rangle^1 \tag{3}$$

Para a Equação (5-23), necessitamos de $\partial U/\partial Q_i$ a partir da Equação (5-26), para a qual, por sua vez, necessitamos de $\partial M/\partial Q_i$. A partir da Equação (3),

$$\frac{\partial M}{\partial Q_i} = -\left\langle x - \frac{l}{2}\right\rangle^1 \tag{4}$$

Uma vez que a derivada seja calculada, Q_i pode ser igualada a zero, de modo que, a partir da Equação (3), $M = -F\,x$ e

$$\delta_B = \int_0^l \frac{1}{EI}(Fx)\left\langle x - \frac{l}{2}\right\rangle^1 dx$$

Porém, a função de singularidade é zero para $0 \le x \le l/2$ e $I = 2I_1$ para $l/2 \le x \le l$. Logo,

$$\delta_B = \frac{F}{E(2I_1)}\int_{l/2}^{l}(x)\left(x - \frac{l}{2}\right)dx = \frac{F}{2EI_1}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{lx^2}{4}\right]\Bigg|_{l/2}^{l}$$

Resposta

$$= \frac{5Fl^3}{96EI_1}$$

que uma vez mais é positivo, na direção de Q_i, e concorda com o Exemplo 5-7.

EXEMPLO 5-12

Para a forma feita de arame de diâmetro d mostrada na Figura 5-10(a), determine a deflexão do ponto B na direção da força aplicada F (despreze o efeito do cisalhamento de flexão).

Solução

É muito importante incluir os efeitos de flexão em todas as partes da estrutura. Sistemas de coordenadas não são importantes, mas as cargas devem estar de acordo com o problema. Portanto, o uso apropriado

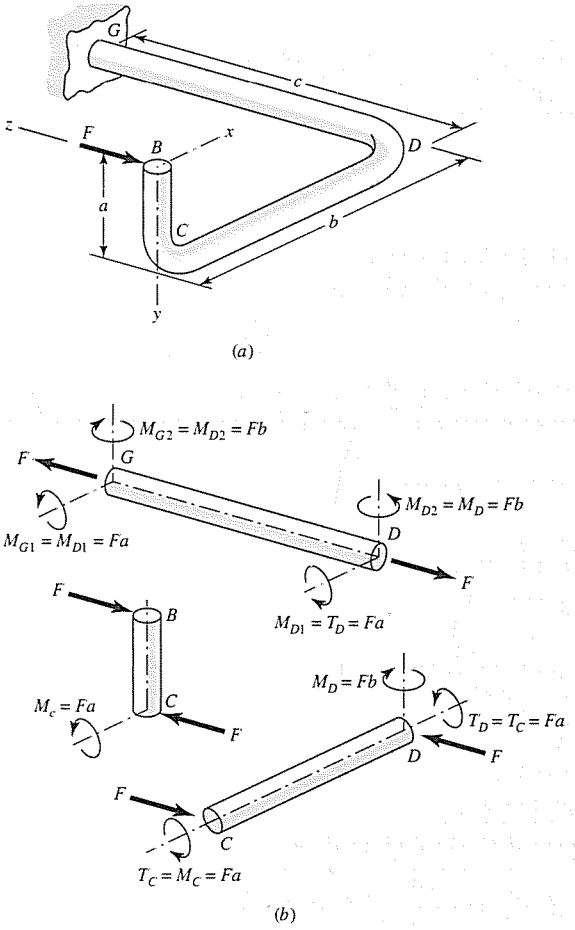


Figura 5-10 *(Fonte: Richard G. Budynas, Advanced Strength and Applied Stress Analysis, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1999. Copyright © 1999 The McGraw-Hill Companies.)*

dos *diagramas de corpo livre* é aqui essencial. O leitor deve verificar que as reações como funções de F nos elementos BC, CD e GD são como as mostradas na Figura 5-10(b).

A deflexão de B na direção de F é fornecida por

$$\delta_B = \frac{\partial U}{\partial F}$$

logo, as derivadas parciais nas Equações (5-24) a (5-26) serão todas consideradas com relação a F.

O elemento BC está em flexão somente assim na Equação (5-26),[5]

$$\frac{\partial U_{BC}}{\partial F} = \frac{1}{EI}\int_0^a (-Fy)(-y)\,dy = \frac{Fa^3}{3EI} \tag{1}$$

O elemento CD está em flexão e torção. Esta última é constante, de modo que a Equação (5-25) pode ser escrita como

$$\frac{\partial U}{\partial F_i} = \left(T\frac{\partial T}{\partial F_i}\right)\frac{l}{GJ}$$

em que l é o comprimento do membro. Assim, para a torção no membro CD, $F_i = F$, $T = Fa$ e $l = b$. Logo,

[5] É muito importante misturar técnicas e também tentar utilizar superposição, por exemplo. Todavia, é possível que ocorram algumas coisas sutis que você pode não perceber visualmente. Recomenda-se, pois, se você estiver empregando o teorema de Castigliano em um problema, que o faça em todas as partes desse problema.

$$\left(\frac{\partial U_{CD}}{\partial F}\right)_{\text{torção}} = (Fa)(a)\frac{b}{GJ} = \frac{Fa^2b}{GJ} \tag{2}$$

Para a flexão em CD,

$$\left(\frac{\partial U_{CD}}{\partial F}\right)_{\text{flexão}} = \frac{1}{EI}\int_0^b (-Fx)(-x)\,dx = \frac{Fb^3}{3EI} \tag{3}$$

O membro DG está carregado na direção axial e tem flexão em dois planos. O carregamento axial é constante, de modo que a Equação (5-24) pode ser escrita como

$$\frac{\partial U}{\partial F_i} = \left(F\frac{\partial F}{\partial F_i}\right)\frac{l}{AE}$$

em que l é o comprimento do membro. Logo, para o carregamento axial de DG, $F = F_i$, $l = c$ e

$$\left(\frac{\partial U_{DG}}{\partial F}\right)_{\text{axial}} = \frac{Fc}{AE} \tag{4}$$

Os momentos flexores em cada plano de DG são constantes ao longo do comprimento de $M_y = Fb$ e $M_x = F\,a$. Considerar cada um separadamente na forma da Equação (5-26) produz

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial U_{DG}}{\partial F}\right)_{\text{flexão}} &= \frac{1}{EI}\int_0^c (Fb)(b)\,dz + \frac{1}{EI}\int_0^c (Fa)(a)\,dz \\ &= \frac{Fc(a^2+b^2)}{EI}\end{aligned} \tag{5}$$

Adicionando as Equações (1) a (5), observando que $I = \pi d^4/64$, $J = 2I$, $A = \pi d^2/4$ e $G = E/[2(1+\nu)]$, descobrimos que a deflexão de B na direção de F é

Resposta
$$(\delta_B)_F = \frac{4F}{3\pi Ed^4}[16(a^3+b^3) + 48c(a^2+b^2) + 48(1+\nu)a^2b + 3cd^2]$$

Agora que completamos a solução, veja se você pode explicar fisicamente cada termo no resultado.

5-9 Deflexão de Membros Curvos

Estruturas de máquinas, molas, prendedores, fixadores e elementos semelhantes freqüentemente têm formas curvas. A determinação das tensões em membros curvos já foi descrita na Seção 4-19. O teorema de Castigliano é particularmente útil também para a análise de deflexões em partes curvas. Considere, por exemplo, a estrutura curva da Figura 5-11(a). Estamos interessados em determinar a deflexão da estrutura decorrente da força F e na direção de F. A energia total de deformação consiste em quatro termos, sendo que consideraremos cada um deles separadamente. O primeiro termo é relacionado ao momento flexor e vale[6]

$$U_1 = \int \frac{M^2\,d\theta}{2AeE} \tag{5-27}$$

Nessa equação, a excentricidade é

$$e = R - r_n \tag{5-28}$$

em que r_n é o raio do eixo neutro, como definido na Seção 4-19 e exibido na Figura 4-37.

Um resultado aproximado pode ser obtido utilizando-se a equação

$$U_1 \doteq \int \frac{M^2R\,d\theta}{2EI} \qquad \frac{R}{h} > 10 \tag{5-29}$$

[6] Ver Richard G. Budynas, *op. cit.*, Seção 6-7.

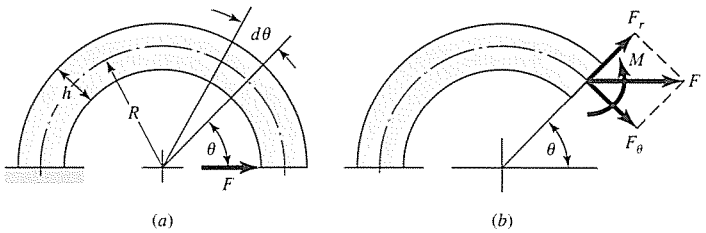


Figura 5-11 (*a*) Barra curvada, carregada pela força *F*. *R* = raio do eixo do centróide da secção; *h* = espessura da secção. (*b*) Diagrama mostrando as forças atuando na secção considerada no ângulo θ. *Fr* = *V* = componente de cisalhamento de F; F_θ é a componente de *F* normal à secção; *M* é o momento causado pela força *F*.

que é obtido diretamente a partir da Equação (5-18). Observe a limitação no uso da Equação (5-29).

A componente da energia de deformação decorrente da força normal F_θ consiste em duas partes, sendo uma delas axial e análoga à Equação (5-15). Essa parte é

$$U_2 = \int \frac{F_\theta^2 R\, d\theta}{2AE} \tag{5-30}$$

A força F_θ também produz um momento, que se opõe ao momento M na Figura 5-11(*b*). A energia de deformação resultante será subtraída e é

$$U_3 = -\int \frac{MF_\theta\, d\theta}{AE} \tag{5-31}$$

O sinal negativo da Equação (5-31) pode ser compreendido se nos referirmos a ambas as partes da Figura 5-11. Observe que o momento M tende a diminuir o ângulo $d\theta$. Por outro lado, o momento decorrente da força F_θ tende a aumentá-lo. Assim, U_3 é negativa. Se F_θ estivesse atuando na direção oposta, então ambos M e F_θ tenderiam a diminuir o ângulo $d\theta$.

O quarto e último termo é a energia de cisalhamento decorrente da força F_r. Adaptando a Equação (5-20), obtemos

$$U_4 = \int \frac{CF_r^2 R\, d\theta}{2AG} \tag{5-32}$$

em que C é o fator de correção da Tabela 5-1.

Combinar os quatro termos supracitados fornece-nos a energia total de deformação

$$U = \int \frac{M^2\, d\theta}{2AeE} + \int \frac{F_\theta^2 R\, d\theta}{2AE} - \int \frac{MF_\theta\, d\theta}{AE} + \int \frac{CF_r^2 R\, d\theta}{2AG} \tag{5-33}$$

A deflexão produzida pela força F pode agora ser encontrada. Ela vale

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial F} = \int_0^\pi \frac{M}{AeE}\left(\frac{\partial M}{\partial F}\right) d\theta + \int_0^\pi \frac{F_\theta R}{AE}\left(\frac{\partial F_\theta}{\partial F}\right) d\theta$$
$$- \int_0^\pi \frac{1}{AE}\frac{\partial (MF_\theta)}{\partial F} d\theta + \int_0^\pi \frac{CF_r R}{AG}\left(\frac{\partial F_r}{\partial F}\right) d\theta \tag{5-34}$$

Utilizando a Figura 5-11(*b*), descobrimos que

$$M = FR\,\text{sen}\,\theta \qquad \frac{\partial M}{\partial F} = R\,\text{sen}\,\theta$$

$$F_\theta = F\,\text{sen}\,\theta \qquad \frac{\partial F_\theta}{\partial F} = \text{sen}\,\theta$$

$$MF_\theta = F^2 R\,\text{sen}^2\,\theta \qquad \frac{\partial MF_\theta}{\partial F} = 2FR\,\text{sen}^2\,\theta$$

$$F_r = F\cos\theta \qquad \frac{\partial F_r}{\partial F} = \cos\theta$$

Substituindo todos esses resultados na Equação (5-34) e fatorando, produzimos

$$\delta = \frac{FR^2}{AeE}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta + \frac{FR}{AE}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta - \frac{2FR}{AE}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta + \frac{CFR}{AG}\int_0^{\pi} \cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{\pi FR^2}{2AeE} + \frac{\pi FR}{2AE} - \frac{\pi FR}{AE} + \frac{\pi CFR}{2AG} = \frac{\pi FR^2}{2AeE} - \frac{\pi FR}{2AE} + \frac{\pi CFR}{2AG} \tag{5-35}$$

Uma vez que o primeiro termo contém o quadrado do raio, os dois termos que vêm a seguir serão pequenos se a estrutura tiver um raio grande. Além disso, se $R/h > 10$, a Equação (5-29) pode ser utilizada. Surge então um resultado aproximado

$$\delta \approx \frac{\pi FR^3}{2EI} \tag{5-36}$$

A determinação da deflexão de um membro curvo, carregado por forças a ângulos retos relativamente ao seu plano, é mais difícil, mas o método permanece o mesmo.[7] Incluiremos, aqui, somente uma das soluções mais úteis para tal problema, embora os métodos para todas elas sejam similares. A Figura 5-12 mostra um segmento de anel em balanço, com um ângulo de abrangência ϕ. Supondo que $R/h > 10$, a energia de deformação, desprezando o cisalhamento direto, é obtida a partir da equação

$$U = \int_0^{\phi} \frac{M^2 R\, d\theta}{2EI} + \int_0^{\phi} \frac{T^2 R\, d\theta}{2GJ} \tag{5-37}$$

Os momentos e torques atuando em uma secção em B, decorrentes da força F, são

$$M = FR\operatorname{sen}\theta \qquad T = FR(1 - \cos\theta)$$

A deflexão δ do segmento de anel na posição da força F e na mesma direção desta é então determinada como

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{FR^3}{2}\left(\frac{\alpha}{EI} + \frac{\beta}{GJ}\right) \tag{5-38}$$

em que os coeficientes α e β dependem do ângulo de abrangência ϕ e são definidos como segue:

$$\alpha = \phi - \operatorname{sen}\phi\cos\phi$$
$$\beta = 3\phi - 4\operatorname{sen}\phi + \operatorname{sen}\phi\cos\phi \tag{5-39}$$

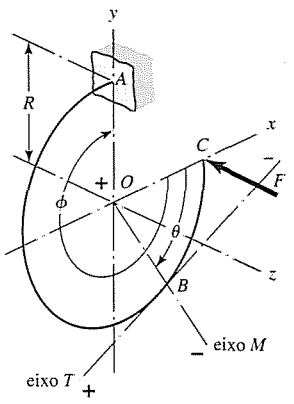


Figura 5-12 O anel *ABC*, no plano *xy*, está sujeito à força *F* paralela ao eixo *z*. Correspondendo a um segmento de anel *CB* de ângulo θ, medido a partir do ponto de aplicação de *F*, o eixo de momento é uma linha *BO* e o de torque, uma linha no plano *xy* tangente ao anel em *B*. Observe as direções dos eixos de *T* e *M*.

[7] Para outras soluções diferentes das incluídas aqui, ver Joseph E. Shigley, "Curved Beams and Rings", Cap. 16, *in* Joseph E. Shigley e Charles R. Mischke (eds.), *Standard Handbook of Machine Design*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1996.

EXEMPLO 5-13 Deflexão em uma Estrutura de Prensa de Punção de Secção Transversal Variável

O resultado geral expresso na Equação (5-35),

$$\delta = \frac{\pi F R^2}{2AeE} - \frac{\pi FR}{2AE} + \frac{\pi CFR}{2AG}$$

é útil nas secções que são uniformes e em que o local geométrico do centróide é circular. Isso torna a integração tratável e geral, de modo que resultados muito esclarecedores são obtidos. O momento flexor é máximo onde o material está mais distante do eixo de carga. O enrijecimento requer um segundo momento de área I maior. Uma secção transversal de profundidade variável é atrativa, mas torna impossível a integração a uma forma fechada (analítica). Contudo, se você estiver buscando resultados, a integração numérica com ajuda do computador é satisfatória.

Considere a estrutura de aço em forca C, mostrada na Figura 5-13(a), na qual o raio do centróide é de 32 in; a secção transversal nas extremidades, de 2 x 2 in; e a profundidade varia, de forma senoidal, com uma amplitude de 2 in. A carga é de 1000 lbf. Segue que o fator de forma da secção transversal da viga $C = 1{,}2$, $G = 11{,}5(10^6)$ psi, $E = 30(10^6)$ psi. Os raios interno e externo são

$$R_{\text{ext}} = 33 + 2\,\text{sen}\,\theta$$

$$R_{\text{in}} = 31 - 2\,\text{sen}\,\theta$$

$$h = R_{\text{ext}} - R_{\text{in}} = 2(1 + 2\,\text{sen}\,\theta)$$

$$A = bh = 4(1 + 2\,\text{sen}\,\theta)$$

$$r_n = \frac{h}{\ln[(R + h/2)/(R - h/2)]} = \frac{2(1 + 2\,\text{sen}\,\theta)}{\ln[(33 + 2\,\text{sen}\,\theta)/(31 - 2\,\text{sen}\,\theta)]}$$

$$e = R - r_n = 32 - r_n$$

Observe que

$$M = FR\,\text{sen}\,\theta \qquad \partial M/\partial F = R\,\text{sen}\,\theta$$

$$F_\theta = F\,\text{sen}\,\theta \qquad \partial F_\theta/\partial F = \text{sen}\,\theta$$

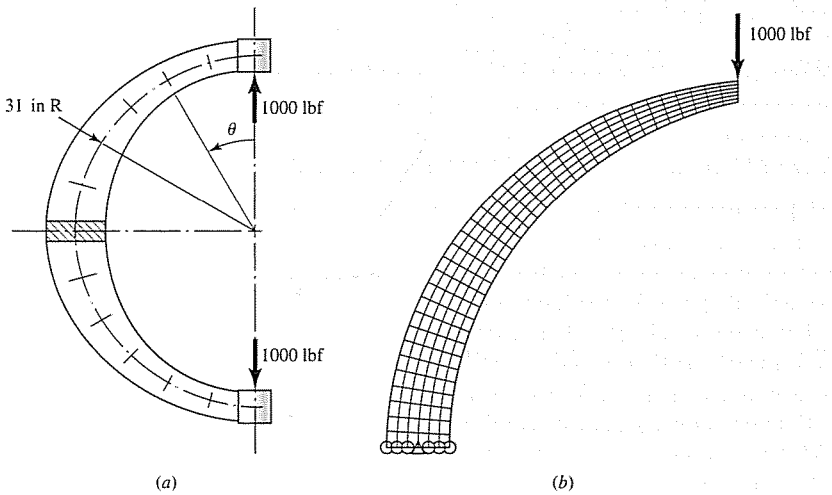


Figura 5-13 (a) Uma prensa de punção de aço tem uma estrutura C, com uma secção transversal retangular de profundidade variável, como mostrado. Essa secção transversal varia, de forma senoidal, de 2 x 2 in no ângulo $\theta = 0°$ para 2 x 6 in no ângulo $\theta = 90°$, regressando a 2 x 2 in para $\theta = 180°$. A deflexão na direção do eixo de carga, sob esta, é de interesse imediato para o projetista. (b) Modelo de elemento finito. *(Fonte: Richard G. Budynas, Advanced Strength and Applied Stress Analysis, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1999. Copyright © 1999 The McGraw-Hill Companies.)*

$$MF_\theta = F^2 R \operatorname{sen}^2\theta \qquad \partial MF_\theta/\partial F = 2FR\operatorname{sen}^2\theta$$
$$F_r = F\cos\theta \qquad \partial F_r/\partial F = \cos\theta$$

A substituição dos termos na Equação (5-34) produz

$$\delta = I_1 + I_2 + I_3 \tag{1}$$

em que as integrais são

$$I_1 = 8{,}5333(10^{-3})\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^2\theta\, d\theta}{(1+2\operatorname{sen}\theta)\left[32 - \dfrac{2(1+2\operatorname{sen}\theta)}{\ln\left(\dfrac{33+2\operatorname{sen}\theta}{31-2\operatorname{sen}\theta}\right)}\right]} \tag{2}$$

$$I_2 = -2{,}6667(10^{-4})\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^2\theta\, d\theta}{1+2\operatorname{sen}\theta} \tag{3}$$

$$I_3 = 8{,}3478(10^{-4})\int_0^\pi \frac{\cos^2\theta\, d\theta}{1+2\operatorname{sen}\theta} \tag{4}$$

As integrais podem ser avaliadas de várias maneiras: por um programa utilizando a regra de Simpson de integração,[8] por um programa usando uma planilha ou por um programa de matemática. Empregando o MathCad e verificando os resultados com o Excel, obtemos as integrais como $I_1 = 0{,}076\,615$, $I_2 = -0{,}000\,159$ e $I_3 = 0{,}000\,773$. Substituindo-as na Equação (1), obtemos

Resposta $$\delta = 0{,}077\,23 \text{ in}$$

Os programas de elemento finito (FE) também são muito acessíveis. A Figura 5-13(*b*) apresenta um meio modelo simples, utilizando simetria, da prensa consistindo em 216 elementos de tensão plana (2D). Criar o modelo e analisá-lo para obter uma solução leva alguns minutos. Os resultados da análise de FE produziram $\delta = 0{,}07790$ in, menos de 1% de variação relativamente aos resultados da integração numérica.

[8] Ver o Estudo de Caso 4, p. 203, de J. E. Shigley e C. R. Mischke, *Mechanical Engineering Design*, 6th ed., McGraw-Hill, New York, 2001.

5-10 Problemas Estaticamente Indeterminados

Um sistema em que as leis da estática não são suficientes para determinar todas as forças desconhecidas ou os momentos é considerado *indeterminado estaticamente*. Os problemas para os quais isso é verdade são solucionados escrevendo-se as equações apropriadas do equilíbrio e as equações adicionais que pertencem à deformação da peça. Ao total, o número de equações deve ser igual ao número de incógnitas.

Um exemplo simples de um problema estaticamente indeterminado é fornecido pelas molas helicoidais encaixadas da Figura 5-14(*a*). Quando essa montagem é carregada pela força de compressão F, deforma-se por uma distância δ. Qual a força de compressão em cada mola?

Somente uma equação de equilíbrio estático pode ser escrita. Ela é

$$\sum F = F - F_1 - F_2 = 0 \tag{a}$$

o que simplesmente diz que a força total F é resistida por uma força F_1 na mola 1, mais a força F_2 na mola 2. Visto que existem duas incógnitas e somente uma equação, o sistema é estaticamente indeterminado.

Para escrever uma outra equação, observe a relação de deformações na Figura 5-14(*b*). As duas molas têm a mesma deformação. Assim, obtemos a segunda equação como

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta \tag{b}$$

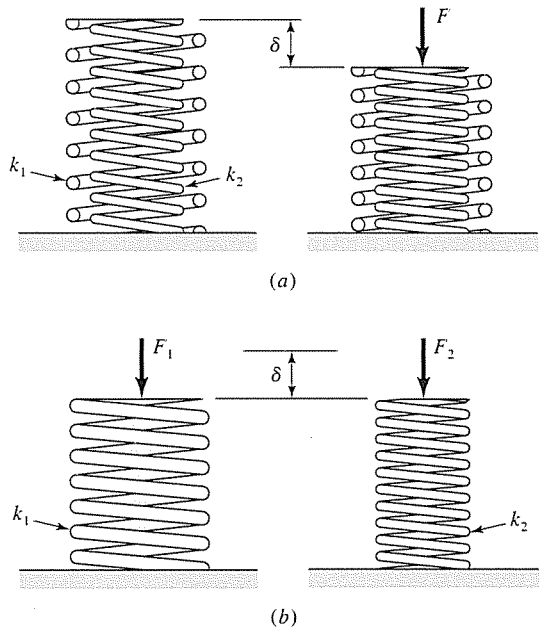


Figura 5-14

Se, nesse momento, substituímos a Equação (5-2) na Equação (*b*), obtemos

$$\frac{F_1}{k_1} = \frac{F_2}{k_2} \tag{c}$$

Agora, solucionamos a Equação (*c*) para F_1 e substituímos o resultado na Equação (*a*), o que produz

$$F - \frac{k_1}{k_2}F_2 - F_2 = 0 \quad \text{ou} \quad F_2 = \frac{k_2 F}{k_1 + k_2} \tag{d}$$

Isso completa a solução, pois, com F_2 conhecida, F_1 pode ser encontrada a partir da Equação (*c*).

No exemplo da mola, obter a equação necessária de deformação foi muito esclarecedor. Na Seção 4-17, foram desenvolvidas equações para ajustes de pressão e contração. Esse é também um problema estaticamente indeterminado em que as pressões de interface entre os cilindros postos juntos são iguais, mas desconhecidas pelas condições de equilíbrio. Aqui, na interface, uma equação de deformação é necessária e obtida, tal como no problema das molas encaixadas. Esse método normalmente funciona bem quando as incógnitas ocorrem em uma interface comum. Contudo, para outras situações, as relações de deformação podem não ser tão fáceis. Uma abordagem mais estruturada pode ser necessária. Mostraremos aqui dois procedimentos básicos para problemas gerais estaticamente indeterminados.

Procedimento 1

1. Escolha a(s) reação(ões) redundante(s).
2. Escreva as equações de equilíbrio estático para as reações restantes em termos das cargas aplicadas e da(s) reação(ões) redundante(s) do passo 1.
3. Escreva a(s) equação(ões) da(s) deflexão(ões) para o(s) ponto(s) nas posições da(s) reação(ões) redundante(s) do passo 1. Normalmente, a(s) deflexão(ões) é(são) zero. Se uma reação redundante for um momento, a equação correspondente de deflexão será rotacional.
4. As equações dos passos 2 e 3 podem agora ser solucionadas para determinar as reações.

No passo 1, as equações de deflexão podem ser solucionadas de qualquer uma das maneiras normais. Aqui, demonstraremos o uso da superposição e do teorema de Castigliano em um problema de viga.

EXEMPLO 5-14

A viga indeterminada da Tabela A-9-11 do Apêndice é reproduzida na Figura 5-15. Determine as reações utilizando o procedimento 1.

Solução

As reações são mostradas na Figura 5-15(*b*). Sem R_2, a viga é uma viga em balanço, estaticamente determinada; sem M_1, é uma viga simplesmente apoiada, estaticamente determinada. Em qualquer caso, a viga tem somente *um* apoio redundante. Primeiro solucionaremos esse problema utilizando superposição, escolhendo R_2 como a reação redundante. Para a segunda solução, empregaremos o teorema de Castigliano, tendo M_1 como a reação redundante.

Solução 1

1 Escolha R_2 em B como a reação redundante.

2 Utilizando as equações de equilíbrio estático, solucione para R_1 e M_1 em termos de F e R_2. Isso resulta em

$$R_1 = F - R_2 \qquad M_1 = \frac{Fl}{2} - R_2 l \tag{1}$$

3 Escreva a equação de deflexão para o ponto B, em termos de F e R_2. Utilizando superposição da Tabela A-9-1, com $F = -R_2$, e da Tabela A-9-2, com $a = l/2$, a deflexão de B, em $x = l$, é

$$\delta_B = -\frac{R_2 l^2}{6EI}(l - 3l) + \frac{F(l/2)^2}{6EI}\left(\frac{l}{2} - 3l\right) = \frac{R_2 l^3}{3EI} - \frac{5Fl^3}{48EI} = 0 \tag{2}$$

4 A Equação (2) pode ser solucionada para R_2 diretamente. Isso produz

Resposta

$$R_2 = \frac{5F}{16} \tag{3}$$

A seguir, substituir R_2 nas Equações (1) completa a solução, produzindo

Resposta

$$R_1 = \frac{11F}{16} \qquad M_1 = \frac{3Fl}{16} \tag{4}$$

Observe que a solução está de acordo com o que é fornecido na Tabela A-9-11.

Solução 2

1 Escolha M_1 em O como a reação redundante.

2 Utilizando as equações de equilíbrio estático, solucione para R_1 e R_2 em termos de F e M_1. Isso resulta em

$$R_1 = \frac{F}{2} + \frac{M_1}{l} \qquad R_2 = \frac{F}{2} - \frac{M_1}{l} \tag{5}$$

3 Visto que M_1 é a reação relevante em O, escreva a equação para a deflexão angular no ponto O. A partir do teorema de Castigliano, esta é

$$\theta_O = \frac{\partial U}{\partial M_1} \tag{6}$$

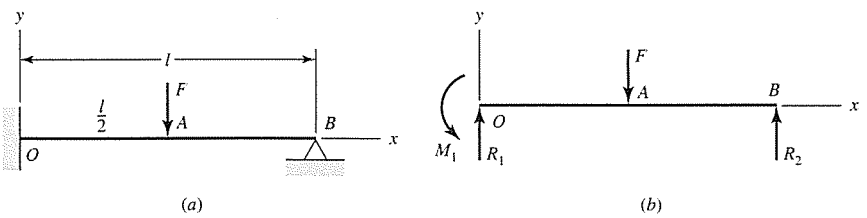


Figura 5-15

Podemos aplicar a Equação (5-26), utilizando a variável x tal como mostrado na Figura 5-15(b). Contudo, termos mais simples podem ser encontrados empregando-se uma variável $\hat{x}$ que inicie em B e seja positiva para a esquerda. Com isso, e com a expressão para R_2 a partir da Equação (5), as equações de momento são

$$M = \left(\frac{F}{2} - \frac{M_1}{l}\right)\hat{x} \qquad 0 \le \hat{x} \le \frac{l}{2} \tag{7}$$

$$M = \left(\frac{F}{2} - \frac{M_1}{l}\right)\hat{x} - F\left(\hat{x} - \frac{l}{2}\right) \qquad \frac{l}{2} \le \hat{x} \le l \tag{8}$$

Para ambas as equações

$$\frac{\partial M}{\partial M_1} = -\frac{\hat{x}}{l} \tag{9}$$

Substituindo as Equações (7) a (9) na Equação (6), utilizando a forma da Equação (5-26), em que $F_i = M_1$, obtemos

$$\theta_O = \frac{\partial U}{\partial M_1} = \frac{1}{EI}\left\{\int_0^{l/2}\left(\frac{F}{2} - \frac{M_1}{l}\right)\hat{x}\left(-\frac{\hat{x}}{l}\right)d\hat{x} + \int_{l/2}^{l}\left[\left(\frac{F}{2} - \frac{M_1}{l}\right)\hat{x} - F\left(\hat{x} - \frac{l}{2}\right)\right]\left(-\frac{\hat{x}}{l}\right)d\hat{x}\right\} = 0$$

Cancelando $1/EI\,l$ e combinando as duas primeiras integrais, a expressão simplifica-se muito prontamente em

$$\left(\frac{F}{2} - \frac{M_1}{l}\right)\int_0^l \hat{x}^2\,d\hat{x} - F\int_{l/2}^{l}\left(\hat{x} - \frac{l}{2}\right)\hat{x}\,d\hat{x} = 0$$

Integrando, obtemos

$$\left(\frac{F}{2} - \frac{M_1}{l}\right)\frac{l^3}{3} - \frac{F}{3}\left[l^3 - \left(\frac{l}{2}\right)^3\right] + \frac{Fl}{4}\left[l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2\right] = 0$$

o que reduz a

$$M_1 = \frac{3Fl}{16} \tag{10}$$

4 Substituir a Equação (10) na (5) resulta em

$$R_1 = \frac{11F}{16} \qquad R_2 = \frac{5F}{16} \tag{11}$$

o que concorda novamente com a Tabela A-9-11.

Para alguns problemas, mesmo o procedimento 1 pode ser uma tarefa. O procedimento 2, por sua vez, elimina alguns problemas geométricos difíceis que complicariam o procedimento 1. Descreveremos agora o procedimento para um problema de viga.

Procedimento 2

1 Escreva as equações de equilíbrio estático para a viga, em termos das cargas aplicadas e das reações desconhecidas de restrições.

2 Escreva a equação de deflexão para a viga, em termos das cargas aplicadas e das reações desconhecidas de restrição.

3 Aplique as condições de contorno conforme as restrições.

4 Solucione as equações a partir dos passos 1 e 3.

Observe que poderíamos ter facilmente incorporado a rigidez do apoio em B, se nos fosse dada uma razão de mola.

EXEMPLO 5-15

As barras AD e CE mostradas na Figura 5-16(a) têm, cada uma, um diâmetro de 10 mm. O segundo momento de área da viga ABC é $I = 62{,}5(10^3)$ mm^4. O módulo de elasticidade do material usado para as barras e para a viga é $E = 200$ GPa. As roscas nas extremidades das barras são de um só filete, com um passo de 1,5 mm. As porcas são primeiro ajustadas razoavelmente com a barra horizontal ABC. A seguir, a porca em A é apertada uma volta completa. Determine a tração resultante em cada barra e as deflexões dos pontos A e C.

Solução

Há muita coisa acontecendo neste problema: uma barra encurta, as barras se esticam e a viga se flexiona. Vamos experimentar o procedimento!

1 O diagrama de corpo livre da viga está ilustrado na Figura 5-16(b). Somando as forças e os momentos relativamente a B, obtemos

$$F_B - F_A - F_C = 0 \tag{1}$$

$$4F_A - 3F_C = 0 \tag{2}$$

2 Utilizando funções de singularidade, descobrimos que a equação de momento para a viga é

$$M = -F_A x + F_B \langle x - 0{,}2 \rangle^1$$

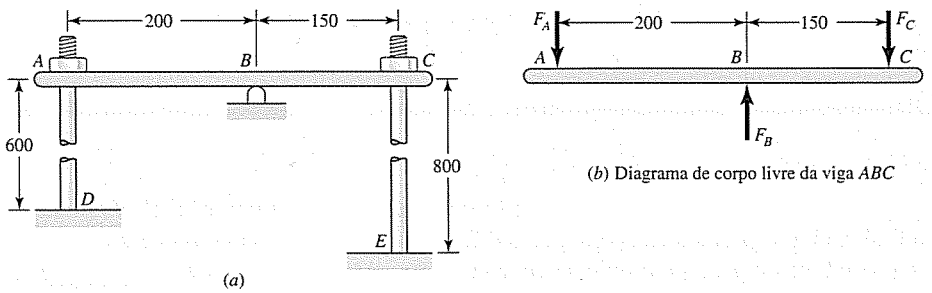
em que x se dá em metros. A integração produz

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{F_A}{2}x^2 + \frac{F_B}{2}\langle x - 0{,}2\rangle^2 + C_1$$

$$EIy = -\frac{F_A}{6}x^3 + \frac{F_B}{6}\langle x - 0{,}2\rangle^3 + C_1 x + C_2 \tag{3}$$

O termo $EI = 200(10^9)\,62{,}5(10^{-9}) = 1{,}25(10^4)$ N · m^2.

3 A deflexão para cima do ponto A é $(Fl/AE)_{AD} - Np$, em que o primeiro termo é um estiramento elástico de AD, N é o número de voltas da porca e p é o passo da rosca. Logo, a deflexão de A é



(a)

(b) Diagrama de corpo livre da viga ABC

Figura 5-16

$$y_A = \frac{F_A(0,6)}{\frac{\pi}{4}(0,010)^2(200)(10^9)} - (1)(0,0015)$$
$$= 3,8197(10^{-8})F_A - 1,5(10^{-3}) \tag{4}$$

A deflexão para cima do ponto C é $(Fl/EA)_{CE}$, ou

$$y_C = \frac{F_C(0,8)}{\frac{\pi}{4}(0,010)^2(200)(10^9)} = 5,093(10^{-8})F_C \tag{5}$$

As Equações (4) e (5) agora servirão como condições de contorno para a Equação (3). Em $x = 0$, $y = y_A$. Substituindo a Equação (4) na (3) com $x = 0$ e $EI = 1,25(10^4)$, observando que a função de singularidade é zero para $x = 0$, obtemos

$$-4,7746(10^{-4})F_A + C_2 = -18,75 \tag{6}$$

Em $x = 0,2$ m, $y = 0$, e a Equação (3) produz

$$-1,3333(10^{-3})F_A + 0,2C_1 + C_2 = 0 \tag{7}$$

Em $x = 0,35$ m, $y = y_C$. Substituindo a Equação (5) na (3) com $x = 0,35$ m e $EI = 1,25(10^4)$, obtemos

$$-7,1458(10^{-3})F_A + 5,625(10^{-4})F_B - 6,3662(10^{-4})F_C + 0,35C_1 + C_2 = 0 \tag{8}$$

As Equações (1), (2), (6), (7) e (8) são cinco equações em F_A, F_B, F_C, C_1 e C_2. Escritas em forma matricial, elas são

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ -4,7746(10^{-4}) & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1,3333(10^{-3}) & 0 & 0 & 0,2 & 1 \\ -7,1458(10^{-3}) & 5,625(10^{-4}) & -6,3662(10^{-4}) & 0,35 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \\ F_C \\ C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -18,75 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Solucionando essas equações, obtemos

Resposta
$$F_A = 2988 \text{ N} \qquad F_B = 6971 \text{ N} \qquad F_C = 3983 \text{ N}$$
$$C_1 = 106,54 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \qquad C_2 = -17,324 \text{ N} \cdot \text{m}^3$$

A Equação (3) pode ser reduzida a

$$y = -(39,84x^3 - 92,95\langle x - 0,2\rangle^3 - 8,523x + 1,386)(10^{-3})$$

Resposta Em $x = 0$, $y = y_A = -1,386(10^{-3})$ m $= -1,386$ mm. Em $x = 0,35$ m,

Resposta
$$y_C = -[39,84(0.35)^3 - 92,95(0,35 - 0,2)^3 - 8,523(0,35) + 1,386](10^{-3})$$
$$= 0,203(10^{-3}) \text{ m} = 0,203 \text{ mm}$$

5-11 Membros de Compressão - Geral

A análise e o projeto de membros de compressão podem diferir significativamente da análise e do projeto de membros carregados em tração ou em torção. Se você tomasse uma barra longa ou mastro, tal como uma vara de medida, e aplicasse gradualmente forças cada vez maiores em cada extremidade, observaria que nada iria ocorrer a princípio; depois, entretanto, a vara se flexionaria (flambaria) e, por fim, envergaria tanto que chegaria à fratura. Realize um teste. O extremo oposto ocorreria se você cortasse fora, digamos, um comprimento de 5 mm da vara de medida e fizesse o mesmo experimento no pedaço curto. Você observaria, então,

que a falha se apresentaria como um esmagamento do espécime, ou seja, como uma falha simples de compressão. Por tais razões, é conveniente classificar os membros que trabalham para a compressão de acordo com os seus comprimentos e conforme seja o carregamento central ou excêntrico. O termo *coluna* é aplicado a todos os membros similares, exceto àqueles para os quais a falha seria por compressão simples ou pura. As colunas podem então ser categorizadas como:

1. Longas com carregamento centralizado
2. De comprimento intermediário com carregamento central
3. Com carregamento excêntrico
4. Curtas com carregamento excêntrico

Classificar colunas, como feito anteriormente, torna possível desenvolver métodos de análise e projeto específicos para cada categoria. Além disso, esses métodos também revelarão se você selecionou ou não a categoria apropriada para seu problema particular. As quatro seções que seguem correspondem, respectivamente, às quatro categorias de colunas supracitadas.

S. Timoshenko[9] apresentou uma demonstração reveladora do papel da estabilidade de membros sob compressão. Considere uma barra reta *rígida* sustentando uma carga compressiva P, como mostrado na Figura 5-17. A barra reta, carregada de forma concêntrica, é mantida na vertical por meio de um par de molas com uma razão de mola combinada de k lbf/in. Para uma carga leve, qualquer perturbação criando um deslocamento da barra para a direita ou para a esquerda faz com que a mola deixe essa barra na posição vertical (equilíbrio estável) novamente. Para uma carga elevada, a mola torna-se incapaz de corrigir o deslocamento, de modo que este aumenta (equilíbrio instável). Para uma carga intermediária, o equilíbrio é neutro. Para um pequeno deslocamento θ, a carga P desce uma distância $l(1 - \cos\theta)$. A perda de energia potencial da carga, E_p, é

$$E_p = Pl(1 - \cos\theta) = Pl\left[1 - \left(1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots\right)\right] \doteq \frac{Pl\theta^2}{2}$$

para os dois primeiros termos da expansão em série da função co-seno. O aumento da energia de deformação das molas, E_{deform}, é

$$E_{\text{deform}} = \frac{k(l\theta)^2}{2}$$

A energia de deformação da barra é zero, se esta for rígida, e pequena, caso não o seja. Para o equilíbrio neutro, $E_{deform} = E_p$, ou

$$\frac{k(l\theta)^2}{2} = \frac{Pl\theta^2}{2}$$

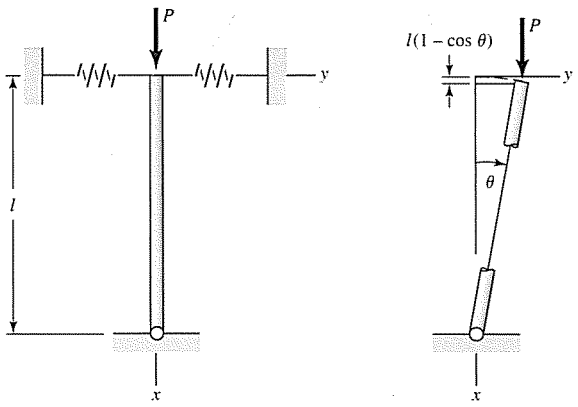


Figura 5-17

[9] S. Timoshenko, *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill, New York, 1936, p. 77-78.

a partir do que

$$P_{crit} = kl \tag{5-40}$$

A resistência do material da coluna não exerce controle. As tensões nessa coluna não estão envolvidas na Equação (5-40). A falha em carregar a carga é devida a uma condição de instabilidade elástica. Os anos de experiência que os engenheiros acumulam resguardando-se contra e monitorando falhas controladas pela tensão entorpecem o aviso de instabilidade. A experiência geral com proporções "robustas", e aquilo que funciona e não funciona, não constitui um guia confiável no comportamento de colunas. Tais falhas podem ser súbitas e catastróficas.

5-12 Colunas Longas com Carregamento Central

A relação entre a carga crítica e o material da coluna e sua geometria é desenvolvida com referência à Figura 5-18(*a*). Supomos uma barra de comprimento l, carregada por uma força P, atuando ao longo do eixo do centróide da secção sobre extremidades articuladas ou pivotadas. A figura mostra que essa barra é flexionada na direção positiva do eixo y. Isso requer um momento negativo; portanto,

$$M = -Py \tag{a}$$

Se por acaso a barra se flexionasse na direção negativa do eixo y, um momento positivo resultaria, de modo que $M = -Py$, tal como antes. Utilizando a Equação (5-12), escrevemos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{P}{EI}y \tag{b}$$

ou

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI}y = 0 \tag{5-41}$$

Isso muito se assemelha à conhecida equação diferencial para o movimento harmônico simples. Sua solução é

$$y = A \operatorname{sen}\sqrt{\frac{P}{EI}}x + B\cos\sqrt{\frac{P}{EI}}x \tag{c}$$

em que A e B são constantes de integração e devem ser determinadas a partir das condições de contorno do problema. Nós as avaliamos utilizando as condições segundo as quais $y = 0$ em $x = 0$ e em $x = l$. Isso nos fornece $B = 0$ e

$$0 = A \operatorname{sen}\sqrt{\frac{P}{EI}}l \tag{d}$$

A solução trivial, correspondente à não-ocorrência de flambagem, ocorre com $A = 0$. Contudo, se $A \neq 0$, então

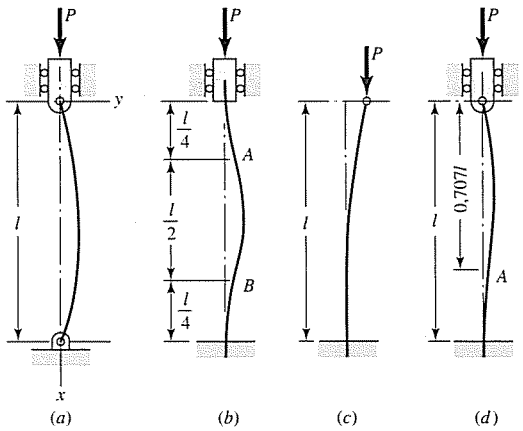


Figura 5-18 (*a*) Ambas as extremidades pivotadas ou articuladas; (*b*) ambas as extremidades fixas; (*c*) uma extremidade livre, outra extremidade fixa; (*d*) uma extremidade articulada e pivotada, outra extremidade fixa.

$$\operatorname{sen}\sqrt{\frac{P}{EI}}l = 0 \tag{e}$$

A Equação (*e*) é satisfeita por $\sqrt{P/EI}\ l = n\pi$, em que $n = 1, 2, 3,...$ Solucionar para P, quando $n = 1$, fornece-nos a primeira carga crítica

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \tag{5-42}$$

que é denominada *fórmula de coluna de Euler*, a qual aplica-se apenas a colunas de extremidades articuladas. Se substituirmos esses resultados de volta na Equação (*c*), obteremos a equação da curva de deflexão na forma

$$y = A \operatorname{sen}\frac{\pi x}{l} \tag{f}$$

o que indica que a curva de deflexão é a metade de uma curva de onda senoidal. Estamos interessados apenas na carga crítica mínima, que ocorre com $n = 1$. Contudo, embora isso não tenha qualquer importância aqui, valores de n maiores que 1 resultam em curvas de deflexão que cruzam o eixo em pontos de inflexão e que são múltiplas de meias ondas senoidais.

Utilizar a relação $I = Ak^2$, em que A é a área e k, o raio de giração, habilita-nos a rearranjar a Equação (5-42) na forma mais conveniente, como segue

$$\frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E}{(l/k)^2} \tag{5-43}$$

em que l/k é chamado de *razão de esbelteza*. Essa razão, em vez do comprimento real da coluna, será utilizada na classificação de colunas, de acordo com as categorias de comprimento.

A quantidade P_{cr}/A na Equação (5-43) é a *carga crítica unitária*, a carga por unidade de área necessária à colocação da coluna em uma condição de *equilíbrio instável*. Nesse estado, qualquer pequena tortuosidade do membro, ou qualquer pequeno movimento do suporte, ou carga, fará com que a coluna colapse. A carga unitária tem as mesmas unidades que a resistência, mas esta é a resistência de uma coluna específica, e não do material da mesma. Dobrar o comprimento de um membro, por exemplo, terá um efeito drástico no valor de P_{cr}/A, mas absolutamente nenhum efeito na, digamos, resistência ao escoamento S_y do material que constitui a coluna em si.

A Equação (5-43) mostra que a carga crítica unitária depende apenas do módulo de elasticidade e da razão de esbelteza. Assim, uma coluna que obedeça à fórmula de Euler feita de um aço liga de alta resistência *não é mais forte* que uma feita de um aço baixo carbono, já que E é o mesmo para ambas.

As cargas críticas para colunas com diferentes condições de extremidade podem ser obtidas solucionando-se a equação diferencial ou fazendo-se uma comparação. A Figura 5-18(*b*) exibe uma coluna com ambas as extremidades fixas. Os pontos de inflexão estão localizados em A e B, a uma distância $l/4$ das extremidades. A distância AB é a mesma curva de uma coluna com extremidades articuladas. Substituindo o comprimento $l/2$ em lugar de l na Equação (5-42), obtemos

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(l/2)^2} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2} \tag{5-44}$$

Na Figura 5-18(*c*) é mostrada uma coluna com uma extremidade livre e com a outra articulada. Essa curva é equivalente à metade daquela que corresponde a colunas com extremidades articuladas, de modo que, se um comprimento $2l$ for substituído na Equação (5-42), a carga crítica se tornará

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2} \tag{5-45}$$

Uma coluna com uma extremidade fixa e a outra articulada, como na Figura 5-18(*d*), aparece freqüentemente. O ponto de inflexão está em A, a uma distância de $0{,}707l$ da extremidade articulada. Portanto,

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0{,}707l)^2} = \frac{2\pi^2 EI}{l^2} \tag{5-46}$$

Podemos levar em consideração essas diferentes condições de extremidade, ao escrever a equação de Euler nas duas formas seguintes:

$$P_{\text{cr}} = \frac{C\pi^2 EI}{l^2} \qquad \frac{P_{\text{cr}}}{A} = \frac{C\pi^2 E}{(l/k)^2} \tag{5-47}$$

Aqui, o fator C é denominado *constante de condição de extremidade* e pode ter qualquer um dos valores teóricos $\frac{1}{4}$,1, 2 e 4, dependendo da forma como a carga é aplicada. Na prática é difícil, se não impossível, fixar as extremidades da coluna, de modo que o fator $C = 2$ ou $C = 4$ se aplicaria. Mesmo se as extremidades da coluna forem soldadas, alguma deflexão ocorrerá. Por causa disso, alguns projetistas nunca utilizam um valor de C maior que o unitário. Entretanto, se fatores de segurança liberais forem empregados, e se a carga na coluna for conhecida com exatidão, então um valor de C não excedendo a 1,2 para ambas as extremidades de coluna fixas, ou para uma extremidade articulada e para a outra fixa, não deixará de ser razoável, uma vez que supõe apenas fixação parcial. Naturalmente, o valor $C = \frac{1}{4}$ deve ser sempre utilizado para uma coluna com uma extremidade fixa e a outra livre. Essas recomendações estão resumidas na Tabela 5-2.

Quando a Equação (5-47) é solucionada para diversos valores da carga unitária P_{cr}/A, em termos da razão de esbelteza l/k, obtemos a curva PQR mostrada na Figura 5-19. Na medida em que a resistência ao escoamento do material tem as mesmas unidades que a carga unitária, a linha horizontal passando por S_y e Q foi adicionada à figura. Isso poderia sugerir que tal figura cobriria todo o intervalo de problemas de compressão, desde o membro de compressão mais curto até o mais longo. Portanto, pareceria que qualquer membro de compressão com um valor de l/k menor que $(l/k)_Q$ deveria ser tratado como um membro sob compressão pura, ao passo que todos os restantes, como colunas de Euler. Infelizmente, isso não é verdade.

No projeto real de um membro que deva funcionar como uma coluna, o projetista estará ciente das condições de extremidade mostradas na Figura 5-18 e se esforçará por configurar as extremidades, utilizando parafusos, soldas ou pinos, por exemplo, de modo a atingir a condição ideal requerida de extremidade.

Mesmo com tais precauções, o resultado, seguindo o processo de fabricação, deve provavelmente conter defeitos como imperfeições, tortuosidades iniciais ou excentricidades de carga. A existência de tais

Tabela 5-2 Constantes de condição de extremidade para colunas de Euler [a serem usadas com a Equação (5-47)]

Condições de extremidade de coluna	Constante C de condição de extremidade		
	Valor teórico	Valor conservador	Valor recomendado*
Fixa-livre	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
Articulada-articulada	1	1	1
Fixa-articulada	2	1	1,2
Fixa-fixa	4	1	1,2

* A ser usado somente com fatores liberais de segurança, quando a carga da coluna é conhecida com exatidão.

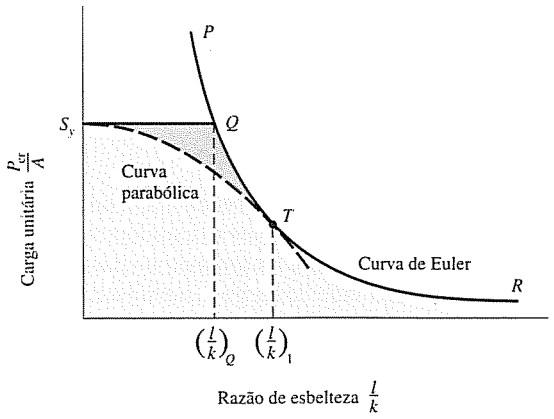


Figura 5-19 Curva de Euler traçada utilizando a Equação (5-47), com $C = 1$.

defeitos e os métodos para lidar com eles envolverão, normalmente, a utilização de uma abordagem de fatores de segurança ou uma análise estocástica. Esses métodos funcionam bem para colunas longas e membros de compressão simples. Contudo, os testes mostram muitos casos de falhas de colunas com razões de esbelteza abaixo e nas circunjacências do ponto Q, como mostrado na área sombreada da Figura 5-19. Tais falhas ocorreram mesmo quando espécimes de geometria quase perfeita foram utilizados no procedimento de teste.

Uma falha de coluna é sempre repentina, total e inesperada – portanto, perigosa. Não há avisos prévios. Uma viga irá se flexionar e dar um aviso visual de que está sobrecarregada; esse, no entanto, não é o caso de uma coluna. Por tal razão, nem os métodos de compressão simples nem a equação de coluna de Euler devem ser utilizados quando a razão de esbelteza estiver próxima de $(l/k)_Q$. Assim sendo, o que devemos fazer nesse caso? O procedimento usual consiste em escolher algum ponto T na curva de Euler da Figura 5-19. Se a razão de esbelteza for especificada como $(l/k)_1$ correspondendo ao ponto T, então utilize a equação de Euler somente quando a razão de esbelteza real for maior que $(l/k)_1$. Se não, utilize um dos métodos que aparecem nas seções seguintes. Veja os Exemplos 5-17 e 5-18.

A maioria dos projetistas seleciona o ponto T, de modo que $P_{cr}/A = S_y/2$. Utilizando a Equação (5-47), encontramos o valor correspondente de $(l/k)_1$ valendo

$$\left(\frac{l}{k}\right)_1 = \left(\frac{2\pi^2 CE}{S_y}\right)^{1/2} \tag{5-48}$$

5-13 Colunas de Comprimento Intermediário com Carregamento Central

Há anos várias fórmulas para colunas têm sido propostas e utilizadas para valores de variação de l/k para os quais a fórmula de Euler não é adequada. Muitas são baseadas na utilização de um único material; outras, na chamada carga unitária segura, em vez de no valor da carga crítica. A maioria dessas fórmulas baseia-se no uso de uma relação linear entre a razão de esbelteza e a carga unitária. A fórmula *parabólica* ou *de J.B. Johnson* parece, atualmente, ser a preferida entre os projetistas nos campos de máquinas, automotivo, aeronáutico e de construção estrutural em aço.

A forma geral da fórmula parabólica é

$$\frac{P_{cr}}{A} = a - b\left(\frac{l}{k}\right)^2 \tag{5-49}$$

em que a e b são constantes que são avaliadas ajustando-se uma parábola à curva de Euler da Figura 5-19, como mostrado por meio da linha tracejada que termina em T. Se a parábola for iniciada em S_y, então $a = S_y$. Se o ponto T for selecionado como descrito anteriormente, então a Equação (5-48) produzirá o valor de $(l/k)_1$ e, portanto, a constante b deverá ser

$$b = \left(\frac{S_y}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{CE} \tag{a}$$

Uma vez substituídos os valores conhecidos de a e b na Equação (5-49), obtemos, para a equação da parábola,

$$\frac{P_{cr}}{A} = S_y - \left(\frac{S_y}{2\pi}\frac{l}{k}\right)^2 \frac{1}{CE} \qquad \frac{l}{k} \leq \left(\frac{l}{k}\right)_1 \tag{5-50}$$

5-14 Colunas com Carregamento Excêntrico

Observamos, anteriormente, que desvios da coluna ideal, tais como excentricidade de carga ou tortuosidade, têm grande probabilidade de ocorrer durante a manufatura e a montagem. Embora tais desvios costumem ser muito pequenos, convém, ainda assim, ter um método para lidar com eles. Também surgem com freqüência problemas em que a excentricidade de carga é inevitável.

A Figura 5-20(a) mostra uma coluna em que a linha de ação das forças de coluna está separada do eixo do centróide da coluna por uma excentricidade e. Esse problema é desenvolvido por meio da utilização do diagrama de corpo livre da Figura 5-20(b) e a partir da soma dos momentos a zero, relativamente à origem O. Isso nos fornece

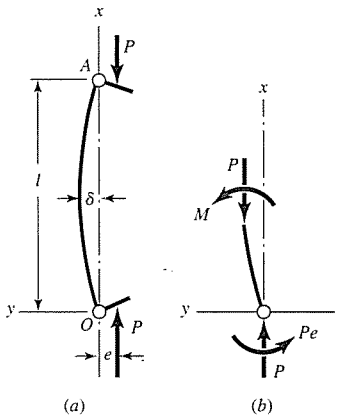


Figura 5-20 Notação para uma coluna carregada excentricamente.

$$\sum M_O = M + Pe + Py = 0 \tag{a}$$

Utilizando a Equação (5-12) e rearranjando os termos, produzimos a equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI}y = -\frac{Pe}{EI} \tag{b}$$

A Equação (*b*) é solucionada de uma maneira bastante similar a outras que resolvemos neste capítulo. As condições de contorno (extremidades) são

$$x = 0 \qquad y = 0$$
$$x = l \qquad y = 0$$

Substituindo $x = l/2$ na solução resultante, determinamos a deflexão no meio do vão e o momento flexor máximo nessa posição como

$$\delta = e\left[\sec\left(\frac{l}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}}\right) - 1\right] \tag{5-51}$$

$$M_{\max} = -P(e + \delta) = -Pe\sec\left(\frac{l}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}}\right) \tag{5-52}$$

A máxima tensão de *compressão* no meio do vão é determinada sobrepondo-se a componente axial à componente flexional. Isso nos dá

$$\sigma_c = \frac{P}{A} - \frac{Mc}{I} = \frac{P}{A} - \frac{Mc}{Ak^2} \tag{c}$$

Substituindo o valor de $M_{\max}$ proveniente da Equação (5-52), obtemos

$$\sigma_c = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ec}{k^2}\sec\left(\frac{l}{2k}\sqrt{\frac{P}{EA}}\right)\right] \tag{5-53}$$

Observe que o comprimento l aparece somente na função secante. Uma vez que a secante de um ângulo agudo é um número maior que a unidade, o comprimento amplifica a excentricidade por meio do termo dessa secante. Impondo a resistência de escoamento sob compressão S_{yc} como o valor máximo de σ_c, podemos escrever a Equação (5-53) na forma

$$\frac{P}{A} = \frac{S_{yc}}{1 + (ec/k^2)\sec[(l/2k)\sqrt{P/AE}]} \tag{5-54}$$

Essa equação é conhecida como *fórmula da secante para colunas*. O termo ec/k^2 é denominado *razão de excentricidade*. A Figura 5-21 é um gráfico da Equação (5-54) para um aço com uma resistência a es-

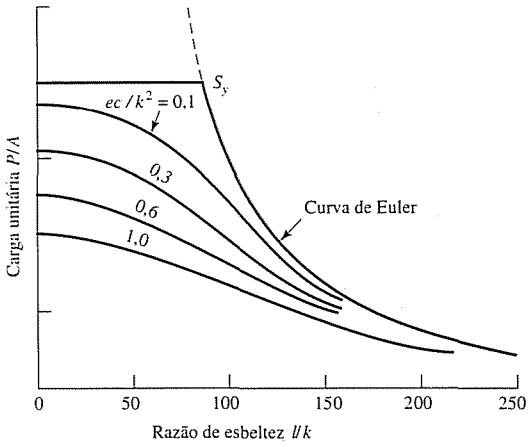


Figura 5-21 Comparação das equações da secante e de Euler. Para aço com S_y = 40 kpsi.

coamento sob compressão (e sob tração) de 40 kpsi. Observe como os contornos de P/A aproximam-se assintoticamente da curva de Euler à medida que l/k aumenta.

A Equação (5-54) não pode ser solucionada explicitamente para a carga P. Cartas de projeto, no estilo mostrado na Figura 5-21, podem ser preparadas para um único material se a quantidade de trabalho de projeto de colunas for grande. Caso contrário, uma técnica de busca de raiz utilizando métodos numéricos deve ser empregada. Com estes, uma substituição sucessiva com convergência assegurada pode ser aplicada.[10]

EXEMPLO 5-16

Desenvolva equações específicas de Euler para os tamanhos de coluna tendo

(*a*) Secções transversais circulares

(*b*) Secções transversais retangulares

Solução (*a*) Utilizando $A = \pi d^2/4$ e $k = \sqrt{I/A} = [(\pi d^4/64)/(\pi d^2/4)]^{1/2} = d/4$ com a Equação (5-47), obtemos

Resposta
$$d = \left(\frac{64 P_{cr} l^2}{\pi^3 C E}\right)^{1/4} \tag{5-55}$$

(*b*) Para a coluna retangular, especificamos uma altura h e uma largura b, com a restrição de que $h \leq b$. Se as condições de extremidade são as *mesmas* para flambagem em ambas as direções, então esta ocorrerá na direção de menor espessura. Conseqüentemente,

$$I = \frac{bh^3}{12} \qquad A = bh \qquad k^2 = I/A = \frac{h^2}{12}$$

Substituindo esses valores na Equação (5-47), obtemos

Resposta
$$b = \frac{12 P_{cr} l^2}{\pi^2 C E h^3} \tag{5-56}$$

Observe muito particularmente, porém, que colunas retangulares não apresentam em geral a mesma condição de extremidade em ambas as direções.

[10] Ver Charles R. Mischke, "Computational Considerations in Design", Cap. 5, *in* Joseph E. Shigley e Charles R. Mischke (eds.), *Standard Handbook of Machine Design*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1996, p. 5.13.

EXEMPLO 5-17

Especifique o diâmetro de uma coluna circular, com comprimento de 1,5 m, que deve suportar uma carga máxima estimada de 22 kN. Utilize um fator de projeto $n_d = 4$ e considere as extremidades como pivotadas (articuladas). O material selecionado da coluna tem uma resistência mínima de escoamento de 500 MPa e um módulo de elasticidade de 207 GPa.

Solução Projetaremos a coluna para uma carga crítica de

$$P_{cr} = n_d P = 4(22) = 88 \text{ kN}$$

Assim, utilizando a Equação (5-55) com $C = 1$ (ver Tabela 5-2), obtemos

$$d = \left(\frac{64 P_{cr} l^2}{\pi^3 C E}\right)^{1/4} = \left[\frac{64(88)(1{,}5)^3}{\pi^3(1)(207)}\right]^{1/4} \left(\frac{10^3}{10^9}\right)^{1/4} (10^3) = 41{,}48 \text{ mm}$$

A Tabela A-17 mostra que o tamanho preferencial é de 45 mm. A razão de esbelteza para ele é

$$\frac{l}{k} = \frac{l}{d/4} = \frac{1{,}5(10^3)}{45/4} = 133{,}3$$

Para assegurar-se de que essa é uma coluna de Euler, utilize a Equação (5-48) e obtenha

$$\left(\frac{l}{k}\right)_1 = \left(\frac{2\pi^2 C E}{S_y}\right)^{1/2} = \left[\frac{2\pi^2(1)(207)}{500}\right]^{1/2} \left(\frac{10^9}{10^6}\right)^{1/2} = 90{,}4$$

que indica ser de fato uma coluna de Euler. Dessa forma, selecione

Resposta $$d = 45 \text{ mm}$$

EXEMPLO 5-18

Repita o Exemplo 5-16 para colunas de J. B. Johnson.

Solução (*a*) Para colunas circulares, a Equação (5-50) produz

Resposta $$d = 2\left(\frac{P_{cr}}{\pi S_y} + \frac{S_y l^2}{\pi^2 C E}\right)^{1/2} \tag{5-57}$$

(*b*) Para uma secção retangular com dimensões $h \le b$, encontramos

Resposta $$b = \frac{P_{cr}}{h S_y \left(1 - \dfrac{3 l^2 S_y}{\pi^2 C E h^2}\right)} \qquad h \le b \tag{5-58}$$

EXEMPLO 5-19

Escolha um conjunto de dimensões para uma conexão retangular que deve suportar uma carga máxima de compressão de 5000 lbf. O material selecionado tem uma resistência mínima de escoamento de 75 kpsi e um módulo de elasticidade $E = 30$ Mpsi. Utilize um fator de projeto de 4 e uma constante de condição de extremidade $C = 1$ para flambagem na direção mais fraca e projete para (*a*) um comprimento de 15 in e para (*b*) um comprimento de 8 in, com uma espessura mínima de $\frac{1}{2}$ in.

Solução (*a*) Utilizando a Equação (5-48), encontramos a razão limite de esbelteza valendo

$$\left(\frac{l}{k}\right)_1 = \left(\frac{2\pi^2 CE}{S_y}\right)^{1/2} = \left[\frac{2\pi^2(1)(30)(10^6)}{75(10)^3}\right]^{1/2} = 88{,}9$$

Utilizando $P_{cr} = n_d P = 4(5000) = 20\,000$ lbf, as Equações (5-56) e (5-58) são solucionadas; utilizando vários valores de h, forma-se a Tabela 5-3, a qual mostra que uma secção transversal de $\frac{5}{8}$ por $\frac{3}{4}$ in, que é marginalmente conveniente, provê a menor área.

(*b*) Uma abordagem similar à de (*a*) é utilizada com $l = 8$ in. Todas as tentativas computacionais estão na região de valores de l/k de J. B. Johnson. Uma área mínima ocorre quando a secção é quase quadrada. Assim, descobre-se que uma secção transversal de $\frac{1}{2}$ por $\frac{3}{4}$ in é conveniente e segura.

Tabela 5-3 Tabela gerada para solucionar o Exemplo 5-19 (*a*)

h	b	A	l/k	Tipo	Eq. nº
0,375	3,46	1,298	139	Euler	(5-56)
0,500	1,46	0,730	104	Euler	(5-56)
0,625	0,76	0,475	83	Johnson	(5-58)
0,5625	1,03	0,579	92	Euler	(5-56)

5-15 Pilarete, ou Membros Curtos de Compressão

Uma barra curta, carregada à compressão pura por uma força P agindo ao longo do eixo do centróide, encurtará, de acordo com a lei de Hooke, até que a tensão atinja o limite elástico do material. Nesse ponto, uma deformação permanente é introduzida e a utilidade como uma componente de máquina pode estar próxima do fim. Se a força P for aumentada ainda mais, o material "abarrica" ou fratura. Quando há excentricidade no carregamento, o limite elástico é atingido a valores menores de carga.

Um pilarete é um *membro curto de compressão*, tal como o ilustrado na Figura 5-22. A tensão de compressão na direção x, em um ponto D de uma secção intermediária, é a soma de uma simples componente P/A e uma componente de flexão My/I; isto é,

$$\sigma_c = \frac{P}{A} + \frac{My}{I} = \frac{P}{A} + \frac{PeyA}{IA} = \frac{P}{A}\left(1 + \frac{ey}{k^2}\right) \tag{5-59}$$

em que $k = (I/A)^{1/2}$ e é o raio de giração, y é a coordenada do ponto D e e é a excentricidade do carregamento. A coordenada y de uma linha paralela ao eixo x, ao longo da qual a tensão normal é zero, é determinada tornando-se a Equação (5-59) igual a zero e solucionando-se para y. Isso provê

$$y = -\frac{k^2}{e} \tag{a}$$

À medida que a excentricidade é aumentada, a linha de tensão nula move-se em direção ao centróide de secção transversal. À medida que e é diminuído, a linha afasta-se da secção e a secção completa fica com uma tensão normal de compressão. A maior tensão de compressão ocorre no ponto B da Figura 5-22, onde $y = c$. A Equação (5-59) então se torna

$$\sigma_c = \frac{P}{A}\left(1 + \frac{ec}{k^2}\right) \tag{5-60}$$

Observe que o comprimento do pilarete não aparece na Equação (5-60). Para que se possa utilizar a equação para projeto ou análise, devemos, portanto, saber o intervalo de comprimentos para os quais tal equação é válida. Em outras palavras, quão comprido é um membro curto?

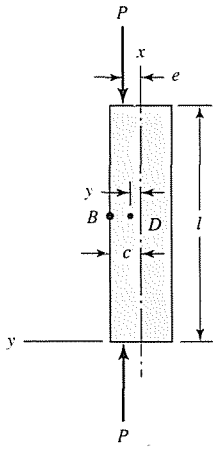


Figura 5-22 Pilarete carregado excentricamente.

A diferença entre a fórmula da secante e a Equação (5-60) é que a equação da secante, diferentemente da Equação (5-60), leva em consideração um aumento do momento flexor devido à deflexão por flexão. Assim, ela mostra a excentricidade ser ampliada pela deflexão de flexão. Essa diferença entre as duas fórmulas sugere que uma das maneiras de distinguir entre uma "coluna de secante" e um pilarete, ou membro curto de compressão, é dizer que, em um pilarete, o efeito da deflexão por flexão deve estar limitado a uma certa percentagem pequena da excentricidade. Se decidirmos que a percentagem limitante deve ser 1% de e, então, a partir da Equação (5-51), a razão de esbelteza limite se tornará

$$\left(\frac{l}{k}\right)_2 = 0{,}282\left(\frac{AE}{P}\right)^{1/2} \tag{5-61}$$

Essa equação então nos dá a razão de esbelteza limite para utilizar a Equação (5-60). Se a razão real de esbelteza for maior que $(l/k)_2$, então empregue a fórmula da secante; se não, utilize a Equação (5-60).

EXEMPLO 5-20

A Figura 5-23(a) exibe uma peça a ser trabalhada presa a uma mesa de fresa por um parafuso de porca apertado a uma tração de 2000 lbf. O contato da fixação está deslocado do eixo do centróide do pilarete por uma distância $e = 0{,}10$ in, como mostrado na parte b da figura. O pilarete, ou bloco, é de aço, com 1 in de lado e comprimento de 4 in. Determine a tensão máxima de compressão no bloco.

Solução Primeiro, encontramos $A = bh = 1(1)$ in^2, $I = bh^3/12 = 1(1)^3/12 = 0{,}0833$ in^4, $k^2 = I/A = 0{,}0833/1 = 0{,}0833$ in^2 e $l/k = 4/(0{,}0833)^{1/2} = 13{,}9$. A Equação (5-61) fornece a razão limite de esbelteza como

$$\left(\frac{l}{k}\right)_2 = 0{,}282\left(\frac{AE}{P}\right)^{1/2} = 0{,}282\left[\frac{1(30)(10^6)}{1000}\right]^{1/2} = 48{,}8$$

Logo, o bloco pode ser tão longo quanto

$$l = 48{,}8k = 48{,}8(0{,}0833)^{1/2} = 14{,}1 \text{ in}$$

antes que necessite ser tratado mediante a fórmula da secante. Assim, a Equação (5-60) aplica-se e a tensão máxima de compressão é

Resposta $$\sigma_c = \frac{P}{A}\left(1 + \frac{ec}{k^2}\right) = \frac{1000}{1}\left[1 + \frac{0{,}1(0{,}5)}{0{,}0833}\right] = 1600 \text{ psi}$$

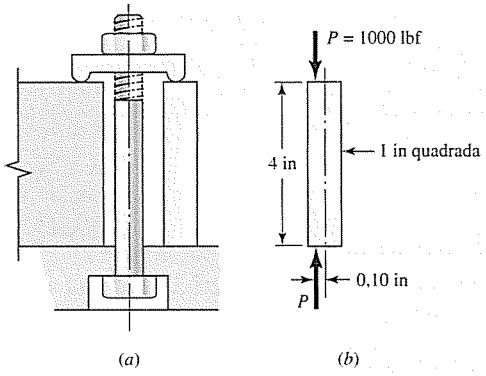


Figura 5-23 Um pilarete que é parte de uma montagem de fixação de uma peça a ser trabalhada.

5-16 Choque e Impacto

Impacto refere-se à colisão de duas massas com velocidade inicial relativa. Em alguns casos, é desejável chegar a um impacto conhecido em projeto; esse é o caso, por exemplo, do projeto em cunhagem, estampagem e prensas de conformação. Em outros, o impacto ocorre devido a deflexões excessivas ou a folgas entre peças, sendo que, nestes, é desejável minimizar os efeitos. O chocalhar dos dentes de engrenagens engrazadas no espaço de dentes é um problema de impacto causado por deflexão do eixo e folga entre os dentes. Tal impacto causa ruído de engranzamento e falha por fadiga das superfícies do dente. O espaço de folga entre um came e um seguidor, ou entre um munhão e seu mancal de deslizamento, pode resultar em um impacto cruzado e também causar ruído excessivo e falha por fadiga rápida.

Choque é um termo mais geral, utilizado para descrever qualquer força ou perturbação subitamente aplicada. Portanto, o estudo do choque inclui o impacto como um caso especial. Há dois enfoques para tal estudo, dependendo se apenas estática é utilizada na análise ou se ambas, estática e dinâmica, o são. Vidas inteiras foram gastas investigando os fenômenos de choque e impacto. Por razões de espaço, o material aqui apresentado pretende apenas indicar o escopo do assunto e oferecer um entendimento básico do que nele está envolvido.

A Figura 5-24 representa um modelo matemático bastante simplificado de um automóvel colidindo com uma obstrução rígida. Aqui, m_1 é a massa concentrada do motor. O deslocamento, a velocidade e a aceleração são descritos em função da coordenada x_1 e de suas derivadas relativamente ao tempo. A massa concentrada do veículo, menos aquela do motor, é denotada por m_2 e o seu movimento, pela coordenada x_2 e suas derivadas. As molas k_1, k_2 e k_3 representam as rigidezes linear e não-linear dos vários elementos estruturais que compõem o veículo. O atrito pode e deve ser incluído, mas não é mostrado nesse modelo. A determinação das razões de mola para uma estrutura tão complexa terá, quase certamente, de ser obtida de maneira experimental. Uma vez que esses valores – os k, os m e os coeficientes de atrito – sejam obtidos, um conjunto de equações diferenciais não-lineares poderá ser escrito e uma solução utilizando um computador, obtida para qualquer velocidade de impacto.

A Figura 5-25 é um outro modelo de impacto. Aqui, a massa m_1 tem uma velocidade inicial v e acaba de fazer contato com a mola k_1. A parte, ou estrutura, a ser analisada é representada pela massa m_2 e pela mola k_2. O problema a ser solucionado pelo projetista é a determinação da máxima deflexão de m_2 e a máxima força exercida por k_2 contra m_2. Para fins de análise, não importa se k_1 está ligado a m_1 ou a m_2, uma vez que estamos

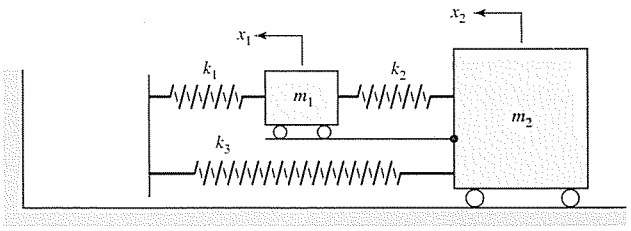


Figura 5-24 Modelo matemático, com dois graus de liberdade, de um automóvel em colisão com uma obstrução rígida.

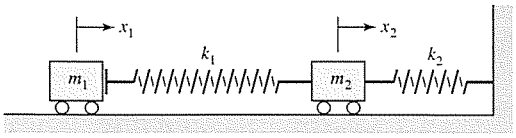


Figura 5-25

interessados somente em uma solução válida até o instante de tempo para o qual x_2 atinge um máximo. Isto é, a solução para o rebote não é necessária. As equações diferenciais não são difíceis de derivar. São elas:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + k_1(x_1 - x_2) &= 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + k_2x_2 - k_1(x_1 - x_2) &= 0 \end{aligned} \tag{5-62}$$

O par de Equações (5-62) é bastante inconveniente no que diz respeito a obter uma solução analítica geral. Porém, se os valores dos m e dos k forem especificados, você provavelmente poderá conseguir uma rotina de integração em uma biblioteca de programas de computador para usar e obter a solução.

5-17 Carregamento Aplicado Subitamente

Um caso simples de impacto é ilustrado na Figura 5-26(a). Aqui, um peso W, movendo-se a uma velocidade constante sobre uma superfície sem atrito, golpeia uma viga em balanço de rigidez EI e comprimento l. Queremos determinar a máxima deflexão e o máximo momento flexor causados na viga pelo impacto.

A Figura 5-26(b) mostra um modelo abstrato do sistema. Usando a Tabela A-9-1, verificamos que a razão de mola vale $k = F/y = 3EI/l^3$. Decidimos começar a contar o tempo a partir do instante em que o peso impacta a mola. Logo, no instante $t = 0$, o movimento inicia com $y = 0$ e $\dot{y} = v$. A equação diferencial é

$$\frac{W}{g}\ddot{y} = -ky \tag{a}$$

em que a força de mola ky é negativa porque se opõe à deflexão y. A solução para essa equação é bastante conhecida:

$$y = A\cos\omega t + B\,\text{sen}\,\omega t \tag{5-63}$$

em que

$$\omega = \sqrt{\frac{kg}{W}} \tag{5-64}$$

é a freqüência circular de vibração. A partir da Equação (5-63), a velocidade é

$$\dot{y} = -A\omega\,\text{sen}\,\omega t + B\omega\cos\omega t$$

Com as condições iniciais em $t = 0$ de $y = 0$ e $\dot{y} = v$, as constantes são

$$A = 0 \qquad B = v/\omega$$

Substituindo esses valores de volta na Equação (5-63), obtemos

$$y = \frac{v}{\omega}\,\text{sen}\,\omega t \tag{5-65}$$

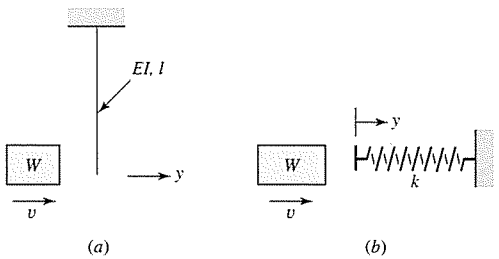


Figura 5-26 (a) Colisão de um peso com uma viga em balanço; (b) modelando a viga em balanço como uma mola com uma razão k.

Naturalmente, essa solução será válida apenas enquanto o peso permanecer em contato com a viga. A máxima deflexão é

$$y_{\max} = \frac{v}{\omega} = \frac{v}{\sqrt{kg/W}} = v\sqrt{\frac{Wl^3}{3EIg}} \tag{5-66}$$

Ademais, o máximo momento flexor é o produto da força de mola e do comprimento da viga. O resultado é

$$M_{\max} = kly_{\max} = v\sqrt{\frac{3EIW}{gl}} \tag{5-67}$$

Como um segundo exemplo, considere o peso W, na Figura 5-27(a), caindo de uma altura h e impactando alguma estrutura ou membro cuja razão de mola vale k. Escolhemos a origem da coordenada y para corresponder à posição do peso quando o tempo t é nulo, tal como antes. Dois diagramas de corpo livre, mostrados nas Figuras 5-27(b) e (c), são necessários – um para quando $y \le h$ e outro para quando $y > h$ –, para dar conta da força de mola. Para cada um desses diagramas de corpo livre, podemos escrever a lei de Newton estabelecendo que a força de inércia $(W/g)\ddot{y}$ é igual à soma das forças externas atuando no peso. Temos, então,

$$\begin{aligned} \frac{W}{g}\ddot{y} &= W & y \le h \\ \frac{W}{g}\ddot{y} &= -k(y-h) + W & y > h \end{aligned} \tag{b}$$

Devemos também incluir na sentença matemática do problema o fato de o peso ser liberado com velocidade inicial zero. O par de Equações (b) constitui um conjunto de *equações diferenciais por partes*. Cada equação é linear, mas se aplica apenas a um intervalo de y. A solução para o conjunto é válida para todos os valores de t, mas, como antes, estamos interessados somente em valores de y até o momento em que a mola ou estrutura alcança sua deflexão máxima.

A solução para a primeira equação do conjunto é

$$y = \frac{gt^2}{2} \qquad y \le h \tag{5-68}$$

e você pode verificar a veracidade dessa solução mediante substituição direta. A Equação (5-68) não é mais válida depois de $y = h$; chame esse instante de t_1. Então,

$$t_1 = \sqrt{2h/g} \tag{c}$$

Diferenciar a Equação (5-68) para obter a velocidade produz

$$\dot{y} = gt \qquad y \le h \tag{d}$$

e, assim, a velocidade do peso no instante $t = t_1$ é

$$\dot{y}_1 = gt_1 = \sqrt{2gh} \tag{e}$$

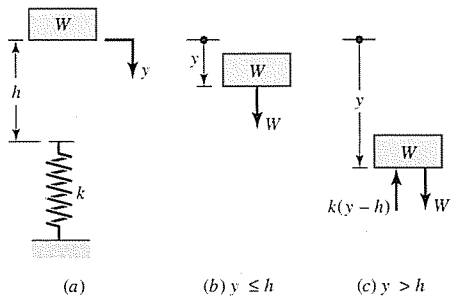


Figura 5-27 Um peso livre para cair uma distância h até a extremidade livre de uma mola. (b) Diagrama de corpo livre do peso durante a queda. (c) Diagrama de corpo livre do peso durante a interrupção do movimento.

Tendo se movido de $y = 0$ para $y = h$, necessitamos então solucionar a segunda equação do par (b). É conveniente definir um novo tempo $t' = t - t_1$. Assim, $t' = 0$ no instante em que o peso golpeia a mola. Aplicando seu conhecimento de equações diferenciais, você deve encontrar a solução para esse caso como sendo

$$y = A\cos\omega t' + B\,\text{sen}\,\omega t' + h + \frac{W}{k} \qquad y > h \tag{f}$$

Se você não puder derivar a Equação (f), deve pelo menos provar a si mesmo que essa é de fato uma solução substituindo-a, bem como sua segunda derivada, na segunda equação do par (b), verificando então que a igualdade na Equação (f) é satisfeita identicamente.

As constantes A e B são avaliadas da maneira mostrada na solução anterior. Quando estas são substituídas de volta, o resultado pode ser transformado no seguinte:

$$y = \left[\left(\frac{W}{k}\right)^2 + \frac{2Wh}{k}\right]^{1/2}\cos[\omega t' - \phi] + h + \frac{W}{k} \qquad y > h \tag{5-69}$$

em que ϕ, ainda que seja de nenhum interesse aqui, é fornecido por

$$\phi = \frac{\pi}{2} + \tan^{-1}\left(\frac{W}{2kh}\right)^{1/2} \tag{g}$$

A máxima deflexão da mola (estrutura) ocorre quando o termo contendo o co-seno na Equação (5-69) é unitário. Designamos como δ a máxima deflexão e, depois de rearranjar os termos, descobrimos que satisfaz a

$$\delta = y_{\max} - h = \frac{W}{k} + \frac{W}{k}\left[1 + \left(\frac{2hk}{W}\right)\right]^{1/2} \tag{5-70}$$

A máxima força atuando na mola ou estrutura é então determinada e vale

$$F = k\delta = W + W\left[1 + \left(\frac{2hk}{W}\right)\right]^{1/2} \tag{5-71}$$

Observe, nessa equação, que, se $h = 0$, então $F = 2W$. Isso nos diz que, quando o peso é liberado – enquanto em contato com a mola, mas já sem exercer qualquer força sobre esta –, a máxima força é o dobro dele.

Muitos sistemas não são tão ideais quanto aqueles explorados aqui; portanto, seja cauteloso ao utilizar essas relações para sistemas não-ideais.

PROBLEMAS

ANÁLISE

5-1 Estruturas podem, freqüentemente, ser consideradas uma combinação de membros de tração, torção e vigas. Cada um desses membros pode ser analisado separadamente, de modo a determinar sua relação força-deflexão, bem como sua razão de mola. É possível, então, obter a deflexão de uma estrutura considerando-a como um agrupado de molas tendo várias combinações em série e paralelo.

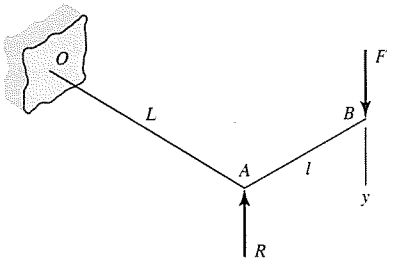
(a) Qual é a razão de mola total de três molas em série?

(b) Qual é a razão de mola total de três molas em paralelo?

(c) Qual é a razão de mola total de uma mola única, em série, com um par de molas em paralelo?

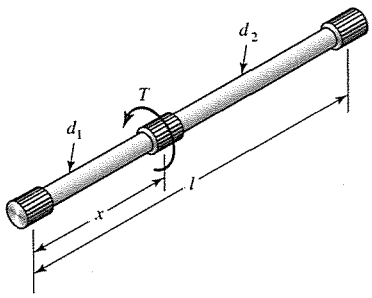
ANÁLISE

5-2 A figura mostra uma barra de torção OA engastada em O, apoiada em A e conectada à viga em balanço AB. A razão de mola da barra de torção é k_T, em newton-metros por radiano, e a da viga em balanço é k_c, em newtons por metro. Qual é a razão de mola global quando se toma por base a deflexão y no ponto B?



Problema 5-2

ANÁLISE **5–3** Uma mola de barra de torção consiste numa barra prismática, geralmente de secção transversal redonda, que é torcida em uma extremidade e segura firmemente na outra, para formar uma mola bastante rígida. Um engenheiro requer uma mola mais rígida que o usual, de forma que considera construir uma mola com ambas as extremidades engastadas e aplicar o torque em algum lugar da porção central do vão, como mostrado na figura. Se a barra é de diâmetro uniforme, isto é, $d = d_1 = d_2$, investigue como o ângulo admissível de torção, o torque máximo e a razão de mola dependem da localização x em que o torque é aplicado. *Sugestão*: Considere duas molas em paralelo.

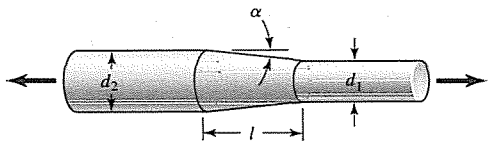


Problema 5-3

ANÁLISE **5–4** Um engenheiro é forçado, por considerações geométricas, a aplicar o torque na mola do Problema 5-3, em uma posição cuja localização é dada por $x = 0{,}2l$. Para uma mola de diâmetro uniforme, isso faria com que o trecho longo do vão fosse subutilizado quando ambos os trechos tivessem o mesmo diâmetro. Se o diâmetro do trecho longo fosse reduzido o suficiente, a tensão de cisalhamento nos dois trechos poderia ser feita idêntica. Como essa modificação iria alterar o ângulo de torção admissível, o torque máximo e a razão de mola?

ANÁLISE **5–5** Uma barra em tração tem uma secção transversal circular e inclui uma porção cônica de comprimento l, como mostrado. A tarefa é encontrar a razão de mola da barra completa. A Equação (5-4) é útil para as porções mais externas de diâmetros d_1 e d_2, mas uma nova relação deve ser derivada para a secção cônica, afunilada. Se α é a metade do ângulo de ápice, como apresentado, mostre que a razão de mola da porção afunilada do eixo é

$$k = \frac{EA_1}{l}\left(1 + \frac{2l}{d_1}\tan\alpha\right)$$



Problema 5-5

ANÁLISE **5–6** Quando um cabo de alçamento é longo, seu peso contribui para a elongação. Se um cabo apresenta um peso de w newtons por metro, um comprimento de l metros e uma carga P atada à extremidade livre mostram que sua elongação é

$$\delta = \frac{Pl}{AE} + \frac{wl^2}{2AE}$$

ANÁLISE **5–7** Utilize integração para verificar a equação de deflexão para a viga em balanço carregada uniformemente da Tabela A-9-3 do Apêndice.

ANÁLISE **5–8** Utilize integração para verificar a equação de deflexão para a viga em balanço carregada uniformemente da Tabela A-9-4 do Apêndice.

ANÁLISE **5–9** Quando uma viga inicialmente reta enverga-se sob carregamento transversal, as extremidades contraem-se porque a superfície neutra de zero deformação não se estende nem se contrai. O comprimento da superfície neutra defletida é o mesmo que o comprimento original da viga l. Considere um segmento da viga inicialmente reta Δs. Após a flexão, a componente da direção x é menor que Δs, isto é, Δx. A contração é $\Delta s - \Delta x$, e estas, somadas para a viga completa, fornecem uma contração de extremidade. Mostre que

$$\lambda \doteq \frac{1}{2}\int_0^l \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx$$

ANÁLISE **5-10** Uma superfície neutra de uma viga simplesmente apoiada tem a forma

$$y = -\frac{4ax}{l^2}(l - x)$$

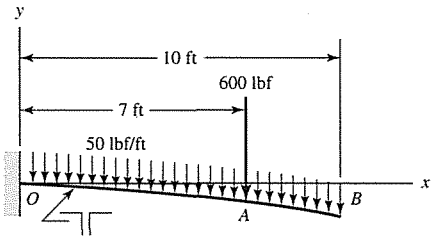
em que a é a magnitude de deflexão da metade do vão. Utilizando o resultado do Problema 5-9, qual é a contração da extremidade a partir da condição reta original?

ANÁLISE **5-11** A superfície neutra de uma viga simplesmente apoiada tem a forma

$$y = a \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l}$$

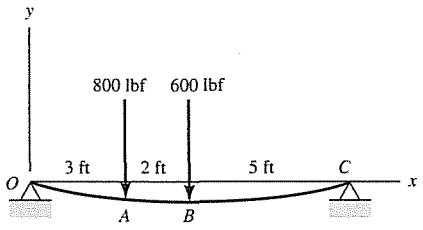
Utilizando o resultado do Problema 5-9, qual é a contração da extremidade a partir da condição reta original?

ANÁLISE **5-12** A figura mostra uma viga em balanço construída a partir de dois perfis de aço em ângulo (perfis L) de tamanho $4 \times 4 \times \frac{1}{2}$ in, montados lado a lado (costado com costado). Encontre a deflexão no ponto B e a máxima tensão na viga.



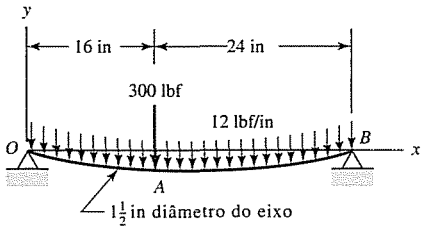
Problema 5-12

ANÁLISE **5-13** Uma viga simplesmente apoiada, carregada por duas forças, é mostrada na figura. Selecione um par de canais (perfis U) estruturais de aço montados lado a lado para suportar as cargas de tal maneira que a deflexão no meio do vão não exceda a $\frac{1}{16}$ in e a tensão máxima, a 6 kpsi. Utilize superposição.



Problema 5-13

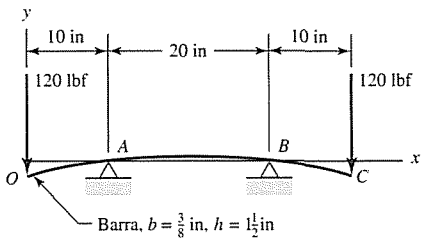
ANÁLISE **5-14** Utilizando superposição, encontre a deflexão do eixo de aço em A, na figura. Encontre a deflexão no meio do vão. Por que percentagem esses dois valores diferem?



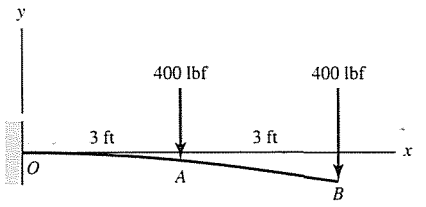
Problema 5-14

ANÁLISE **5-15** Uma barra de aço retangular suporta as duas cargas em balanço mostradas na figura. Utilizando superposição, encontre a deflexão nas extremidades e no centro.

ANÁLISE **5-16** Utilizando as fórmulas da Tabela A-9 do Apêndice e superposição, encontre a deflexão da viga em balanço em B, se $I = 13$ in^4 e $E = 30$ Mpsi.

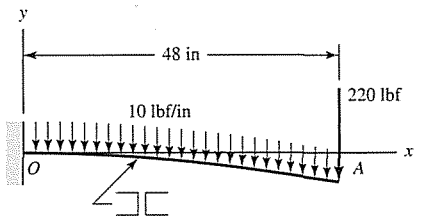


Problema 5-15



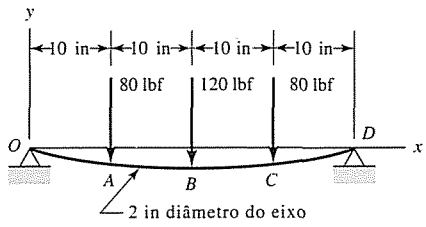
Problema 5-16

ANÁLISE **5-17** A viga em balanço mostrada na figura consiste em dois canais (perfis U) de aço estrutural tamanho 3 in, 5,0 lbf/ft. Utilizando superposição, encontre a deflexão em A.



Problema 5-17

ANÁLISE **5-18** Utilizando superposição, determine a deflexão da viga mostrada na figura. O material é aço carbono

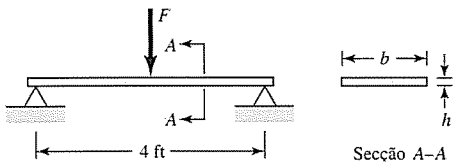


Problema 5-18

PROJETO **5-19** A ilustração mostra uma barra retangular de aço, com apoio em ambas as extremidades, carregada por uma força F aplicada no meio do vão; essa barra deve comportar-se como uma mola. A razão entre a largura e a espessura deve ser aproximadamente $b = 16h$, e a razão de mola desejável é igual a 2400 lbf/in.

(*a*) Encontre um conjunto de dimensões de secção transversal utilizando tamanhos preferenciais.

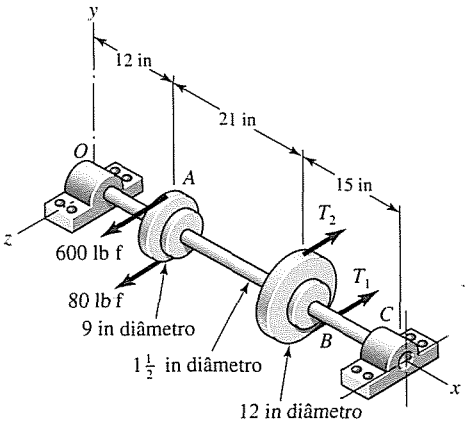
(*b*) Qual deflexão causaria deformação permanente na mola, se esta, estima-se, ocorre a uma tensão normal de 90 kpsi?



Problema 5-19

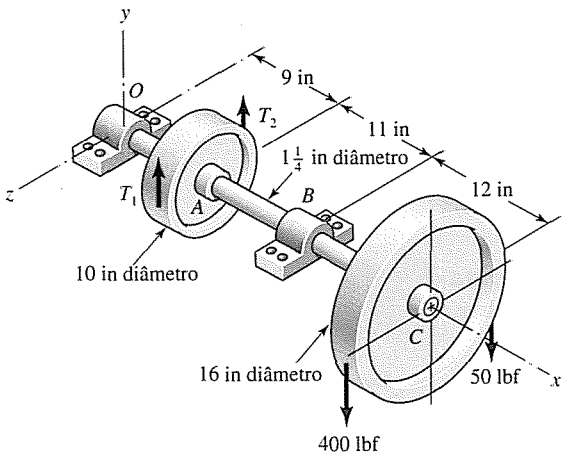
PROJETO **5-20** A figura ilustra um eixo de aço, com $1\frac{1}{2}$ in de diâmetro, apoiado nas extremidades e suportando duas polias. A polia A transmite potência a uma máquina, causando uma tração de 600 lbf no lado tenso da correia

e de 80 lbf no lado frouxo da mesma, como indicado. A polia *B* recebe potência de um motor. As trações de correia nessa última polia obedecem à relação $T_1 = 0{,}125T_2$. Determine a deflexão do eixo na direção *z*, nas posições das polias *A* e *B*. Assuma que os mancais possam ser modelados como apoios simples.



Problema 5-20

PROJETO **5-21** A figura mostra um eixo de aço que suporta duas polias. A polia *C* recebe potência proveniente de um motor, produzindo as trações de correia mostradas. A polia *A* transmite essa potência a uma outra máquina, por meio das trações de correia T_1 e T_2, de tal forma que $T_1 = 8T_2$.



Problema 5-21

(*a*) Encontre a deflexão na extremidade em balanço do eixo, assumindo que os mancais se comportam como apoios simples.

(*b*) Se mancais de rolos são utilizados, a inclinação do eixo na posição dos mancais não deve exceder a 0,06° para garantir uma vida aceitável do mancal. Que diâmetro de eixo é necessário para que se possa cumprir esse requisito? Utilize incrementos de $\frac{1}{8}$ in em cada iteração que fizer. Qual é agora a deflexão na posição da polia *C*?

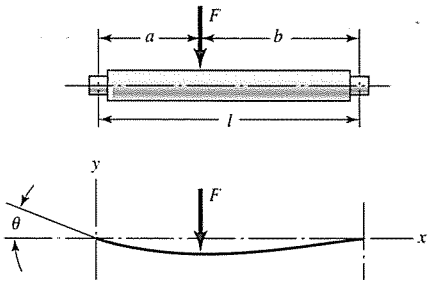
PROJETO **5-22** A estrutura de uma locomotiva diesel-elétrica consiste essencialmente numa viga de compósito que suporta um estrado. Acima desse estrado estão montados a máquina principal a diesel, o gerador ou alternador, os radiadores, a caixa de engrenagens e o equipamento auxiliar. Abaixo dele são encontrados os tanques de combustível e lubrificante, os reservatórios de ar e pequenas componentes auxiliares. Esse conjunto é suportado por travessas em vagões que abrigam os motores de tração e freios. Tal equipamento é distribuído de maneira tão uniforme quanto possível no vão entre as travessas. De maneira aproximada, o carregamento pode ser visto como uniforme entre as travessas simplesmente apoiadas. Uma vez que as coberturas que abrigam esse equipamento contra as intempéries têm diversas portas retangulares de acesso, as quais são produzidas em escala, é importante que a estrutura de cobertura esteja nivelada, em prumo e assentada sobre um estrado plano. A estética também é importante. A viga de soleira tem um segundo momento de inércia de área $I = 5450\ \text{in}^4$, as travessas estão afastadas 36 ft umas das outras e o carregamento do estrado é de 5000 lbf/ft.

(*a*) Qual deve ser a cambagem da curva para a qual o estrado será construído, a fim de que a locomotiva pronta para uso tenha um estrado plano?

(*b*) Que equação você apresentaria para localizar pontos na curva em (*a*)?

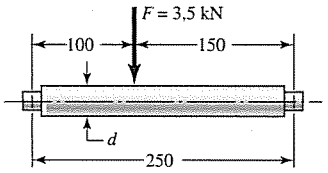
ANÁLISE **5-23** O projetista de um eixo geralmente tem uma restrição de inclinação imposta pelos mancais utilizados. Esse limite será denotado por ξ. Se o eixo mostrado na figura deve ter um diâmetro uniforme d, exceto nas localidades de montagem dos mancais, este pode ser aproximado como uma viga uniforme sobre apoios simples. Mostre que os diâmetros mínimos que satisfazem às restrições de inclinação nos mancais esquerdo e direito são, respectivamente,

$$d_L = \left| \frac{32Fb(l^2 - b^2)}{3\pi El\xi} \right|^{1/4} \qquad d_R = \left| \frac{32Fa(l^2 - a^2)}{3\pi El\xi} \right|^{1/4}$$



Problema 5-23

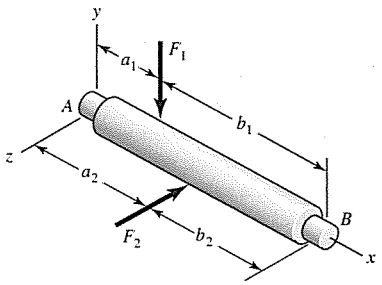
PROJETO **5-24** Um eixo deve ser projetado para que seja suportado por mancais de rolos. A geometria básica é mostrada na figura. A inclinação admissível nos mancais é de 0,001 mm/mm, sem penalidade de vida do mancal. Para um fator de projeto de 1,28, que eixo de diâmetro uniforme apoiará a carga de 3,5 kN, a 100 mm do mancal esquerdo, sem penalidade? Utilize $E = 207$ GPa.



Problema 5-24
Dimensões em milímetros.

ANÁLISE **5-25** Determine a deflexão máxima do eixo do Problema 5-24.

PROJETO **5-26** Para o eixo mostrado na figura, estabeleça $a_1 = 4$ in, $b_1 = 12$ in, $a_2 = 10$ in, $F_1 = 100$ lbf, $F_2 = 300$ lbf e $E = 30$ Mpsi. O eixo deve ser dimensionado de modo que a inclinação máxima tanto no mancal A como no B não exceda a 0,001 rad. Determine um diâmetro apropriado d.

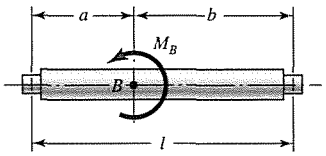


Problema 5-26

ANÁLISE **5-27** Se o diâmetro da viga para o Problema 5-26 é de 1,375 in, determine a deflexão dessa viga em $x = 8$ in.

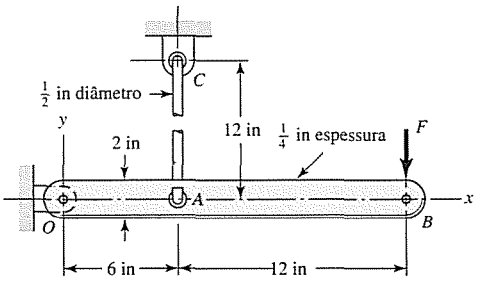
5-28 Veja o Problema 5-26 e a figura que o acompanha. As cargas e as dimensões são $F_1 = 800$ lbf, $F_2 = 600$ lbf, $a_1 = 4$ in, $b_1 = 6$ in e $a_2 = 7$ in. Encontre o diâmetro uniforme do eixo necessário para limitar a inclinação dos mancais a 0,001 in/in. Utilize um fator de projeto de $n_d = 1,5$ e $E = 29,8$ Mpsi.

PROJETO **5-29** Na figura é mostrado um eixo de diâmetro uniforme com ressaltos nas extremidades; esse eixo está sujeito a um momento concentrado $M = 1200$ lbf · in. Ele é de aço carbono e tem $a = 5$ in e $l = 9$ in. A inclinação nas extremidades deve estar limitada a 0,002 rad. Encontre um diâmetro d apropriado.



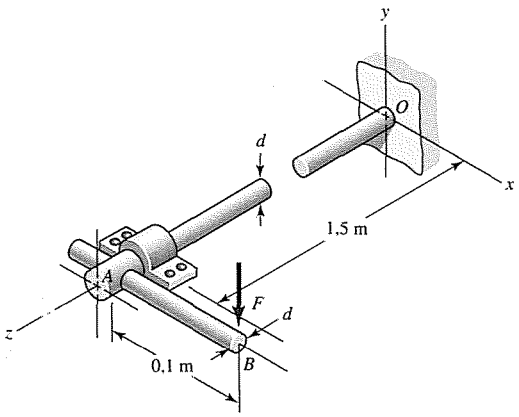
Problema 5-29

ANÁLISE **5-30** O membro retangular OAB, mostrado na figura, é mantido em posição horizontal pela barra redonda pendurada AC. O módulo de elasticidade de ambas as peças é de 10 Mpsi. Utilize superposição para encontrar a deflexão em B decorrente de uma força $F = 80$ lbf.



Problema 5-30

ANÁLISE **5-31** A figura ilustra uma mola de barra de torção OA com um diâmetro $d = 12$ mm. A viga em balanço atuante AB também apresenta $d = 12$ mm. Ambas as peças são de aço carbono. Utilize superposição e encontre a razão de mola correspondendo a uma força F atuando em B.



Problema 5-31

ANÁLISE **5-32** Considere a viga simplesmente apoiada, com uma carga intermediária, no Apêndice A-9-6. Determine a equação de deflexão se a rigidezes dos apoios esquerdo e direito forem k_1 e k_2, respectivamente.

ANÁLISE **5-33** Considere a viga simplesmente apoiada, com uma carga uniforme, no Apêndice A-9-7. Determine a equação de deflexão se as rigidezes dos apoios esquerdo e direito forem k_1 e k_2, respectivamente.

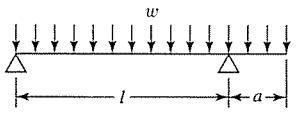
ANÁLISE **5-34** Prove que, para uma viga de secção transversal uniforme, com apoios simples nas extremidades carregadas por uma única carga concentrada, a localização da deflexão máxima nunca ocorrerá fora do intervalo de $0{,}423l \le x \le 0{,}577l$, independentemente da localização da carga ao longo dessa viga. A importância disso está em que você sempre obtém uma estimativa rápida de y_{max} utilizando $x = l/2$.

ANÁLISE **5-35** Resolva o Problema 5-12 empregando funções de singularidade. Utilize a estática para determinar as reações.

5-36 Resolva o Problema 5-13 empregando funções de singularidade. Utilize a estática para determinar as reações.

ANÁLISE **5-37** Resolva o Problema 5-14 empregando funções de singularidade. Utilize a estática para determinar as reações.

ANÁLISE **5-38** Considere a viga simplesmente apoiada, carregada uniformemente com um balanço (alpendre) como o mostrado. Empregue funções de singularidade para determinar a equação de deflexão da viga. Utilize a estática para determinar as reações.



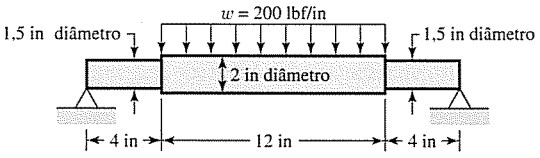
Problema 5-38

ANÁLISE **5-39** Resolva o Problema 5-15 empregando funções de singularidade. Na medida em que a viga é simétrica, escreva a equação para somente metade dela e use a inclinação em seu centro como uma condição de contorno. Utilize a estática para determinar as reações.

ANÁLISE **5-40** Resolva o Problema 5-30 empregando funções de singularidade. Utilize a estática para determinar as reações.

ANÁLISE **5-41** Determine a equação de deflexão para a viga mostrada, mediante a utilização de funções de singularidade. Na medida em que essa viga é simétrica, escreva a equação para somente metade dela e use a inclinação em seu centro como uma condição de contorno. Utilize a estática para determinar as reações.

Problema 5-41
(Extraído de Richard G. Budynas, Advanced Strength and Applied Analysis, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1999. Copyright © 1999 The McGraw-Hill Companies.)



ANÁLISE **5-42** Examine a expressão para a deflexão da viga em balanço, carregada na extremidade, mostrada na Tabela A-9-1 do Apêndice, para algum ponto intermediário $x = a$, como

$$y|_{x=a} = \frac{F_1 a^2}{6EI}(a - 3l)$$

Na Tabela A-9-2, para uma viga em balanço com carga intermediária, a deflexão na extremidade é

$$y|_{x=a} = \frac{F_1 a^2}{6EI}(a - 3l)$$

Essas expressões são extraordinariamente similares e tornam-se idênticas quando $F_1 = F_2 = 1$. Em outras palavras, a deflexão em $x = a$ (estação 1) decorrente de uma carga unitária em $x = l$ (estação 2) é a mesma que a deflexão na estação 2 decorrente de uma carga unitária na estação 1. Prove que isso é verdade geralmente para um corpo elástico mesmo quando as linhas de ação das cargas não são paralelas. Isso é conhecido como um caso especial do *teorema da reciprocidade de Maxwell*. (*Dica:* Considere a energia potencial de deformação quando o corpo estiver carregado por duas forças em qualquer ordem de aplicação.)

ANÁLISE **5-43** Um eixo de aço com diâmetro uniforme de 2 in tem um vão de mancal l de 23 in e um balanço de 7 in no qual um acoplamento deve ser montado. Uma engrenagem deve ser atada 9 in à direita do mancal esquerdo e carregará uma carga radial de 400 lbf. Requeremos uma estimativa da deflexão de flexão no acoplamento. A Tabela A-9-6 do Apêndice está disponível, mas não podemos estar seguros de como expandir a equação para predizer a deflexão no acoplamento.

(*a*) Mostre como a Tabela A-9-10 do Apêndice e o teorema de Maxwell (ver Problema 5-42) podem ser usados para obter a estimativa necessária.

(*b*) Verifique seu trabalho encontrando a inclinação no mancal direito e estenda-o até a posição do acoplamento.

ANÁLISE **5-44** Utilize o teorema de Castigliano para verificar a deflexão máxima para a viga carregada uniformemente da Tabela A-9-7 do Apêndice. Despreze o cisalhamento.

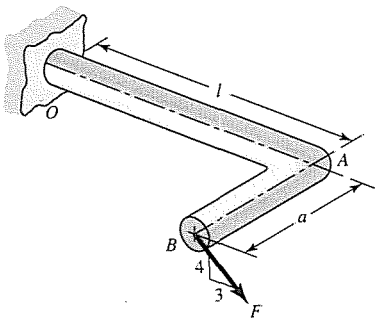
ANÁLISE **5-45** Resolva o Problema 5-17 utilizando o teorema de Castigliano. (*Dica*: Escreva a equação do momento usando uma variável de posição positiva para a esquerda, começando na extremidade direita da viga.)

ANÁLISE **5-46** Resolva o Problema 5-30 utilizando o teorema de Castigliano.

5-47 Resolva o Problema 5-31 utilizando o teorema de Castigliano.

ANÁLISE **5-48** Determine a deflexão no meio da viga do Problema 5-41 utilizando o teorema de Castigliano.

ANÁLISE **5-49** Utilizando o teorema de Castigliano, determine a deflexão do ponto B, na direção da força F, para a barra mostrada. A barra sólida apresenta um diâmetro uniforme d. Despreze o cisalhamento de flexão.



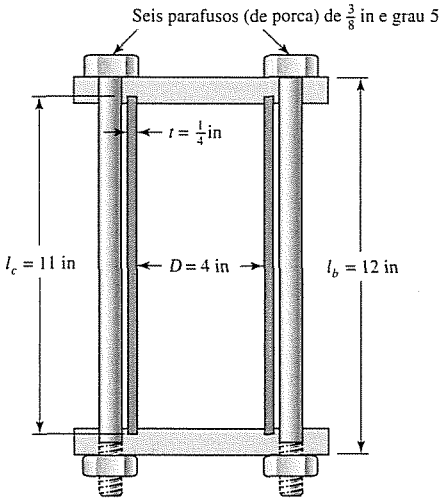
Problema 5-49

ANÁLISE **5-50** Um cabo é feito utilizando-se um fio de aço de bitola 16 (0,0625 in) e três cordões de fio de cobre de bitola 12 (0,0801 in). Encontre a tensão em cada fio, se o cabo estiver sujeito a uma tração de 250 lbf.

ANÁLISE **5-51** A figura mostra um cilindro de pressão de aço, com diâmetro de 4 in, que utiliza seis parafusos de aço SAE grau 5 com um aperto de 12 in. Esses parafusos de porca têm uma resistência de prova (ver Capítulo 8) de 85 kpsi para seu tamanho. Suponha que os parafusos sejam apertados a 90% de sua resistência, de acordo com algumas recomendações.

(*a*) Encontre a tensão de tração nos parafusos e a tensão de compressão nas paredes do cilindro.

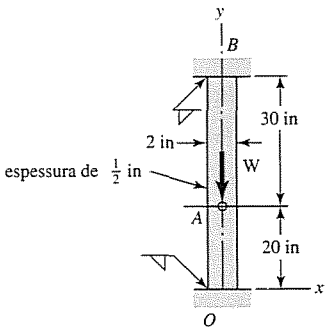
(*b*) Repita (*a*), mas agora assuma que um fluido sob uma pressão de 600 psi é introduzido no cilindro.



Problema 5-51

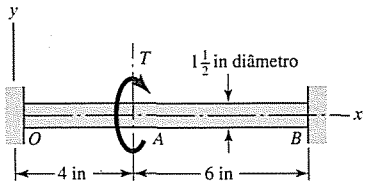
ANÁLISE **5-52** Uma barra de torção de comprimento L consiste num núcleo redondo de rigidez $(GJ)_c$ e numa casca de rigidez $(GJ)_s$. Se um torque T for aplicado a essa barra de compósito, que percentagem do torque total será carregada pela casca?

ANÁLISE **5-53** Uma barra retangular de alumínio, com espessura de $\frac{1}{2}$ in e largura de 2 in, é soldada a apoios fixos nas extremidades e suporta uma carga $W = 800$ lbf, atuando através de um pino, como mostrado. Encontre as reações nos apoios.



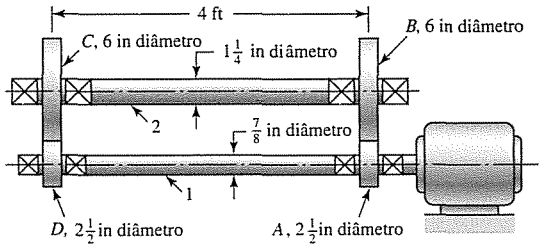
Problema 5-53

ANÁLISE **5-54** O eixo de aço mostrado na figura está sujeito a um torque T aplicado no ponto A. Encontre as reações do torque em O e B.



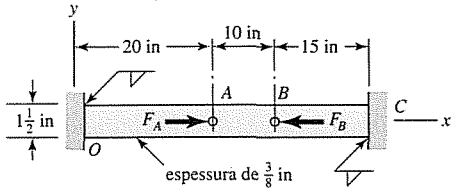
Problema 5-54

ANÁLISE **5-55** Para testar a vida de desgaste de dentes de engrenagem, as engrenagens são montadas utilizando-se uma pré-torção. Dessa maneira, um torque grande pode existir mesmo quando a potência de entrada à máquina de teste for pequena. O arranjo mostrado na figura emprega esse princípio. Observe o símbolo usado para indicar a localização dos mancais de eixo utilizados na figura. As engrenagens A, B e C são montadas primeiro, e então a engrenagem C é fixada. A engrenagem D é montada e engranzada com a engrenagem C ao se girá-la a um ângulo de 4°, a fim de propiciar a pré-torção. Encontre a tensão máxima de cisalhamento em cada eixo resultante dessa pré-carga.



Problema 5-55

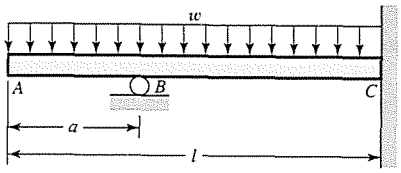
ANÁLISE **5-56** A figura mostra uma barra de aço retangular de $\frac{3}{8}$ por $1\frac{1}{2}$, soldada a suportes fixos em cada extremidade. Essa barra está axialmente carregada pelas forças $F_A = 10$ kip e $F_B = 5$ kip atuando nos pinos em A e B. Assumindo que a barra não flambará literalmente, encontre as reações nos suportes fixos. Use o procedimento 1 da Seção 5-10.



Problema 5-56

ANÁLISE **5-57** Para a viga mostrada, determine as reações de suporte utilizando superposição e o procedimento 1 da Seção 5-10.

Problema 5-57
(Extraído de Richard G. Budynas, Advanced Strength and Applied Stress Analysis, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1999. Copyright © 1999 The McGraw-Hill Companies.)



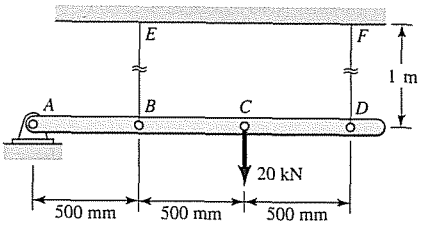
ANÁLISE **5-58**

Resolva o Problema 5-57 utilizando o teorema de Castigliano e o procedimento 1 da Seção 5-10.

ANÁLISE **5-59**

A viga de aço *ABCD* exibida está simplesmente apoiada em *A* e em *B* e *D* por cabos de aço, cada qual com um diâmetro efetivo de 12 mm. O segundo momento (de inércia) de área é $I = 8(10^5)$ mm^4. Uma força de 20 kN é aplicada no ponto *C*. Utilizando o procedimento 2 da Seção 5-10, determine as tensões nos cabos e as deflexões de *B*, *C* e *D*. Para o aço, estabeleça $E = 209$ GPa.

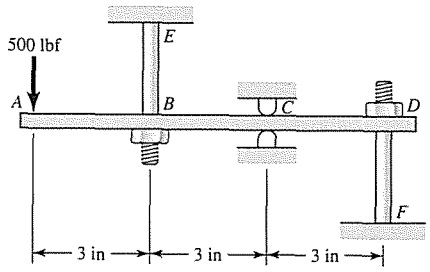
Problema 5-59
(Extraído de Richard G. Budynas, Advanced Strength and Applied Stress Analysis, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1999. Copyright © 1999 The McGraw-Hill Companies.)



ANÁLISE **5-60**

A viga de aço *ABCD* exibida está apoiada em *C*, como mostrado, e em *B* e *D* por parafusos e porcas de aço, com cada parafuso tendo um diâmetro de $\frac{5}{16}$ in. Os comprimentos de *BE* e *DF* são 2 e 2,5 in, respectivamente. A viga apresenta um segundo momento (de inércia) de área de 0,050 in^4. Antes do carregamento, as porcas estão apenas em contato com a viga horizontal. Uma força de 500 lbf é então aplicada ao ponto A. Utilizando o procedimento 2 da Seção 5-10, determine as tensões nos parafusos e a deflexão dos pontos *A*, *B* e *D*. Para o aço, estabeleça E = 30 Mpsi.

Problema 5-60
(Extraído de Richard G. Budynas, Advanced Strength and Applied Stress Analysis, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1999. Copyright © 1999 The McGraw-Hill Companies.)

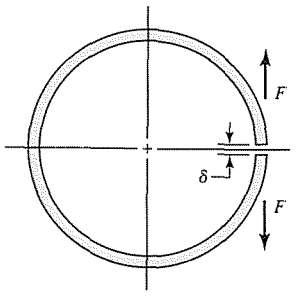


ANÁLISE **5-61**

A deflexão horizontal da extremidade direita da barra curva da Figura 5-11 é fornecida pela Equação (5-36) para $R/h > 10$. Para as mesmas condições, determine a deflexão vertical.

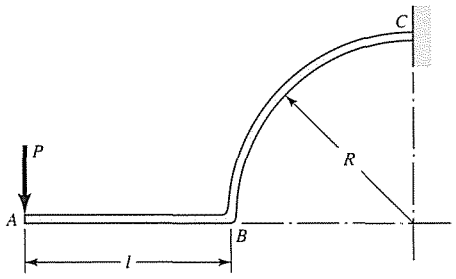
ANÁLISE **5-62**

Um anel de pistão de ferro fundido tem um diâmetro médio de 81 mm, uma altura radial $h = 6$ mm e uma espessura de 4 mm. Esse anel é montado usando-se uma ferramenta de expansão que separa as extremidades partidas a uma distância δ ao aplicar uma força *F*, como mostrado. Utilize o teorema de Castigliano e determine a deflexão δ como uma função de *F*. Use $E = 131$ GPa e assuma que a Equação (5-29) se aplica.



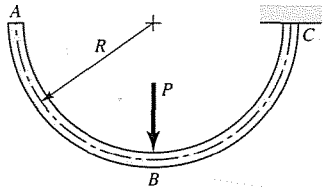
Problema 5-62

ANÁLISE **5-63** Para a forma aramada exibida, utilize o método de Castigliano para determinar a deflexão vertical do ponto A. Considere somente a flexão e assuma que a Equação (5-29) se aplica para a parte curva.



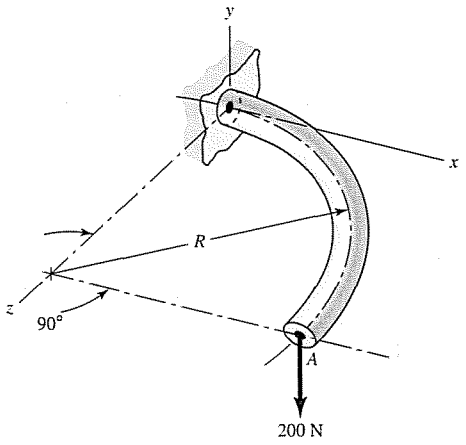
Problema 5-63
(Extraído de Richard G. Budynas, Advanced Strength and Applied Stress Analysis, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1999. Copyright © 1999 The McGraw-Hill Companies.)

ANÁLISE **5-64** Para a forma aramada exibida, determine as deflexões verticais dos pontos A e B. Considere somente a flexão e assuma que a Equação (5-29) se aplica.



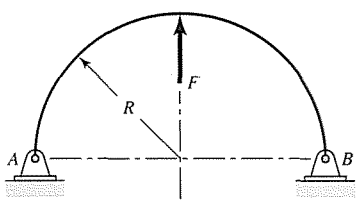
Problema 5-64
(Extraído de Richard G. Budynas, Advanced Strength and Applied Stress Analysis, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1999. Copyright © 1999 The McGraw-Hill Companies.)

ANÁLISE **5-65** Para a forma aramada exibida, determine a deflexão do ponto A na direção y. Assuma $R/h > 10$ e considere somente os efeitos da flexão e da torção. O fio é de aço, com $E = 200$ GPa, $\nu = 0{,}29$, e tem um diâmetro de 5 mm. Antes da aplicação da força de 200 N, a forma aramada está no plano xy, em que o raio R é de 100 mm.



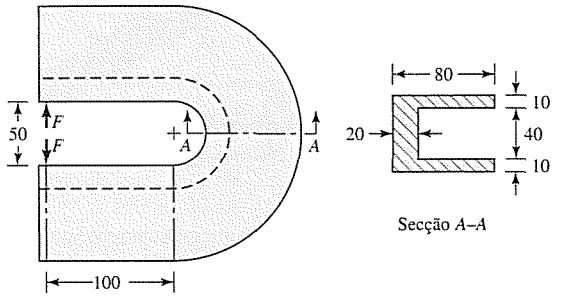
Problema 5-65
(Extraído de Richard G. Budynas, Advanced Strength and Applied Stress Analysis, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1999. Copyright © 1999 The McGraw-Hill Companies.)

ANÁLISE **5-66** Para a forma aramada exibida, determine (*a*) as reações nos pontos A e B, (*b*) o modo como o momento flexor varia ao longo do fio e (*c*) a deflexão da carga F. Assuma que a energia total é descrita pela Equação (5-29).



Problema 5-66
(Extraído de Richard G. Budynas, Advanced Strength and Applied Stress Analysis, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1999. Copyright © 1999 The McGraw-Hill Companies.)

ANÁLISE **5-67** Para a viga curva exibida, $F = 30$ kN. O material é de aço, com $E = 207$ GPa e $G = 79$ GPa. Determine a deflexão relativa das forças aplicadas.



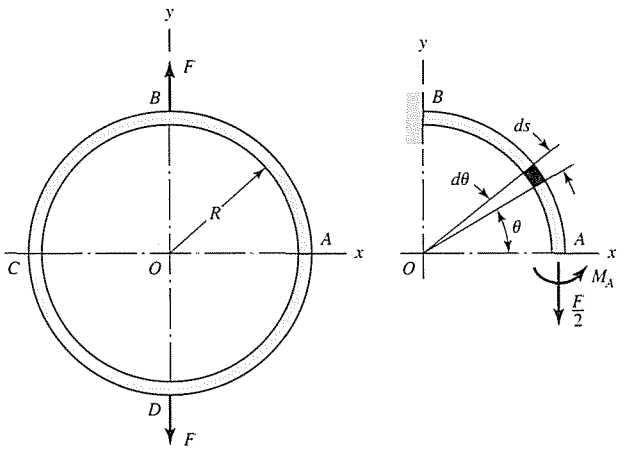
(Todas as dimensões em milímetros)

Problema 5-67

(Extraído de Richard G. Budynas, Advanced Strength and Applied Stress Analysis, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1999. Copyright © 1999 The McGraw-Hill Companies.)

ANÁLISE **5-68** Resolva o Problema 5-61 utilizando a Equação (5-33).

5-69 Um anel fino é carregado por duas forças iguais e opostas F, na parte a da figura. Um diagrama de corpo livre de um quadrante é exibido na parte b. Este é um problema estaticamente indeterminado, pois o momento M_A não pode ser encontrado por meio da estática. Desejamos encontrar o momento flexor máximo no anel devido às forças F. Assuma que é grande o raio desse anel, de modo que a Equação (5-29) pode ser usada.



Problema 5-69

ANÁLISE **5-70** Encontre o aumento no diâmetro do anel do Problema 5-69 devido às forças F e ao longo do eixo y.

ANÁLISE **5-71** Uma coluna circular tem diâmetros externo e interno D e d, respectivamente, e uma razão diametral $K = d/D$. Mostre que a flambagem ocorrerá quando o diâmetro externo for

$$D = \left[\frac{64 P_{cr} l^2}{\pi^3 C E (1 - K^4)}\right]^{1/4}$$

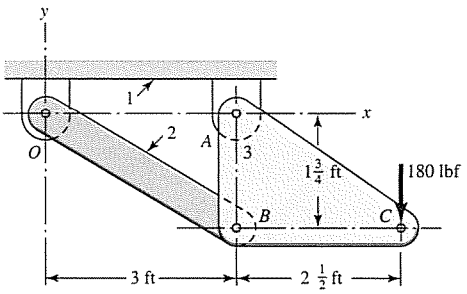
ANÁLISE **5-72** Para as condições do Problema 5-71, mostre que a flambagem, de acordo com a fórmula parabólica, ocorrerá quando o diâmetro externo for

$$D = 2\left[\frac{P_{cr}}{\pi S_y (1 - K^2)} + \frac{S_y l^2}{\pi^2 C E (1 + K^2)}\right]^{1/2}$$

ANÁLISE **5-73** A ligação 2, exibida na figura, tem 1 in de largura, mancais de diâmetro de $\frac{1}{2}$ in nas extremidades e é feita de um estoque de barra de aço de baixo carbono com uma resistência mínima de escoamento de 24 kpsi. As constantes de condição de extremidade são $C = 1$ e $C = 1{,}2$ para flambagem dentro e fora do plano do desenho, respectivamente.

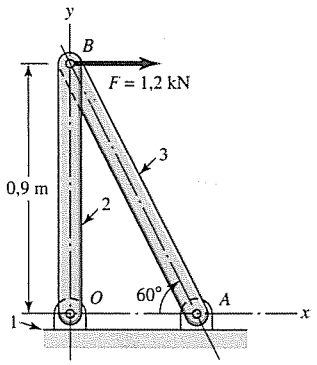
(*a*) Utilizando um fator de projeto $n_d = 5$, encontre uma espessura conveniente para a ligação.

(*b*) Estão os mancais em O e B tensionados de maneira significativa?



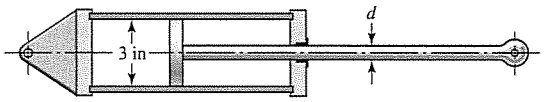
Problema 5-73

PROJETO **5-74** A ligação 3, mostrada esquematicamente na figura, atua como um braço para suportar a carga de 1,2 kN. Para flambagem no plano dessa figura, a ligação pode ser considerada como pivotada em ambas as extremidades. Para flambagem fora do plano, tais extremidades são fixas. Selecione um material apropriado e um método de manufatura – como forjamento, fundição, estampagem ou usinagem – para aplicações ocasionais do braço em maquinaria de campos petrolíferos. Especifique as dimensões da secção transversal, bem como as extremidades, de modo a obter um braço forte, seguro, bem feito e barato.



Problema 5-74

PROJETO **5–75** O cilindro hidráulico mostrado na figura apresenta um orifício de 3 in e deve operar a uma pressão de 800 psi. Com a montagem do pistão em forma de U apresentada, a haste (êmbolo) do pistão deve ser dimensionada com ambas as extremidades articuladas para qualquer plano de flambagem. O êmbolo deve ser feito de aço forjado AISI 1030, sem tratamento térmico posterior.



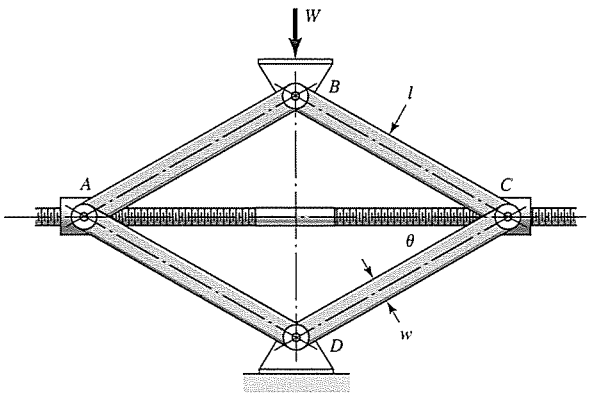
Problema 5-75

(*a*) Utilize um fator de projeto $n_d = 3$ e selecione o tamanho preferencial para o diâmetro do êmbolo, se o comprimento da coluna for de 60 in.

(*b*) Repita (*a*), mas para um comprimento de coluna de 18 in.

(*c*) Que fator de segurança realmente resulta para cada um dos casos supracitados?

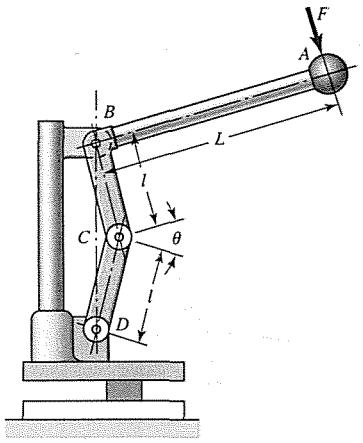
PROJETO **5–76** A figura mostra um desenho esquemático de um macaco veicular que deve ser projetado para suportar uma massa máxima de 400 kg, com base no uso de um fator de projeto $n_d = 2{,}50$. As roscas nos lados opostos das duas extremidades do parafuso são cortadas para permitir que o ângulo de ligação θ varie de 15 a 70°. As ligações devem ser usinadas a partir de barras de aço AISI 1020 laminadas a quente, com uma resistência mínima de escoamento de 380 MPa. Cada uma das quatro ligações deve consistir em duas barras, uma em cada lado dos mancais centrais. Essas barras devem ter comprimento de 300 mm e uma largura de 25 mm. As extremidades pivotadas devem ser projetadas para assegurar uma constante de condição de extremidade de pelo menos $C = 1{,}4$ para flambagem fora do plano. Encontre uma espessura apropriada preferível e o fator de segurança resultante para essa espessura.



Problema 5-76

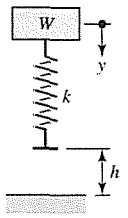
ANÁLISE **5–77** Se fosse desenhada uma figura para este problema, ela se pareceria com aquela do Problema 5-51. Um pilarete com um cilindro circular reto vazado padrão tem um diâmetro interno de 4 in e uma espessura de parede de $\frac{3}{8}$ in, estando comprimido entre duas placas circulares de extremidades mantidas por quatro parafusos igualmente espaçados em um círculo de parafusos de porca de 5,68 in de diâmetro. Todos os quatro parafusos são apertados manualmente, e então o parafuso A é apertado a uma tração (dada pela força) de 2000 lbf e o parafuso C, diagonalmente oposto, a uma tração (dada pela força) de 10 000 lbf. O eixo de simetria do pilarete coincide com o centro dos círculos de parafusos. Encontre a carga máxima de compressão, a excentricidade de carregamento e a maior tensão de compressão nesse pilarete.

PROJETO **5–78** Projete o elo CD da prensa pivotada manual ilustrada na figura. Especifique as dimensões da secção transversal, o tamanho de mancal e as dimensões da barra de extremidade, bem como o material e o método de processamento.



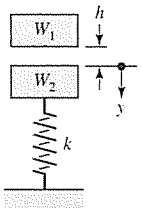
Problema 5-78
$L = 12$ in, $l = 4$ in, $\theta_{min} = 0°$

ANÁLISE **5–79** Encontre expressões para os valores máximos da força de mola e da deflexão do sistema de impacto mostrado na figura. Você consegue pensar em alguma aplicação realística para esse modelo?



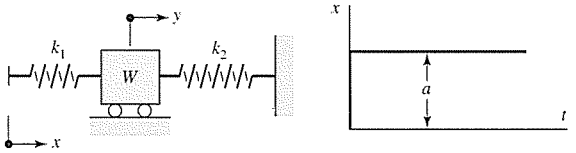
Problema 5-79

ANÁLISE **5-80** Como ilustrado na figura, o peso W_1 atinge W_2 de uma altura h. Encontre os valores máximos da força de mola e da deflexão de W_2. Mencione um sistema verdadeiro para o qual esse modelo possa ser usado.



Problema 5-80

ANÁLISE **5-81** A parte *a* da figura exibe um peso W montado entre duas molas. Se a extremidade livre da mola k_1 for subitamente deslocada por uma distância $x = a$, como mostrado na parte *b*, qual seria o deslocamento máximo y do peso?



(*a*) (*b*)

Problema 5-81

PARTE II

PREVENÇÃO DE FALHA

CAPÍTULO 6

Falhas Resultantes de Carregamento Estático

6-1 Resistência Estática 252
6-2 Concentração de Tensão 258
6-3 Teorias de Falha 259
6-4 Teoria da Tensão Máxima de Cisalhamento para Materiais Dúcteis 260
6-5 Teoria da Energia de Distorção para Materiais Dúcteis 261
6-6 Teoria de Coulomb-Mohr para Materiais Dúcteis 267
6-7 Resumo das Falhas de Materiais Dúcteis 269
6-8 Teoria da Tensão Normal Máxima para Materiais Frágeis 272
6-9 Modificações da Teoria de Mohr para Materiais Frágeis 274
6-10 Resumo da Falha de Materiais Frágeis 276
6-11 Seleção de Critérios de Falha 277
6-12 Carregamento Estático ou Quase Estático em um Eixo 278
6-13 Introdução à Mecânica de Fratura 280
6-14 Análise Estocástica 289

No Capítulo 1, aprendemos que a *resistência é uma propriedade ou característica de um elemento mecânico.* Tal propriedade resulta da identidade do material, do tratamento e do processamento incidental para criar sua geometria, bem como do carregamento, e encontra-se num ponto crítico ou de controle. Esses elementos devem ser identificados e considerados antes que possamos falar sobre a *resistência* de uma peça como uma característica útil de mérito descritivo. As tabelas de propriedades de materiais de engenharia *não* tratam das resistências das peças. A resistência de uma peça mecânica não depende de essa peça estar sujeita à sua carga pretendida. De fato, tal propriedade de resistência é uma característica do elemento antes que este seja montado com outros elementos na máquina ou no sistema. A resistência de uma peça é uma descritora valiosa, mas existe somente se passamos por todas as qualificações mencionadas anteriormente.

Além de considerarmos a resistência de uma única peça, devemos estar cientes de que as resistências de peças produzidas em massa serão sempre um tanto diferentes de outras na coleção ou no conjunto, devido às variações em dimensões, usinagem, forjamento e composição. Os descritores de resistência são necessariamente estocásticos por natureza, envolvendo parâmetros estatísticos como média e desvios-padrão, bem como identificação distribucional.

Uma *carga estática* é uma força estacionária ou momento aplicada a um membro. Para ser estacionária, tal força ou momento deve ser imutável em magnitude, em ponto(s) de aplicação e em direção. Uma carga estática pode produzir uma tração axial ou compressão, uma carga de cisalhamento, uma carga de flexão, uma carga torcional, ou qualquer combinação dessas. Para ser considerada estática, essa carga não pode mudar de maneira alguma.

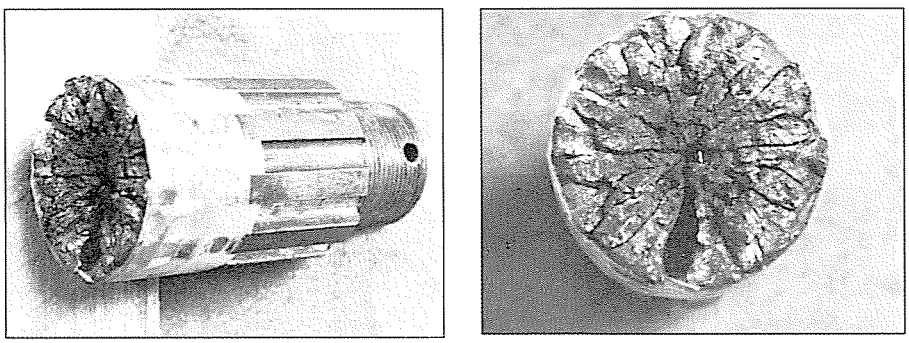
Neste capítulo, consideraremos as relações entre resistência e carregamento estático, a fim de tomar decisões concernentes ao material e seu tratamento, fabricação e geometria, objetivando satisfazer aos requisitos de funcionalidade, segurança, confiabilidade, competitividade, usabilidade, fabricabilidade e mercantilidade. Nosso aprofundamento nessa lista está relacionado ao escopo dos exemplos.

A palavra "falha", no plural, é a primeira do título deste capítulo: pode significar que uma peça se separou em dois ou mais pedaços; tornou-se permanentemente distorcida, prejudicando, assim, sua geometria; teve sua confiabilidade depreciada; ou sua função comprometida, qualquer que seja a razão para tal. Um projetista, ao mencioná-la, pode referir-se a qualquer uma ou a todas essas possibilidades. Neste capítulo, nossa atenção estará focada na previsibilidade de distorção permanente ou separação. Em situações de sensibilidade à resistência, o projetista deve separar a tensão média e a resistência média em pontos críticos para atingir seus propósitos

As Figuras 6-1 a 6-13 são fotografias de várias peças com falhas. Elas exemplificam a necessidade que tem o projetista de ser bem versado na prevenção de falhas. Tendo em vista esse fim, consideraremos estados de tensão unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais, com ou sem concentrações de tensão, para materiais dúcteis e frágeis.

6-1 Resistência Estática

Idealmente, ao projetar qualquer elemento de máquina, o engenheiro deve ter a seu dispor os resultados de muitos ensaios de resistência do material que escolheu. Esses ensaios devem ser realizados em espécimes que tenham os mesmos tratamento térmico, acabamento superficial e tamanho do elemento que o engenheiro se propôs a desenhar; além disso, devem ser realizados exatamente sob as mesmas condições de carregamento que a peça experimentará em serviço. Isso significa que, se essa peça tiver de experimentar uma car-



(*a*) (*b*)

Figura 6-1 Falha da estria de eixo motor de um caminhão decorrente de fadiga associada a corrosão. Observe que foi necessário usar fita adesiva para segurar as peças no lugar. (*b*) Vista direta da extremidade da falha.

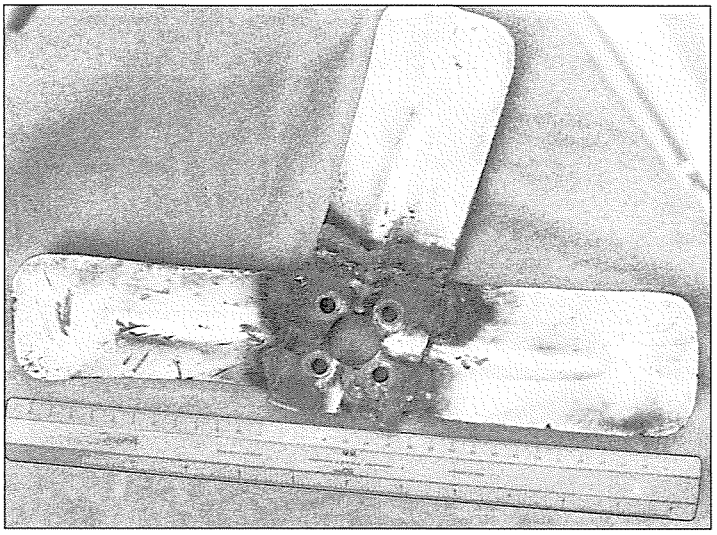


Figura 6-2 Falha por fadiga de um ventilador de resfriamento de automóvel decorrente das vibrações causadas por uma bomba de água defeituosa.

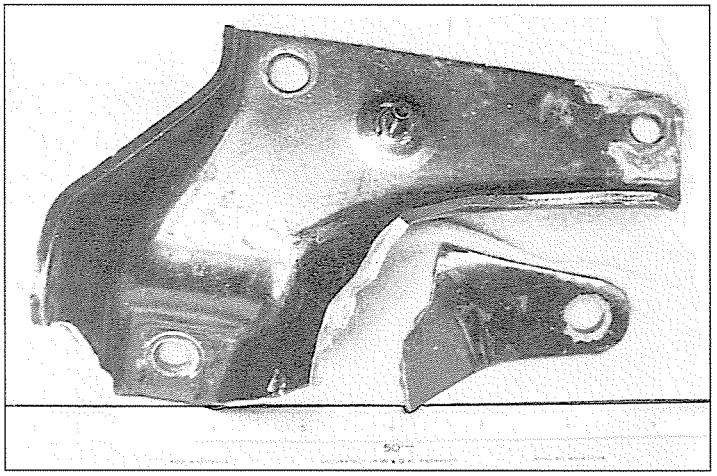


Figura 6-3 Falha típica de um suporte de alternador de aço estampado após cerca de 40 000 km. Essa falha provavelmente ocorreu devido a tensões residuais causadas pela operação de conformação a frio. A alta taxa de falha instigou o fabricante a redesenhar o suporte como uma peça fundida em molde. *(Fonte: Dowling, N.E.,* Mechanical Behavior of Materials, *2/e, 1999, p. 257. Reimpressa com a permissão de Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, New Jersey.)*

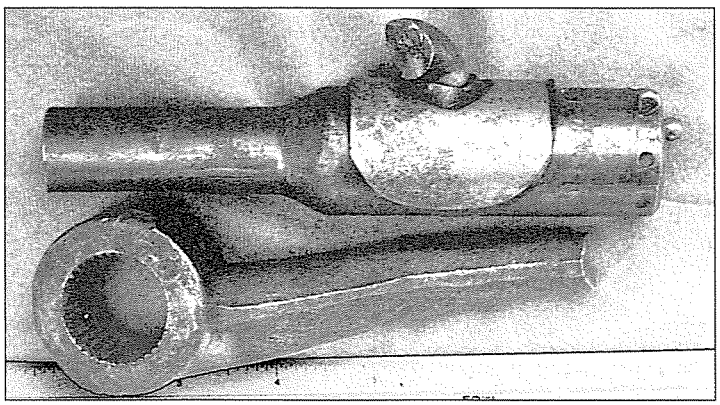


Figura 6-4 Falha de uma conexão de leva automotiva. Tal falha ocorreu após cerca de 225 000 km. Felizmente, o carro estava estacionado e contra a calçada. Uma falha desse tipo resulta em desconexão total do volante do mecanismo de direção.

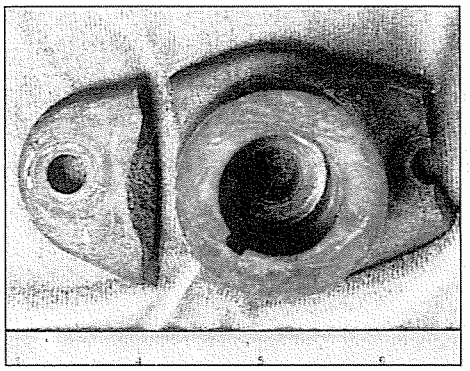


Figura 6-5 Falha por impacto de um cubo-guia de pá de um cortador de grama. A pá impactou um cano marcador de inspeção.

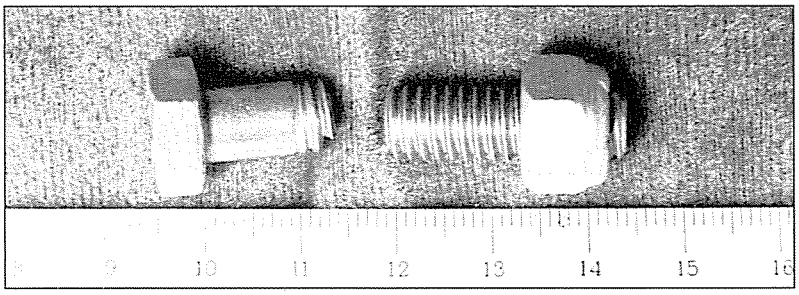


Figura 6-6 Falha de um parafuso de porca fixador de polia superior de uma máquina de levantamento de pesos. Um erro de fabricação causou uma abertura que forçou o parafuso a absorver toda a carga de momento.

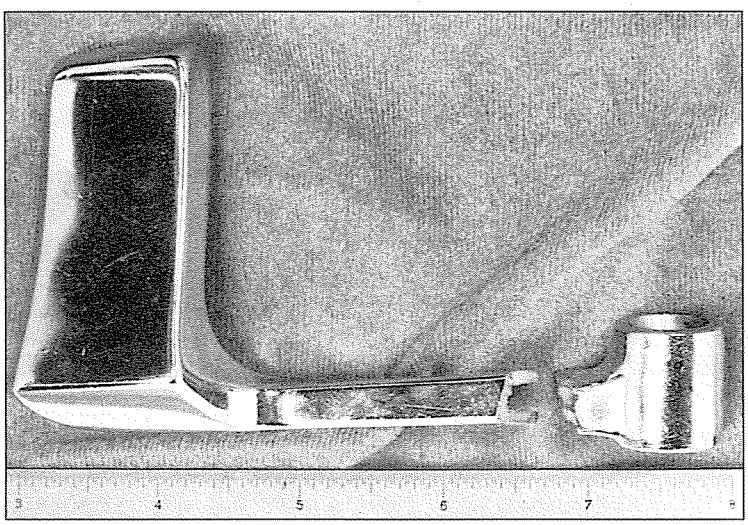
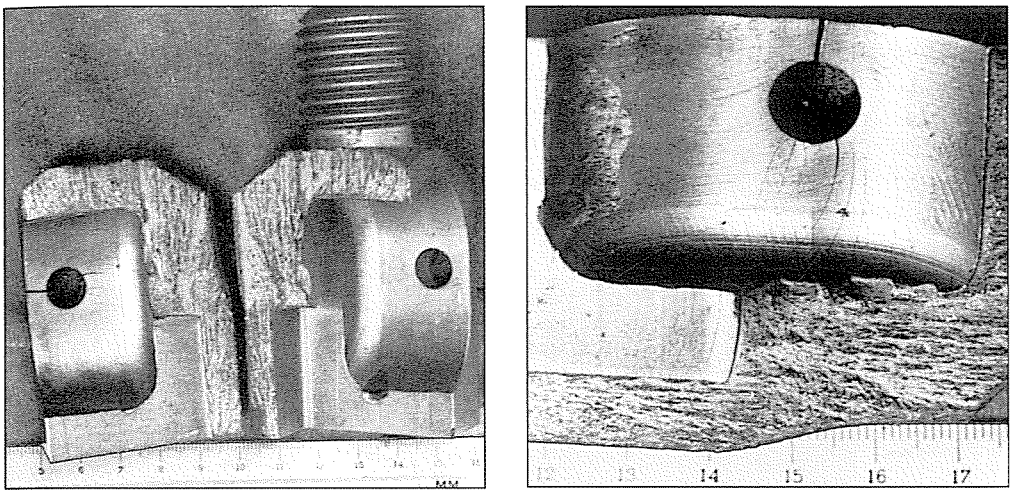


Figura 6-7 Falha de um puxador interno de porta de carro feito por fundição em molde. Tal falha ocorria aproximadamente a cada 72 000 km. As causas prováveis eram o material de galvanoplastia (eletrorrevestimento), a concentração de tensão, o longo braço de alavanca, que requeria um mecanismo "grudento" de desengate da porta, e as elevadas forças atuantes.



(*a*) (*b*)

Figura 6-8 Dispositivo de ensaio de corrente que falhou em um ciclo. Para diminuir as reclamações de desgaste excessivo, o fabricante decidiu endurecer superficialmente o material. (*a*) Duas metades mostrando a fratura; esse é um exemplo excelente de fratura frágil iniciada por concentração de tensão. (*b*) Vista ampliada para mostrar trincas induzidas por concentração de tensão nos orifícios dos pinos de suporte.

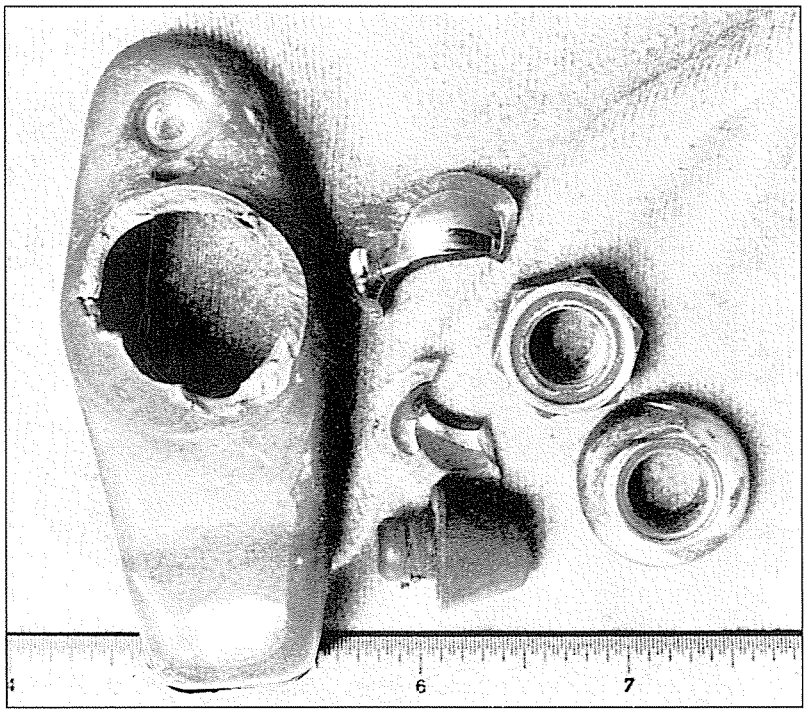


Figura 6-9 Falha por fadiga de junta de articulação de braço oscilador automotivo.

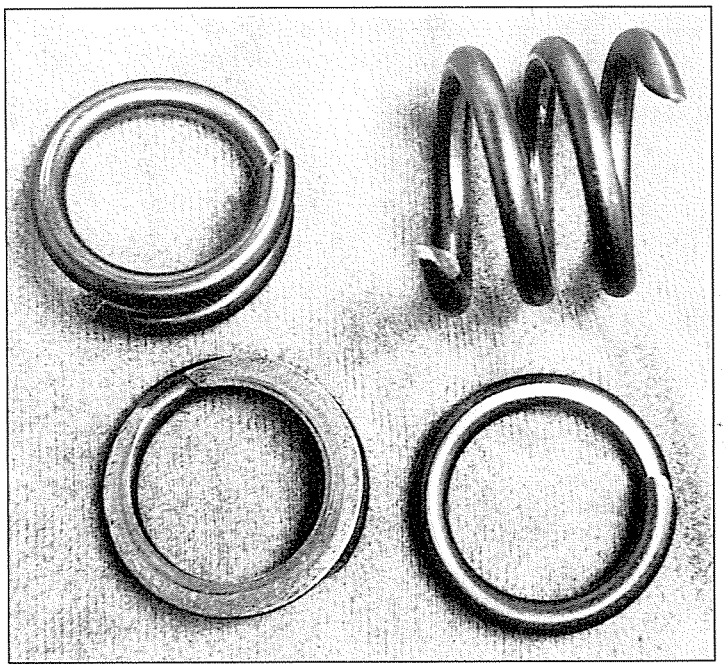


Figura 6-10 Falha de mola de válvula causada por estiramento de mola em um motor superacelerado. As fraturas exibem a falha por cisalhamento clássica de 45°.

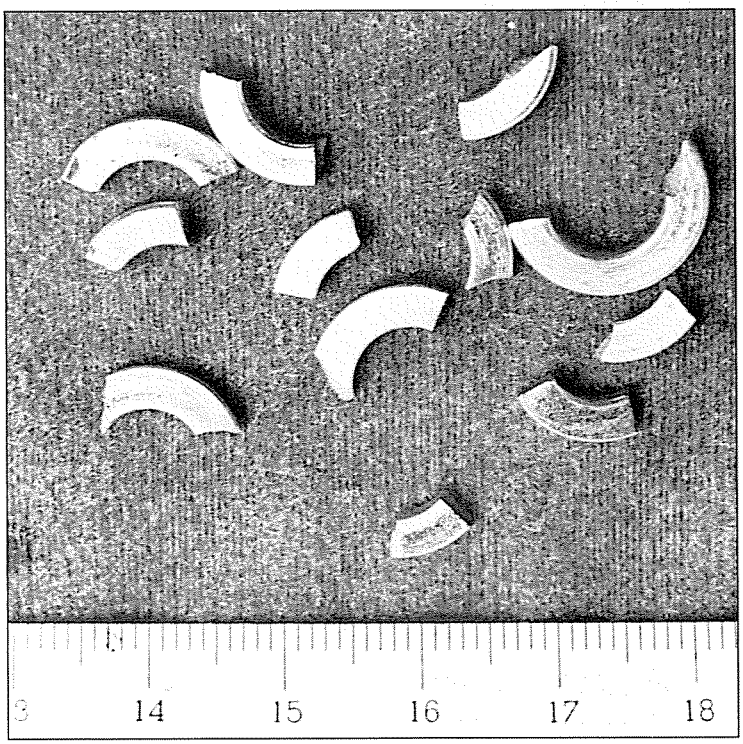


Figura 6-11 Fratura frágil de uma arruela de fecho em um ciclo e meio. Essa arruela falhou ao ser instalada.

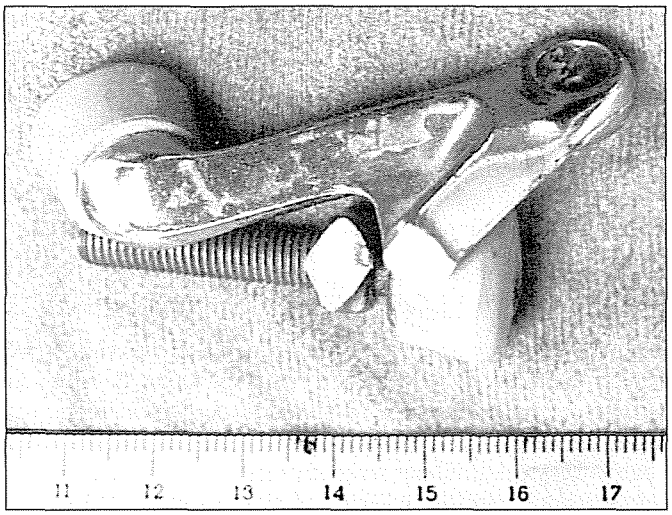


Figura 6-12 Falha por fadiga de um pára-choque residencial de porta feito por fundição em molde. Esse pára-choque é instalado na articulação da porta para evitar que a maçaneta bata na parede.

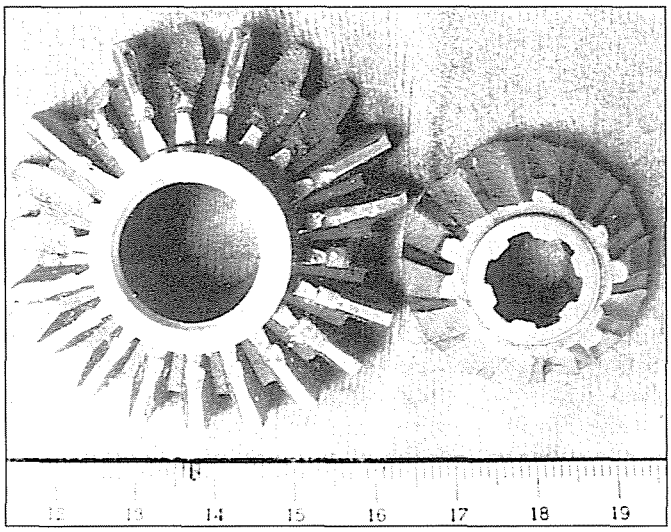


Figura 6-13 Uma falha de engrenagem de um motor de popa de $7\frac{1}{2}$ hp (5,6 kW) fabricado nos Estados Unidos. A engrenagem maior apresenta um diâmetro externo de $1\frac{7}{8}$ in (47,6 mm) e tinha 21 dentes; seis deles estão quebrados. O pinhão tinha 14 dentes, os quais também estão quebrados. A falha ocorreu quando a hélice bateu em uma verruma de aço colocada no fundo de um lago como âncora. O dono havia trocado o pino de cisalhamento por um pino substituto.

ga de flexão, deverá ser ensaiada com uma carga de flexão; se tiver de ser submetida a flexão e torção combinadas, deverá ser testada sob flexão e torção combinadas; se for feita de aço estirado AISI 1040 tratado termicamente a 500°C com um polimento em retífica, os espécimes testados deverão ser do mesmo material preparado da mesma maneira. Esses ensaios proverão informações muito úteis e precisas. Sempre que tais dados estiverem disponíveis para propósitos de projeto, o engenheiro pode estar seguro de que estará fazendo o melhor trabalho possível de engenharia.

O custo da coleta de tais dados extensivos antes do projeto é justificável se a falha de uma peça puder pôr em risco a vida humana ou se for fabricada em quantidades suficientemente grandes. Refrigeradores e outros utensílios, por exemplo, apresentam muito boa confiabilidade porque suas peças são feitas em quantidades tão grandes que podem ser testadas inteiramente de antemão pelo fabricante. O custo para a realização desses ensaios é muito baixo quando dividido pelo número total de peças fabricadas.

Agora, você pode apreciar as quatro seguintes categorias de projeto:

1. A falha da peça comprometeria vidas humanas; ou ela é feita em quantidades muito grandes. Conseqüentemente, um programa elaborado de ensaio é justificado durante o projeto.
2. A peça é feita em quantidades suficientemente grandes, de modo que uma série moderada de ensaios torna-se praticável.
3. A peça é feita em quantidades tão pequenas que o ensaio de maneira alguma é justificável; ou o projeto deve ser completado tão rapidamente que não há tempo para ensaio.
4. A peça já foi projetada, fabricada, testada e considerada insatisfatória. Requer-se uma análise para entender por que ela é insatisfatória e saber o que fazer para melhorá-la.

Freqüentemente é necessário projetar utilizando somente valores publicados da resistência ao escoamento, da resistência última, da redução percentual em área e do alongamento percentual, tais como aqueles listados no Apêndice A. Como utilizar tais valores escassos para projetar contra cargas estáticas e dinâmicas, estados de tensão biaxial e triaxial, altas e baixas temperaturas, peças muito grandes e muito pequenas? Essas e outras questões similares serão abordadas neste capítulo e nos seguintes; todavia, imagine quão melhor seria poder contar com dados disponíveis que reproduzissem a situação real de projeto.

6-2 Concentração de Tensão

A concentração de tensão (ver Seção 4-14) é um efeito altamente localizado. Em alguns casos, ela pode ser decorrente de um risco de superfície. Se o material for dúctil e a carga, estática, a carga de projeto poderá causar escoamento em uma posição crítica em um entalhe. Esse escoamento pode envolver encruamento por deformação do material e um aumento na resistência ao escoamento na posição do entalhe crítico. Uma vez que as cargas são estáticas, a peça pode agüentá-las satisfatoriamente sem escoamento geral. Nesses casos, o projetista estabelece o fator de concentração de tensão geométrico (teórico) K_t como igual à unidade.

O raciocínio pode ser expresso como segue. O cenário do pior caso é aquele do material idealizado sem encruamento por deformação, mostrado na Figura 6-14. O local geométrico tensão-deformação eleva-se linearmente até a resistência ao escoamento S_y, então prossegue em tensão constante, que é igual a S_y. Considere uma barra retangular entalhada, como a representada na Figura A-15-5, em que a secção transversal da extremidade pequena é de 1 in^2. Se o material for dúctil, com um ponto de escoamento de 40 kpsi, e se o fator teórico de concentração de tensão (SCF) K_t for igual a 2,

- Uma carga de 20 kip induz uma tensão de tração de 20 kpsi na extremidade, como representado pelo ponto A da Figura 6-14. Na posição crítica do filete, a tensão é de 40 kpsi e o SCF é $K = \sigma_{max} / \sigma_{nom} = 40 / 20 = 2$.
- Uma carga de 30 kip induz uma tensão de tração de 30 kpsi na extremidade, no ponto B. A tensão no filete ainda é de 40 kpsi (ponto D), e o SCF é $K = \sigma_{max} / \sigma_{nom} = S_y / \sigma = 40/30 = 1.33$.

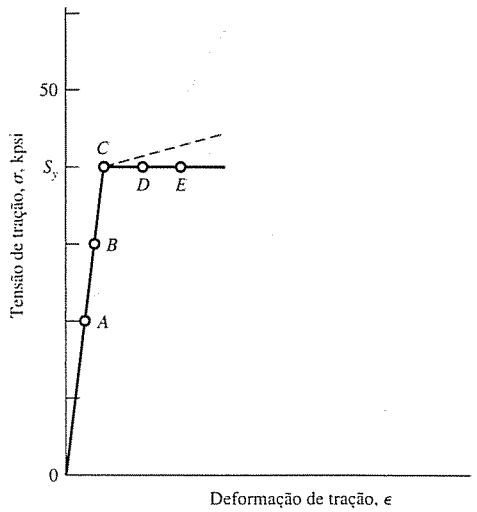


Figura 6-14 Uma curva tensão-deformação idealizada. A linha tracejada mostra um material com encruamento por deformação.

- Com uma carga de 40 kip, a tensão induzida de tração (ponto *C*) é de 40 kpsi na extremidade. Na posição crítica do filete, a tensão (no ponto *E*) é de 40 kpsi. O SCF é $K = \sigma_{max} / \sigma_{nom} = S_y / \sigma 40 / 40 = 1$.

Para materiais que deformam e encruam, a posição crítica no entalhe tem uma S_y mais elevada. A área da extremidade, que está a um nível de tensão um pouco abaixo de 40 kspi, suporta a carga e situa-se muito próxima de sua condição de falha por escoamento generalizado. Essa é a razão pela qual os projetistas não aplicam K_t em carregamento estático de um material dúctil carregado elasticamente, estabelecendo, em vez disso, $K_t = 1$.

Quando empregar essa regra para materiais dúcteis com cargas estáticas, seja cuidadoso ao assegurar-se de que o material em questão não é suscetível a fraturas frágeis (ver Seção 6-13) no ambiente de uso. A definição usual do fator geométrico (teórico) de concentração de tensão para a tensão normal K_t ou de cisalhamento K_{ts} é

$$\sigma_{max} = K_t \sigma_{nom} \qquad (a)$$

$$\tau_{max} = K_{ts} \tau_{nom} \qquad (b)$$

Desde que sua atenção esteja no fator de concentração de tensão e que a definição de σ_{nom} ou τ_{nom} seja fornecida na legenda do gráfico ou por um programa de computador, assegure-se de que o valor da tensão nominal é apropriado para a secção que suporta a carga.

Materiais frágeis não exibem o intervalo plástico. Um material frágil "experimenta" os SCFs K_t ou K_{ts}, os quais são empregados utilizando-se as Equações (*a*) ou (*b*).

Uma exceção a essa regra é um material frágil que inerentemente contém microdescontinuidades de concentração de tensão, piores que a macrodescontinuidade que o projetista tem em mente. A moldagem de areia introduz partículas de areia, ar e bolhas de vapor d'água. A estrutura de grão do ferro fundido contém flocos de grafita (com pouca resistência), que são literalmente trincas introduzidas durante o processo de solidificação. Quando um ensaio de tração em um ferro fundido é executado, a resistência relatada na respectiva literatura *inclui* essa concentração de tensão. Em tais casos, K_t ou K_{ts} não necessitam ser aplicados.

Uma fonte importante de fatores de concentração de tensão é R. E. Peterson, que os compilou a partir de seu próprio trabalho e de outros.[1] Peterson desenvolveu o estilo de apresentação no qual o fator de concentração de tensão K_t é multiplicado pela tensão nominal σ_{nom}, para estimar a magnitude da maior tensão no local. Suas aproximações foram baseadas em estudos de fotoelasticidade de tiras bidimensionais (Hartman e Levan, 1951; Wilson e White, 1973), com alguns dados limitados dos ensaios fotoelásticos tridimensionais de Hartman e Levan. Um gráfico de contornos foi incluído na apresentação de cada caso. Eixos filetados sob tração foram baseados em faixas bidimensionais. A Tabela A-15 provê muitas cartas de fatores de concentração de tensão teóricos para várias condições fundamentais de carregamento e geometria. Cartas adicionais também estão disponíveis em Peterson.[2]

A ferramenta de análise por elemento finito (FEA) pode também ser aplicada na obtenção de fatores de concentração de tensão. Melhorias nos valores K_t e K_{ts} para eixos com filetes foram relatadas por Tipton, Sorem e Rolovic.[3]

6-3 Teorias de Falha

A Seção 6-1 ilustrou algumas maneiras como a perda de função é manifestada. Eventos como distorção, deformação permanente, fendilhamento e rompimento estão entre as formas pelas quais um elemento de máquina falha. As máquinas de ensaio surgiram nos anos 1700, e espécimes foram puxados, fletidos e torcidos em processos de carregamento simples. As experiências de coleta desses dados foram instrumentais para a formação da idéia de deformação. Cauchy ligou a tensão, a deformação e as constantes elásticas no que hoje chamaríamos de teoria da elasticidade. Sempre buscando um simples "mecanismo" discernidor de falha, a humanidade perseverou. Tal como ocorre com tudo, postulados levam a predições, e estas são criticadas pelo uso de dados adicionais. Idéias são modificadas, e o processo continua, assim como o processo de entendimento.

[1] R. E. Peterson, "Design Factors for Stress Concentration", *Machine Design*, vol. 23, nº 2, fevereiro de 1951; nº 3, março de 1951; nº 5, maio de 1951; nº 6, junho de 1951; nº 7, julho de 1951.

[2] R. E. Peterson, *Stress Concentration Factors*, John Wiley & Sons, New York, 1974.

[3] S. M. Tipton, J. R. Sorem Jr. e R. D. Rolovic, "Updated Stress-Concentration Factors for Filleted Shafts in Bending and Tension", *Trans. ASME, Journal of Mechanical Design*, vol. 118, setembro de 1996, p. 321-327.

Se o mecanismo de falha for simples, então ensaios simples podem nos fornecer pistas. No entanto, o que exatamente significa o termo "simples"? O ensaio de tração é uniaxial (eis algo simples), e os alongamentos são máximos na direção axial; desse modo, deformações podem ser medidas e tensões, inferidas até a "falha". O que exatamente é importante: uma tensão crítica, uma deformação crítica, uma energia crítica? Os círculos de Mohr crescentes, como representados na Figura 4-14, expandem-se até "atingir alguma coisa"? Se sim, o quê? Se não, o que é importante? Nas próximas seções, mostraremos teorias de falha que ajudarão a responder a algumas dessas questões.

Infelizmente, não há uma teoria universal de falha para o caso geral de propriedades de materiais e estados de tensão. Pelo contrário, várias hipóteses foram aventadas e testadas ao longo dos anos, levando às práticas aceitas na atualidade. Sendo aceitas, caracterizaremos essas "práticas" como *teorias*, tal como o fazem muitos projetistas.

O comportamento dos metais estruturais é classificado, tipicamente, como dúctil ou frágil, embora, sob situações especiais, um material normalmente considerado dúctil possa falhar de maneira frágil (ver Seção 6-13). Os materiais dúcteis são normalmente classificados por terem $\varepsilon_f \geq 0{,}05$ e uma resistência ao escoamento identificável, que com freqüência é a mesma sob compressão e tração ($S_{yt} = S_{yc} = S_y$). Os materiais frágeis têm $\varepsilon_f < 0{,}05$, não exibem uma resistência ao escoamento identificável e são tipicamente classificados segundo as resistências à tração e à compressão, S_{ut} e S_{uc}, respectivamente (em que S_{uc} é apresentada como uma quantidade positiva). As teorias geralmente aceitas são as seguintes:

Materiais dúcteis (critérios de escoamento)

- Tensão máxima de cisalhamento (MSS), Seção 6-4
- Energia de distorção (DE), Seção 6-5
- Coulomb-Mohr dúctil (DCM), Seção 6-6

Materiais dúcteis (critérios de fratura)

- Tensão normal máxima (MNS), Seção 6-8
- Coulomb-Mohr frágil (BCM) e modificações, Seção 6-9

Seria bom se tivéssemos uma teoria aceita universalmente para cada tipo de material; no entanto, por uma razão ou outra, todas as teorias são utilizadas. Posteriormente, apresentaremos razões para a seleção de uma teoria em particular. Primeiro, descreveremos as bases de tais teorias e as aplicaremos em alguns exemplos.

6-4 Teoria da Tensão Máxima de Cisalhamento para Materiais Dúcteis

A teoria da tensão máxima de cisalhamento prevê que o *escoamento começa sempre que a tensão máxima de cisalhamento em qualquer elemento iguala-se ou excede à tensão máxima de cisalhamento em um espécime de ensaio de tração do mesmo material quando aquele espécime começa a escoar.* A teoria MSS também é conhecida como *teoria de Tresca* ou *de Guest*.

Muitas teorias são postuladas com base nas conseqüências vistas em testes de tração. À medida que uma tira de material dúctil é submetida à tração, as linhas de deslizamento (denominadas *linhas de Lüder*) formam um ângulo de aproximadamente 45° com o eixo da tira. Essas linhas de deslizamento representam o começo do escoamento, ao passo que, quando carregadas à fratura, linhas de fratura também são observadas a ângulos aproximadamente iguais a 45° com o eixo de tração. Uma vez que a tensão de cisalhamento é máxima a 45° com o eixo de tração, faz sentido considerar esse o mecanismo de falha. Será mostrado, na próxima seção, que existe algo mais do que isso ocorrendo. Não obstante, sucede que a teoria MSS constitui-se em um instrumento de previsão de falha aceitável, ainda que conservador; ademais, uma vez que os engenheiros são conservadores por natureza, com freqüência ela é empregada.

Lembre-se de que, para tensão de tração simples, $\sigma = P/A$, de modo que a tensão máxima de cisalhamento ocorre em uma superfície a 45° da superfície de tração, com magnitude $\tau_{max} = \sigma / 2$. Portanto, a tensão máxima de cisalhamento no momento de escoamento é $\tau_{max} = S_y / 2$. Para um estado geral de tensão, três tensões principais podem ser determinadas e ordenadas de modo que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. A tensão máxima de cisalhamento é então $\tau_{max} = (\sigma_1 - \sigma_3) / 2$ (ver Figura 4-14). Logo, para um estado de tensão geral, a teoria da tensão máxima de cisalhamento prevê escoamento quando

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \geq \frac{S_y}{2} \qquad \text{ou} \qquad \sigma_1 - \sigma_3 \geq S_y \tag{6-1}$$

Observe que essa hipótese também afirma que a resistência ao escoamento em cisalhamento é fornecida por

$$S_{sy} = 0{,}5S_y \tag{6-2}$$

o que, como veremos mais adiante, é cerca de 15% menor (conservador).

Para propósitos de projeto, a Equação (6-1) pode ser modificada para incorporar um fator de segurança, n. Logo,

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{S_y}{n} \tag{6-3}$$

Problemas de tensão plana são muito comuns onde uma das tensões principais é nula e as duas outras, σ_A e σ_B, são determinadas a partir da Equação (4-13). Assumindo que $\sigma_A \geq \sigma_B$, há dois casos a considerar quando se utilizar a Equação (6-1) para problemas de tensão:

Caso 1: $\sigma_A \geq \sigma_B \geq 0$. Para esse caso, $\sigma_1 = \sigma_A$ e $\sigma_3 = 0$. A Equação (6-1) reduz-se a uma condição de escoamento de

$$\sigma_A \geq S_y \tag{6-4}$$

Caso 2: $\sigma_A \geq 0 \geq \sigma_B$. Aqui, $\sigma_1 = \sigma_A$ e $\sigma_3 = \sigma_B$, de modo que a Equação (6-1) torna-se

$$\sigma_A - \sigma_B \geq S_y \tag{6-5}$$

Caso 3: $0 \geq \sigma_A \geq \sigma_B$. Para esse caso, $\sigma_1 = 0$ e $\sigma_3 = \sigma_B$, de modo que a Equação (6-1) fornece

$$\sigma_B \geq -S_y \tag{6-6}$$

As Equações (6-4) a (6-6) estão representadas na Figura 6-15 pelas três linhas indicadas no plano σ_A,σ_B. As linhas restantes não-marcadas referem-se aos casos $\sigma_B \geq \sigma_A$, os quais não são normalmente utilizados. As referidas equações podem também ser convertidas a equações de projeto pela substituição do sinal de igualdade pelo de maior ou igual a, bem como pela divisão de S_y por n.

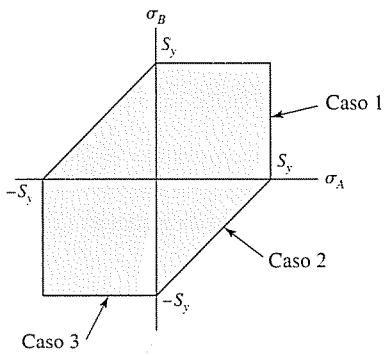
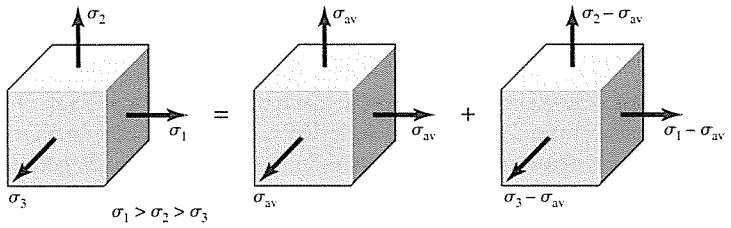


Figura 6-15 Teoria da tensão de cisalhamento máxima (MSS) para estado plano de tensão, sendo σ_A e σ_B as duas tensões principais não-nulas.

6-5 Teoria da Energia de Distorção para Materiais Dúcteis

A *teoria da energia de distorção* prevê que *ocorre escoamento quando a energia de deformação por distorção em uma unidade de volume alcança ou excede à energia de deformação por distorção por unidade de volume correspondente ao escoamento sob tração ou compressão do mesmo material.*

A *teoria da energia de distorção* (DE) originou-se a partir da observação de que materiais dúcteis tensionados hidrostaticamente exibiam resistências de escoamento muito acima dos valores fornecidos pelo ensaio de tração simples. Como conseqüência, postulou-se que o escoamento não era em absoluto um fenômeno simples de tração ou compressão; pelo contrário, estava relacionado, de alguma maneira, com a distorção angular do elemento tensionado. Para desenvolver a teoria, observe, na Figura 6-16(a), a unidade de vo-



(*a*) Tensões triaxiais (*b*) Componente hidrostática (*c*) Componente distorcional

Figura 6-16 (*a*) Elemento com tensões triaxiais passando por mudança de volume e distorção angular. (*b*) Elemento sob tensão hidrostática passando somente por mudança de volume. (*c*) Elemento tendo somente distorção angular, sem mudança de volume.

lume sujeita a um estado de tensão tridimensional qualquer, designado pelas tensões σ_1, σ_2 e σ_3. Já o estado de tensão mostrado na Figura 6-16(*b*) é um de tensão hidrostática decorrente de tensões σ_{av} atuando em cada uma das mesmas direções principais, como na Figura 6-16(*a*). A fórmula para σ_{av} é simplesmente

$$\sigma_{av} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \tag{a}$$

Assim, o elemento na Figura 6-16(*b*) passa por uma mudança pura de volume, isto é, sem distorção angular. Se considerarmos σ_{av} como uma componente de σ_1, σ_2 e σ_3, então poderá delas ser subtraída, resultando no estado de tensão exibido na Figura 6-16(*c*). Esse elemento está sujeito à distorção angular pura, isto é, sem mudança de volume.

Com o auxílio da Tabela 4-1, encontramos a energia de deformação por unidade de um volume sujeito a tensões principais valendo

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}(\epsilon_1\sigma_1 + \epsilon_2\sigma_2 + \epsilon_3\sigma_3) \\ &= \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)\right] \end{aligned} \tag{b}$$

A energia de deformação necessária à produção apenas de mudança de volume, u_v, pode ser obtida pela substituição de σ_{av} por σ_1, σ_2 e σ_3 na Equação (*b*). O resultado é

$$u_v = \frac{3\sigma_{av}^2}{2E}(1 - 2\nu) \tag{c}$$

Se, agora, substituirmos o quadrado da Equação (*a*) na Equação (*c*) e simplificarmos a expressão, obteremos

$$u_v = \frac{1 - 2\nu}{6E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_2\sigma_3 + 2\sigma_3\sigma_1\right) \tag{6-7}$$

Então, a energia de distorção é obtida subtraindo-se a Equação (6-7) da Equação (*b*). Isso dá

$$u_d = u - u_v = \frac{1 + \nu}{3E}\left[\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}\right] \tag{6-8}$$

Observe que a energia de distorção é zero, se $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$.

Para o ensaio simples de tração, quando do escoamento, $\sigma_1 = S_y$ e $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, de modo que, a partir da Equação (6-8), a energia de distorção resulta em

$$u_d = \frac{1 + \nu}{3E}S_y^2 \tag{6-9}$$

Portanto, para o estado geral de tensões fornecido pela Equação (6-8), é previsto escoamento se a Equação (6-8) igualar-se ou exceder à Equação (6-9). Isso produz

$$\left[\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}\right]^{1/2} \geq S_y \tag{6-10}$$

Se tivéssemos um caso simples de tração σ, então ocorreria escoamento quando $\sigma \geq S_y$. Assim, a parte esquerda da Equação (6-10) pode ser pensada como uma tensão *única*, *equivalente* ou *efetiva* para o estado geral de tensão completo fornecido por meio de σ_1, σ_2 e σ_3. Essa tensão efetiva é comumente denominada *tensão de von Mises*, σ', assim chamada depois da colaboração do Dr. von Mises para a teoria. Logo, a Equação (6-10), para escoamento, pode ser escrita como

$$\sigma' \geq S_y \tag{6-11}$$

em que a tensão de von Mises é

$$\sigma' = \left[\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}\right]^{1/2} \tag{6-12}$$

Para tensão plana, considere σ_A e σ_B as duas tensões principais não-nulas. Então, a partir da Equação (6-12), obtemos

$$\sigma' = \left(\sigma_A^2 - \sigma_A\sigma_B + \sigma_B^2\right)^{1/2} \tag{6-13}$$

A Equação (6-13) representa uma elipse rotacionada no plano σ_A, σ_B, como ilustrado na Figura 6-17, com $\sigma' = S_y$. As linhas tracejadas nessa figura representam a teoria MSS, que pode ser vista como mais restritiva e, portanto, mais conservadora.[4]

Utilizando as componentes *xyz* do tensor tridimensional de tensões, a tensão de von Mises pode ser escrita como

$$\sigma' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right)\right]^{1/2} \tag{6-14}$$

e, para tensões planas,

$$\sigma' = \left(\sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2\right)^{1/2} \tag{6-15}$$

A teoria da energia de distorção é também denominada:

- Teoria de von Mises ou de von Mises-Hencky
- Teoria da energia de cisalhamento
- Teoria da tensão de cisalhamento octaédrica

O entendimento das tensões de cisalhamento octaédricas lançará um pouco de luz sobre o porquê de a teoria MSS ser conservadora. Considere um elemento isolado em que as tensões normais em cada uma das

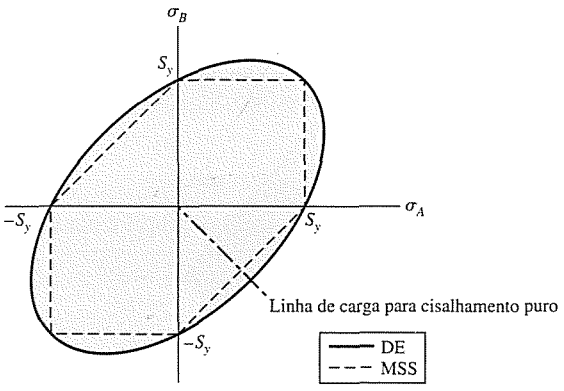


Figura 6-17 Teoria da energia de distorção (DE) para estados planos de tensão. Este é um gráfico de pontos obtidos a partir da Equação (6-13) com $\sigma' = S_y$.

[4] As equações tridimensionais para DE e MSS podem ser traçadas relativamente a eixos coordenados tridimensionais σ_1, σ_2, e σ_3. A superfície de falha para a DE é um cilindro circular com eixo inclinado a 45° relativamente a cada um dos eixos principais, ao passo que a superfície para a MSS é um hexágono inscrito dentro do cilindro.

faces são idênticas à tensão hidrostática σ_{av}. Há oito superfícies simétricas em relação às direções principais que contêm essa tensão. Isso forma um octaedro, como mostrado na Figura 6-18. As tensões de cisalhamento nessas superfícies são iguais e denominadas *tensões de cisalhamento octaédricas* (a Figura 6-18 tem identificada apenas uma das superfícies octaédricas). Por meio de transformação de coordenadas, a tensão de cisalhamento octaédrica é fornecida por[5]

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]^{1/2} \tag{6-16}$$

Sob o nome de teoria de tensão de cisalhamento octaédrica, *supõe-se que ocorre a falha sempre que a tensão de cisalhamento octaédrica para qualquer estado de tensão iguala-se ou excede à tensão de cisalhamento octaédrica para um espécime de ensaio de tração simples em falha.*

Tal como antes, com base em resultados de testes de tração, ocorre escoamento quando $\sigma_1 = S_y$ e $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. A partir da Equação (6-16), a tensão de cisalhamento octaédrica, sob essa condição, é

$$\tau_{oct} = \frac{\sqrt{2}}{3} S_y \tag{6-17}$$

Quando, para o caso geral de tensões, a Equação (6-16) é igual ou maior que a Equação (6-17), é previsto o escoamento. Isso reduz-se a

$$\left[\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}\right]^{1/2} \geq S_y \tag{6-18}$$

que é idêntica à Equação (6-10), verificando, portanto, que a teoria da máxima tensão de cisalhamento octaédrica é equivalente à teoria da energia de distorção.

O modelo para a teoria MSS ignora a contribuição das tensões normais nas superfícies a 45° do espécime sob tração. Contudo, essas tensões valem $P/2A$, que *não* é o valor das tensões hidrostáticas $P/3A$. Surge, aqui, a diferença entre as teorias MSS e DE.

A manipulação matemática envolvida no desenvolvimento da teoria DE pode tender a obscurecer o valor real e a utilidade do resultado. As equações fornecidas permitem que a situação mais complexa em termos de tensão seja representada por uma única quantidade, a tensão de von Mises, que pode então ser comparada com a resistência ao escoamento do material por meio da Equação (6-11). Esta pode ser representada como uma equação de projeto por

$$\sigma' = \frac{S_y}{n} \tag{6-19}$$

A teoria da energia de distorção prevê a não-ocorrência de falha sob tensão hidrostática e bem concorda com todos os dados para materiais dúcteis. Assim, é ela a teoria mais utilizada para materiais dúcteis, sendo recomendada para problemas de projeto, a menos que haja outra especificação.

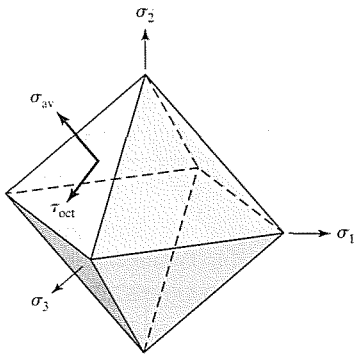


Figura 6-18 Superfícies octaédricas.

[5] Para uma derivação, ver A. Hidgon, E. H. Olsen, W. B. Stiles, J. A. Weese e W. F. Riley, *Mechanics of Materials*, 4th ed. John Wiley & Sons, New York, 1985, p. 493-495.

Uma nota final sobre a resistência ao escoamento sob cisalhamento. Considere um caso de cisalhamento puro τ_{xy}, no qual, para tensão plana, $\sigma_x = \sigma_y = 0$; a Equação (6-15) com a (6-11) para escoamento produz

$$\sqrt{3\tau_{xy}^2} = S_y \qquad \text{ou} \qquad \tau_{xy} = \frac{S_y}{\sqrt{3}} = 0{,}577 S_y \tag{6-20}$$

Logo, a resistência ao escoamento sob cisalhamento prevista pela teoria da energia de distorção é

$$S_{sy} = 0{,}577 S_y \tag{6-21}$$

o que, como afirmado antes, é aproximadamente 15% maior que o previsto pela teoria MSS (ver a linha de carregamento de cisalhamento puro na Figura 6-17).

EXEMPLO 6-1

Um aço laminado a quente tem resistência ao escoamento de $S_{yt} = S_{yc} = 100$ kpsi e uma deformação verdadeira na fratura de $\varepsilon_f = 0{,}55$. Estime o fator de segurança para os seguintes estados de tensão principal:

(*a*) 70, 70, 0 kpsi.

(*b*) 30, 70, 0 kpsi.

(*c*) 0, 70, –30 kpsi.

(*d*) 0, –30, –70 kpsi.

(e) 30, 30, 30 kpsi.

Solução Sendo $\varepsilon_f > 0{,}05$ e S_{yc} e S_{yt} iguais, o material é dúctil e a teoria da energia de distorção (DE) aplica-se. A teoria da tensão máxima de cisalhamento (MSS) também será aplicada e comparada com os resultados da DE. Observe que os casos *a* a *d* representam estados planos de tensão.

(*a*) As tensões principais ordenadas são $\sigma_A = \sigma_1 = 70$, $\sigma_B = \sigma_2 = 70$, $\sigma_3 = 0$ kpsi.

DE A partir da Equação (6-13),

$$\sigma' = [70^2 - 70(70) + 70^2]^{1/2} = 70 \text{ kpsi}$$

Resposta
$$n = \frac{S_y}{\sigma'} = \frac{100}{70} = 1{,}43$$

MSS Caso 1, utilizando a Equação (6-4),

Resposta
$$n = \frac{S_y}{\sigma_A} = \frac{100}{70} = 1{,}43$$

(*b*) As tensões principais ordenadas são $\sigma_A = \sigma_1 = 70$, $\sigma_B = \sigma_2 = 30$, $\sigma_3 = 0$ kpsi.

DE
$$\sigma' = [70^2 - 70(30) + 30^2]^{1/2} = 60{,}8 \text{ kpsi}$$

Resposta
$$n = \frac{S_y}{\sigma'} = \frac{100}{60{,}8} = 1{,}64$$

MSS Caso 1, utilizando a Equação (6-4),

Resposta
$$n = \frac{S_y}{\sigma_A} = \frac{100}{70} = 1{,}43$$

(*c*) As tensões principais ordenadas são $\sigma_A = \sigma_1 = 70$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_B = \sigma_3 = -30$ kpsi.

DE
$$\sigma' = [70^2 - 70(-30) + (-30)^2]^{1/2} = 88{,}9 \text{ kpsi}$$

Resposta
$$n = \frac{S_y}{\sigma'} = \frac{100}{88{,}9} = 1{,}13$$

MSS Caso 2, utilizando a Equação (6-5),

Resposta
$$n = \frac{S_y}{\sigma_A - \sigma_B} = \frac{100}{70 - (-30)} = 1{,}00$$

(*d*) As tensões principais ordenadas são $\sigma_1 = 0$, $\sigma_A = \sigma_2 = -30$, $\sigma_B = \sigma_3 = -70$ kpsi.

DE
$$\sigma' = [(-70)^2 - (-70)(-30) + (-30)^2]^{1/2} = 60{,}8 \text{ kpsi}$$

Resposta
$$n = \frac{S_y}{\sigma'} = \frac{100}{60{,}8} = 1{,}64$$

MSS Caso 3, utilizando a Equação (6-6),

Resposta
$$n = -\frac{S_y}{\sigma_B} = -\frac{100}{-70} = 1{,}43$$

(*e*) As tensões principais ordenadas são $\sigma_1 = 30$, $\sigma_2 = 30$, $\sigma_3 = 30$ kpsi.

DE A partir da Equação (6-12),

$$\sigma' = \left[\frac{(30 - 30)^2 + (30 - 30)^2 + (30 - 30)^2}{2}\right]^{1/2} = 0 \text{ kpsi}$$

Resposta
$$n = \frac{S_y}{\sigma'} = \frac{100}{0} \rightarrow \infty$$

MSS A partir da Equação (6-3),

Resposta
$$n = \frac{S_y}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{100}{30 - 30} \rightarrow \infty$$

Uma tabela-resumo dos fatores de segurança é incluída aqui, para comparações:

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
DE	1,43	1,64	1,13	1,64	∞
MSS	1,43	1,43	1,00	1,43	∞

Uma vez que a teoria MSS está dentro ou fora do limite da teoria DE, irá sempre predizer um fator de segurança igual ou menor que o dessa teoria, como pode ser visto na tabela. Para cada caso, exceto (*e*), as coordenadas e linhas de carregamento no plano $\sigma_A\sigma_B$ são mostradas na Figura 6-19. O caso (*e*) não é de tensão plana. Observe que a linha de carregamento para (*a*) constitui-se no único caso de tensão plana em que as duas teorias coincidem, provendo, portanto, o mesmo fator de segurança.

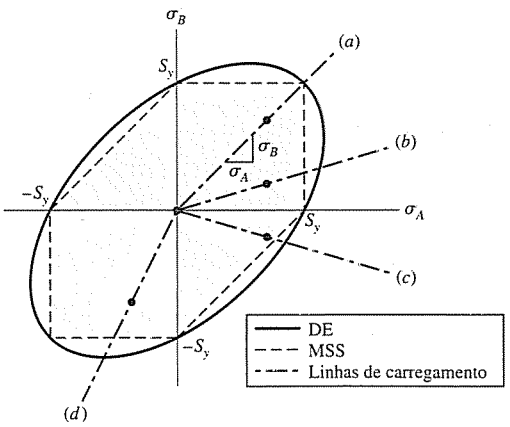


Figura 6-19 Linhas de carregamento para o Exemplo 6-1.

6-6 Teoria de Coulomb-Mohr para Materiais Dúcteis

Nem todos os materiais apresentam resistências à compressão iguais às suas correspondentes resistências à tração. Por exemplo, a resistência ao escoamento de ligas de magnésio em compressão pode implicar valores tão pequenos quanto 50% das correspondentes resistências à tração. A resistência última de ferros fundidos cinza em compressão é cerca de 3 a 4 vezes maior que a resistência última à tração. Portanto, nesta seção, estaremos primeiramente interessados naquelas teorias que podem ser aplicadas para prever a falha de materiais cujas resistências à tração e compressão não são iguais.

Historicamente, a teoria de falha de Mohr data de 1900, uma época relevante para sua apresentação. Não havia computadores, apenas réguas de cálculo, compassos e curvas francesas. Procedimentos gráficos, comuns então, ainda hoje são úteis para visualização. A idéia de Mohr está baseada em três ensaios "simples": tração, compressão e cisalhamento, até o escoamento, se o material puder escoar, ou até a ruptura. É mais fácil definir a resistência ao escoamento por cisalhamento como S_{sy} do que fazer um ensaio para obtê-la.

À parte as dificuldades práticas, a hipótese de Mohr foi utilizar os resultados de ensaios de tração, compressão e cisalhamento para construir os três círculos da Figura 6-20, a fim de definir um envoltório de falha, representado como a linha *ABCDE* na figura, acima do eixo σ. Tal envoltório não necessita ser reto. O argumento resultou nos três círculos de Mohr que descrevem o estado de tensão em um corpo (Figura 4-14) crescendo durante o carregamento, até que um deles torna-se tangente ao envoltório de falha, definindo esta última. A forma do envoltório de falha em questão era reta, circular ou quadrática? Um compasso ou uma curva francesa a definiriam.

Uma variação da teoria de Mohr, conhecida como *teoria de Coulomb-Mohr*, ou *teoria da fricção interna*, assume que a linha divisória *BCD* na Figura 6-20 é reta. Com tal hipótese, somente as resistências à compressão e tração são necessárias. Considere o ordenamento convencional das tensões principais na forma $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. O círculo maior conecta σ_1 e σ_3, como mostrado na Figura 6-21. Interpolando o raio do círculo de linha sólida com os raios dos círculos de linhas tracejadas, relativamente às distâncias centrais ao ponto O, temos

$$\frac{\dfrac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \dfrac{S_t}{2}}{\dfrac{S_c}{2} - \dfrac{S_t}{2}} = \frac{\dfrac{S_t}{2} - \dfrac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}}{\dfrac{S_c}{2} + \dfrac{S_t}{2}}$$

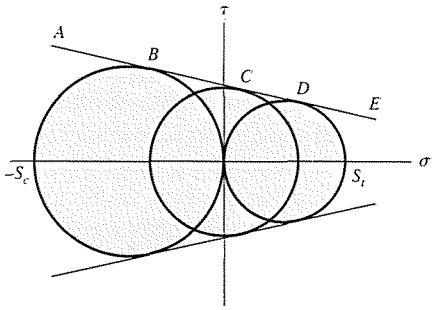


Figura 6-20 Três círculos de Mohr – um para o ensaio de compressão uniaxial, um para o ensaio de cisalhamento puro e um para o ensaio de tração uniaxial – são usados para definir falha pela hipótese de Mohr. S_c e S_t são as resistências de compressão e tração, respectivamente; elas podem ser utilizadas para a resistência de escoamento ou última.

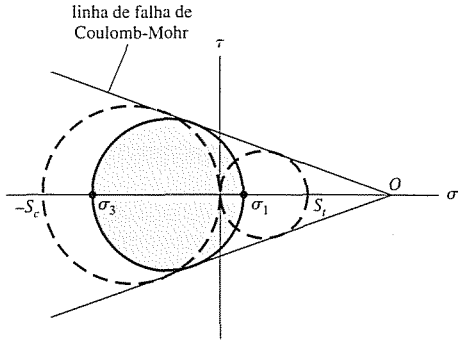


Figura 6-21 *(Extraída de Richard G. Budynas,* Advanced Strength and Applied Stress Analysis, *2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1999. Copyright© 1999 The McGraw-Hill Companies.)*

A multiplicação em cruz, seguida de simplificação, reduz essa equação a

$$\frac{\sigma_1}{S_t} - \frac{\sigma_3}{S_c} = 1 \tag{6-22}$$

sendo que tanto a resistência ao escoamento quanto a resistência última podem ser usadas.

Para tensão plana, em que as duas tensões principais não-nulas são $\sigma_A \geq \sigma_B$, temos uma situação similar aos três casos apresentados para a teoria MSS, Equações (6-4) a (6-6). Isto é,

Caso 1: $\sigma_A \geq \sigma_B \geq 0$. Para esse caso, $\sigma_1 = \sigma_A$ e $\sigma_3 = 0$. A Equação (6-1) reduz-se à condição de escoamento de

$$\sigma_A \geq S_t \tag{6-23}$$

Caso 2: $\sigma_A \geq 0 \geq \sigma_B$. Aqui, $\sigma_1 = \sigma_A$ e $\sigma_3 = \sigma_B$, de modo que a Equação (6-22) torna-se

$$\frac{\sigma_A}{S_t} - \frac{\sigma_B}{S_c} = 1 \tag{6-24}$$

Caso 3: $0 \geq \sigma_A \geq \sigma_B$. Nesse caso, $\sigma_1 = 0$ e $\sigma_3 = \sigma_B$, de modo que a Equação (6-22) provê

$$\sigma_B \geq -S_c \tag{6-25}$$

Um traçado desses casos, junto com os casos normalmente não-usados correspondentes a $\sigma_B \geq \sigma_A$, é mostrado na Figura 6-22.

Para equações de desenho, incorporando o fator de segurança, divida todas as resistências por este. Por exemplo, a Equação (6-22), como uma equação de desenho, pode ser escrita como

$$\frac{\sigma_1}{S_t} - \frac{\sigma_3}{S_c} = \frac{1}{n} \tag{6-26}$$

Uma vez que, para a teoria de Coulomb-Mohr, não necessitamos do círculo de resistência por cisalhamento torcional, podemos deduzi-la a partir da Equação (6-22). Para cisalhamento puro τ, $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau$. A resistência torcional de escoamento ocorre quando $\tau_{max} = S_{sy}$, de modo que a Equação (6-22) para o escoamento produz $S_{sy} / S_{yt} - (-S_{sy}) / S_{yc} = 1$, ou

$$S_{sy} = \frac{S_{yt} S_{yc}}{S_{yt} + S_{yc}} \tag{6-27}$$

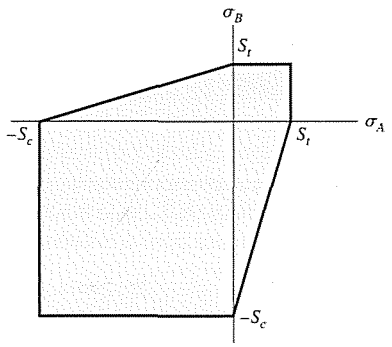


Figura 6-22 Traçado da teoria de falha de Coulomb-Mohr para estados de tensão planos.

EXEMPLO 6-2

Um eixo com diâmetro de 25 mm é estaticamente torcido até 230 N · m. Ele é feito de alumínio 195-T6 fundido com uma resistência ao escoamento em tração de 160 MPa e uma resistência ao escoamento em compressão de 170 MPa. Ademais, é usinado ao diâmetro final. Estime o fator de segurança desse eixo.

Solução Sendo que N · m, cm e MPa formam um conjunto consistente de dimensões, expressamos o diâmetro em cm:

$$\tau = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{16(230)}{\pi 2{,}5^3} = 75 \text{ MPa}$$

As duas tensões principais não-nulas são 75 e –75 MPa, fazendo as tensões principais ordenadas $\sigma_1 = 75$, $\sigma_2 = 0$ e $\sigma_3 = -75$ MPa. A partir da Equação (6-26),

Resposta
$$n = \frac{1}{\sigma_1/S_{yt} - \sigma_3/S_{yc}} = \frac{1}{75/160 - (-75)/170} = 1{,}10$$

Alternativamente, a partir da Equação (6-27),

$$S_{sy} = \frac{S_{yt}S_{yc}}{S_{yt} + S_{yc}} = \frac{160(170)}{160 + 170} = 82{,}4 \text{ MPa}$$

e $\tau_{max} = 75$ MPa. Logo,

Resposta
$$n = \frac{S_{sy}}{\tau_{\max}} = \frac{82{,}4}{75} = 1{,}10$$

6-7 Resumo das Falhas de Materiais Dúcteis

Tendo estudado algumas das várias teorias de falha, nós agora as avaliaremos e mostraremos como são aplicadas em análise e projeto. Nesta seção, nos limitaremos a materiais e peças que sabemos falhar de uma maneira dúctil. Aqueles que falham de uma maneira frágil serão considerados separadamente, pois requerem teorias de falha diferentes.

Para ajudar a decidir com relação a hipóteses apropriadas e trabalháveis de falha de material dúctil, Marin[6] coletou dados de muitas fontes. Alguns dos pontos de dados utilizados para selecionar teorias de falha para materiais dúcteis são mostrados no gráfico da Figura 6-23.[7] Mann também coletou muitos dados para cobre e ligas de níquel; caso fossem exibidos, os pontos de dados para estes apareceriam mesclados com aqueles já diagramados. A Figura 6-23 mostra que tanto a teoria da tensão máxima de cisalhamento quanto a da energia de distorção são aceitáveis para projeto e análise de materiais que falhariam de uma forma dúctil. Você pode querer traçar outras teorias usando um lápis vermelho ou azul na Figura 6-23, para mostrar por que elas não são aceitáveis ou utilizadas.

A seleção de uma ou outra dessas duas teorias é algo que você, engenheiro, deve decidir. Para projeto, a teoria da tensão máxima de cisalhamento é fácil, rápida de usar e conservadora. Se o problema consiste em saber por que uma peça falhou, então a teoria da energia de distorção pode ser a melhor; a Figura 6-23 mostra que o *locus* dessa teoria passa mais próximo da área central abrangida pelos pontos de dados, sendo, pois, em geral, um instrumento melhor de previsão de falha.

Para materiais dúcteis com resistências ao escoamento desiguais, S_{yt} em tração e S_{yc} em compressão, a teoria de Mohr é a melhor entre as disponíveis. Contudo, requer os resultados de três modos de teste separados, a construção gráfica do *locus* de falha e o ajuste do maior círculo de Mohr a esse *locus*. A alternativa para isso consiste no uso da teoria de Coulomb-Mohr, que requer apenas as resistências ao escoamento sob tração e compressão e é facilmente utilizada em forma de equação.

---

[6] Joseph Marin foi um dos pioneiros na coleta, no desenvolvimento e na disseminação do material relacionado à falha de elementos de engenharia, tendo publicado vários livros e artigos sobre o assunto. Neste livro, a referência utilizada é Joseph Marin, *Engineering Materials*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1952. (Ver as páginas 156 e 157 para alguns pontos de dados aqui utilizados.)

[7] Observe que alguns dados na Figura 6-23 estão dispostos ao longo da linha divisória horizontal superior, em que $\sigma_B \geq \sigma_A$. Isso é freqüentemente feito com dados de falha, para alargar pontos de dados congestionados traçando-se na imagem-espelho da linha $\sigma_B = \sigma_A$.

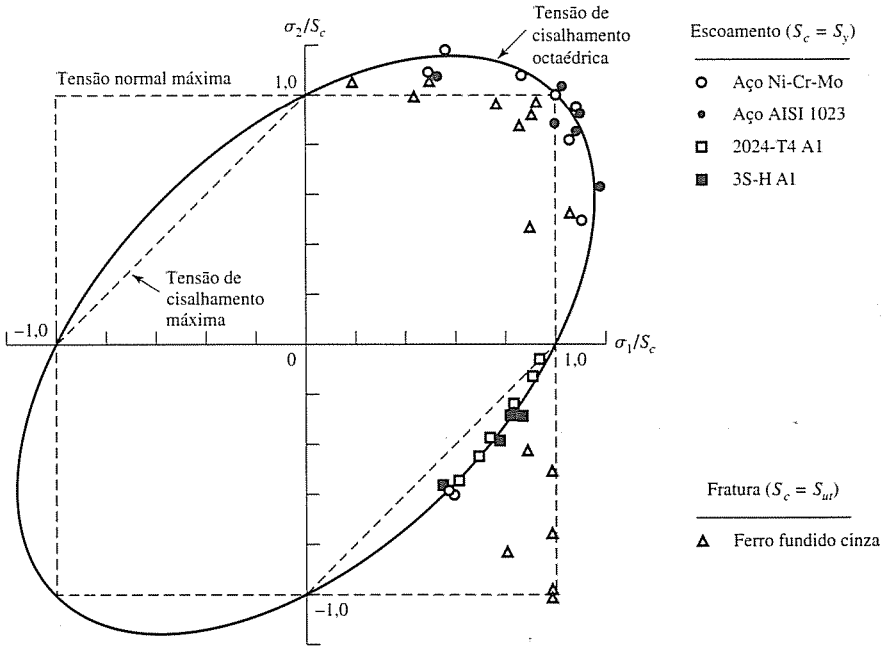


Figura 6-23 Dados experimentais sobrepostos a teorias de falha. *(Reproduzida da Figura 7.11, p. 257,* Mechanical Behavior of Materials, *2nd ed., N. E. Dowling, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1999.)*

EXEMPLO 6-3

Este exemplo ilustra o uso de uma teoria de falha para determinar a resistência de um elemento mecânico ou componente. O exemplo pode também esclarecer qualquer confusão existente entre as frases *resistência de uma peça de máquina, resistência de um material* e *resistência de uma peça em um ponto.*

Certa força F aplicada em D próximo à extremidade da alavanca de 15 in mostrada na Figura 6-24, que é bastante similar a uma chave de soquete, resulta em certas tensões na barra $OABC$ em balanço. Esta barra é feita de aço AISI 1035 forjado e tratado termicamente, de forma que tem uma resistência mínima (ASTM) ao escoamento de 81 kpsi. Supomos que este componente não tem valor algum após ter sofrido escoamento. Assim, a força F requerida para iniciar o escoamento pode ser considerada como a resistência da parte do componente. Encontre essa força.

Solução

Assumimos que o braço DC é forte, e que não é parte do problema. Um aço 1035, tratado ao calor, terá uma redução em área de 50% ou mais e portanto é um material dúctil a temperaturas normais. Isto também significa que a concentração de tensão no braço A não necessita ser considerada. Um elemento de tensão em A, na superfície do topo, será submetido à tensão de tração por flexão e tensão de torção. Este ponto, na seção de 1 in de diâmetro, a seção mais fraca, governa a resistência do conjunto. As duas tensões são:

$$\sigma_x = \frac{M}{I/c} = \frac{32M}{\pi d^3} = \frac{32(14F)}{\pi(1^3)} = 142{,}6F$$

$$\tau_{zx} = \frac{Tr}{J} = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{16(15F)}{\pi(1^3)} = 76{,}4F$$

Empregando a teoria da energia de distorção, encontramos, a partir da Equação (6-15), que

$$\sigma' = \left(\sigma_x^2 + 3\tau_{zx}^2\right)^{1/2} = [(142{,}6F)^2 + 3(76{,}4F)^2]^{1/2} = 194{,}5F$$

Igualando a tensão de von Mises a S_y, resolvemos para a variável F e obtermos

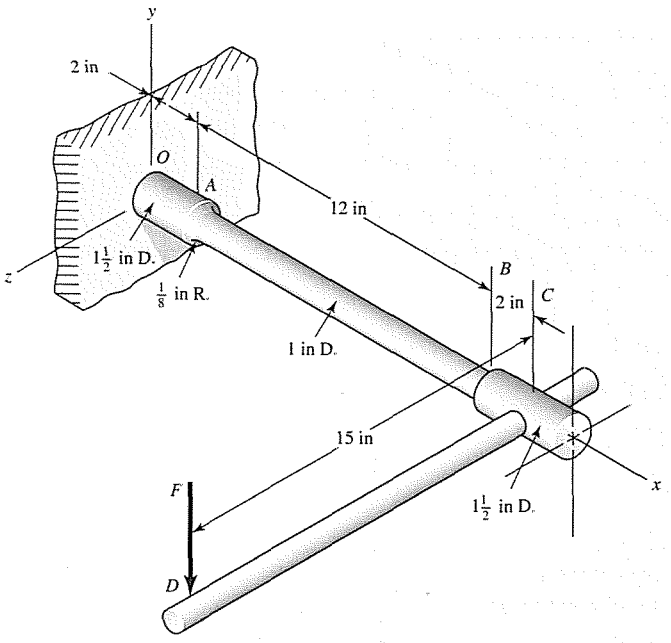


Figura 6-24

Resposta

$$F = \frac{S_y}{194{,}5} = \frac{81\,000}{194{,}5} = 416 \text{ lbf}$$

Neste exemplo, a resistência do material no ponto A é $S_y = 81$ kpsi. A resistência da montagem ou componente é $F = 416$ lbf.

Vejamos como aplicar a teoria MSS. Para um ponto sob tensão plana com apenas uma tensão normal não-nula e uma tensão de cisalhamento, as duas tensões principais não-nulas σ_A e σ_B terão sinais opostos e, portanto, conformam-se com o caso 2 da teoria MSS. Da Equação (4-13),

$$\sigma_A - \sigma_B = 2\left[\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{zx}^2\right]^{1/2} = \left(\sigma_x^2 + 4\tau_{zx}^2\right)^{1/2}$$

Para o caso 2 da teoria MSS, a Equação (6-5) é aplicável e, portanto,

$$\left(\sigma_x^2 + 4\tau_{zx}^2\right)^{1/2} = S_y$$

$$[(142{,}6F)^2 + 4(76{,}4F)^2]^{1/2} = 209{,}0F = 81\,000$$

$$F = 388 \text{ lbf}$$

que é cerca de 7% menor que o encontrado com o uso da teoria DE. Como afirmado antes, a teoria MSS é mais conservadora que a DE.

EXEMPLO 6-4

O tubo em balanço mostrado na Figura 6-25 deve ser construído de uma liga de alumínio 2014 tratada de forma a obter uma resistência especificada mínima ao escoamento de 276 MPa. Desejamos escolher um tubo de inventário da Tabela A-8 utilizando um fator de projeto $n_d = 4$. A carga de flexão é $F = 1{,}75$ kN, a tração axial é $P = 9{,}0$ kN e a torção é $T = 72\text{N} \cdot \text{m}$. Qual é o fator de segurança alcançado?

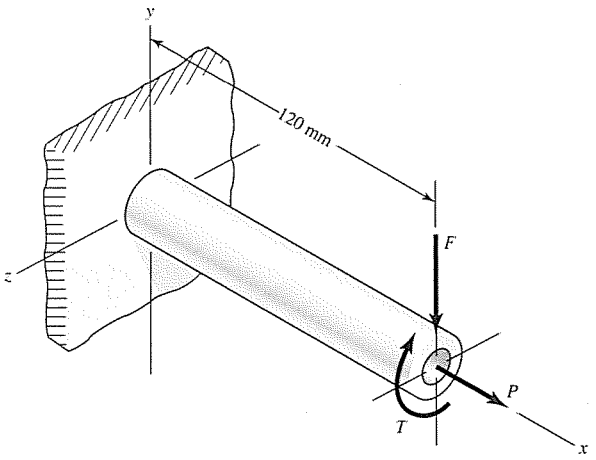


Figura 6-25

Solução

Uma vez que o momento flexor máximo é $M = 120F$, a tensão normal, para um elemento na superfície de topo do tubo, na origem, é

$$\sigma_x = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{9}{A} + \frac{120(1{,}75)(d_o/2)}{I} = \frac{9}{A} + \frac{105d_o}{I} \tag{1}$$

onde, em caso de utilizarmos milímetros para as propriedades de área, a tensão resulta em gigapascais.

A tensão torcional no mesmo ponto é

$$\tau_{zx} = \frac{Tr}{J} = \frac{72(d_o/2)}{J} = \frac{36d_o}{J} \tag{2}$$

Por acurácia, escolhemos a teoria da energia de distorção, como base de projeto. A tensão de von Mises, como no exemplo anterior, é

$$\sigma' = \left(\sigma_x^2 + 3\tau_{zx}^2\right)^{1/2} \tag{3}$$

Com base no fator de projeto dado, o objetivo para σ' é

$$\sigma' \leq \frac{S_y}{n_d} = \frac{0{,}276}{4} = 0{,}0690 \text{ GPa} \tag{4}$$

sendo que utilizamos gigapascais nesta relação, por concordância com as Equações (1) e (2).

A programação das Equações (1) a (3) numa planilha, entrando os tamanhos métricos obtidos da Tabela A-8, revela que um tubo de 42 x 5 mm é satisfatório. A tensão de von Mises encontrada é $\sigma' = 0{,}06043$ GPa, para este tamanho. Assim, o fator de segurança alcançado é

Resposta

$$n = \frac{S_y}{\sigma'} = \frac{0{,}276}{0{,}06043} = 4{,}57$$

Para o próximo tamanho menor, um tubo de 42 x 4 mm, $\sigma' = 0{,}07105$ GPa, dando um fator de segurança de

$$n = \frac{S_y}{\sigma'} = \frac{0{,}276}{0{,}07105} = 3{,}88$$

6-8 Teoria da Tensão Normal Máxima para Materiais Frágeis

A teoria da tensão normal máxima (MNS) afirma que a *falha ocorre sempre que uma das três tensões principais iguala-se ou excede à resistência.* Novamente, arranjamos as três tensões principais para qualquer estado de tensão na forma ordenada $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Essa teoria então prevê a ocorrência de falha sempre que

$$\sigma_1 \geq S_{ut} \qquad \text{ou} \qquad \sigma_3 \leq -S_{uc} \tag{6-28}$$

em que S_{ut} e S_{uc} são as resistências últimas à tração e à compressão, respectivamente, fornecidas como quantidades positivas.

Para tensão plana, com as tensões principais fornecidas pela Equação (4-13), com $\sigma_A \geq \sigma_B$, a Equação (6-28) pode ser escrita como

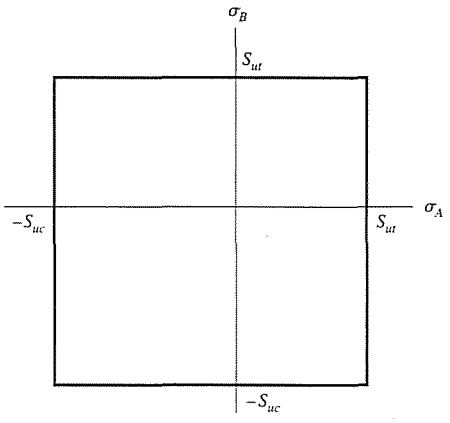
$$\sigma_A \geq S_{ut} \qquad \text{ou} \qquad \sigma_B \leq -S_{uc} \tag{6-29}$$

que é traçada na Figura 6-26(a). Como anteriormente, as equações do critério de falha podem ser convertidas em equações de desenho. Podemos considerar dois conjuntos de equações para linhas de carregamento, em que $\sigma_A \geq \sigma_B$, como

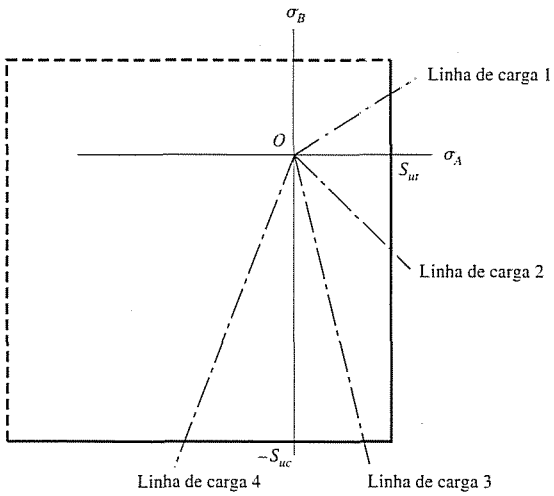
$$\sigma_A = \frac{S_{ut}}{n} \qquad \begin{aligned} &\sigma_A \geq \sigma_B \geq 0 && && \text{Linha de carga 1} \\ &\sigma_A \geq 0 \geq \sigma_B && \text{e} \quad \left|\frac{\sigma_B}{\sigma_A}\right| \leq \frac{S_{uc}}{S_{ut}} && \text{Linha de carga 2} \end{aligned} \tag{6-30a}$$

$$\sigma_B = -\frac{S_{uc}}{n} \qquad \begin{aligned} &\sigma_A \geq 0 \geq \sigma_B && \text{e} \quad \left|\frac{\sigma_B}{\sigma_A}\right| > \frac{S_{uc}}{S_{ut}} && \text{Linha de carga 3} \\ &0 \geq \sigma_A \geq \sigma_B && && \text{Linha de carga 4} \end{aligned} \tag{6-30b}$$

em que as linhas de carregamento são mostradas na Figura 6-26(b).



(a)



(b)

Figura 6-26 Gráfico da teoria da tensão normal máxima (MSN) para estados planos de tensão. Estados de tensão localizados internamente ao *locus* de falha são seguros.

Antes de comentarmos algo novo com relação à teoria MNS, exploraremos algumas modificações na teoria de Mohr para materiais frágeis.

6-9 Modificações da Teoria de Mohr para Materiais Frágeis

Discutiremos três modificações da teoria de Mohr para materiais frágeis: a teoria de Coulomb-Mohr Frágil (BCM) e duas teorias modificadas de Mohr, denominadas teoria de Mohr modificada I e teoria de Mohr modificada II, abreviadas como M1M e M2M, respectivamente. As equações apresentadas para as teorias restringem-se a tensões planas e são destinadas a projetos, com a incorporação do fator de segurança.

A teoria de Coulomb-Mohr foi discutida no começo da Seção 6-6 com as Equações (6-23) a (6-25). Escritas como equações de projeto para materiais frágeis, são elas:

Coulomb-Mohr Frágil

$$\sigma_A = \frac{S_{ut}}{n} \qquad \sigma_A \geq \sigma_B \geq 0 \tag{6-31a}$$

$$\frac{\sigma_A}{S_{ut}} - \frac{\sigma_B}{S_{uc}} = \frac{1}{n} \qquad \sigma_A \geq 0 \geq \sigma_B \tag{6-31b}$$

$$\sigma_B = -\frac{S_{uc}}{n} \qquad 0 \geq \sigma_A \geq \sigma_B \tag{6-31c}$$

Com base em dados observados para o quarto quadrante, a teoria de Mohr modificada I o expande, como mostrado na Figura 6-27.

Teoria de Mohr Modificada I:

$$\sigma_A = \frac{S_{ut}}{n} \qquad \sigma_A \geq \sigma_B \geq 0$$

$$\sigma_A \geq 0 \geq \sigma_B \quad \text{e} \quad \left|\frac{\sigma_B}{\sigma_A}\right| \leq 1 \tag{6-32a}$$

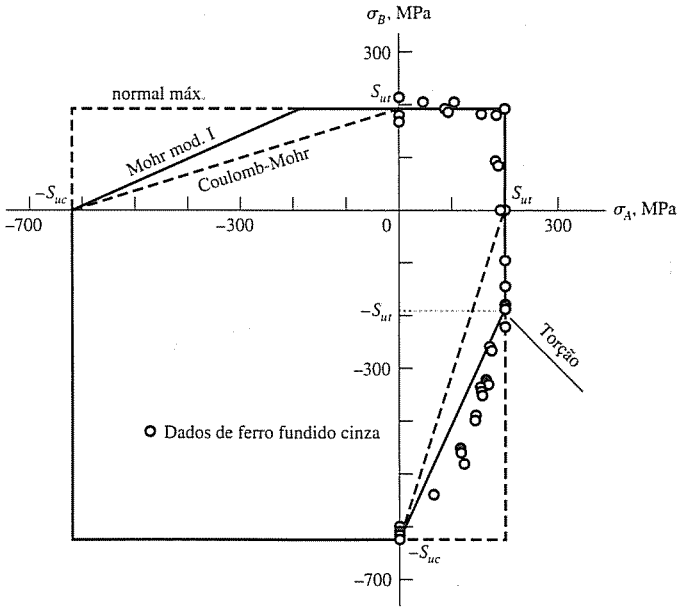


Figura 6-27 Dados de fratura biaxial de ferro fundido cinza comparados com vários critérios de falha. *(Dowling, N. E., Mechanical Behavior of Materials, 2nd ed, 1999, p. 261. Reimpressa com a permissão de Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, New Jersey.)*

$$\frac{(S_{uc} - S_{ut})\,\sigma_A}{S_{uc}S_{ut}} - \frac{\sigma_B}{S_{uc}} = \frac{1}{n} \qquad \sigma_A \geq 0 \geq \sigma_B \quad \text{e} \quad \left|\frac{\sigma_B}{\sigma_A}\right| > 1 \tag{6-32b}$$

$$\sigma_B = -\frac{S_{uc}}{n} \qquad 0 \geq \sigma_A \geq \sigma_B \tag{6-32c}$$

Os dados ainda estão fora dessa área estendida. A teoria de Mohr modificada II estende a região no quarto quadrante, onde $|\sigma_A/\sigma_B| < 1$, usando uma relação parabólica. A parábola acha-se na forma $a\sigma_B^2 + b\sigma_B + c\sigma_A = 1$, ajustada para ser tangente à vertical em $\sigma_A = -\sigma_B = S_{ut}$.

Teoria de Mohr Modificada II

$$\sigma_A = \frac{S_{ut}}{n} \qquad \sigma_A \geq \sigma_B \geq 0$$

$$\sigma_A \geq 0 \geq \sigma_B \quad \text{e} \quad \left|\frac{\sigma_B}{\sigma_A}\right| \leq 1 \tag{6-33a}$$

$$\frac{n\sigma_A}{S_{ut}} + \left(\frac{n\sigma_B + S_{ut}}{S_{ut} - S_{uc}}\right)^2 = 1 \qquad \sigma_A \geq 0 \geq \sigma_B \quad \text{e} \quad \left|\frac{\sigma_B}{\sigma_A}\right| > 1 \tag{6-33b}$$

$$\sigma_B = -\frac{S_{uc}}{n} \qquad 0 \geq \sigma_A \geq \sigma_B \tag{6-33c}$$

A Figura 6-28 mostra como a teoria M2M corresponde a alguns dos dados disponíveis no quarto quadrante.

σ_A, kpsi	0	0	0	0	18	21	30	32	34	39	40
σ_B, kpsi	−134	−140	−148	−149	−110	−102	−91	−83	−72	−50	−40

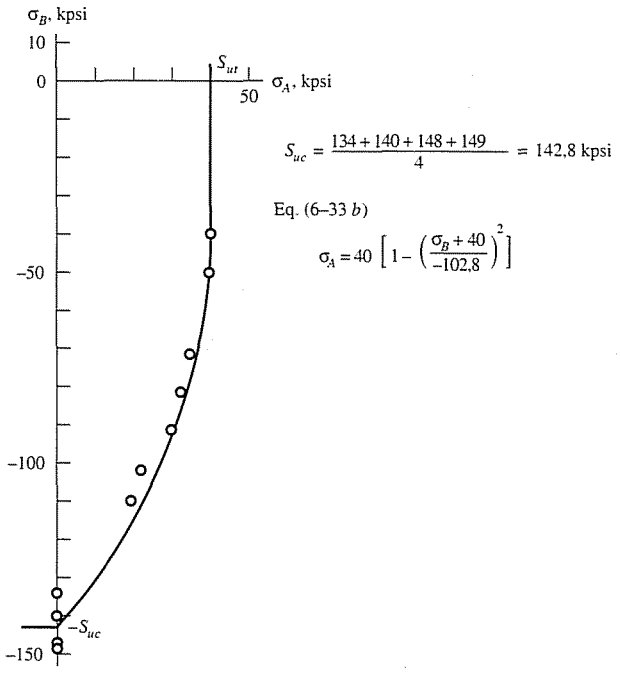


Figura 6-28 Dados $\sigma_A\sigma_B$ para o quarto quadrante de ferro fundido grau 40, comparados com o *locus* de falha da teoria de Mohr modificada II. (*Fonte dos dados: Charles F. Walton (ed),* Iron Castings Handbook, *Iron Founders' Society, 1971, p. 215, Cleveland, Ohio.)*

EXEMPLO 6-5

Considere a chave de roda no Exemplo 6-3, Figura 6-24, como feita de ferro fundido, usinada para as dimensões. A força F requerida para a fratura dessa peça pode ser considerada a resistência da componente da peça. Se o material utilizado é o ferro fundido ASTM grau 30, encontre a força F com o

(a) modelo de falha de Coulomb-Mohr.

(b) modelo de falha de Mohr modificado I.

(c) modelo de falha de Mohr modificado II.

Solução

Assumimos que a alavanca DC é forte o suficiente e que, portanto, não faz parte do problema. Uma vez que um ferro fundido grau 30 é um material frágil *e* um ferro fundido, os fatores de concentração de tensão K_t e K_{ts} são tomados como unitários. A partir da Tabela A-24, a resistência última à tração é de 31 kpsi e a resistência última à compressão é de 109 kpsi. O elemento de tensão em A, no topo da superfície, estará sujeito à tensão de tração proveniente da flexão e à tensão torcional. Essa localidade, no filete da secção de diâmetro de 1 in, é a mais fraca e governa a resistência do conjunto. A tensão normal σ_x e a tensão de cisalhamento em A são fornecidas por

$$\sigma_x = K_t \frac{M}{I/c} = K_t \frac{32M}{\pi d^3} = (1)\frac{32(14F)}{\pi(1)^3} = 142{,}6F$$

$$\tau_{xy} = K_{ts} \frac{Tr}{J} = K_{ts} \frac{16T}{\pi d^3} = (1)\frac{16(15F)}{\pi(1)^3} = 76{,}4F$$

A partir da Equação (4-13), as tensões principais não-nulas σ_A e σ_B são

$$\sigma_A, \sigma_B = \frac{142{,}6F + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{142{,}6F - 0}{2}\right)^2 + (76{,}4F)^2} = 175{,}8F, -33{,}2F$$

Isso nos leva ao quarto quadrante do plano σ_A, σ_B.

(a) Para BCM, a Equação (6-31b) é aplicável com $n = 1$ para falha.

$$\frac{\sigma_A}{S_{ut}} - \frac{\sigma_B}{S_{uc}} = \frac{175{,}8F}{31(10^3)} - \frac{(-33{,}2F)}{109(10^3)} = 1$$

Solucionando para F, obtemos

Resposta $$F = 167 \text{ lbf}$$

(b) Para M1M, a inclinação da linha de carregamento é $|\sigma_B/\sigma_A| = 33{,}2/175{,}8 = 0{,}189 < 1$. Obviamente, a Equação (6-32a) é aplicável.

$$\frac{\sigma_A}{S_{ut}} = \frac{175{,}8F}{31(10^3)} = 1$$

Resposta $$F = 176 \text{ lbf}$$

(c) Para M2M, novamente $|\sigma_B/\sigma_A| = 0{,}189 < 1$ e a Equação (6-33a) se aplica, fornecendo o mesmo resultado que M1M:

Resposta $$F = 176 \text{ lbf}$$

Como se poderia esperar a partir de uma inspeção da Figura 6-27, a teoria de Coulomb-Mohr é mais conservadora.

6-10 Resumo da Falha de Materiais Frágeis

Identificamos a falha ou resistência de materiais frágeis que se adaptam ao significado usual da palavra *frágil*, relacionando-a àqueles materiais cuja deformação verdadeira na fratura é de 0,05 ou menos. Devemos também estar cientes de materiais normalmente dúcteis que, por alguma razão, podem desenvolver uma fratura frágil ou trinca se usados abaixo da temperatura de transição. A Figura 6-29 apresenta dados para um

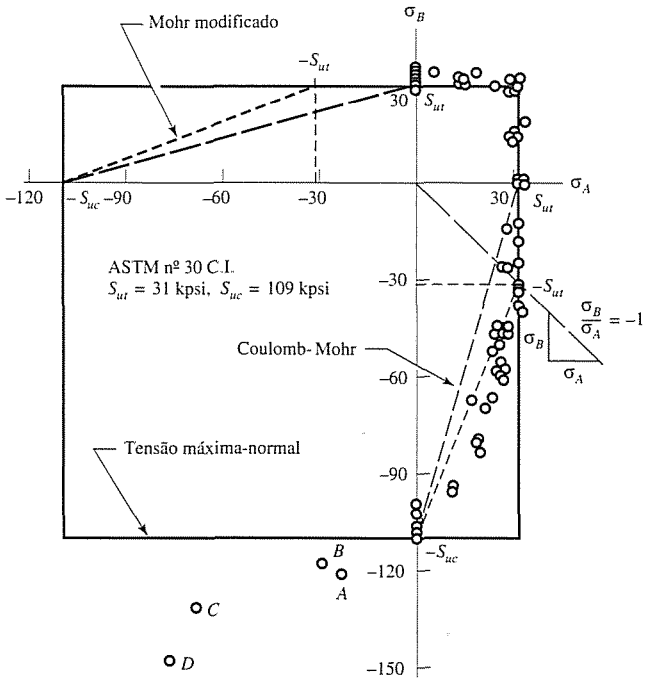


Figura 6-29 Um gráfico de dados experimentais obtido de ensaios em ferro fundido. Também exibidos estão os gráficos de três hipóteses de falha de possível utilidade para materiais frágeis. Observe os pontos *A*, *B*, *C* e *D*. Para evitar congestionamento no primeiro quadrante, os pontos foram traçados para $\sigma_A > \sigma_B$, bem como para o sentido oposto. *(Fonte dos dados: Charles F. Walton (ed.),* Iron Castings Handbook, *Iron Founders' Society, 1971, p. 215, 216, Cleveland, Ohio.)*

ferro fundido de grau nominal 30, submetido às condições de tensão biaxial, sob várias hipóteses de fratura frágil mostradas sobrepostas. Observamos o seguinte:

- No primeiro quadrante, os dados aparecem em ambos os lados e ao longo do local geométrico de falha da tensão normal máxima, Coulomb-Mohr, Mohr modificada I e II. Todos os locais geométricos de falha são os mesmos, e todos os dados ajustam-se bem.
- No quarto quadrante apenas, a hipótese de Mohr modificada II produz um local geométrico de falha que se situa dentro dos e entre os dados.
- No terceiro quadrante, os pontos *A*, *B*, *C* e *D* são poucos para efetuar qualquer sugestão concernente a um local geométrico de fratura.
- Está claro que, a menos que o engenheiro esteja preparado para realizar considerável número de ensaios, ele deveria evitar carregamentos no segundo e no terceiro quadrantes, em qualquer conceito contemplado. Mudar o conceito para ficar no primeiro e no quarto quadrantes é um caminho menos custoso.

A pressão para fazer as coisas leva muitos engenheiros a empregar carregamentos que são entendidos quantitativamente. Em qualquer momento, saiba o que podemos e o que não podemos fazer e atue de acordo.

6-11 Seleção de Critérios de Falha

Para materiais dúcteis, o critério preferido é o da teoria de energia de distorção, embora alguns projetistas também apliquem a teoria da tensão máxima de cisalhamento, devido à sua simplicidade e natureza conservadora.

Para comportamentos frágeis, a hipótese original de Mohr, construída com testes de tração, compressão e torção, com um *locus* de falha curvo, é a melhor de que dispomos. Contudo, a dificuldade em aplicá-la sem o uso de um computador leva os engenheiros a escolher modificações, isto é, as teorias de Coulomb-Mohr e de Mohr modificada I ou II. A Figura 6-30 apresenta um diagrama de fluxo para a seleção de um procedimento efetivo para a análise ou previsão de falhas originadas de carregamento estático, no caso de comportamentos frágil e dúctil.

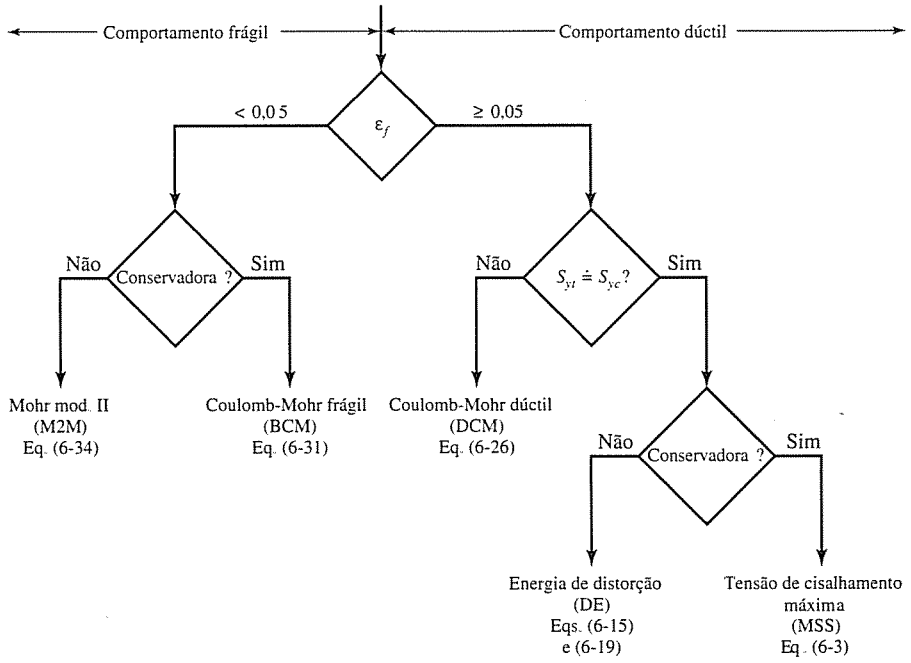


Figura 6-30 Diagrama de fluxo para seleção de teoria de falha.

6-12 Carregamento Estático ou Quase Estático em um Eixo

As construções cinemáticas fundamentais de nosso universo mecânico são a roda e o eixo de roda. Uma peça essencial dessa junção de revolução é o eixo, pois constitui um bom exemplo de um corpo carregado estática, quase estática e dinamicamente. Visto que este capítulo dedica-se aos carregamentos estático e quase estático, a aplicação da informação nele desenvolvida a eixos faz-se útil e necessária.

A tensão em um elemento localizado na superfície de um eixo sólido e redondo, de diâmetro d, sujeito a flexão, carregamento axial e torção, é

$$\sigma_x = \frac{32M}{\pi d^3} + \frac{4F}{\pi d^2} \tag{a}$$

$$\tau_{xy} = \frac{16T}{\pi d^3} \tag{b}$$

em que a componente axial da tensão normal σ_x pode ser aditiva ou subtrativa. Observamos que os três carregamentos – M, F e T – ocorrem em uma secção que contém o elemento específico de superfície sob exame.

Pelo uso do círculo de Mohr, pode-se verificar que as tensões principais não-nulas σ_A e σ_B são

$$\sigma_A, \sigma_B = \frac{\sigma_x}{2} \pm \left[\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2\right]^{1/2} \tag{6-34}$$

Essas tensões principais podem ser combinadas para obter a tensão σ' de von Mises como

$$\sigma' = \left(\sigma_A^2 - \sigma_A\sigma_B + \sigma_B^2\right)^{1/2} = \left(\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2\right)^{1/2} \tag{6-35}$$

Se a hipótese de cisalhamento máximo for útil,

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_A - \sigma_B}{2} = \frac{1}{2}\left(\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2\right)^{1/2} \tag{6-36}$$

Substituindo-se as Equações (a) e (b) nas Equações (6-34) e (6-35), obtemos

$$\sigma' = \frac{4}{\pi d^3}[(8M + Fd)^2 + 48T^2]^{1/2} \tag{6-37}$$

para a tensão de von Mises, e, utilizando a Equação (6-36) para a aproximação da tensão máxima de cisalhamento, obtemos

$$\tau_{\max} = \frac{2}{\pi d^3}[(8M + Fd)^2 + 64T^2]^{1/2} \tag{6-38}$$

As Equações (6-37) e (6-38) permitem uma estimativa de σ' ou τ_{max}, quando o diâmetro d é fornecido, ou uma estimativa de d, quando um valor permissível de σ' ou τ_{max} é fornecido. Para um fator de projeto de n_d, a teoria de energia de distorção para falha dúctil provê uma tensão permissível de

$$\sigma'_{\text{all}} = \frac{S_y}{n_d} \tag{6-39}$$

Para um fator de projeto de n_d, a hipótese de cisalhamento máximo para falha dúctil provê uma tensão de cisalhamento permissível τ_{all} de

$$\tau_{\text{all}} = \frac{S_{sy}}{n_d} = \frac{S_y}{2n_d} \tag{6-40}$$

Carregamento Estático ou Quase Estático de um Eixo – Flexão e Torção

Sob muitas condições, a força axial F nas Equações (6-37) e (6-38) é zero, ou tão pequena que seu efeito pode ser desprezado. Com $F = 0$, as Equações (6-37) e (6-38) tornam-se

$$\sigma' = \frac{16}{\pi d^3}(4M^2 + 3T^2)^{1/2} \tag{6-41}$$

$$\tau_{\max} = \frac{16}{\pi d^3}(M^2 + T^2)^{1/2} \tag{6-42}$$

Substituindo-se as tensões admissíveis provenientes das Equações (6-39) e (6-40), encontramos, para a teoria de von Mises de falha,

$$d = \left[\frac{16n}{\pi S_y}(4M^2 + 3T^2)^{1/2}\right]^{1/3} \tag{6-43}$$

$$\frac{1}{n} = \frac{16}{\pi d^3 S_y}(4M^2 + 3T^2)^{1/2} \tag{6-44}$$

e, para a aproximação da tensão máxima de cisalhamento,

$$d = \left[\frac{32n}{\pi S_y}(M^2 + T^2)^{1/2}\right]^{1/3} \tag{6-45}$$

$$\frac{1}{n} = \frac{32}{\pi d^3 S_y}(M^2 + T^2)^{1/2} \tag{6-46}$$

EXEMPLO 6-6

O eixo com pinhão integrado exibido na Figura 6-31(a) deve ser montado em mancais nos locais indicados e ter uma engrenagem (não-mostrada) montada na extremidade direita do balanço. O diagrama de carregamento (Figura 6-31(b)) mostra que a força no pinhão em A e a força na engrenagem em C estão no mesmo plano. Torques iguais e opostos T_A e T_B estão representados como concentrados em A e C, tal como as forças. O diagrama de momento flexor da Figura 6-31(c) ilustra um extremo em A e em B. O diâmetro menor em B torna este local decisivo no centro do mancal direito. Uma vez que o eixo é utilizado em emergências intermitentes, seu uso não excederá a 1000 revoluções à carga plena; dessa forma, o problema pode ser tratado como quase estático. O material é aço carbono tratado termicamente, com resistência média ao escoamento de 66 kpsi. Nessas circunstâncias, o engenheiro de pro-

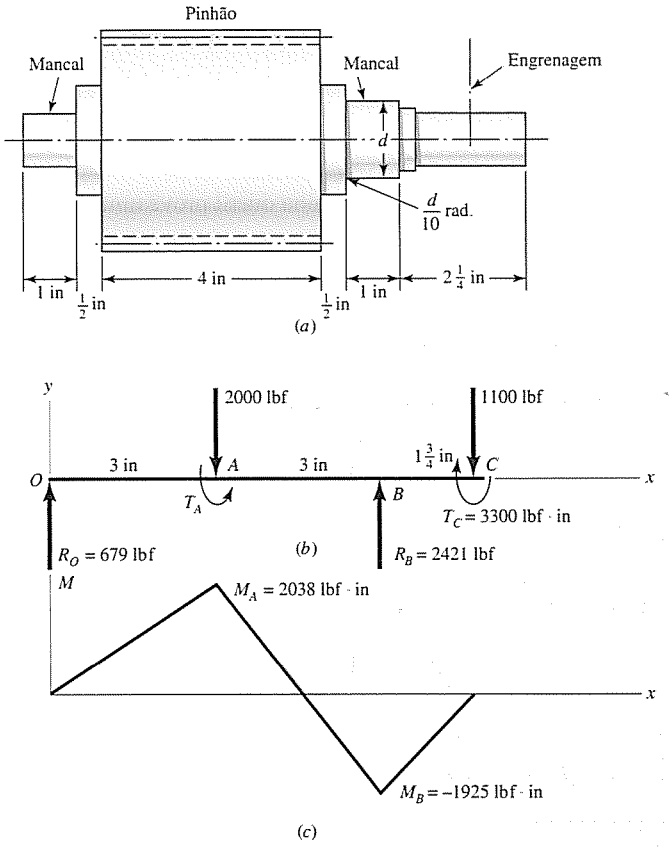


Figura 6-31 O diâmetro do mancal esquerdo é de 1,000 in, o diâmetro do ressalto do mancal esquerdo é de 2,000 in, o diâmetro de dedendo da engrenagem é de 3,43 in; o diâmetro de ressalto do mancal direito é de 2,000 in; o ressalto do balanço tem $1\frac{1}{8}$ in por $\frac{1}{4}$ in de comprimento; o diâmetro de assento da engrenagem em balanço é de 1,000 in.

jeto decide empregar um fator de projeto de 1,80. Qual é o menor diâmetro para o mancal de deslizamento direito determinado a partir da teoria da energia de distorção e pela aproximação da hipótese de cisalhamento máximo?

Solução A partir da Equação (6-43), para DE,

$$d = \left\{ \frac{16(1{,}80)}{\pi 66\,000} \left[4(-1925)^2 + 3(3300)^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/3} = 0{,}986 \text{ in}$$

A partir da Equação (6-45), para MSS,

$$d = \left\{ \frac{32(1{,}80)}{\pi 66\,000} \left[(-1925)^2 + 3300^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/3} = 1{,}02 \text{ in}$$

6-13 Introdução à Mecânica de Fratura

A idéia de que existem trincas em peças mesmo antes de o serviço começar, e de que elas podem crescer durante este, leva à frase descritiva "projeto tolerante a dano". O foco dessa filosofia está no crescimento da trinca até tornar-se crítica, e a peça ser removida de serviço. A ferramenta de análise é a *mecânica de fratura linear elástica* (LEFM). A inspeção e a manutenção são essenciais na decisão de retirar as peças antes que as trincas atinjam tamanhos catastróficos. Onde a segurança humana estiver envolvida, inspeções periódicas para trincas são obrigatórias por normas e ordens governamentais.

Examinaremos agora brevemente algumas das idéias básicas e o vocabulário necessário para o potencial de abordagem a ser apreciado. A intenção aqui é tornar o leitor ciente dos perigos associados com a fratura frágil súbita dos materiais chamados dúcteis. O tópico é demasiado extenso para se incluir em detalhes aqui e o leitor deve buscar outras fontes de informação sobre este assunto complexo.[8]

O uso de fatores elásticos de concentração de tensão provê uma indicação da carga média requerida em uma peça para o início de deformação plástica, ou escoamento; esses fatores são também úteis para a análise de cargas em uma peça que causará fratura de fadiga. Contudo, os fatores de concentração de tensão são limitados a curvaturas em regiões de alta concentração de tensão. Quando lá existe uma trinca, falha, inclusão ou defeito de raio pequeno e desconhecido em uma peça, o fator de concentração de tensão aproxima-se do infinito à medida que o raio da raiz aproxima-se de zero, tornando a abordagem do fator de concentração de tensão inútil. Além disso, mesmo que o raio de curvatura da ponta da falha seja conhecido, as altas tensões locais levarão à deformação plástica local circundada por uma região de deformação elástica. Os fatores elásticos de concentração de tensão não mais são válidos para essa situação, assim a análise do ponto de vista dos fatores de concentração de tensão não leva a um critério útil para projeto quando trincas muito pronunciadas estiverem presentes.

Combinando a análise das mudanças elásticas totais em uma estrutura ou peça que ocorrem à medida que uma trinca frágil pronunciada cresce com medidas da energia requerida para produzir novas superfícies de fratura, é possível calcular a tensão medida (se nenhuma trinca estiver presente) que causará crescimento de trinca em uma peça. Tal cálculo é possível somente para peças com trincas para as quais a análise estática tenha sido completada, e para materiais que trincam de uma maneira relativamente frágil e para a qual a energia de fratura tenha sido cuidadosamente medida. O termo *relativamente frágil* está rigorosamente definido nos procedimentos de ensaio,[9] mas ele significa, grosso modo, *fratura sem escoamento ocorrendo por toda a secção transversal fraturada.*

Assim, vidro, aços duros, ligas fortes de alumínio, e mesmo aços de baixo carbono abaixo da temperatura de transição dúctil-frágil, podem ser analisados dessa maneira. Felizmente, os materiais dúcteis embotam trincas pronunciadas, como havíamos previamente descoberto, assim que a fratura ocorre a tensões médias da ordem da resistência de escoamento, e o projetista está preparado para essa condição. Os materiais intermediários que se situam entre "relativamente frágeis" e "dúcteis" estão sendo analisados ativamente, mas critérios exatos de projeto para eles ainda não estão disponíveis.

Fratura Quase Estática

Muitos de nós já tivemos a experiência de observar uma fratura frágil, quer seja a quebra de um espécime de ferro fundido em um ensaio de tração ou a fratura de torção de um pedaço de giz de quadro-negro. Ela ocorre tão rapidamente que pensamos nela como instantânea, isto é, a secção transversal simplesmente se partindo. Quem, patinando em um lago congelado, sem ninguém por perto, já ouviu um estalido no gelo? Pois esse estalido deve-se a trincaduras no gelo. As trincas movem-se tão devagar que as vemos correr. O fenômeno não é instantâneo, visto que algum tempo é necessário para prover a energia da trinca, do campo de tensão até a trinca, para propagação. Quantificar essas coisas é importante para entender o fenômeno "em pequena escala". Em "grande escala", uma trinca estática pode ser estável e não se propagará. Alguns níveis de carregamento podem produzir uma trinca instável, e a trinca se propagará até a fratura.

O fundamento da mecânica de fratura foi estabelecido primeiramente por Griffith em 1921 usando os cálculos de campo de tensão para uma imperfeição elíptica em uma placa desenvolvidos por Inglis em 1913. Para uma placa infinita carregada por uma tensão uniaxial aplicada σ na Figura 6-32, a tensão máxima ocorre em $(\pm a, 0)$ e é dada por

$$(\sigma_y)_{\max} = \left(1 + 2\frac{a}{b}\right)\sigma \tag{6-47}$$

Note que, quando $a = b$, a elipse torna-se um círculo e a Equação (6-47) dá o fator de concentração de tensão de 3. Este concorda com o resultado bem conhecido para uma placa infinita com um furo circular (ver

[8] As referências sobre fraturas frágeis incluem:
H. Tada e P. C. Paris, *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, 2nd ed., Paris Productions, St. Louis, 1985.
D. Broek, *Elementary Engineering Fracture Mechanics*, 4th ed., Martinus Nijhoff, London, 1985.
D. Broek, *The Practical Use of Fracture Mechanics*, Kluwar Academic Pub., London, 1988.
David K. Felbeck e Anthony G. Atkins, *Strength and Fracture of Engineering Solids*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1984
Kåre Hellan, *Introduction to Fracture Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 1984.

[9] BS 5447:1977 e ASTM E399-78.

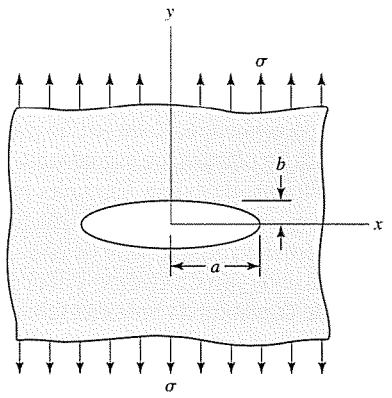


Figura 6-32 *(De Richard G. Budynas,* Advanced Strength and Applied Stress Analysis, 2nd. ed., *McGraw-Hill, New York, 1999. Copywright © 1999 The McGraw-Hill Companies.)*

Tabela A-15-1). Para uma trinca fina, $b/a \rightarrow 0$, e a Equação (6-47) prediz que $(\sigma_y)_{max} \rightarrow \infty$. Contudo, a um nível microscópio, uma trinca infinitamente pontiaguda é uma abstração hipotética que é fisicamente impossível, e quando deformação plástica ocorre, a tensão será finita na ponta da trinca.

Griffith mostrou que o crescimento de trinca ocorre quando a taxa de liberação de energia do carregamento aplicado for maior que a taxa de energia para crescimento de trinca. O crescimento de trinca pode ser estável ou instável. Crescimento instável ocorre quando a *razão* de mudança da taxa de liberação de energia relativa ao comprimento da trinca for igual a ou maior que a *razão* de mudança da taxa da energia de crescimento da trinca. O trabalho experimental de Griffith restringiu-se a materiais frágeis (a saber, vidro), o que confirmou bem sua hipótese de energia de superfície. Contudo, para materiais dúcteis, descobriu-se que a energia necessária para realizar trabalho plástico na ponta da trinca era bem mais crucial que a energia de superfície.

Modos de Trinca e Fator de Intensidade de Tensão

Três modos distintos de propagação de trinca existem, como mostrado na Figura 6-33. O campo de tensão de tração dá origem ao modo I, o *modo de propagação da trinca aberta,* como mostrado na Figura 6-33(*a*). Este modo é o mais comum na prática. O modo II é o *modo de deslizamento*, que é devido ao cisalhamento no plano e pode ser visto na Figura 6-33(*b*). O modo III é o *modo de rasgamento*, que surge a partir do cisalhamento fora do plano, como mostrado na Figura 6-33(*c*). Combinações desses modos podem também ocorrer. Visto que o modo I é o mais comum e importante, o restante desta seção considerará somente ele.

Considere uma trinca de modo I de comprimento $2a$ na placa infinita da Figura 6-34. Usando funções de tensão complexa, tem sido mostrado que o campo de tensão em um elemento $dx\,dy$ na vizinhança da ponta da trinca é dado por

$$\sigma_x = \sigma\sqrt{\frac{a}{2r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1 - \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\operatorname{sen}\frac{3\theta}{2}\right) \tag{6-48a}$$

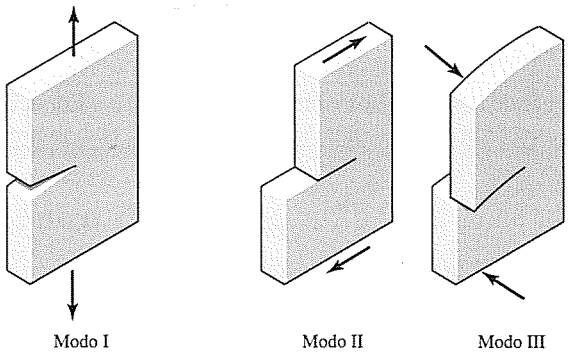


Figura 6-33 Modos de propagação de trinca.

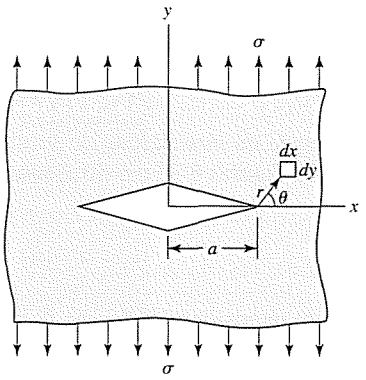


Figura 6-34 Modelo de trinca do modo I. (*De Richard G. Budynas,* Advanced Strength and Applied Stress Analysis, 2nd. ed., *McGraw-Hill, New York, 1999. Copyright © 1999 TheMcGraw-Hill Companies.*)

$$\sigma_y = \sigma\sqrt{\frac{a}{2r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1 + \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\operatorname{sen}\frac{3\theta}{2}\right) \tag{6-48b}$$

$$\tau_{xy} = \sigma\sqrt{\frac{a}{2r}}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} \tag{6-48c}$$

$$\sigma_z = \begin{cases} 0 & \text{(para tensão plana)} \\ \nu(\sigma_x + \sigma_y) & \text{(para deformação plana)} \end{cases} \tag{6-48d}$$

A tensão σ_y perto da ponta, como $\theta = 0$, é

$$\sigma_y|_{\theta=0} = \sigma\sqrt{\frac{a}{2r}} \tag{a}$$

Tal qual com a trinca elíptica, vemos que $\sigma_y|_{\theta=0} \to \infty$ à medida que $r \to 0$, e novamente o conceito de uma concentração infinita de tensão na ponta da trinca é inapropriado. A quantidade $\sigma_y|_{\theta=0}\sqrt{2r} = \sigma\sqrt{a}$, contudo, permanece constante à medida que $r \to 0$. É prática comum definir um fator K, chamado *fator de intensidade de tensão,* dado por

$$K = \sigma\sqrt{\pi a} \tag{b}$$

no qual as unidades são $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ ou $\text{kpsi}\sqrt{\text{in}}$. Visto que estamos tratando com uma trinca do modo I, a Equação (*b*) é escrita como

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \tag{6-49}$$

O fator de intensidade de tensão *não* deve ser confundido com os fatores de concentração de tensão estática K_t e K_{ts} definidos nas Seções 4-14 e 6-2.

Assim, as Equações (6-48) podem ser reescritas como

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1 - \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\operatorname{sen}\frac{3\theta}{2}\right) \tag{6-50a}$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1 + \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\operatorname{sen}\frac{3\theta}{2}\right) \tag{6-50b}$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} \tag{6-50c}$$

$$\sigma_z = \begin{cases} 0 & \text{(para tensão plana)} \\ \nu(\sigma_x + \sigma_y) & \text{(para deformação plana)} \end{cases} \tag{6-50d}$$

O fator de intensidade de tensão é uma função da geometria, do tamanho e da forma da trinca, e do tipo de carregamento. Para várias cargas e configurações geométricas, a Equação (6-49) pode ser escrita como

$$K_I = \beta\sigma\sqrt{\pi a} \tag{6-51}$$

em que β é o *fator de modificação da intensidade de tensão.* Tabelas para β estão disponíveis na literatura para configurações básicas.[10] As Figuras 6-35 a 6-40 apresentam uns poucos exemplos de β para a propagação de trinca de modo I.

Tenacidade de Fratura

Quando a magnitude do fator de intensidade de tensão do modo I alcança um valor crítico, a propagação de trinca K_{Ic} começa. O *fator de intensidade de tensão crítico* K_{Ic} é uma propriedade do material que depende deste, do modo de trinca, do processamento do material, da temperatura, da razão de carregamento e do estado de tensão no sítio da trinca (tal qual tensão plana *versus* deformação plana). O fator de intensidade de tensão crítico K_{Ic} é também chamado *tenacidade de fratura* do material. A tenacidade de fratura para deformação plana é normalmente menor que aquela para tensão plana. Por essa razão, o termo K_{Ic} é tipicamente definido como a *tenacidade de fratura de deformação plana do modo I.* A tenacidade de fratura K_{Ic} para metais de engenharia situa-se no intervalo $20 \le K_{Ic} \le 200$ MPa $\cdot \sqrt{\text{m}}$; para polímeros de engenharia e materiais cerâmicos, $1 \le K_{Ic} \le 5$ MPa $\cdot \sqrt{\text{m}}$. Para um aço 4340, no qual a resistência ao escoamento devido a tratamento térmico muda de 800 para 1600 MPa, K_{Ic} *decresce* de 190 a 40 MPa $\cdot \sqrt{\text{m}}$.

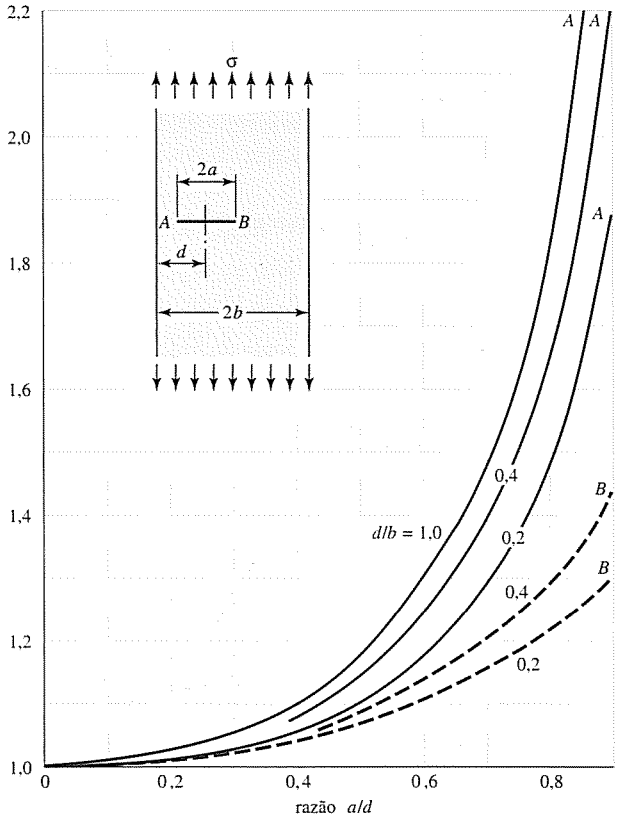


Figura 6-35 Trinca fora de centro em uma placa em tração longitudinal; as curvas sólidas são para a ponta da trinca em A; as curvas tracejadas são para a ponta em B.

[10] Ver, por exemplo:
H. Tada e P. C. Paris, *The Stress Analysis of Cracks Handbook,* 2nd ed., Paris Productions, St. Louis, 1985.
G. C. Sib., *Handbook of Stress Intensity Factors for Researchers and Engineers,* Institute of Fracture and Solid Mechanics, Lehigh University, Bethlehem, Pa., 1973.
Y. Murakami, ed., *Stress Intensity Factors Handbook,* Pergamon Press, Oxford, U.K., 1987.
W. D. Pilkey, *Formulas for Stress, Strain, and Structural Matrices,* John Wiley & Sons, New York, 1994.

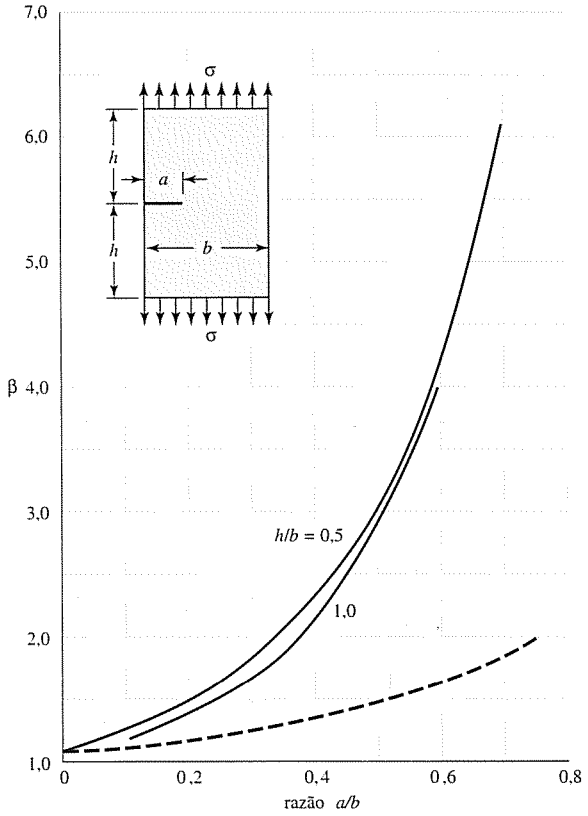


Figura 6-36 Placa carregada com tensão longitudinal com uma trinca na borda; para a curva sólida não existem restrições de flexão; a curva tracejada foi obtida com restrições de flexão adicionadas.

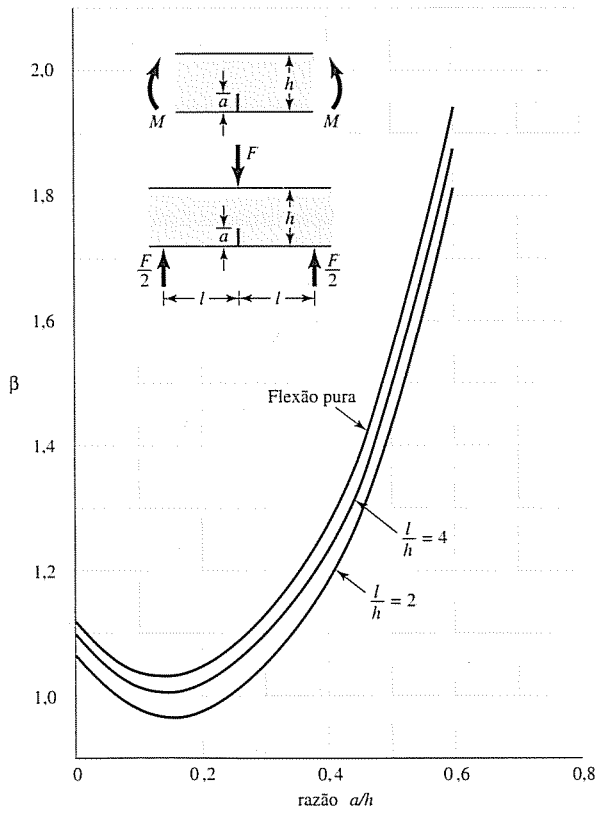


Figura 6-37 Vigas de secção transversal retangular tendo uma trinca de borda.

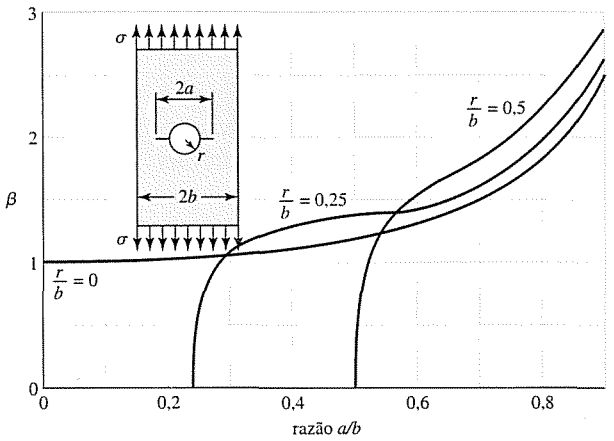


Figura 6-38 Placa em tração contendo um furo circular com duas trincas.

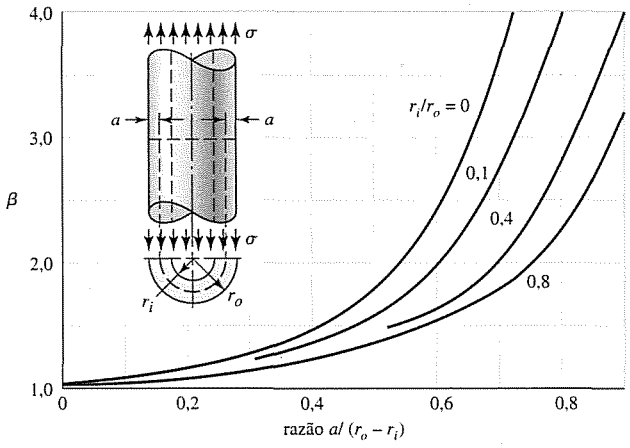


Figura 6-39 Um cilindro carregado em tração axial tendo uma trinca radial de profundidade a estendendo-se completamente ao redor de sua circunferência.

A Tabela 6-1 provê alguns valores aproximados típicos à temperatura ambiente de K_{Ic} para vários materiais. Como previamente notado, a tenacidade da fratura depende de muitos fatores e a tabela visa apenas a comunicar algumas magnitudes típicas de K_{Ic}. Para uma aplicação real, é recomendado que o material especificado para a aplicação seja certificado usando os procedimentos normalizados de ensaio [ver norma E399 da American Society for Testing and Materials (ASTM)].

Um dos primeiros problemas confrontados pelo projetista é o de decidir se existem condições, ou não, para uma fratura frágil. Uma operação a baixa temperatura, isto é, abaixo da temperatura ambiente, é um indicador-chave de que a fratura frágil é um modo possível de falha. Tabelas das temperaturas de transição para vários materiais não têm sido publicadas, possivelmente por causa da ampla variação nos valores, mesmo para um único material. Assim, em muitas situações, o ensaio de laboratório pode fornecer a única pista de possibilidade de uma fratura frágil. Um outro indicador-chave da possibilidade de fratura é a razão da resistência de escoamento para a resistência última. Uma razão alta de S_y/S_u indica que existe somente uma pequena habilidade para absorver a energia na região plástica e, portanto, uma probabilidade de fratura frágil.

A razão resistência-pela-tensão K_{Ic} / K_I pode ser usada como um fator de segurança como

$$n = \frac{K_{Ic}}{K_I} \tag{6-52}$$

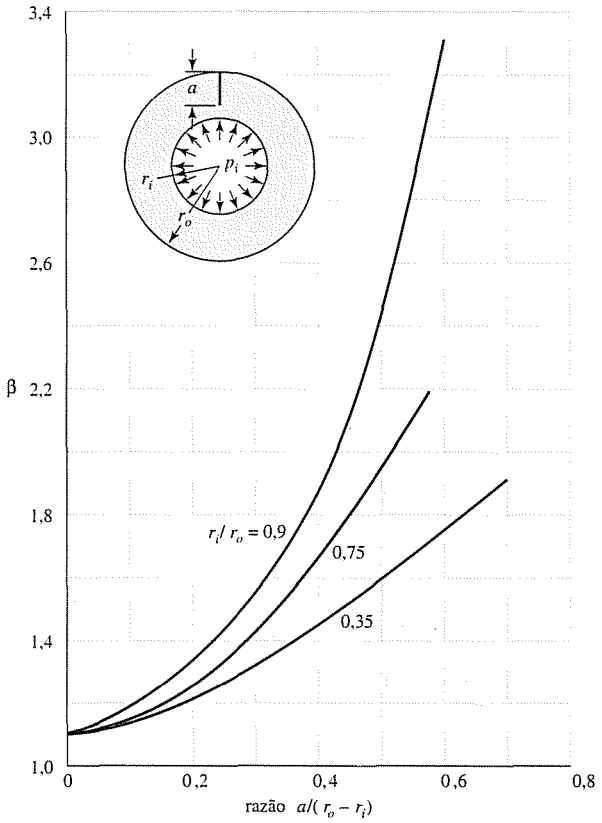


Figura 6-40 Cilindro sujeito a pressão interna, tendo uma trinca radial na direção longitudinal de profundidade. Use a Equação (4-51) para a tensão tangencial em $r = r_0$.

Tabela 6-1 Valores de K_{Ic} para alguns materiais de engenharia à temperatura ambiente

Material	K_{Ic}, MPa$\sqrt{m}$	S_y, MPa
Alumínio		
2024	26	455
7075	24	495
7178	33	490
Titânio		
Ti-6AL-4V	115	910
Ti-6AL-4V	55	1035
Aço		
4340	99	860
4340	60	1515
52100	14	2070

EXEMPLO 6-7

Uma placa de aço do estrado de um navio tem 30 mm de espessura e 12 m de largura. Ela é carregada com uma tensão de tração uniaxial de 50 MPa e é operada abaixo de sua temperatura de transição dúctil a frágil com K_{Ic} igual a 28,3 MPa. Se uma trinca transversal central de 65 mm de comprimento estiver presente, estime a tensão de tração na qual uma falha catastrófica ocorrerá. Compare essa tensão com a resistência ao escoamento de 240 MPa para esse aço.

Solução

Pela Figura 6-35, com $d = b$, $2a = 65$ mm e $2b = 12$ m, assim que $d/b = 1$ e $a/d = 65/12(10^3) = 0{,}005$. Visto que a/d é bem pequeno, $\beta = 1$, tal que

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} = 50\sqrt{\pi(32{,}5 \times 10^{-3})} = 16{,}0 \text{ MPa } \sqrt{\text{m}}$$

Da Equação (6-52)

$$n = \frac{K_{Ic}}{K_I} = \frac{28{,}3}{16{,}0} = 1{,}77$$

A tensão na qual uma falha catastrófica ocorre é

Resposta

$$\sigma_c = \frac{K_{Ic}}{K_I}\sigma = \frac{28{,}3}{16{,}0}(50) = 88{,}4 \text{ MPa}$$

A resistência ao escoamento é de 240 MPa, e falha catastrófica ocorre a 88,4/240 = 0,37, ou a 37% do escoamento. O fator de segurança nessa circunstância é $K_{Ic}/K_I = 28{,}3/16 = 1{,}77$ e *não* 240/50 = 4,8.

EXEMPLO 6-8

Uma placa de 1,4 m de largura e comprimento de 2,8 m é necessária para agüentar uma força de tração na direção de 2,8 m de 4,0 MN. Procedimentos de inspeção detectarão somente trincas de borda, através da espessura, maiores que 2,7 mm. As duas ligas Ti-6AL-4V na Tabela 6-1 estão sendo consideradas para esta aplicação, para a qual o fator de segurança deve ser 1,3 e peso mínimo é importante. Que liga deve ser usada?

Solução

(*a*) Elegemos primeiro estimar a espessura necessária para resistir ao escoamento. Visto que $\sigma = P/wt$, temos $t = P/w\sigma$. Mas

$$\sigma_{\text{all}} = \frac{S_y}{n} = \frac{910}{1{,}3} = 700 \text{ MPa}$$

Assim

$$t = \frac{P}{w\sigma_{\text{all}}} = \frac{4{,}0(10)^3}{1{,}4(700)} = 4{,}08 \text{ mm ou maior}$$

em que temos $S_y = 910$ MPa para a liga mais fraca de titânio. Para a liga mais forte, temos, a partir da Tabela 6-1,

$$\sigma_{\text{all}} = \frac{1035}{1{,}3} = 796 \text{ MPa}$$

e, assim, a espessura é

Resposta

$$t = \frac{P}{w\sigma_{\text{all}}} = \frac{4{,}0(10)^3}{1{,}4(796)} = 3{,}59 \text{ mm ou maior}$$

(*b*) Agora vamos encontrar a espessura requerida para prevenir o crescimento de trinca. Usando a Figura 6-36, temos

$$\frac{h}{b} = \frac{2{,}8/2}{1{,}4} = 1 \qquad \frac{a}{b} = \frac{2{,}7}{1{,}4(10^3)} = 0{,}001\,93$$

Correspondendo a essas razões, encontramos, a partir da Figura 6-36, que $\beta \doteq 1{,}1$, e $K_I = 1.1\sigma\sqrt{\pi a}$. A partir da Tabela 6-1, $K_{Ic} = 115$ MPa $\sqrt{\text{m}}$ para a mais fraca das duas ligas:

$$n = \frac{K_{Ic}}{K_I} = \frac{115\sqrt{10^3}}{1{,}1\sigma\sqrt{\pi a}}, \qquad \sigma = \frac{K_{Ic}}{n1{,}1\sqrt{\pi a}}$$

Resolvendo para σ com $n = 1$, temos a tensão de fratura

$$\sigma = \frac{115}{1{,}1\sqrt{\pi(2{,}7 \times 10^{-3})}} = 1135 \text{ MPa}$$

que é maior que a resistência ao escoamento de 910 MPa, e assim a resistência ao escoamento é a base para a decisão geométrica. Para a liga mais forte $S_y = 1035$ MPa, com $n = 1$, a tensão de fratura é

$$\sigma = \frac{K_{Ic}}{nK_I} = \frac{55}{1(1{,}1)\sqrt{\pi(2{,}7 \times 10^{-3})}} = 542{,}9 \text{ MPa}$$

que é menos que a resistência de escoamento. A espessura é

$$t = \frac{P}{w\sigma_{\text{all}}} = \frac{4{,}0(10^3)}{1{,}4(542{,}9/1{,}3)} = 6{,}84 \text{ mm ou maior}$$

Este exemplo mostra que a tenacidade de fratura K_{Ic} limita a geometria quando a liga mais forte é usada, e assim uma espessura de 6,84 mm ou maior é requerida. Quando a liga mais fraca é usada, a geometria é limitada pela resistência ao escoamento, dando uma espessura de somente 4,08 mm ou mais. Assim, a liga mais fraca leva a uma escolha mais fina e mais leve de peso, visto que os modos de falha diferem.

6-14 Análise Estocástica

Confiabilidade representa a probabilidade de que sistemas de máquina e componentes irão desempenhar suas funções satisfatoriamente, sem falha. Até esse ponto, a discussão deste capítulo restringiu-se a relações determinísticas entre tensão estática, resistência e o fator de projeto. Tensão e resistência, todavia, são por natureza estatísticas e em grande medida atreladas à confiabilidade da componente sob tensão. Considere as funções de densidade de probabilidade para tensão e resistência, σ e $\mathbf{S}$, mostradas na Figura 6-41(a). Os valores médios de tensão e resistência são μ_σ e μ_S, respectivamente. Aqui, o fator de segurança "médio" é

$$\bar{n} = \frac{\mu_S}{\mu_\sigma} \qquad (a)$$

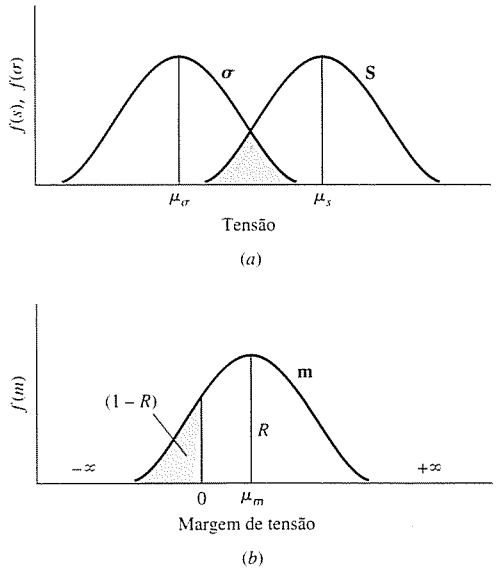


Figura 6-41 Traçado de funções de densidade mostrando como a interferência de $\boldsymbol{S}$ e $\boldsymbol{\sigma}$ é utilizada para a margem de tensão $\boldsymbol{m}$. (a) Distribuições de tensão e resistência. (b) Distribuição de interferência; a confiabilidade R é a área da função de densidade para $\boldsymbol{m}$ maior que zero; a interferência é a área $(1 - R)$.

A margem de segurança de qualquer valor de tensão σ e de resistência S é definida como

$$m = S - \sigma \tag{b}$$

A peça média terá uma margem de segurança $\bar{m} = \mu_S - \mu_\sigma$. Contudo, para a sobreposição das distribuições mostrada pela área sombreada da Figura 6-41(a), a tensão excede à resistência, a margem de segurança é negativa e espera-se que tais peças falhem. Essa área sombreada é denominada *interferência* de σ e S.

A Figura 6-41(b) exibe a distribuição de m, a qual obviamente depende das distribuições de tensão e resistência. A confiabilidade em que uma peça irá operar sem falha, R, é a área da distribuição de margem de segurança para $m > 0$. A interferência é a área $1 - R$, na qual se espera que as partes falhem. Consideraremos, a seguir, alguns casos típicos envolvendo interferência entre tensão e resistência.

Caso Normal-Normal

Considere as distribuições normais, $\mathbf{S} = \mathbf{N}(\mu_S, \hat{\sigma}_S)$ e $\sigma = \mathbf{N}(\mu_\sigma, \hat{\sigma}_\sigma)$. A margem de tensão é $\mathbf{m} = \mathbf{S} - \sigma$ e estará distribuída de maneira normal porque a adição e subtração de normais é normal. Assim, $\mathbf{m} = \mathbf{N}(\mu_m, \hat{\sigma}_m)$. A confiabilidade é a probabilidade p de que $m > 0$. Isto é,

$$R = p(S > \sigma) = p(S - \sigma > 0) = p(m > 0) \tag{6-53}$$

Para encontrar a chance de que $m > 0$, formamos a variável z de $\mathbf{m}$ e substituímos $m = 0$. Observando que $\mu_m = \mu_S - \mu_\sigma$ e que $\hat{\sigma}_m = (\hat{\sigma}_S^2 + \hat{\sigma}_\sigma^2)^{1/2}$, escrevemos

$$z = \frac{m - \mu_m}{\hat{\sigma}_m} = \frac{0 - \mu_m}{\hat{\sigma}_m} = -\frac{\mu_m}{\hat{\sigma}_m} = -\frac{\mu_S - \mu_\sigma}{\left(\hat{\sigma}_S^2 + \hat{\sigma}_\sigma^2\right)^{1/2}} \tag{6-54}$$

A Equação (6-54) é denominada *equação de acoplamento normal*. A confiabilidade associada a z é fornecida por

$$R = \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = 1 - F = 1 - \Phi(z) \tag{6-55}$$

O corpo da Tabela A-10 provê R quando $z > 0$ e $(1 - R = F)$ quando $z \le 0$. Observando que $\bar{n} = \mu_S/\mu_\sigma$, quadre ambos os lados da Equação (6-54), introduza C_S e C_σ e solucione a quadrática resultante em n, para obter

$$\bar{n} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \left(1 - z^2 C_S^2\right)\left(1 - z^2 C_\sigma^2\right)}}{1 - z^2 C_S^2} \tag{6-56}$$

O sinal de mais é associado a $R > 0{,}5$ e o de menos, a $R < 0{,}5$.

Caso Lognormal-Lognormal

Considere as distribuições *lognormais* $\mathbf{S} = \mathbf{LN}(\mu_S, \hat{\sigma}_S)$ e $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{LN}(\mu_\sigma, \hat{\sigma}_\sigma)$. Se interferirmos nas normais que lhes acompanham utilizando as Equações (2-18) e (2-19), obteremos

$$\mu_{\ln S} = \ln \mu_S - \ln \sqrt{1 + C_S^2}$$
$$\hat{\sigma}_{\ln S} = \sqrt{\ln\left(1 + C_S^2\right)} \qquad \textit{(resistência)}$$

e

$$\mu_{\ln \sigma} = \ln \mu_\sigma - \ln \sqrt{1 + C_\sigma^2}$$
$$\hat{\sigma}_{\ln \sigma} = \sqrt{\ln\left(1 + C_\sigma^2\right)} \qquad \textit{(tensão)}$$

Utilizando a Equação (6-54) para distribuições normais interferentes, obtemos

$$z = -\frac{\mu_{\ln S} - \mu_{\ln \sigma}}{\left(\hat{\sigma}_{\ln S}^2 + \hat{\sigma}_{\ln \sigma}^2\right)^{1/2}} = -\frac{\ln\left(\dfrac{\mu_S}{\mu_\sigma}\sqrt{\dfrac{1 + C_\sigma^2}{1 + C_S^2}}\right)}{\sqrt{\ln\left[\left(1 + C_S^2\right)\left(1 + C_\sigma^2\right)\right]}} \tag{6-57}$$

A confiabilidade R é expressa pela Equação (6-55). O fator de projeto **n** é a variável aleatória que representa o quociente S/σ. O quociente de *lognormais* é *lognormal*; portanto, utilizando a variável z da *lognormal* **n**, observamos

$$\mu_n = \frac{\mu_S}{\mu_\sigma} \qquad C_n = \sqrt{\frac{C_S^2 + C_\sigma^2}{1 + C_\sigma^2}} \qquad \hat{\sigma}_n = C_n \mu_n$$

A normal que acompanha $\mathbf{n} = \mathbf{LN}(\mu_n, \hat{\sigma}_n)$, a partir das Equações (2-18) e (2-19), tem média e desvio-padrão de

$$\mu_y = \ln \mu_n - \ln \sqrt{1 + C_n^2} \qquad \hat{\sigma}_y = \sqrt{\ln\left(1 + C_n^2\right)}$$

A variável z da distribuição normal y que a acompanha é

$$z = \frac{y - \mu_y}{\hat{\sigma}_y}$$

Ocorrerá falha quando a tensão for maior que a resistência, quando $n < 1$, ou quando $y < 0$.

$$z = \frac{0 - \mu_y}{\hat{\sigma}_y} = -\frac{\mu_y}{\sigma_y} = -\frac{\ln \mu_n - \ln \sqrt{1 + C_n^2}}{\sqrt{\ln\left(1 + C_n^2\right)}} \doteq -\frac{\ln\left(\mu_n / \sqrt{1 + C_n^2}\right)}{\sqrt{\ln\left(1 + C_n^2\right)}} \tag{6-58}$$

Solucionando para μ_n, obtemos

$$\mu_n = \bar{n} = \exp\left[-z\sqrt{\ln\left(1 + C_n^2\right)} + \ln \sqrt{1 + C_n^2}\right] \doteq \exp\left[C_n\left(-z + \frac{C_n}{2}\right)\right] \tag{6-59}$$

As Equações (6-56) e (6-59) são marcantes por diversas razões:

- Relacionam o fator de projeto $\bar{n}$ à confiabilidade pretendida (por meio de z) e aos coeficientes de variação de resistência e tensão.
- Não *são* funções das médias de tensão e resistência.
- Estimam o fator de projeto necessário para alcançar a confiabilidade pretendida, antes que decisões concernentes às médias sejam tomadas. C_S depende ligeiramente do material escolhido. Já C_σ tem o coeficiente de variação (COV) da carga, sendo geralmente fornecido.

EXEMPLO 6-9

Uma barra redonda de aço 1018 repuxado a frio tem uma resistência ao escoamento de 0,2% $\mathbf{S}_y = \mathbf{N}(78{,}4, 5{,}90)$ kpsi e deve ser submetida a uma carga estática $\mathbf{P} = \mathbf{N}(50, 4{,}1)$. Que valor do fator de projeto $\bar{n}$ corresponde à confiabilidade de 0,999 contra escoamento ($z = -3{,}09$)? Determine o correspondente diâmetro da barra.

Solução

$C_S = 5{,}90/78{,}4 = 0{,}0753$, e

$$\sigma = \frac{\mathbf{P}}{A} = \frac{4\mathbf{P}}{\pi d^2}$$

Uma vez que o COV do diâmetro é uma ordem de magnitude menor que o COV da carga ou resistência, o diâmetro é tratado deterministicamente:

$$C_\sigma = C_P = \frac{4{,}1}{50} = 0{,}082$$

A partir da Equação (6-56),

$$\bar{n} = \frac{1 + \sqrt{1 - (1 - 3{,}09^2 0{,}0753^2)(1 - 3{,}09^2 0{,}082^2)}}{1 - 3{,}09^2 0{,}0753^2} = 1{,}4156$$

O diâmetro é encontrado deterministicamente,

Resposta
$$d = \sqrt{\frac{4\bar{P}}{\pi \bar{S}_y/\bar{n}}} = \sqrt{\frac{4(50\,000)}{\pi(78\,400)/1{,}42}} = 1{,}074 \text{ in}$$

Verificação $\mathbf{S}_y = \mathbf{N}(78{,}4,\ 5{,}90)$ kpsi, $\mathbf{P} = \mathbf{N}(50,\ 4{,}1)$ kip e $d = 1{,}074$ in. Logo,

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi(1{,}074^2)}{4} = 0{,}9059 \text{ in}^2$$

$$\bar{\sigma} = \frac{\bar{P}}{A} = \frac{(50\,000)}{0{,}9059} = 55\,191 \text{ psi}$$

$$C_P = C_\sigma = \frac{4{,}1}{50} = 0{,}082$$

$$\hat{\sigma}_\sigma = C_\sigma \bar{\sigma} = 0{,}082(55\,191) = 4526 \text{ psi}$$

$$\hat{\sigma}_S = 5{,}90 \text{ kpsi}$$

A partir da Equação (6-54),

$$z = -\frac{78{,}4 - 55{,}191}{(5{,}90^2 + 4{,}526^2)^{1/2}} = -3{,}12$$

A partir da Tabela A-10 do Apêndice, $R = \Phi(-3{,}12) = 0{,}9991$.

EXEMPLO 6-10

Refaça o Exemplo 6-9 com a tensão e a resistência distribuídas de forma *lognormal*.

Solução $C_S = 5{,}90/78{,}4 = 0{,}0753$ e $C_\sigma = C_P = 4{,}1/50 = 0{,}082$. Logo,

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\mathbf{P}}{A} = \frac{4\mathbf{P}}{\pi d^2}$$

$$C_n = \sqrt{\frac{C_S^2 + C_\sigma^2}{1 + C_\sigma^2}} = \sqrt{\frac{0{,}0753^2 + 0{,}082^2}{1 + 0{,}082^2}} = 0{,}1110$$

A partir da Tabela A-10, $z = -3{,}09$. A partir da Equação (6-59),

$$\bar{n}_d = \exp\left[-(-3{,}09)\sqrt{\ln(1 + 0{,}111^2)} + \ln\sqrt{1 + 0{,}111^2}\right] = 1{,}416$$

$$d = \sqrt{\frac{4\bar{P}}{\pi \bar{S}_y/\bar{n}}} = \sqrt{\frac{4(50\,000)}{\pi(78\,400)/1{,}416}} = 1{,}0723 \text{ in}$$

Verificação $\mathbf{S}_y = \mathbf{LN}(78{,}4,\ 5{,}90)$, $\mathbf{P} = \mathbf{LN}(50,\ 4{,}1)$ kip. Logo,

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi(1{,}0723^2)}{4} = 0{,}9031$$

$$\bar{\sigma} = \frac{\bar{P}}{A} = \frac{50\,000}{0{,}9031} = 55\,367 \text{ psi}$$

$$C_\sigma = C_P = \frac{4{,}1}{50} = 0{,}082$$

$$\hat{\sigma}_\sigma = C_\sigma \mu_\sigma = 0{,}082(55\ 367) = 4540 \text{ psi}$$

A partir da Equação (6-57),

$$z = -\frac{\ln\left(\dfrac{78{,}4}{55{,}367}\sqrt{\dfrac{1+0{,}082^2}{1+0{,}0753^2}}\right)}{\sqrt{\ln[(1+0{,}0753^2)(1+0{,}082^2)]}} = -3{,}1399$$

A Tabela A-10 do Apêndice provê $R = 0{,}99914$.

EXEMPLO 6-11

Retorne ao eixo do Exemplo 6-6 e considere que o material tem uma resistência ao escoamento $\mathbf{S}_y$ = **LN**(66,0, 5,3) kpsi e um momento aplicado **M** = **LN**(1925, 96) lbf · in, ao passo que o torque correlacionado é **T** = **LN**(3300, 765) lbf · in. Se a confiabilidade contra o escoamento no mancal de deslizamento direito deve ser de 0,999 995, qual o menor diâmetro de mancal de deslizamento estimado com base na energia de distorção? E com base na tensão máxima de cisalhamento?

Solução

A Equação (6-41) pode ser expressa estocasticamente como

$$\boldsymbol{\sigma}' = \frac{16}{\pi d^3}(4\mathbf{M}^2 + 3\mathbf{T}^2)^{1/2} = \frac{16\mathbf{M}}{\pi d^3}\left[4 + 3\left(\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{M}}\right)^2\right]^{1/2} \tag{1}$$

uma vez que não existe fator de concentração de tensão para carregamento estático. Já que **T** e **M** estão correlacionados, o quociente **T**/**M** é uma constante determinística, $\bar{T}/\bar{M} = \mu_T/\mu_M$. Assim, a partir da Equação (1), a variância da tensão $\boldsymbol{\sigma}'$ é a mesma que em **M**. Isso resulta em

$$C_n \doteq \sqrt{C_S^2 + C_\sigma^2} = \left[\left(\frac{5{,}3}{66}\right)^2 + \left(\frac{96}{1925}\right)^2\right]^{1/2} = 0{,}0945$$

Para a confiabilidade objetivada no problema, a Tabela A-10 fornece $z = -4{,}417$. Assim, a partir da Equação (6-59),

$$\bar{n} \doteq \exp[C_n(-z + C_n/2)] = \exp[0{,}0945(4{,}417 + 0{,}0945/2)] = 1{,}52$$

A partir da Equação (6-43), para DE,

$$d = \left\{\frac{16(1{,}52)}{\pi 66\,000}[4(-1925)^2 + 3(3300)^2]^{1/2}\right\}^{1/3} = 0{,}932 \text{ in}$$

e da Equação (6-45), para MSS,

$$d = \left\{\frac{32(1{,}52)}{\pi 66\,000}[(-1925)^2 + 3300^2]^{1/2}\right\}^{1/3} = 0{,}964 \text{ in}$$

A resposta utiliza conhecimentos estocásticos do carregamento (**M** e **T**) e da resistência ($\mathbf{S}_y$), bem como responde a uma confiabilidade objetivada estabelecida.

Interferência – Geral

Nos segmentos anteriores, empregamos a teoria de interferência para estimar a confiabilidade quando ambas as distribuições são normais e quando ambas são *lognormais*. Às vezes, entretanto, ocorre que a resistência apresenta, digamos, uma distribuição de Weibull, ao passo que a tensão é distribuída de modo *lognormal*. De fato, é muito provável que as tensões tenham uma distribuição *lognormal*, uma vez que a multiplicação de variantes que são normalmente distribuídas produz um resultado que se aproxima de *lognormal*. O

que isso tudo significa é que devemos esperar encontrar problemas de interferência envolvendo distribuições misturadas e que necessitamos de um método geral para lidar com o problema.

É bem provável que venhamos a utilizar a teoria de interferência para problemas envolvendo distribuições outras que não resistência e tensão. Por essa razão, empregamos o subscrito 1 para designar a distribuição de resistência e o subscrito 2 para designar a distribuição de tensão. A Figura 6-42 mostra essas duas distribuições alinhadas de tal forma que um único cursor x pode ser usado para identificar pontos em ambas. Podemos agora escrever

$$\begin{pmatrix}\text{Probabilidade de que}\\ \text{a tensão seja menor}\\ \text{que a resistência}\end{pmatrix} = dp(\sigma < x) = dR = F_2(x)\,dF_1(x)$$

Substituindo-se $1 - R_2$ por F_2 e $-dR_1$ por dF_1, obtemos

$$dR = -[1 - R_2(x)]\,dR_1(x)$$

A confiabilidade para todas as posições possíveis do cursor é obtida integrando-se x a partir de $-\infty$ a ∞; no entanto, isso corresponde a uma integração de 1 a 0 na confiabilidade R_1. Logo,

$$R = -\int_1^0 [1 - R_2(x)]\,dR_1(x)$$

que pode ser escrito como

$$R = 1 - \int_0^1 R_2\,dR_1 \tag{6-60}$$

em que

$$R_1(x) = \int_x^\infty f_1(S)\,dS \tag{6-61}$$

$$R_2(x) = \int_x^\infty f_2(\sigma)\,d\sigma \tag{6-62}$$

Para as distribuições usuais encontradas, os gráficos de R_1 *versus* R_2 aparecem como apresentado na Figura 6-43. Ambos os casos mostrados são tratáveis por integração numérica e solução computacional. Quando a confiabilidade é alta, o grosso da área de integração está sob o espigão direito da Figura 6-43(*a*).

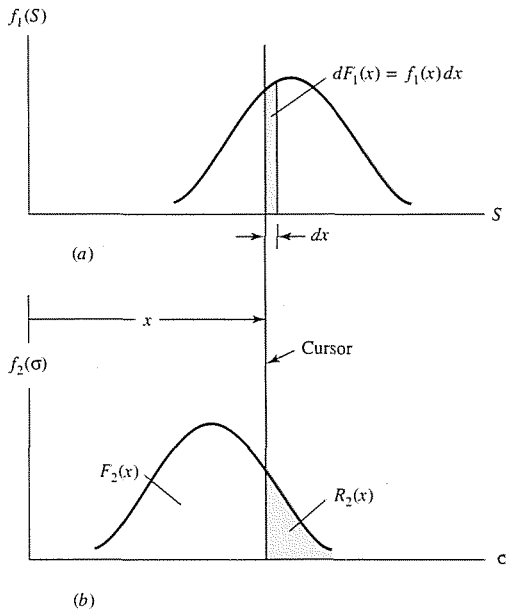


Figura 6-42 (*a*) PDF da distribuição de resistência; (*b*) PDF da distribuição de tensão induzida pela carga.

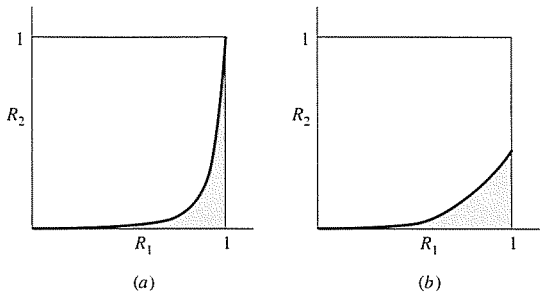


Figura 6-43 Formas de curvas do gráfico $R_1 R_2$. Em cada caso, a área sombreada é igual a $1 - R$ e obtida por integração numérica. (*a*) Curva típica para distribuições assintóticas; (*b*) forma de curva obtida de distribuições truncadas embaixo, tais como a Weibull.

PROBLEMAS

ANÁLISE **6-1** Uma barra de aço dúctil, laminado a quente, tem uma resistência ao escoamento mínima sob tração e compressão igual a 50 kpsi. Utilizando as teorias da energia de distorção e da tensão máxima de cisalhamento, determine os fatores de segurança para

(*a*) $\sigma_x = 12$ kpsi, $\sigma_y = 6$ kpsi.
(*b*) $\sigma_x = 12$ kpsi, $\tau_{xy} = -8$ kpsi.
(*c*) $\sigma_x = -6$ kpsi, $\sigma_y = -10$ kpsi, $\tau_{xy} = -5$ kpsi.
(*d*) $\sigma_x = 12$ kpsi, $\sigma_y = 4$ kpsi, $\tau_{xy} = 1$ kpsi.

ANÁLISE **6-2** Repita o Problema 6-1 para

(*a*) $\sigma_A = 12$ kpsi, $\sigma_B = 12$ kpsi.
(*b*) $\sigma_A = 12$ kpsi, $\sigma_B = 6$ kpsi.
(*c*) $\sigma_A = 12$ kpsi, $\sigma_B = -12$ kpsi.
(*d*) $\sigma_A = -6$ kpsi, $\sigma_B = -12$ kpsi.

ANÁLISE **6-3** Repita o Problema 6-1 para uma barra de aço AISI 1020 estirado a frio e:

(*a*) $\sigma_x = 180$ MPa, $\sigma_x = 100$ MPa.
(*b*) $\sigma_x = 180$ MPa, $\tau_{xy} = 100$ MPa.
(*c*) $\sigma_x = -160$ MPa, $\tau_{xy} = 100$ MPa.
(*d*) $\tau_{xy} = 150$ MPa.

ANÁLISE **6-4** Repita o Problema 6-1 para uma barra de aço AISI 1018 laminado a quente e:

(*a*) $\sigma_A = 100$ MPa, $\sigma_B = 80$ MPa.
(*b*) $\sigma_A = 100$ MPa, $\sigma_B = 10$ MPa.
(*c*) $\sigma_A = 100$ MPa, $\sigma_B = -80$ MPa.
(*d*) $\sigma_A = -80$ MPa, $\sigma_B = -100$ MPa.

ANÁLISE **6-5** Repita o Problema 6-3, primeiramente traçando os locais de falha no plano σ_A, σ_B em escala; então, para cada estado de tensão, trace a linha de carga e, por medição gráfica, estime os fatores de segurança.

ANÁLISE **6-6** Repita o Problema 6-4, primeiramente traçando os locais de falha no plano σ_A, σ_B em escala; então, para cada estado de tensão, trace a linha de carga e, por medição gráfica, estime os fatores de segurança.

ANÁLISE **6-7** Um ferro fundido ASTM tem resistências mínimas ao escoamento de 30 kpsi sob tração e de 100 kpsi sob compressão. Encontre os fatores de segurança utilizando as teorias MNS, BCM, M1M e M2M para cada um dos seguintes estados de tensão. Trace os diagramas de falha no plano σ_A, σ_B em escala e localize as coordenadas de cada estado de tensão.

(*a*) $\sigma_x = 20$ kpsi, $\sigma_y = 6$ kpsi.
(*b*) $\sigma_x = 12$ kpsi, $\tau_{xy} = -8$ kpsi.
(*c*) $\sigma_x = -6$ kpsi, $\sigma_y = -10$ kpsi, $\tau_{xy} = -5$ kpsi.
(*d*) $\sigma_x = -12$ kpsi, $\tau_{xy} = 8$ kpsi.

ANÁLISE **6-8** Para o Problema 6-7, caso (*d*), estime os fatores de segurança das quatro teorias a partir de medidas gráficas da linha de carga.

DECISÕES DE PROJETO **6-9** Entre as decisões que um projetista deve tomar, existe aquela relativa ao local de falha que se aplica ao material e seu carregamento estático. Um aço 1020 laminado a quente tem as seguintes propriedades: $S_y = 42$ kpsi, $S_{ut} = 66{,}2$ kpsi e deformação verdadeira na fratura $\varepsilon_f = 0{,}90$. Trace o local de falha e, para os estados de tensão estáticos nos locais decisivos listados a seguir, desenhe a linha de carga, bem como estime o fator de segurança analítica e graficamente.

ANÁLISE

(*a*) $\sigma_x = 9$ kpsi, $\sigma_y = -5$ kpsi.

(*b*) $\sigma_x = 12$ kpsi, $\tau_{xy} = 3$ kpsi, anti-horário.

(*c*) $\sigma_x = -4$ kpsi, $\sigma_y = -9$ kpsi, $\tau_{xy} = 5$ kpsi, horário.

(*d*) $\sigma_x = 11$ kpsi, $\sigma_y = 4$ kpsi, $\tau_{xy} = 1$ kpsi, horário.

DECISÕES DE PROJETO **6-10** Um aço 4142 temperado e revenido a 80°F exibe $S_{yt} = 235$ kpsi, $S_{yc} = 275$ kpsi e $\varepsilon_f = 0{,}06$. Escolha e trace o local geométrico de falha e, para tensões estáticas em locais decisivos que forem 10 vezes aquelas do Problema 6-9, trace as linhas de carga, bem como estime os fatores de segurança analítica e graficamente.

ANÁLISE **6-11** Para ferro fundido grau 20, a Tabela A-24 apresenta $S_{ut} = 22$ kpsi e $S_{uc} = 83$ kpsi. Escolha e trace o local geométrico de falha e, para carregamentos estáticos induzindo as tensões nos locais críticos do Problema 6-9, trace as linhas de carga, bem como estime os fatores de segurança analítica e graficamente.

DECISÕES DE PROJETO **6-12** Um alumínio fundido 195-T6 tem uma resistência última à tração de $S_{ut} = 36$ kpsi e uma resistência última à compressão de $S_{uc} = 35$ kpsi, além de exibir uma deformação verdadeira em fratura $\varepsilon_f = 0{,}045$. Escolha e trace o local geométrico de falha e, para carregamento estático induzindo as tensões nos locais decisivos do Problema 6-9, trace as linhas de carga, bem como estime os fatores de segurança analítica e graficamente.

ANÁLISE **6-13** Um ferro fundido ASTM, grau 30 (ver Tabela A-24), traz um carregamento estático, resultando em um estado de tensão, listado adiante, nos locais críticos. Escolha o local geométrico apropriado, trace-o, bem como as linhas de carga, e estime os fatores de segurança analítica e graficamente.

(*a*) $\sigma_A = 20$ kpsi, $\sigma_B = 20$ kpsi.

(*b*) $\tau_{xy} = 15$ kpsi.

(*c*) $\sigma_A = \sigma_B = -80$ kpsi.

(*d*) $\sigma_A = 15$ *kpsi*, $\sigma_B = -25$ kpsi.

ANÁLISE **6-14** Este problema ilustra que o fator de segurança para um elemento de máquina depende do ponto particular escolhido para análise. Aqui, você deve computar fatores de segurança, com base na teoria de energia de distorção, para elementos de tensão em *A* e *B* do membro mostrado na figura. Essa barra é feita de aço AISI 1006 repuxado a frio e carregada pelas forças $F = 0{,}55$ kN, $P = 8{,}0$ kN e $T = 30$ N · m.

PROJETO **6-15*** Projete o braço de alavanca *CD*, na Figura 6-24, especificando um tamanho conveniente e o material.

ANÁLISE **6-16** Um vaso de pressão esférico é feito de uma chapa de aço AISI 1018, bitola 18 (0,05 in), laminada a frio. Se esse vaso tem um diâmetro de 8 in, estime a pressão necessária para iniciar o escoamento. Qual é a pressão estimada de rompimento?

ANÁLISE **6-17** Este problema ilustra que a resistência de uma peça de máquina pode às vezes ser medida em unidades outras que não aquelas de força ou momento. Por exemplo, a velocidade máxima que um volante pode alcançar sem escoamento ou fratura é uma medida de sua resistência. Neste problema, você tem um anel rotativo feito de aço AISI 1020 forjado a quente; esse anel apresenta um diâmetro interno de 6 in e um diâmetro externo de 10 in, bem como 1,5 in de espessura. Que velocidade, em rpm, o faria escoar? Em qual raio iniciaria o escoamento? [*Nota:* A tensão radial máxima ocorre em $r = (r_o r_i)^{1/2}$; ver a Equação (4-56).]

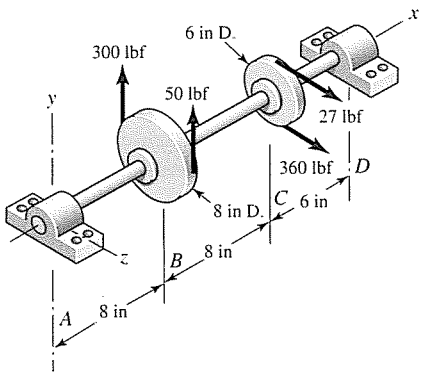
ANÁLISE **6-18** Um vaso de pressão leve é feito de tubo de liga de alumínio 2024-T3, com fechamento apropriado das extremidades. Esse cilindro tem $3\frac{1}{2}$ in de diâmetro externo, uma espessura de parede de 0,065 in e $\nu = 0{,}334$. A ordem de compra especifica uma resistência ao escoamento mínima de 46 kpsi. Qual será o fator de segurança se a válvula de alívio de pressão estiver regulada para 500 psi?

ANÁLISE **6-19** Um tubo de aço AISI 1015 repuxado a frio tem 300 mm de diâmetro externo por 200 mm de diâmetro interno e deve ser submetido a uma pressão externa causada por um ajuste de contração. Que pressão máxima faria o material do tubo escoar?

6-20 Que velocidade causaria a fratura do anel do Problema 6-17, caso ele fosse feito de um ferro fundido grau 30?

* O asterisco indica um problema particularmente desafiante ou que pode não ter um resultado único.

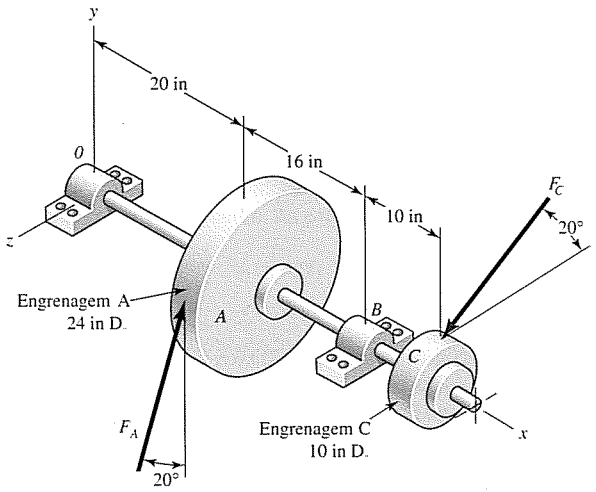
PROJETO **6-21** A figura apresenta um eixo montado em mancais em A e D e com polias em B e C. As forças mostradas atuando nas superfícies da polia representam as trações de correia. O eixo deve ser feito de ferro fundido ASTM grau 25 usando um fator de projeto $n_d = 2{,}8$. Que diâmetro deve ser utilizado para esse eixo?



Problema 6-21

PROJETO **6-22** Pelos padrões modernos, o projeto do eixo do Problema 6-21 é pobre por ser muito longo. Suponha que ele seja reprojetado à metade das dimensões de comprimento. Utilizando os mesmos material e fator de projeto do Problema 6-21, encontre o novo diâmetro do eixo.

PROJETO **6-23** As forças de engranzamento mostradas atuam em planos paralelos ao plano yz. A força na engrenagem A é de 300 lbf. Considere os mancais em O e B apoios simples. Para análise estática e fator de segurança de 3,5, utilize a energia de distorção para determinar o diâmetro mínimo seguro para o eixo. Considere que o material tem uma resistência ao escoamento de 60 kpsi.



Problema 6-23

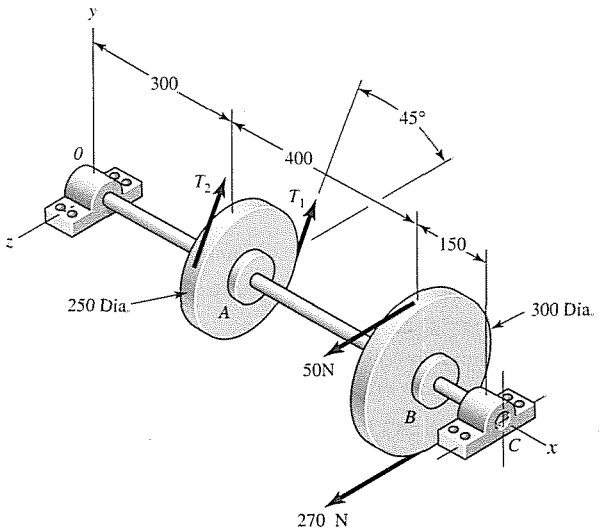
PROJETO **6-24** Repita o Problema 6-23 utilizando a tensão máxima de cisalhamento.

PROJETO **6-25** A figura é um desenho esquemático de um contra-eixo que suporta duas polias em V. Para cada polia, as trações de correia são paralelas. Para a polia A, considere que a tração do tramo frouxo seja 15% da tração no tramo tenso. Um eixo de aço UNS G10180 repuxado a frio, com diâmetro uniforme, deve ser selecionado para essa aplicação. Para uma análise estática com um fator de segurança de 3,0, determine o menor tamanho de diâmetro preferencial. Utilize a teoria da energia de distorção.

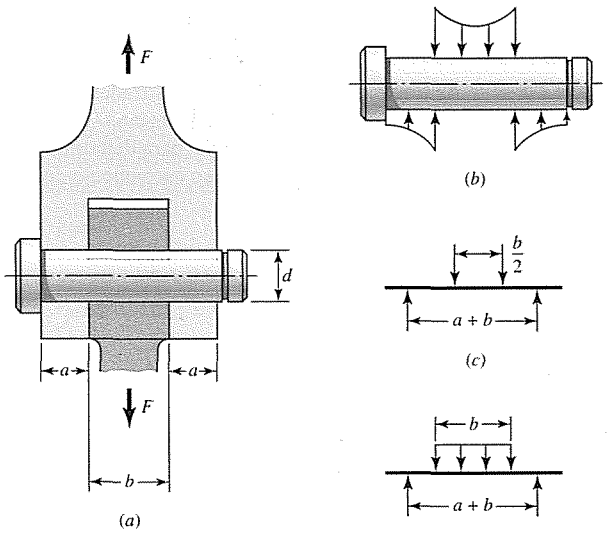
PROJETO **6-26** Repita o Problema 6-25 utilizando a tensão máxima de cisalhamento.

ANÁLISE **6-27** O pino de U mostrado na figura tem 12 mm de diâmetro e as dimensões $a = 12$ mm e $b = 18$ mm. Esse pino é usinado a partir de aço AISI 1018 laminado a quente (Tabela A-20) e deve ser carregado a não mais que 4,4 kN. Determine se o carregamento suposto na figura c causa ou não um fator de segurança diferente daquele da figura d. Utilize a teoria da tensão máxima de cisalhamento.

6-28 Repita o Problema 6-27, mas desta vez utilize a teoria da energia de distorção.

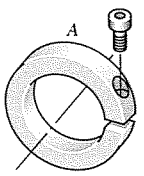


Problema 6-25
Dimensões em milímetros



Problema 6-27

ANÁLISE **6-29** Um colar de eixo de anel partido, do tipo aperto, é mostrado na figura. Esse colar apresenta diâmetro externo de 2 in por 1 in de diâmetro interno por $\frac{1}{2}$ in de largura. O parafuso é designado como $\frac{1}{4}$-28 UNF. A relação entre o torque de aperto do parafuso T, o diâmetro nominal do parafuso d e a tração no parafuso F_i é aproximadamente $T = 0{,}2\ F_i\ d$. O eixo é dimensionado para obter um ajuste de deslizamento fechado. Encontre a força axial de agarre F_x do colar como uma função do coeficiente de atrito e do torque do parafuso.



Problema 6-29

ANÁLISE **6-30** Suponha que o colar do Problema 6-29 seja apertado utilizando-se um parafuso de torque de 190 lbf · in. O material desse colar é feito de aço AISI 1040 tratado termicamente a uma resistência ao escoamento mínima de 63 kpsi.

(*a*) Estime a tração no parafuso.

(*b*) Relacionando a tensão tangencial à tensão circunferente, encontre a pressão interna do eixo no anel.

(*c*) Encontre as tensões tangencial e radial na superfície interna do anel.

(*d*) Determine a tensão máxima de cisalhamento e a tensão de von Mises.

(*e*) Quais são os fatores de segurança baseados na hipótese da tensão máxima de cisalhamento e na teoria de energia de distorção?

PROJETO **6-31** No Problema 6-29, o papel do parafuso era induzir a tração circunferente que produz o aperto. Tal parafuso deve ser disposto de modo que momento algum seja induzido no anel. Onde exatamente ele deve então ser colocado?

ANÁLISE **6-32** Um tubo tem um outro tubo encolhido sobre ele. As especificações são as seguintes:

	Membro interno	Membro externo
ID	1,000 ± 0,002 in	1,999 ± 0,0004 in
OD	2,000 ± 0,0004 in	3,000 ± 0,004 in

ID, diâmetro interno; OD, diâmetro externo.

Ambos os tubos são feitos de aço carbono comum.

(*a*) Encontre a pressão de ajuste de contração nominal e as tensões de von Mises na superfície de ajuste.

(*b*) Se o tubo interno for trocado por um eixo sólido com as mesmas dimensões externas, encontre a pressão nominal de ajuste de contração e as tensões de von Mises na superfície de ajuste.

ANÁLISE **6-33** Tubos de aço com módulo de Young de 207 GPa apresentam as seguintes especificações:

	Membro interno	Membro externo
ID	25 ± 0,050 mm	49,98 ± 0,010 mm
OD	50 ± 0,010 mm	75 ± 0,10 mm

ID, diâmetro interno; OD, diâmetro externo.

Estes são ajustados um ao outro por encolhimento. Encontre a pressão nominal de ajuste por encolhimento e a tensão de von Mises em cada corpo na superfície de ajuste.

DECISÕES DE PROJETO **6-34** Um eixo sólido de aço de 2 in de diâmetro tem uma engrenagem com cubo de ferro fundido ASTM grau 20 (E = 14,5 Mpsi) ajustada a ele por encolhimento. As especificações para esse eixo são

$$2{,}000\ ^{+\,0{,}0000}_{-\,0{,}0004}\ \text{in}$$

ANÁLISE O orifício no cubo é dimensionado a 1,999 ± 0,0004 in, com um diâmetro externo de 4,00 $\pm \frac{1}{32}$ in. Utilize valores de meio de intervalo, a teoria de Mohr modificada II e estime o fator de segurança precavendo-se contra fraturas no cubo da engrenagem decorrentes do ajuste de contração.

ANÁLISE **6-35** Dois tubos de aço são ajustados entre si por encolhimento, sendo os diâmetros nominais 1,50, 1,75 e 2,00 in. Medidas cuidadosas antes do ajuste revelam que a interferência diametral entre os tubos é de 0,00246 in. Depois do ajuste, o conjunto é submetido a um torque de 8000 lbf · in e a um momento flexor de 6000 lbf · in. Assumindo que não ocorra deslizamento entre os cilindros, analise o cilindro externo nos seus raios interno e externo. Determine o fator de projeto utilizando a energia de distorção com S_y = 60 kpsi.

ANÁLISE **6-36** Repita o Problema 6-35 para o tubo interno.

6-37 Para as Equações (6-50), mostre que as tensões principais são fornecidas por

$$\sigma_1 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2}\left(1 + \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\sigma_2 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2}\left(1 - \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\sigma_3 = \begin{cases} 0 & \text{(tensão plana)} \\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi r}}\, \nu K_I \cos\dfrac{\theta}{2} & \text{(deformação plana)} \end{cases}$$

ANÁLISE **6-38** Utilize os resultados do Problema 6-37 para deformação plana próxima à raiz, com $\theta = 0$ e $\nu = \frac{1}{3}$. Se a resistência ao escoamento da placa é S_y, qual o valor de σ_1 quando isso ocorre?

(*a*) Utilize a teoria da energia de distorção.

(*b*) Utilize a teoria da tensão máxima de cisalhamento. Fazendo uso dos círculos de Mohr, explique sua resposta.

ANÁLISE **6-39** Uma placa com largura de 4 in, comprimento de 8 in e 0,5 de espessura é carregada, sob tração, na direção do comprimento. Essa placa contém uma fissura, como aquela mostrada na Figura 6-36, com comprimento de 0,0625 in. O material é aço com $K_{Ic} = 70$ kpsi $\cdot \sqrt{\text{in}}$ e $S_y = 160$ kpsi. Determine a máxima carga possível de aplicar antes que a placa (*a*) escoe e (*b*) apresente um aumento incontrolável da fissura.

ANÁLISE **6-40** Um cilindro submetido à pressão interna p_i tem um diâmetro externo de 350 mm e uma espessura de parede de 25 mm. Para o material de que é feito, $K_{Ic} = 80$ MPa $\cdot \sqrt{\text{m}}$, $S_y = 1200$ MPa e $S_{ut} = 1350$ MPa. Se esse cilindro contiver uma fissura radial na direção longitudinal, com profundidade de 12,5 mm, determine a pressão que irá causar o crescimento incontrolável desta.

ANÁLISE **6-41** Um colar de aço carbono com comprimento de 1 in deve ser usinado aos respectivos diâmetros interno e externo de

$$D_i = 0{,}750 \pm 0{,}0004\,\text{in} \qquad D_o = 1{,}125 \pm 0{,}002\,\text{in}$$

Esse colar deve ser ajustado, por redução, a um eixo de aço vazado com respectivos diâmetros interno e externo de

$$d_i = 0{,}375 \pm 0{,}002\,\text{in} \qquad d_o = 0{,}752 \pm 0{,}0004\,\text{in}$$

Supõe-se que tais tolerâncias apresentem uma distribuição normal, estejam centradas no intervalo de dispersão e tenham um espalhamento total de ±4 desvios-padrão. Determine as médias e os desvios-padrão das componentes de tensão tangencial para ambos os cilindros na interface.

6-42 Suponha que o colar do Problema 6-41 tenha uma resistência ao escoamento de $\mathbf{S}_y = \mathbf{N}(95{,}5,\ 6{,}59)$ kpsi. Qual é a probabilidade de que o material não escoe?

ANÁLISE **6-43** Um tubo de aço carbono tem um diâmetro externo de 1 in e uma espessura de parede de $\frac{1}{8}$ in. Ele deve suportar uma pressão hidráulica interna fornecida por $\mathbf{p} = \mathbf{N}(6000,\ 500)$ psi. O material desse tubo tem uma resistência ao escoamento de $\mathbf{S}_y = \mathbf{N}(50,\ 4{,}1)$ kpsi. Encontre a confiabilidade utilizando a teoria de parede fina.

CAPÍTULO 7

Falha por Fadiga Resultante de Carregamento Variável

7-1 Introdução à Fadiga em Metais 302
7-2 Abordagem da Falha por Fadiga em Análise e Projeto 303
7-3 Métodos da Vida sob Fadiga 309
7-4 Método da Vida sob Tensão 309
7-5 Método da Vida sob Deformação 311
7-6 Método da Mecânica de Fraturas Linear Elástica 314
7-7 Limite de Resistência 317
7-8 Resistência à Fadiga 319
7-9 Fatores Modificadores do Limite de Resistência 321
7-10 Concentração de Tensão e Sensibilidade a Entalhe 328
7-11 Caracterização de Tensões Flutuantes 336
7-12 Critérios de Falha por Fadiga sob Tensões Flutuantes 338
7-13 Resistência à Fadiga Torcional sob Tensões Flutuantes 352
7-14 Combinações de Modos de Carregamento 352
7-15 Tensões Flutuantes e Variáveis; Dano Cumulativo de Fadiga 355
7-16 Resistência à Fadiga de Superfície 360
7-17 Análise Estocástica 363

No Capítulo 6, consideramos a análise e o projeto de peças sujeitas a carregamento estático. O comportamento das peças de máquina é inteiramente diferente quando estão sujeitas a carregamento que varia com o tempo. Neste capítulo, examinaremos como peças falham sob carregamento variável e como dimensioná-las para resistirem com êxito a tais condições.

7-1 Introdução à Fadiga em Metais

Na maioria dos ensaios daquelas propriedades dos materiais que se relacionam com o diagrama de tensão-deformação, a carga é aplicada gradualmente, a fim de que haja tempo para que a deformação se desenvolva de forma plena. Além disso, o espécime é ensaiado até a sua destruição, de modo que as tensões são aplicadas somente uma vez. Ensaios desse gênero são aplicáveis, então, ao que conhecemos como *condições estáticas*; tais condições aproximam-se muito das condições reais às quais muitos membros estruturais e de máquina estão sujeitos.

Freqüentemente surge, contudo, a condição na qual as tensões variam ou flutuam entre níveis. Por exemplo, uma determinada fibra na superfície de um eixo rotante, sujeita à ação de cargas de flexão, passa por tração e compressão para cada revolução do eixo. Se esse eixo é parte de um motor elétrico que roda a 1725 rpm, a fibra é tensionada em tração e compressão 1725 vezes a cada minuto. Se, além disso, o eixo é também carregado axialmente (como seria, por exemplo, por uma engrenagem helicoidal ou sem-fim), uma componente axial da tensão é sobreposta à componente de flexão. Nesse caso, sempre haverá alguma tensão em qualquer fibra, mas agora o *nível* de tensão é flutuante. Esses e outros gêneros de carregamento em membros de máquina produzem tensões que são chamadas *variáveis*, *repetidas*, *alternantes* ou *flutuantes*.

Com freqüência se descobre que membros de máquina falharam sob a ação de tensões repetidas ou flutuantes; todavia, uma análise mais cuidadosa revela que as tensões reais máximas estavam bem abaixo da resistência última do material e, muito seguidamente, abaixo mesmo da resistência ao escoamento. A característica mais distinguível dessas falhas é que as tensões foram repetidas muitas e muitas vezes. Daí a falha ser denominada *falha por fadiga*.

Quando peças de máquina falham estaticamente, em geral desenvolvem uma deflexão muito grande, visto que a tensão excedeu à resistência ao escoamento, e a peça é trocada antes que a fratura realmente ocorra. Assim, muitas falhas estáticas dão um aviso visível antecipadamente. No entanto, o mesmo não ocorre com a falha por fadiga! Ela é súbita e total – portanto, perigosa. É relativamente simples projetar contra uma falha estática, pois nosso conhecimento é amplo. Já a fadiga é um fenômeno mais complicado, apenas parcialmente entendido, que exige dos engenheiros o máximo conhecimento possível sobre o assunto.

As falhas por fadiga têm aparência similar à de uma fratura frágil, uma vez que as superfícies de fratura são planas e perpendiculares ao eixo de tensão, com a ausência de estricção. As características de fratura de uma falha por fadiga, contudo, são bem diferentes daquelas de uma fratura frágil estática, surgindo de três estágios de desenvolvimento. O *estágio I* corresponde ao início de uma ou mais microtrincas, causadas por deformação plástica cíclica seguida de propagação cristalográfica estendendo-se por dois a cinco grãos relativamente à origem. As trincas do estágio I não são normalmente discerníveis a olho nu. O *estágio II* compreende a progressão de micro a macrotrincas, formando superfícies de fratura com platôs paralelos, separados por sulcos também paralelos. Tais platôs são normalmente lisos e normais na direção da máxima tensão de tração. Essas superfícies podem ser onduladas e escuras e ter bandas leves conhecidas como *marcas de praia* ou *marcas de concha de ostra*, como visto na Figura 7-1. Durante o carregamento cíclico, tais superfícies fissuradas abrem e fecham, roçando-se umas nas outras, e a aparência das marcas de praia depende das mudanças no nível e na freqüência do carregamento, bem como da natureza corrosiva do meio. O *estágio III* ocorre no ciclo de carga final, quando o material remanescente não pode suportar as cargas, resultando em fratura rápida e repentina. Uma falha de estágio III pode ser frágil, dúctil ou uma combinação de ambas. Com bastante freqüência, as marcas de praia, caso existentes, e os padrões possíveis na fratura de estágio III, denominados *linhas de divisa*, apontam para a origem das trincas iniciais.

Há muito a ser aprendido a partir dos padrões de fratura provenientes da falha por fadiga.[1] A Figura 7-2 mostra representações de superfícies de falha de geometrias de várias peças sob diferentes condições de carregamento e níveis de concentração de tensão. Observe que, no caso da flexão rotacional, até a direção de rotação influencia o padrão de falha.

A falha por fadiga deve-se à formação de trinca e propagação. Uma trinca de fadiga terá início, tipicamente, em uma descontinuidade no material em que a tensão cíclica é máxima. As descontinuidades podem surgir devido aos seguintes fatores:

[1] Ver ASM Handbook, *Fractography*, ASM International, Metals Park, Ohio, vol. 12, 9th ed., 1987.

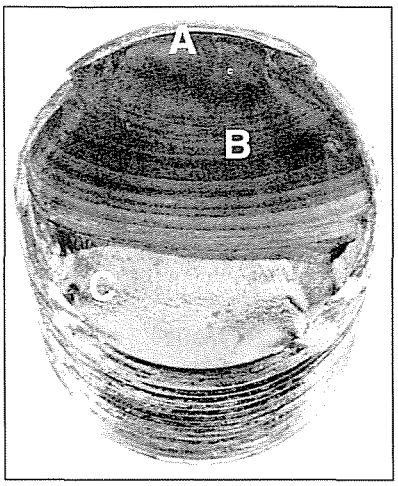


Figura 7-1 *Falha por fadiga de um parafuso, em decorrência de flexão unidirecional repetida. A falha começou na raiz da rosca em A, propagou-se através da maior parte da secção transversal mostrada, como evidenciado pelas marcas de praia em B, antes da falha final por fratura em C. (De* ASM Handbook, vol 12: Fractography, *ASM International, Materials Park, OH, 44073-0002, fig. 50, p. 120. Reimpressa com permissão da ASM International®, www.asminternational.org.)*

- Projeto de mudanças rápidas na secção transversal, chavetas, furos, etc., em que as concentrações de tensão ocorrem, conforme discutido nas Seções 4-14 e 6-2.
- Elementos que rolam e/ou deslizam contra outros (mancais, engrenagens, cames, etc.) sob pressões de contato altas, desenvolvendo tensões de contato subsuperficiais concentradas (Seção 4-20) que podem causar formação de cavidades superficiais ou lascamento após vários ciclos de carga.
- Descuido com a localização de marcas de identificação, marcas de ferramentas, riscos e rebarbas; projeto de juntas malfeito; montagem inadequada e outras falhas de fabricação.
- Composição do material em si, quer processado por laminação, forjamento, fundição, extrusão, estiramento, tratamento térmico, etc. Surgem descontinuidades microscópicas e submicroscópicas superficiais e subsuperficiais, tais como inclusões de material estranho, segregação de liga, vazios, partículas duras precipitadas e descontinuidades cristalinas.

Entre as várias condições que podem acelerar o início de trincas, incluem-se as tensões residuais de tração, as temperaturas elevadas, a ciclagem térmica, os meios corrosivos e a ciclagem de alta freqüência.

A razão e a direção de propagação de uma trinca de fadiga são controladas primeiramente por tensões localizadas e pela estrutura do material nessa trinca. Contudo, com a formação da trinca, outros fatores podem exercer influência significativa, tais como o meio ambiente, a temperatura e a freqüência. Como afirmado antes, as trincas crescerão ao longo de planos normais às máximas tensões de tração. Seu processo de crescimento pode ser explicado pela mecânica de fraturas (ver Seção 7-6).

Uma fonte de referência essencial no estudo das falhas por fadiga é o *ASM Metals Handbook* (21 volumes). As Figuras 7-1 a 7-8, reproduzidas com permissão da ASM International, são apenas uma amostra minúscula de exemplos de falhas por fadiga de uma grande variedade de condições incluídas nesse manual. Comparando a Figura 7-3 com a 7-2, vemos que a falha ocorreu devido a tensões de flexão rotativa, com a direção de rotação em sentido horário relativamente à vista e com uma concentração de tensão não-severa e uma tensão nominal baixa.

7-2 Abordagem da Falha por Fadiga em Análise e Projeto

Como observado na seção anterior, há muitos fatores a serem considerados, mesmo para casos de carregamentos bem simples. Os métodos de análise de falha por fadiga representam uma combinação de engenharia e ciência. Com freqüência, a ciência falha ao prover as respostas completas que se fazem necessárias. Ainda assim, por exemplo, um avião deve ser construído para voar – e com segurança. Um automóvel, por sua vez, deve ser fabricado com uma confiabilidade que assegure uma vida longa e livre de problemas, ao mesmo tempo que produza lucros para seus acionistas. Dessa forma, mesmo que a ciência ainda não explique completamente o mecanismo de fadiga, o engenheiro deve continuar a projetar coisas que não irão falhar. Em certo sentido, esse é um exemplo clássico do significado real das engenharias, em contraste com a

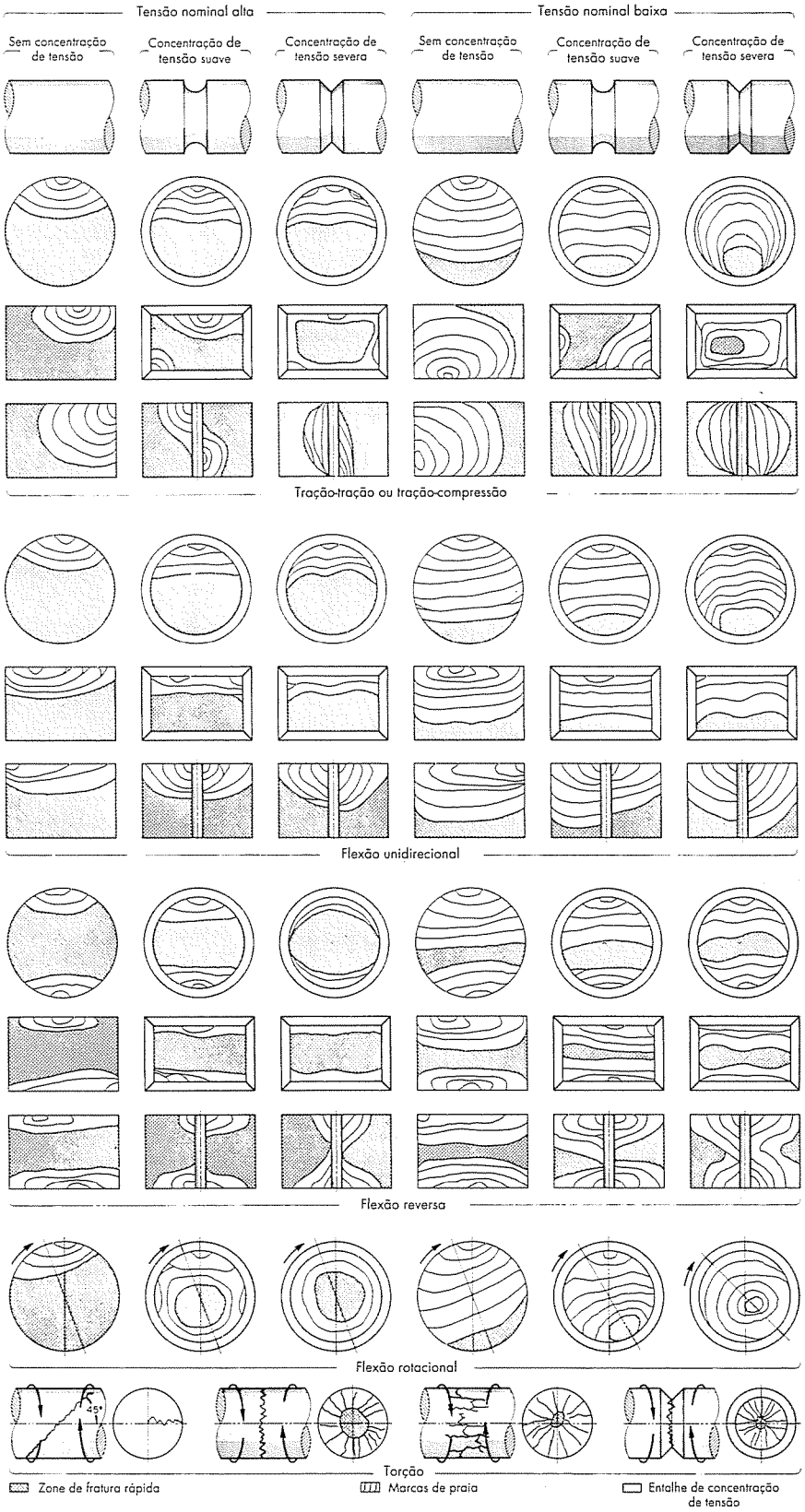


Figura 7-2 Esquema de superfícies de fratura por fadiga produzidas em componentes entalhadas e suaves, com secções transversais redondas e retangulares sob várias condições de carregamento e níveis de tensão nominal. *(De* ASM Handbook, vol. 11: Failure Analysis and Prevention, *ASM International, Materials Park, OH 44073-0002, fig. 18, p. 111. Reimpressa com permissão da ASM International®, www.asminternational.org.)*

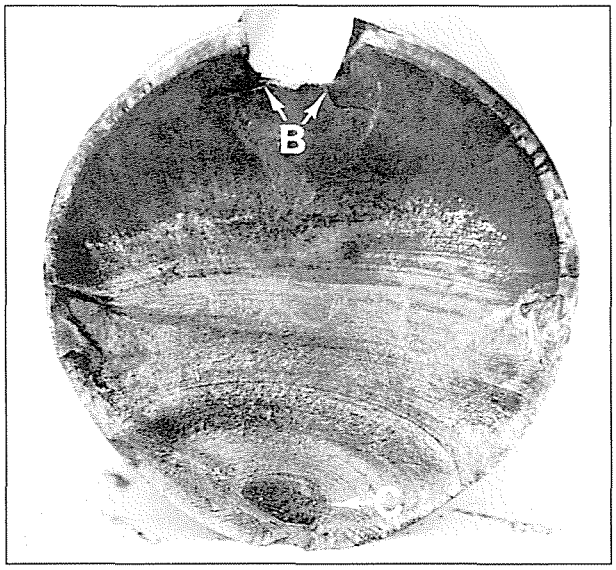


Figura 7-3 Falha por fadiga de um eixo motor AISI 4320. A falha iniciou-se nos pontos *B* e progrediu até a ruptura final em *C*. A zona de ruptura final é pequena, indicando que as cargas foram baixas. *(De* ASM Handbook, vol. 11: Failure Analysis and Prevention, *ASM International, Materials Park, OH, 44073-0002, fig. 18, p. 111. Reimpressa com permissão da ASM International®, www.asminternational.org.)*

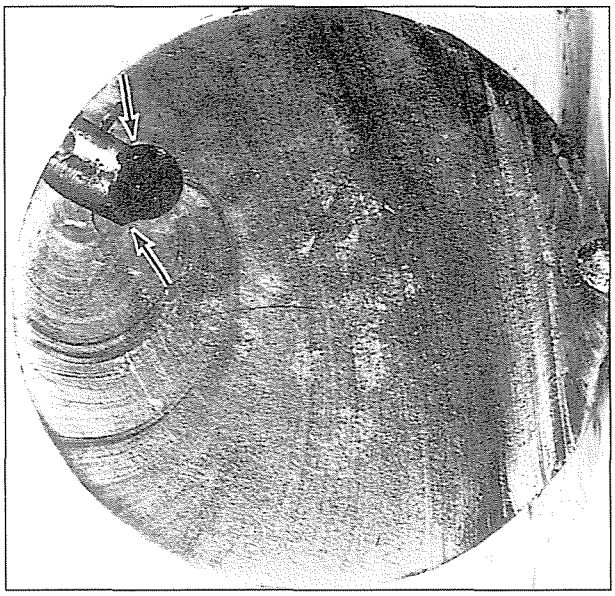


Figura 7-4 Superfície de fratura por fadiga de um pino AISI 8640. Cantos vivos de furos de graxa desencontrados causaram concentrações de tensão que iniciaram duas trincas de fadiga, indicadas pelas setas. *(De* ASM Handbook, vol. 12: Fractography, *ASM International, Materials Park, OH 44073-0002, fig. 520, p. 331. Reimpressa com permissão da ASM International®, www.asminternational.org.)*

ciência. Os engenheiros utilizam a ciência para resolver seus problemas, caso ela esteja disponível. Porém, disponível ou não, o problema ainda assim deve ser resolvido, e, independentemente da forma como a solução se apresente sob tais condições, ela é denominada *engenharia.*

Neste capítulo, construiremos uma abordagem estruturada do projeto contra a falha por fadiga. Como no caso da falha estática, tentaremos relacionar os resultados de testes realizados em espécimes carregados de forma simples. Contudo, devido à natureza complexa da fadiga, há muito mais a ser considerado. A partir desse ponto, iremos proceder de maneira metódica e em etapas. A fim de proporcionar alguma percepção acerca do que se segue neste capítulo, uma descrição breve das próximas seções será aqui apresentada.

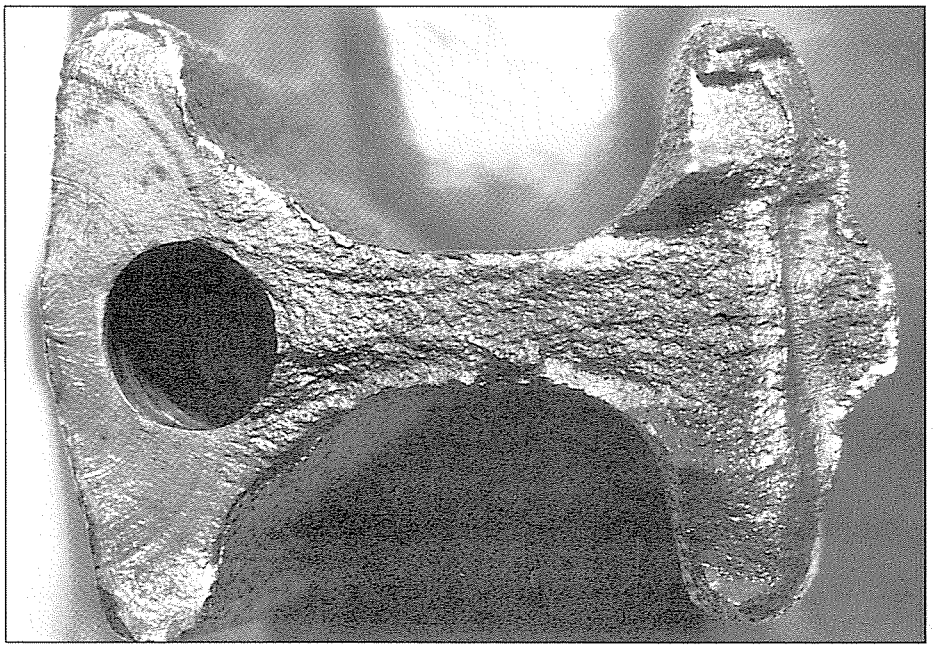


Figura 7-5 Superfície de fratura por fadiga de uma barra conectora forjada de aço AISI 8640. A trinca de fratura originou-se na borda esquerda, na linha destacada de forjamento, mas nenhuma aspereza incomum de emenda foi indicada. A trinca de fadiga progrediu meio caminho ao redor do furo de óleo à esquerda, indicado pelas marcas de praia, antes que a fratura rápida final ocorresse. Observe o lábio de cisalhamento pronunciado na extremidade direita. *(De* ASM Handbook, vol. 12: Fractography, *ASM International, Materials Park, OH, 44073-0002, fig. 523, p. 332. Reimpressa com permissão da ASM International®, www.asminternational.org.)*

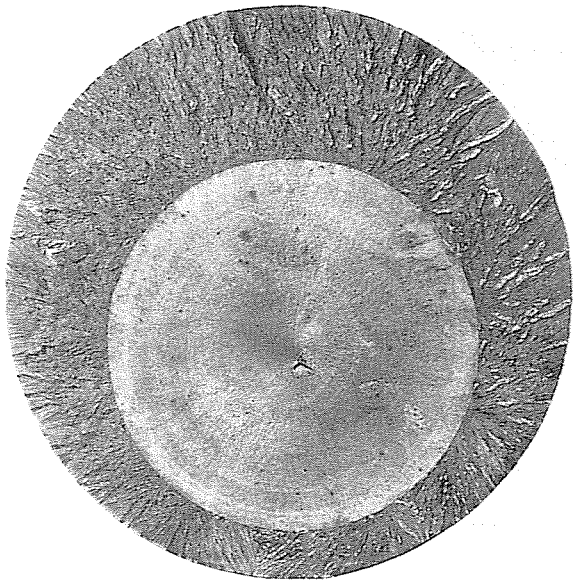


Figura 7-6 Superfície de fratura por fadiga de uma biela de pistão com 200 mm de diâmetro (8 in) de um martelo feito de aço liga e utilizado para forjamento. Esse é um exemplo de uma fratura por fadiga causada por tração pura, em que concentrações de tensão superficiais estão ausentes e uma trinca pode ser iniciada em qualquer lugar na secção transversal. Nesse caso, a trinca inicial formada em um floco de forjamento ligeiramente abaixo do centro cresceu para fora, de forma simétrica, e por fim produziu uma fratura frágil sem aviso. *(De* ASM Handbook, vol. 12: Fractography, *ASM International, Materials Park, OH 44073-0002, fig. 570, p. 342. Reimpressa com permissão da ASM International®, www.asminternational.org.)*

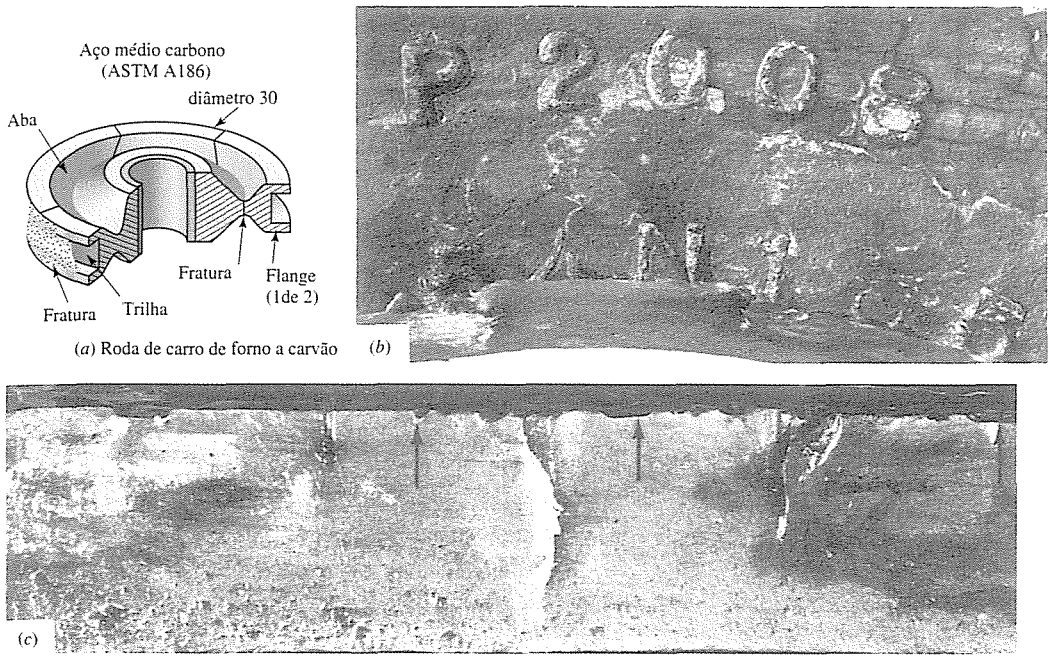


Figura 7-7 Falha por fadiga de uma roda de reboque com flange duplo de aço ASTM A186, causada por marcas de estampo. (*a*) Roda de carro de forno a carvão mostrando a posição das marcas de estampo e fraturas na aba e na alma. (*b*) Marca de estampo mostrando impressão forte e fratura estendendo-se ao longo da base da carreira de números inferior. (*c*) Entalhes, indicados pelas setas, criados a partir de marcas de estampo fortemente endentadas, a partir das quais trincas iniciaram-se ao longo do topo na superfície de fratura. *(De* ASM Handbook, vol. 11: Failure Analysis and Prevention, *ASM International, Materials Park, OH 44073-0002, fig. 51, p. 130. Reimpressa com permissão da ASM International®, www.asminternational.org.)*

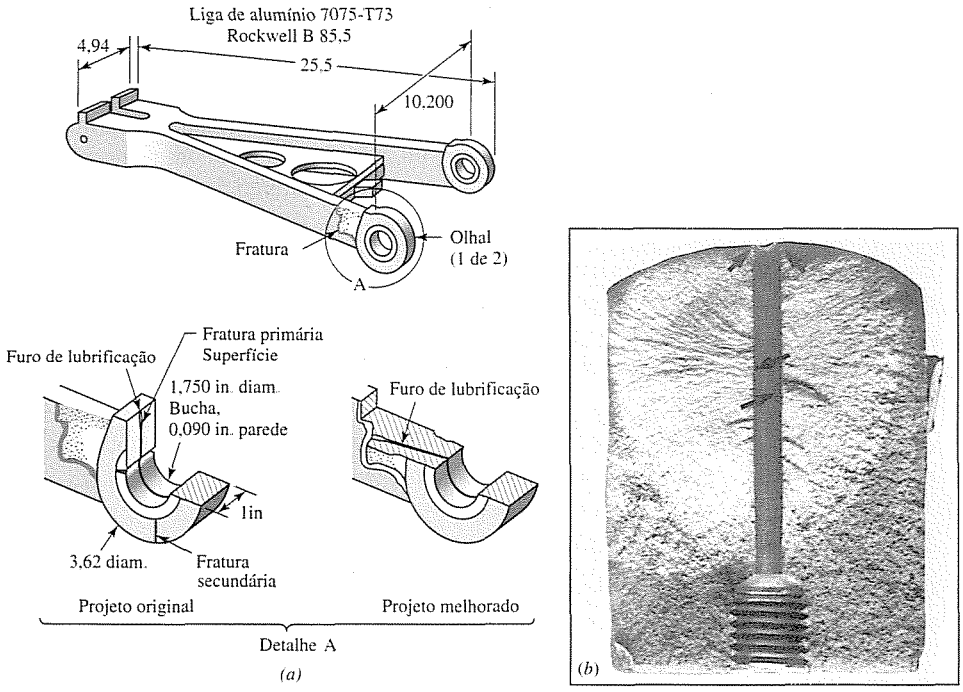


Figura 7-8 Redesenho do conjunto de braço de torque de trem de aterrissagem, feito de liga de alumínio 7075-T73, para eliminar fratura por fadiga em um furo de lubrificação. (*a*) Configuração do braço, projeto original e melhorado (dimensões fornecidas em polegadas). (*b*) Superfície de fratura na qual as setas indicam origens de trincas múltiplas. *(De* ASM Handbook, vol. 11: Failure Analysis and Prevention, *ASM International, Materials Park, OH 44073-0002, fig. 23, p. 114. Reimpressa com permissão da ASM International®, www.asminternational.org.)*

Métodos da Vida sob Fadiga (Seções 7-3 a 7-6)

Três abordagens fundamentais utilizadas em projeto e análise para predizer quando, ou se, uma componente de máquina carregada ciclicamente irá falhar em fadiga, em um determinado período de tempo, serão apresentadas. As premissas de cada abordagem são muito diferentes; porém, cada uma acrescenta algo ao nosso entendimento dos mecanismos associados à fadiga. A aplicação e as vantagens e desvantagens de cada método serão indicadas. Além da Seção 7-6, apenas um dos métodos, o da vida sob tensão, será seguido mais a fundo, para posteriores aplicações de projeto.

Resistência à Fadiga e Limite de Resistência à Fadiga (Seções 7-7 e 7-8)

O diagrama de resistência-vida (*S-N*) provê a resistência à fadiga S_f *versus* a vida em ciclos N de um material. Os resultados são gerados a partir de testes utilizando um carregamento simples de espécimes padronizados com controle laboratorial. Tal carregamento é, com freqüência, aquele de flexão pura com reversão senoidal. Os espécimes sob controle laboratorial são polidos sem concentração de tensão geométrica na região de área mínima.

Para aço e ferro, o diagrama *S-N* torna-se horizontal em algum ponto. A resistência nesse ponto é chamada de *limite de resistência à fadiga* S'_e e ocorre em algum ponto entre 10^6 e 10^7 ciclos. O símbolo prima em S'_e refere-se ao limite de resistência à fadiga do espécime sob condições controladas em laboratório. Para materiais não-ferrosos que não exibem um limite de resistência à fadiga, uma resistência à fadiga a um número especificado de ciclos, S'_f, pode ser fornecida, quando, novamente, a prima designa a resistência à fadiga do espécime com controle laboratorial.

Os dados de resistência baseiam-se em muitas condições controladas que não serão as mesmas de uma componente de máquina real. O que segue são práticas utilizadas para levar em conta diferenças entre o carregamento e as condições físicas do espécime, bem como a peça de máquina real.

Fatores Modificadores do Limite de Resistência à Fadiga (Seção 7-9)

Fatores modificadores são definidos e utilizados para dar conta de diferenças entre o espécime e a peça de máquina real, relativamente a condições de superfície, tamanho, carregamento, temperatura, confiabilidade e efeitos diversos. O carregamento ainda é considerado simples e inverso.

Concentração de Tensão e Sensibilidade a Entalhe (Seção 7-10)

A peça real pode ter uma concentração de tensão geométrica por meio da qual o comportamento à fadiga depende do fator de concentração de tensão estática e da sensibilidade da componente material ao dano por fadiga.

Tensões Flutuantes (Seções 7-11 a 7-13)

Essas seções levarão em conta estados de tensão simples resultantes de condições de carga flutuantes que não correspondem a tensões senoidais inversas puramente axiais, de flexão ou torção.

Combinações de Modos de Carregamento (Seção 7-14)

Nessa seção, um procedimento baseado na teoria da energia de distorção será apresentado para a análise de estados de tensões flutuantes em combinação, tais como torção e flexão combinadas. Será assumido que os níveis de tensões flutuantes não são variáveis com o tempo.

Tensões Variáveis, Flutuantes; Dano Cumulativo por Fadiga (Seção 7-15)

Os níveis de tensão flutuantes em uma peça de máquina podem ser variáveis com o tempo. Métodos serão incluídos para estimar o dano por fadiga em uma base cumulativa.

Seções Restantes

As duas seções restantes do capítulo corresponderão a tópicos especiais de resistência superficial à fadiga e análise estocástica.

7-3 Métodos da Vida sob Fadiga

Os três métodos fundamentais da vida sob fadiga utilizados em projeto e análise são o *método da vida sob tensão*, o *método da vida sob deformação* e o *método da mecânica de fratura linear elástica*. Tais métodos tentam predizer a vida, em número de ciclos até a ocorrência de falha, N, para um nível de carregamento especificado. A vida de $1 \leq N \leq 10^3$ ciclos é geralmente classificada como *fadiga de baixo ciclo*, enquanto se considera que a *fadiga de alto ciclo* ocorre para $N > 10^3$ ciclos. O método da vida sob tensão, baseado em níveis de tensão apenas, é o procedimento menos preciso, especialmente para aplicações de baixa ciclagem. Contudo, é também o método mais tradicional, haja vista ser o mais simples de implementar para várias aplicações de projeto; além disso, tem muitos dados de suporte e representa de forma adequada aplicações envolvendo alta ciclagem.

O método da vida sob deformação envolve uma análise mais detalhada da deformação plástica em regiões onde as tensões e a deformação são consideradas para estimativas de vida. Esse método é especialmente eficaz em aplicações que envolvem fadiga de baixo ciclo. Ao empregá-lo, várias idealizações têm de ser compostas, de modo que haverá algumas incertezas nos resultados. Por esse motivo, ele será discutido apenas por seu valor quanto ao que acrescenta ao entendimento da natureza da fadiga.

O método da mecânica de fratura assume que uma trinca já esteja presente e tenha sido detectada. Dessa forma, ele é empregado para prever o crescimento dessa trinca relativamente à intensidade de tensão. Entretanto, é mais prático quando aplicado a estruturas grandes juntamente com códigos computacionais e um programa de inspeção periódico.

7-4 Método da Vida sob Tensão

Para determinar a resistência de materiais sob a ação de cargas de fadiga, espécimes são sujeitos a forças repetidas ou variáveis de magnitudes especificadas, ao passo que ciclos ou inversões de tensão são contados até sua destruição. O dispositivo de ensaio de fadiga mais amplamente utilizado é a máquina de viga rotativa de alta velocidade de R. R. Moore. Essa máquina sujeita o espécime à flexão pura (sem cisalhamento transversal) por meio de pesos. Tal espécime, mostrado na Figura 7-9, é cuidadosamente usinado e polido – com um polimento final em uma direção axial, de modo a evitar riscos circunferentes. Outras máquinas de ensaio de fadiga estão disponíveis para a aplicação de tensões axiais flutuantes ou invertidas, tensões torcionais ou combinadas aos espécimes de ensaio.

Para estabelecer a resistência à fadiga de um material, muitos testes se fazem necessários em decorrência da natureza estatística da fadiga. Para o ensaio de viga rotativa, uma carga de flexão constante é aplicada, e o número de revoluções (inversões de tensão) dessa viga requerido até a falha é registrado. O primeiro ensaio é realizado a uma tensão um pouco inferior à resistência última do material. O segundo teste é feito a uma tensão menor que aquela utilizada no primeiro teste. O processo é continuado, e os resultados são traçados em um diagrama S-N (Figura 7-10). Esse diagrama pode ser traçado em papel *semilog* ou *log-log*. No caso de metais ferrosos e ligas, o gráfico torna-se horizontal depois que o material foi tensionado durante um certo número de ciclos. Traçar em papel *log* enfatiza a flexão na curva, que poderia não ser aparente se os resultados fossem traçados usando-se coordenadas cartesianas.

A ordenada do diagrama S-N é denominada *resistência à fadiga* S_f; uma declaração dessa resistência deve sempre ser acompanhada de uma declaração do número de ciclos N ao qual ela corresponde.

Em breve, aprenderemos que os diagramas S-N podem ser determinados para um espécime de ensaio ou para um elemento mecânico real. Mesmo quando o material do espécime de ensaio e aquele do elemento mecânico forem idênticos, haverá diferenças significativas entre seus diagramas.

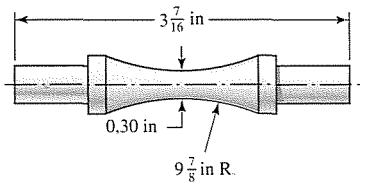


Figura 7-9 Geometria do espécime de teste da máquina de viga rotativa de R. R. Moore. O momento flexor é uniforme na porção curva, que tem as tensões maiores, um teste válido do material, ao passo que fratura em qualquer outra parte (não no nível de tensão máxima) é motivo de suspeita com relação à presença de defeito no material.

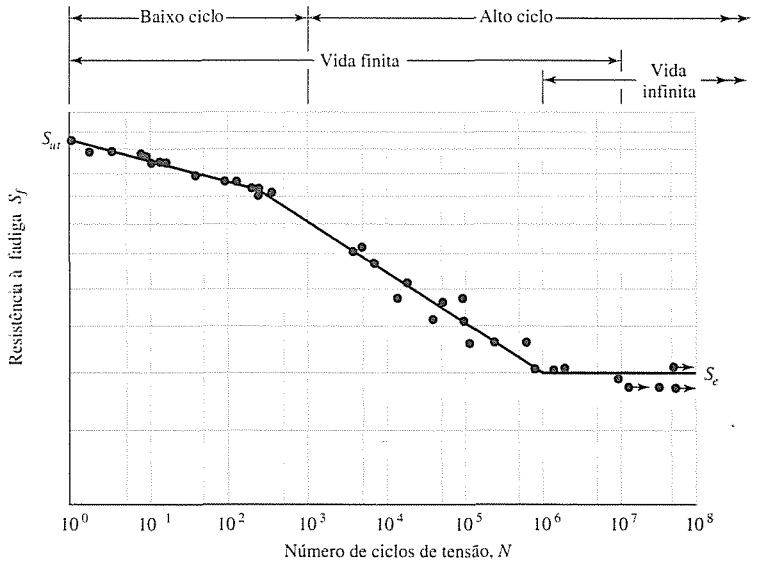


Figura 7-10 Um diagrama *S-N* traçado a partir dos resultados de testes de fadiga axial completamente inversa. Material: aço UNS G41300, normalizado; S_{ut} = 116 kpsi; máximo S_{ut} = 125 kpsi. *(Dados extraídos de NACA Tech. Nota 3866, dezembro de 1966.)*

No caso de aços, um joelho ocorre no gráfico; além desse joelho não ocorrerá falha, por maior que seja o número de ciclos. A resistência correspondente ao joelho é denominada *limite de resistência à fadiga* S_e, ou limite de fadiga. O gráfico da Figura 7-10 jamais se torna horizontal para metais não-ferrosos ou ligas, de modo que esses materiais não têm um limite de resistência à fadiga. A Figura 7-11 mostra bandas de espalhamento indicando as curvas *S-N* para as ligas mais comuns de alumínio, excluindo aquelas forjadas com resistência abaixo de 38 kpsi. Uma vez que o alumínio não tem um limite de resistência à fadiga, normalmente a resistência à fadiga S_f é relatada a um número específico de ciclos, normalmente $N = 5(10^8)$ ciclos de tensão inversa (ver Tabela A-24).

Observamos que um ciclo de tensão ($N = 1$) constitui uma única aplicação e remoção de determinada carga, e então outra aplicação e remoção dessa carga na direção oposta. Logo, $N = \frac{1}{2}$ significa que a carga é aplicada uma vez e, então, é removida, o que corresponde ao caso de um ensaio de tração simples.

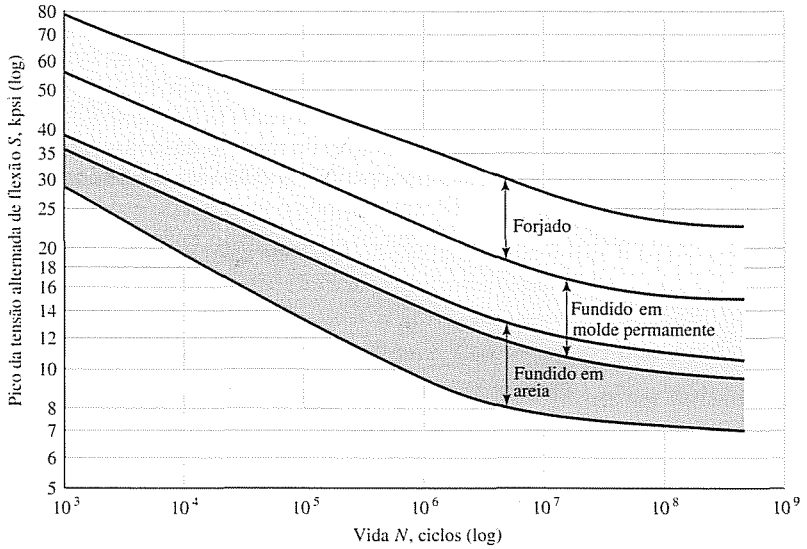


Figura 7-11 Bandas *S-N* para ligas de alumínio representativas, excluindo ligas forjadas com S_{ut} < 38 kpsi. *(De R. C. Juvinall,* Engineering Considerations of Stress, Strain and Strength. *Copyright © 1967 The McGraw-Hill Companies, Inc. Reimpressa com permissão.)*

O corpo de conhecimento disponível sobre falha por fadiga desde $N = 1$ até $N = 1000$ ciclos é geralmente classificado como *fadiga de baixo ciclo*, tal como indicado na Figura 7-10. A *fadiga de alto ciclo*, portanto, está relacionada à falha correspondente a ciclos de tensão maiores que 10^3 ciclos.

Também distinguimos uma *região de vida finita* e uma *região de vida infinita* na Figura 7-10. A fronteira entre essas regiões não pode ser claramente definida, exceto para um material específico; no entanto, ela se situa em algum ponto entre 10^6 e 10^7 ciclos para aços, como mostrado na referida figura.

Conforme observado anteriormente, é sempre uma boa prática de engenharia conduzir um programa de ensaio nos materiais a serem empregados no projeto e na manufatura. Isso de fato é um requisito, e não uma opção, para a proteção contra a possibilidade de uma falha por fadiga. *Devido a essa necessidade de ensaio, seria desnecessário proceder adiante ao estudo de falhas por fadiga, exceto por uma razão importante: o desejo de saber por que essas falhas ocorrem, para que o(s) método(s) mais efetivo(s) possa(m) ser utilizado(s) para melhorar a resistência à fadiga.* Sendo assim, nosso propósito primordial ao estudar a fadiga é entender por que falhas ocorrem, para que possamos nos proteger contra elas de uma maneira eficaz. Por tal razão, as abordagens analíticas de projeto apresentadas neste e em outros livros, no que se refere a esse aspecto, não exibem resultados absolutamente precisos. Tais resultados devem ser tomados como um guia, como algo indicando o que é e o que não é importante ao se fazer um projeto contra a falha por fadiga.

Como afirmado anteriormente, o método da vida sob tensão é o procedimento menos preciso, sobretudo para aplicações de baixa ciclagem. Ainda assim, é o método mais tradicional, com muitos dados publicados e disponíveis. É também o de mais fácil implementação para muitas aplicações de projeto e representa adequadamente aplicações de alta ciclagem. Por essas razões, ele será enfatizado nas próximas seções deste capítulo. Todavia, muito cuidado deve ser tomado ao empregá-lo para aplicações que envolvam baixa ciclagem, uma vez que não leva em conta o comportamento da tensão-deformação verdadeira quando ocorre escoamento localizado.

7-5 Método da Vida sob Deformação

O melhor procedimento já apresentado para explicar a natureza da falha por fadiga é denominado, por alguns, *método da vida sob deformação*. Tal procedimento pode ser utilizado para estimar resistências à fadiga; no entanto, quando empregado dessa forma, faz-se necessário compor várias idealizações, de modo que algumas incertezas existirão nos resultados. Por esse motivo, o método é aqui apresentado somente em virtude de seu valor na explicação da natureza da fadiga.

Uma falha por fadiga quase sempre começa em uma descontinuidade local, tal como um entalhe, uma trinca ou outra área de concentração de tensão. Quando a tensão na descontinuidade excede ao limite elástico, ocorre deformação plástica. Se uma fratura por fadiga está para ocorrer, deve haver deformações plásticas cíclicas. Dessa forma, necessitaremos investigar o comportamento de materiais sujeitos a deformações cíclicas.

Em 1910, Bairstow verificou, por experimento, a teoria de Bauschinger, segundo a qual os limites elásticos do ferro e do aço podem ser mudados – para mais ou para menos – por variações cíclicas de tensão.[2] Em geral, os limites elásticos de aços recozidos devem provavelmente aumentar quando sujeitos a ciclos de inversão de tensão, ao passo que aços repuxados a frio exibem um limite elástico decrescente.

Espécimes de ensaio sujeitos a flexão inversa não são apropriados para deformação cíclica devido à dificuldade de medir deformações plásticas. Conseqüentemente, a maioria das pesquisas foi realizada em espécimes axiais. Utilizando-se transdutores elétricos, é possível gerar sinais proporcionais à tensão e à deformação, respectivamente. Esses sinais podem ser exibidos em um osciloscópio ou traçados em um traçador *XY*. R. W. Landgraf investigou o comportamento à fadiga de ciclo de baixa ciclagem de uma grande quantidade de aços de resistência muito alta, sendo que, durante sua investigação, ele realizou muitos gráficos de tensão-deformação cíclicas.[3] A Figura 7-12 foi construída a fim de mostrar a aparência geral desses gráficos para os primeiros poucos ciclos de deformação cíclica controlada. Nesse caso, a resistência decresce com repetições de tensão, como evidenciado pelo fato de que as inversões ocorrem a níveis de tensão sempre menores. Como previamente observado, outros materiais podem, pelo contrário, ser enrijecidos por inversões cíclicas de tensão.

Resultados ligeiramente diferentes podem ser obtidos se a primeira inversão ocorrer na região de compressão; isso provavelmente decorre do efeito de enrijecimento à fadiga por compressão.

[2] L. Bairstow, "The Elastic Limits of Iron and Steel under Cyclic Variations of Stress", *Philosophical Transactions*, Series A, vol. 210, Royal Society of London, 1910, p. 35-55.

[3] R. W. Landgraf, *Cyclic Deformation and Fatigue Behavior of Hardened Steels*, Report nº 320, Department of Theoretical and Applied Mechanics, University of Illinois, Urbana, 1968, p. 84-90.

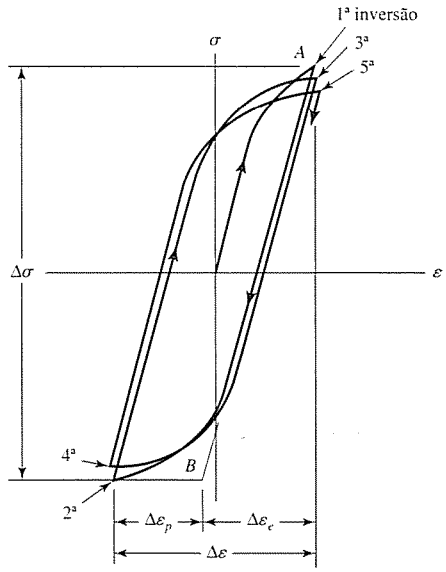


Figura 7-12 Os ciclos de histerese da tensão verdadeira-deformação verdadeira mostrando as primeiras cinco inversões de tensão de um material com amolecimento cíclico. O gráfico apresenta-se ligeiramente exagerado por motivos de clareza. Observe que a inclinação da linha *AB* é o módulo de elasticidade *E*. O intervalo da tensão é $\Delta\sigma$, $\Delta\varepsilon_p$ é o intervalo de deformação plástica e $\Delta\varepsilon_e$ é o intervalo de deformação elástica. O intervalo total de deformação é $\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon_p + \Delta\varepsilon_e$.

O artigo de Landgraf contém gráficos que comparam as relações monotônicas de tensão-deformação em tensão e compressão com a curva de tensão-deformação cíclica.[4] Dois desses gráficos foram redesenhados e são mostrados na Figura 7-13. A importância deles está no fato de que enfatizam a dificuldade em se tentar predizer a resistência à fadiga de um material a partir de valores conhecidos das resistências monotônicas de escoamento e última em regiões de baixa ciclagem.

O *SAE Fatigue Design and Evaluation Steering Committee* publicou um relatório, em 1975, no qual a vida em inversões até falha está relacionada à amplitude da deformação $\Delta\varepsilon / 2$.[5] Esse relatório contém um gráfico de tal relação para o aço SAE 1020 laminado a quente; o gráfico foi reproduzido na Figura 7-14. Para explicá-lo, primeiro definimos os seguintes termos:

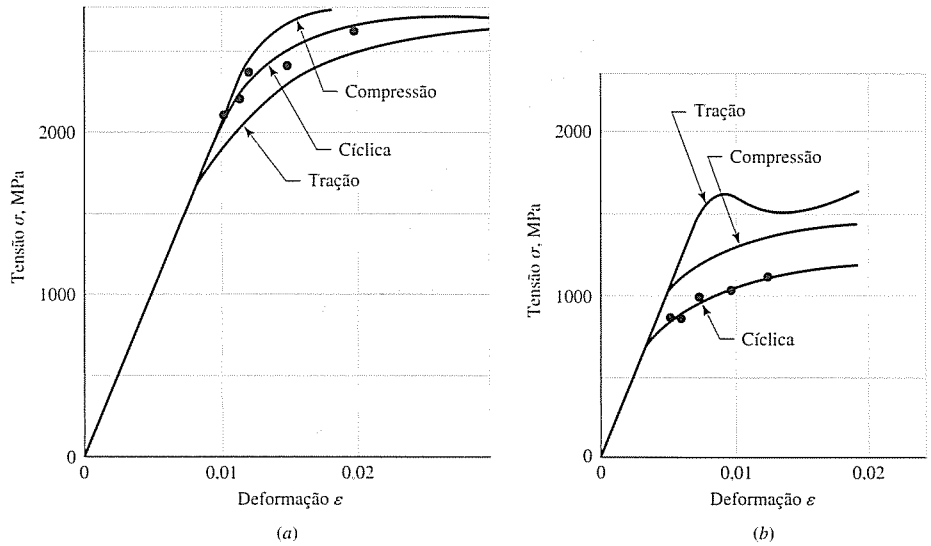


Figura 7-13 Resultados de tensão-deformação monotônico e cíclico. (*a*) Aço Ausformed H-11, Brinell 660; (*b*) aço SAE 4142, Brinell 400.

[4] *Ibid.*, p. 58-62.
[5] *Technical Report on Fatigue Properties*, SAE J1099, 1975.

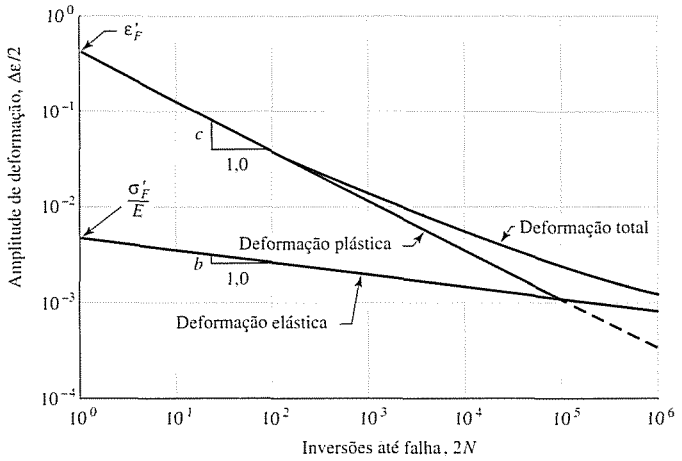


Figura 7-14 Um gráfico *log-log* mostrando como a vida sob fadiga se relaciona com a amplitude da deformação verdadeira para o aço 1020 laminado a quente. *(Reimpressa com permissão da SAE J1099_200208©2002 SAE International.)*

- *Coeficiente ε'_F de ductilidade à fadiga:* deformação verdadeira correspondente à fratura em uma inversão (ponto *A* na Figura 7-12). A linha de deformação plástica começa nesse ponto na Figura 7-14.
- *Coeficiente σ'_F de resistência à fadiga:* tensão verdadeira correspondente à fratura em uma inversão (ponto *A* na Figura 7-12). Observe, na Figura 7-14, que a linha de deformação elástica começa em σ'_F/E.
- *Expoente c de ductilidade à fadiga:* inclinação da linha de deformação plástica na Figura 7-14 e a potência à qual a vida $2N$ deve ser elevada para ser proporcional à amplitude da deformação plástica verdadeira. Se o número de inversões de tensão for $2N$, então N é o número de ciclos.
- *Expoente b de resistência à fadiga:* inclinação da linha de deformação elástica e potência à qual a vida $2N$ deve ser elevada para ser proporcional à amplitude da tensão verdadeira.

Agora, a partir da Figura 7-12, vemos que a deformação total é a soma das componentes elástica e plástica. Logo, a amplitude da deformação total é

$$\frac{\Delta\varepsilon}{2} = \frac{\Delta\varepsilon_e}{2} + \frac{\Delta\varepsilon_p}{2} \qquad (a)$$

A equação da linha de deformação plástica na Figura 7-14 é

$$\frac{\Delta\varepsilon_p}{2} = \varepsilon'_F(2N)^c \qquad (7\text{-}1)$$

A equação da linha de deformação elástica é

$$\frac{\Delta\varepsilon_e}{2} = \frac{\sigma'_F}{E}(2N)^b \qquad (7\text{-}2)$$

Logo, a partir da Equação (a), temos, para a amplitude total de deformação,

$$\frac{\Delta\varepsilon}{2} = \frac{\sigma'_F}{E}(2N)^b + \varepsilon'_F(2N)^c \qquad (7\text{-}3)$$

que é a relação de Manson-Coffin entre a vida de fadiga e a deformação total.[6] Alguns valores dos coeficientes e expoentes estão listados na Tabela 7-1. Muitos mais estão incluídos no relatório SAE J1099.

Embora a Equação (7-3) seja perfeitamente legítima para a obtenção da vida de fadiga de uma peça quando a deformação e outras características cíclicas são fornecidas, ela parece ser de pouca utilidade para o projetista. A questão acerca do modo como determinar a deformação total no fundo de um entalhe ou descontinuidade não foi respondida. Não há tabelas ou diagramas de fatores de concentração de deformação na literatura respectiva. É possível que tais fatores venham a se tornar disponíveis na literatura de pesquisa em

[6] J. F. Tavernelli e L. F. Coffin, Jr., "Experimental Support for Generalized Equation Predicting Low Cycle Fatigue", e S. S. Manson, discussão, *Trans. ASME, J. Basic Eng.*, vol. 84, nº 4, p. 533-537.

Tabela 7-1 Propriedades cíclicas de alguns aços de alta resistência

Número AISI	Processamento	Dureza H_b	Resistência cíclica ao escoamento S'_y, kpsi	Coeficiente de resistência à fadiga σ'_F, kpsi	Coeficiente de ductilidade à fadiga ε'_F	Expoente de resistência à fadiga b	Expoente de ductilidade à fadiga c	Expoente de encruamento por deformação à fadiga m
1045	Q & T 80°F	705	...	310	...	−0,065	−1,0	0,10
1045	Q & T 360°F	595	250	395	0,07	−0,055	−0,60	0,13
1045	Q & T 500°F	500	185	330	0,25	−0,08	−0,68	0,12
1045	Q & T 600°F	450	140	260	0,35	−0,07	−0,69	0,12
1045	Q & T 720°F	390	110	230	0,45	−0,074	−0,68	0,14
1042	Q & T 80°F	670	300	375	...	−0,075	−1,0	0,05
1042	Q & T 400°F	560	250	385	0,07	−0,076	−0,76	0,11
1042	Q & T 600°F	475	195	315	0,09	−0,081	−0,66	0,14
1042	Q & T 700°F	450	155	290	0,40	−0,080	−0,73	0,12
1042	Q & T 840°F	380	120	265	0,45	−0,080	−0,75	0,14
1042*	Q & D 550°F	475	160	300	0,20	−0,082	−0,77	0,12
1042	Q & D 650°F	450	155	305	0,60	−0,090	−0,76	0,13
1042	Q & D 800°F	400	130	275	0,50	−0,090	−0,75	0,14

* Deformação 14%.

Fonte: Dados do R. W. Landgraf, Cyclic Deformation and Fatigue Behavior of Hardened Steels, Report no. 320, Department of Theoretical and Applied Mechanics, University of Illinois, Urbana, 1968.

breve, devido ao aumento do emprego de análise de elementos finitos. Ademais, a análise de elemento finito pode aproximar de si as deformações que ocorrerão em todos os pontos na estrutura de estudo.[7]

7-6 Método da Mecânica de Fraturas Linear Elástica

A primeira fase do trincamento por fadiga é designada como fadiga de estágio I. Presume-se que o deslizamento de cristais, que se estende por diversos grãos contíguos, inclusões e imperfeições superficiais, desempenhe um papel. Uma vez que a maior parte disso não é visível ao observador, dizemos simplesmente que o estágio I envolve diversos grãos. A segunda fase, aquela de extensão da trinca, é chamada de fadiga de estágio II. O avanço da trinca (isto é, nova área fissurada é criada) produz evidência que pode ser observada em micrografias de um microscópio eletrônico. O crescimento da trinca ocorre de forma ordenada. A fratura final acontece durante o estágio III da fadiga, embora esta não esteja envolvida. Quando a trinca é suficientemente longa, de modo que $K_I = K_{Ic}$ para a amplitude de tensão envolvida, então K_{Ic} é o fator de intensidade de tensão crítico para o metal não-danificado; assim, há falha repentina e catastrófica do restante da secção transversal em sobrecarga de tração (ver Seção 6-13). A fadiga de estágio III está associada à aceleração rápida do crescimento da trinca seguido de fratura.

Crescimento da Trinca

As trincas de fadiga nucleiam-se e crescem quando as tensões variam e existe alguma tração em cada ciclo de tensão. Considere a tensão como flutuando entre os limites σ_{min} e σ_{max}, sendo que o intervalo de tensões é definido como $\Delta\sigma = \sigma_{max} - \sigma_{min}$. A partir da Equação (6-51), a intensidade de tensão é fornecida por $K_I = \beta\sigma\sqrt{\pi a}$. Logo, para $\Delta\sigma$, o intervalo de intensidade de tensão por ciclo é

$$\Delta K_I = \beta(\sigma_{max} - \sigma_{min})\sqrt{\pi a} = \beta\Delta\sigma\sqrt{\pi a} \tag{7-4}$$

Para desenvolver dados de resistência à fadiga, uma certa quantidade de espécimes do mesmo material é testada a vários níveis de $\Delta\sigma$. As trincas nucleiam-se na, ou muito próximo a uma, superfície livre ou grande des-

[7] Para uma discussão adicional sobre o método de vida sob deformação, ver N. E. Dowling, *Mechanical Behavior of Materials*, 2nd ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1999, Cap. 14.

continuidade. Assumindo uma trinca de comprimento inicial a_i, o crescimento dessa trinca como função do número de ciclos de tensão N irá depender de $\Delta\sigma$, isto é, ΔK_I. Para ΔK_I abaixo de certo valor limiar $(\Delta K_I)_{th}$, uma trinca não irá crescer. A Figura 7-15 representa o comprimento de trinca a como uma função do número de ciclos N para três níveis de tensão $(\Delta\sigma)_3 > (\Delta\sigma)_2 > (\Delta\sigma)_1$, em que $(\Delta K_I)_3 > (\Delta K_I)_2 > (\Delta K_I)_1$. Observe o efeito do intervalo de tensão maior da Figura 7-15 na produção de trincas mais longas a um determinado valor de contagem de ciclos.

Quando a razão de crescimento de trinca por ciclo, da/dN na Figura 7-15, é traçada como mostrado na Figura 7-16, os dados provenientes dos três níveis de intervalo de tensão sobrepõem-se para produzir um *locus* sigmoidal. Os três estágios de desenvolvimento de trinca são observáveis, e os dados do estágio II são lineares em coordenadas *log-log*, dentro dos limites de validade da mecânica de fraturas linear elástica (LEFM). Um grupo similar de curvas pode ser gerado alterando-se a razão de tensão $R = \sigma_{min} / \sigma_{max}$ do experimento.

Apresentamos aqui um procedimento simplificado para a estimativa da vida remanescente de uma peça ciclicamente tensionada, uma vez descoberta uma fissura. Isso requer a suposição de que existam condições de deformação plana.[8] Assumindo que uma trinca é descoberta no início do estágio II, seu crescimento na região II da Figura 7-16 pode ser aproximado pela *equação Paris*, que é da forma

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K_I)^m \tag{7-5}$$

em que C e m são constantes empíricas e ΔK_I é fornecido pela Equação (7-4). Valores representativos, ainda que conservadores, de C e m para várias classes de aços estão listados na Tabela 7-2. Substituindo a Equação (7-4) e integrando, obtemos

$$\int_0^{N_f} dN = N_f = \frac{1}{C}\int_{a_i}^{a_f} \frac{da}{(\beta\Delta\sigma\sqrt{\pi a})^m} \tag{7-6}$$

Aqui, a_i é o comprimento inicial da trinca, a_f é o comprimento final desta, correspondente à falha, e N_f é o número estimado de ciclos requeridos para produzir a falha após o momento em que a fissura inicial é formada. Observe que a razão β pode variar na variável de integração (por exemplo, ver as Figuras 6-35 a 6-40). Se isso por acaso ocorrer, então Reemsnyder[9] sugere o uso de integração numérica empregando o algoritmo

$$\begin{aligned} \delta a_j &= C(\Delta K_I)_j^m (\delta N)_j \\ a_{j+1} &= a_j + \delta a_j \\ N_{j+1} &= N_j + \delta N_j \\ N_f &= \sum \delta N_j \end{aligned} \tag{7-7}$$

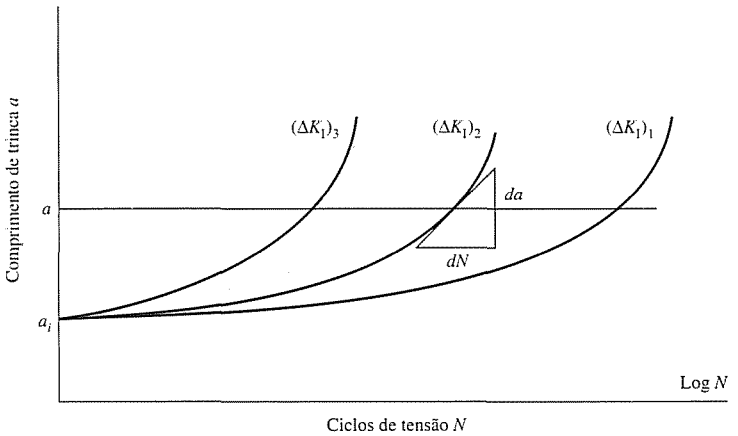


Figura 7-15 Aumento no comprimento de trinca a a partir do comprimento inicial a_i como uma função da contagem de ciclos para três intervalos de tensão, $(\Delta\sigma)_3 > (\Delta\sigma)_2 > (\Delta\sigma)_1$.

[8] Eis algumas referências recomendadas: Dowling, *op. cit.*; J. A. Collins, *Failure of Materials in Mechanical Design*, John Wiley & Sons, New York, 1981; H. O. Fuchs e R. I. Stephens, *Metal Fatigue in Engineering*, John Wiley & Sons, New York, 1980; e Harold S. Reemsnyder, "Constant Amplitude Fatigue Life Assessment Models", *SAE Trans. 820688*, vol. 91, novembro de 1983.

[9] *Op. cit.*

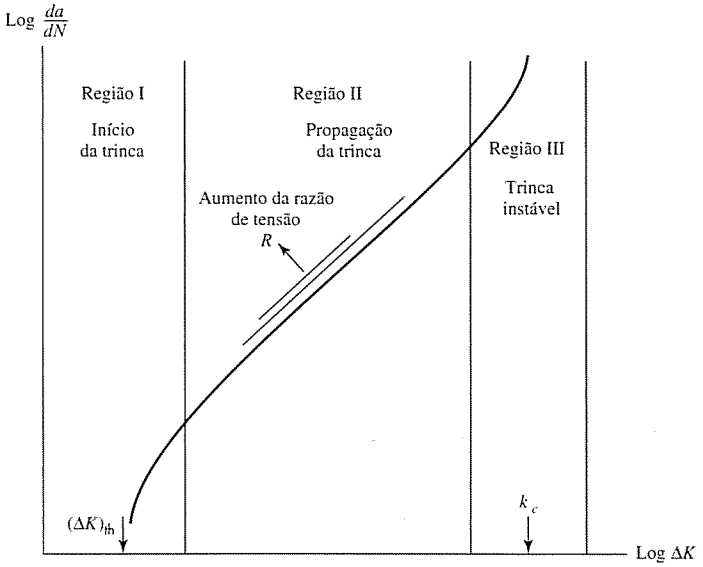


Figura 7-16 Quando *da/dN* é medido na Figura 7-15 e traçado em coordenadas *log-log*, os dados para intervalos diferentes de tensão sobrepõem-se, criando uma curva sigmoidal, como mostrado. $(\Delta K)_{th}$ é o valor limiar de (ΔK), abaixo do qual uma trinca não cresce. Desse limiar até a ruptura, uma liga de alumínio irá gastar 85 a 90% da vida na região I, 5 a 8% na região II e 1 a 2% na região III.

Tabela 7-2 Valores conservadores do fator *C* e do expoente *m* na Equação (7-5), para várias formas de aço (R ≐ 0)

Material	C, m/ciclo $(\text{MPa}\sqrt{\text{m}})^m$	C, in/ciclo $(\text{kpsi}\sqrt{\text{in}})^m$	m
Aços ferríticos-perlíticos	$6{,}89(10^{-12})$	$3{,}60(10^{-10})$	3,00
Aços martensíticos	$1{,}36(10^{-10})$	$6{,}60(10^{-9})$	2,25
Aços inoxidáveis austeníticos	$5{,}61(10^{-12})$	$3{,}00(10^{-10})$	3,25

De J. M. Barsom e S. T. Rolfe, *Fatigue and Fracture Control in Structures*, 2nd ed., Prentice-Hall, Upper Saddle River, N.J., 1987, p. 288-291, *copyright* ASTM International. Reimpressa com permissão.

Aqui, δa_j e δN_j são incrementos do comprimento de trinca e do número de ciclos. O procedimento é selecionar um valor de δN_j; utilizando a_i, determine β e compute ΔK_I, determine δa_j e, então, encontre o próximo valor de a. Repita o procedimento até que $a = a_f$.

O próximo exemplo apresenta-se bastante simplificado, com β constante a fim de fornecer alguma compreensão acerca do procedimento. Normalmente, são utilizados programas de crescimento de trinca por fadiga, tais como o NASA/FLAGRO 2.0, com modelos teóricos mais completos para solucionar esses problemas.

7-7

EXEMPLO 7-1

A barra mostrada na Figura 7-17 é submetida a um momento repetido $0 \le M \le 1200$ lbf · in. Ela é feita de aço AISI 4430, com $S_{ut} = 185$ kpsi, $S_y = 170$ kpsi e $K_{Ic} = 74$ kpsi$\sqrt{\text{in}}$. Testes materiais em vários espécimes desse material com tratamento térmico idêntico indicam constantes de pior caso de $C = 3{,}8(10^{-11})(\text{in/ciclo})/(\text{kpsi}\sqrt{\text{in}})^m$ e $m = 3{,}0$. Como mostrado, um corte com tamanho de 0,004 in foi descoberto no fundo da barra. Estime o número de ciclos de vida restante.

Solução

O intervalo de tensão $\Delta\sigma$ é sempre computado utilizando-se a área nominal (não-fissurada). Logo,

$$\frac{I}{c} = \frac{bh^2}{6} = \frac{0{,}25(0{,}5)^2}{6} = 0{,}0104 \text{ in}^3$$

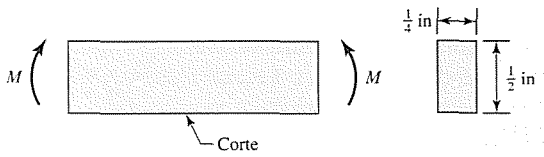


Figura 7-17

Portanto, antes que a trinca inicie, o intervalo de tensão é

$$\Delta\sigma = \frac{\Delta M}{I/c} = \frac{1200}{0{,}0104} = 115{,}4(10^3) \text{ psi} = 115{,}4 \text{ kpsi}$$

que fica abaixo da resistência ao escoamento. À medida que a trinca cresce, ela irá, finalmente, tornar-se longa o suficiente para que a barra escoe de maneira completa ou sofra uma fratura frágil. Para a razão S_y/S_{ut}, é altamente improvável que essa barra alcance o escoamento completo. Para fratura frágil, designe o comprimento da trinca como a_f. Se $\beta = 1$, então, a partir da Equação (6-51) com $K_i = K_{Ic}$, aproximamos a_f como

$$a_f = \frac{1}{\pi}\left(\frac{K_{Ic}}{\beta\sigma_{max}}\right)^2 \doteq \frac{1}{\pi}\left(\frac{73}{115{,}4}\right)^2 = 0{,}127 \text{ in}$$

A partir da Figura 6-37, computamos a razão a_f/h como

$$\frac{a_f}{h} = \frac{0{,}127}{0{,}5} = 0{,}254$$

Assim, a_f/h varia de quase zero a aproximadamente 0,254. A partir da Figura 6-37, para esse intervalo, β é quase constante a aproximadamente 1,07. Assumiremos que isso seja verdade e reavaliaremos a_f como

$$a_f = \frac{1}{\pi}\left(\frac{73}{1{,}07(115{,}4)}\right)^2 = 0{,}111 \text{ in}$$

Logo, a partir da Equação (7-6), a vida restante estimada é

$$N_f = \frac{1}{C}\int_{a_i}^{a_f} \frac{da}{(\beta\Delta\sigma\sqrt{\pi a})^m} = \frac{1}{3{,}8(10^{-11})}\int_{0{,}004}^{0{,}111} \frac{da}{[1{,}07(115{,}4)\sqrt{\pi a}]^3}$$

$$= -\frac{5{,}02(10^3)}{\sqrt{a}}\Bigg|_{0{,}004}^{0{,}111} = 64{,}3\ (10^3) \text{ ciclos}$$

7-7 Limite de Resistência

A determinação dos limites de resistência por ensaios de fadiga é agora rotina, ainda que um processo longo. Geralmente, o ensaio de tensão é preferido ao de deformação para limites de resistência.

Para projetos preliminares e de protótipo, bem como para alguma análise de falha, um método rápido de estimativa dos limites de resistência é necessário. Há muitos dados na literatura sobre os resultados de ensaios com vigas rotativas e ensaios de tração simples de espécimes tomados da mesma barra ou lingote. Traçando-se estes como na Figura 7-18, é possível ver se há alguma relação entre os dois conjuntos de resultados. O gráfico parece sugerir que o limite de resistência varia entre cerca de 40 a 60% da resistência à tração para aços de até 212 kpsi (1460 MPa) aproximadamente. Começando aproximadamente em $S_{ut} = 212$ kpsi (1460 MPa), o espalhamento parece aumentar, mas a tendência parece equiparar-se, como sugerido pela linha horizontal tracejada em $S'_e = 107$ kpsi (740 MPa).

Uma outra série de ensaios, desta vez para várias microestruturas, é mostrada na Tabela 7-3. Nesta, os limites de resistência variam de cerca de 23 a 63% da resistência à tração.[10]

[10] No entanto, ver H. O. Fuchs e R. I. Stephens, *Metal Fatigue in Engineering*, Wiley, New York, 1980, p. 69-71, que relata um intervalo de 35 a 60% para aços tendo $S_{ut} < 1400$ MPa e outro intervalo tão pequeno quanto 20% para aços de alta resistência.

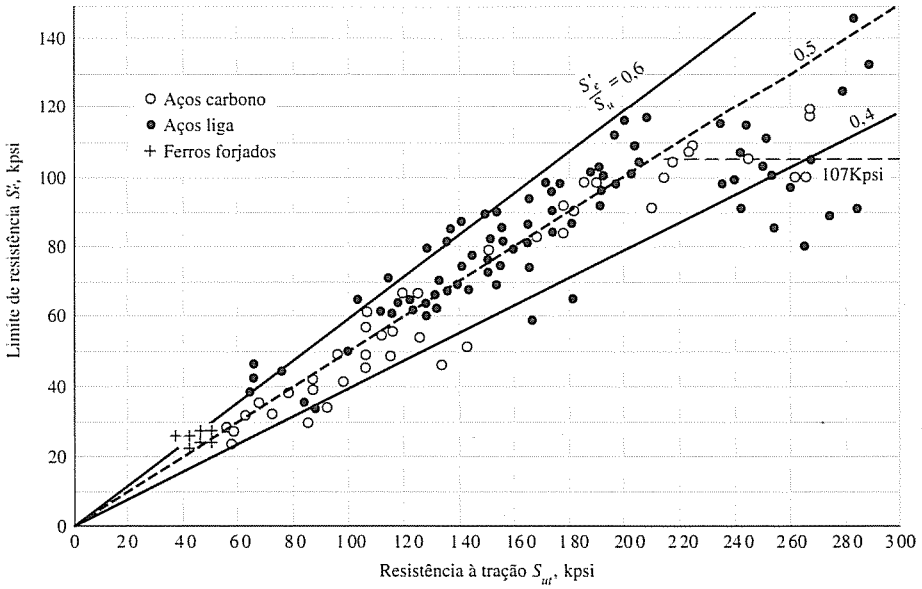


Figura 7-18 Gráfico dos limites de resistência *versus* resistências à tração procedentes de resultados de ensaios verdadeiros para uma grande quantidade de ferros forjados e de aços. Razões de S'_e/S_{ut} de 0,60, 0,50 e 0,40 são mostradas pelas linhas contínuas e tracejada, respectivamente. Observe também a linha horizontal tracejada para S'_e = 107 kpsi. Os pontos exibidos com uma resistência à tração maior que 214 kpsi têm um limite de resistência médio de S'_e = 107 kpsi e um desvio-padrão de 13,5 kpsi. *(Cotejada de dados compilados por H. J. Grover, S. A. Gordon e L. R. Jackson em* Fatigue of Metals and Structures, *Bureau of Naval Weapons, Document NAVWEPS 00-25-534, 1960; e de* Fatigue Design Handbook, *SAE, 1968, p. 42.)*

Tabela 7-3 Razão de limite de resistência S_e/S_{ut} para várias microestruturas de aços

	Ferrita		Perlita		Martensita	
	Intervalo	Média	Intervalo	Média	Intervalo	Média
Aço carbono	0,57-0,63	0,60	0,38-0,41	0,40	...	0,25
Aço liga	...	...	...	...	0,23-0,47	0,35

Fonte: Adaptada de L. Sors, *Fatigue Design of Machine Components*; Pergamon Press, Oxford, England, 1971.

Neste momento, é importante observar que a dispersão do limite de resistência *não* se deve à dispersão das resistências à tração do espécime, mas, ao contrário, o espalhamento ocorre mesmo quando as resistências à tração de uma grande quantidade de espécimes permanecem exatamente as mesmas. Lembre-se disso quando escolher fatores de segurança.

Desejamos apresentar agora um método para estimar os limites de resistência. Observe que estimativas obtidas de dados de muitas fontes provavelmente têm um grande espalhamento e podem desviar-se significativamente dos resultados de testes reais de laboratório de propriedades mecânicas obtidas por meio de especificações de ordens de compra estritas. Uma vez que a área de incerteza é grande, uma compensação deve ser feita utilizando-se fatores de projeto maiores que aqueles que seriam utilizados em projeto estático.

Mischke[11] analisou uma grande amostra de dados reais de teste procedentes de várias fontes e concluiu que o limite de resistência pode, de fato, estar relacionado com a resistência à tração. Para aços, a relação é

$$S'_e = \begin{cases} 0{,}504 S_{ut} \text{ kpsi or MPa} & S_{ut} \leq 212 \text{ kpsi (1460 MPa)} \\ 107 \text{ kpsi} & S_{ut} > 212 \text{ kpsi} \\ 740 \text{ MPa} & S_{ut} > 1460 \text{ MPa} \end{cases} \quad (7\text{-}8)$$

em que S_{ut} é a resistência à tração *mínima*. A marca de linha em S'_e refere-se ao espécime de viga rotativa. Desejamos preservar o símbolo S_e, sem a linha, para o limite de resistência de um dado elemento de má-

[11] Charles R. Mischke, "Prediction of Stochastic Endurance Strength", *Trans. of ASME, Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, vol. 109, nº 1, janeiro de 1987, p. 113-122.

quina submetido a qualquer carregamento. Em breve, aprenderemos que ambas as resistências podem ser bastante distintas.

Os dados da Tabela 7-3 enfatizam a dificuldade de tentar prover uma única regra para a derivação do limite de resistência a partir da resistência à tração. Essa tabela mostra também uma parte da causa de tal dificuldade. Aços tratados para fornecer microestruturas diferentes apresentam razões S'_e/S_{ut} diferentes. Parece que mais microestruturas dúcteis resultam em uma razão mais elevada. A martensita tem uma natureza muito frágil e é altamente suscetível a trincamento induzido por fadiga; assim, a razão é baixa. Quando projetos incluem especificações detalhadas de tratamento térmico para obter microestruturas específicas, é possível empregar uma estimativa do limite de resistência com base em dados de ensaio para a microestrutura particular; tais estimativas são muito mais confiáveis e devem ser utilizadas.

Os limites de resistência para várias classes de ferros fundidos, polidos ou usinados são apresentados na Tabela A-24. Ligas de alumínio não têm limite de resistência. As resistências à fadiga de algumas ligas de alumínio a $5(10^8)$ ciclos de tensão invertida são fornecidas na Tabela A-24.

7-8 Resistência à Fadiga

Como mostrado na Figura 7-10, uma região de fadiga de baixa ciclagem estende-se de $N = 1$ até cerca de 10^3 ciclos. Nessa região, a resistência à fadiga S_f é apenas ligeiramente menor que a resistência à tração S_{ut}. Um enfoque analítico foi dado por Mischke[12] para ambas as regiões de baixa e alta ciclagem, requerendo os parâmetros da equação de Manson-Coffin mais o expoente m de encruamento por deformação. Os engenheiros freqüentemente têm de trabalhar com menos informação.

A Figura 7-10 indica que o domínio de fadiga de alta ciclagem estende-se de 10^3 ciclos para aços até o limite de resistência N_e, que é de cerca de 10^6 a 10^7 ciclos. O propósito desta seção é desenvolver métodos de aproximação do diagrama S-N na região de alto ciclo, quando a informação pode ser tão esparsa quanto os resultados de um ensaio de tração simples. Experiências mostraram que os dados de fadiga de alto ciclo são retificados por uma transformação logarítmica para tensão e ciclos até falha. Os engenheiros podem trabalhar com a Equação (7-2) da seguinte maneira:

$$(S_f)_{10^3 \text{ ciclos}} = \sigma'_F(2 \cdot 10^3)^b = f S_{ut}$$

em que f é a fração de S_{ut} representada por $(S_f)_{10^3 \text{ ciclos}}$. Solucionando para f, obtemos

$$f = \frac{\sigma'_F}{S_{ut}}(2 \cdot 10^3)^b \tag{7-9}$$

Agora, a partir da Equação (3-11), $\sigma'_F = \sigma_0 \varepsilon^m$, com $\varepsilon = \varepsilon'_F$. Se essa equação de tensão verdadeira contra deformação verdadeira não for conhecida, a aproximação SAE[13] para aços com $H_B \leq 500$ pode ser usada:

$$\sigma'_F = S_{ut} + 50 \text{ kpsi} \qquad \text{ou} \qquad \sigma'_F = S_{ut} + 345 \text{ MPa} \tag{7-10}$$

O expoente b é encontrado, a partir de $\sigma_a = S_e = \sigma'_F(2N_e)^b$, como

$$b = -\frac{\log(\sigma'_F/S_e)}{\log(2N_e)} \tag{7-11}$$

Logo, a equação $S_f = \sigma'_F(2N)^b$ é conhecida. Por exemplo, se $S_{ut} = 105$ kpsi e $S_e = 52{,}5$ kpsi a 10^6 ciclos até falha,

$$\sigma'_F = 105 + 50 = 155 \text{ kpsi}$$

$$b = -\frac{\log(155/52{,}5)}{\log(2 \cdot 10^6)} = -0{,}0746$$

$$f = \frac{155}{105}(2 \cdot 10^3)^{-0{,}0746} = 0{,}837$$

e

$$S_f = 155(2N)^{-0{,}0746} \tag{a}$$

[12] J. E. Shigley e C. R. Mischke, *Standard Handbook of Machine Design*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1996, p. 13.34-13.37.

[13] *Fatigue Design Handbook*, vol. 4, Society of Automotive Engineers, New York, 1958, p. 27.

Empiricamente, o ajuste comum de curva é

$$S_f = aN^b \tag{7-12}$$

em que N é o número de ciclos até falha e as constantes a e b são definidas pelos pontos 10^3, $(S_f)_{10^3}$ e 10^6, S_e com $(S_f)_{10^3} = f S_{ut}$. Substituir esses dois pontos na Equação (7-12) produz

$$a = \frac{(f S_{ut})^2}{S_e} \tag{7-13}$$

$$b = -\frac{1}{3}\log\left(\frac{f S_{ut}}{S_e}\right) \tag{7-14}$$

Continuando o exemplo informal,

$$a = \frac{0{,}837^2 105^2}{52{,}5} = 147{,}1 \text{ kpsi}$$

$$b = -\frac{1}{3}\log\frac{0{,}837(105)}{52{,}5} = -0{,}0746$$

e a equação resultante é

$$S_f = 147{,}1N^{-0{,}0746} \tag{b}$$

Observe que $2^{-0{,}0746}(155) = 147{,}2$, de modo que as Equações (a) e (b) são realmente a mesma equação. Há ajustes populares de curva com f tratado como uma constante, normalmente 0,9, mas variando com S_{ut}. A seguinte tabela mostra a natureza de uma tal aproximação:

S_{ut}, kpsi	60	90	120	200
f	0,93	0,86	0,82	0,77

Se uma tensão completamente invertida σ_a for provida, estabelecendo $S_f = \sigma_a$ na Equação (7-12), o número de ciclos até falha poderá ser expresso como

$$N = \left(\frac{\sigma_a}{a}\right)^{1/b} \tag{7-15}$$

A fadiga de baixo ciclo é freqüentemente definida (ver Figura 7-10) como uma falha que ocorre em um intervalo de $1 \le N \le 10^3$ ciclos. Em um gráfico *log-log* como o da Figura 7-10, o local geométrico de falha nesse intervalo é quase linear abaixo de 10^3 ciclos. Uma linha reta entre $10^3, f S_{ut}$ e $1, S_{ut}$ (transformada) é conservadora e fornecida por

$$S_f \ge S_{ut} N^{(\log f)/3} \qquad 1 \le N \le 10^3 \tag{7-16}$$

EXEMPLO 7-2

Um aço 1050 HR tem uma resistência à tração $S_{ut} = 105$ kpsi e uma resistência ao escoamento de 60 kpsi.

(a) Estime o limite de resistência de viga rotativa a 10^6 ciclos.

(b) Estime a resistência para um espécime de viga rotativa polido correspondendo a 10^4 ciclos até falha.

(c) Estime a vida esperada sob uma tensão completamente invertida de 55 kpsi.

Solução

(a) A partir da Equação (7-8),

Resposta

$$S'_e = 0{,}504(105) = 52{,}9 \text{ kpsi}$$

(b) A partir da Equação (7-10),

$$\sigma'_F = 105 + 50 = 155 \text{ kpsi}$$

A partir da Equação (7-11), com $S_e = S'_e$,

$$b = -\frac{\log(155/52{,}9)}{\log(2 \cdot 10^6)} = -0{,}0741$$

A partir da Equação (7-9),

$$f = \frac{155}{105}(2 \cdot 10^3)^{-0{,}0741} = 0{,}840$$

A partir da Equação (7-13),

$$a = \frac{[(0{,}840)(105)]^2}{52{,}9} = 147{,}1 \text{ kpsi}$$

A partir da Equação (7-14),

$$b = -\frac{1}{3}\log\left[\frac{0{,}840(105)}{52{,}9}\right] = -0{,}0740$$

$$S_f = 147{,}2N^{-0{,}0740}$$

Resposta

$$(S_f)_{10^4} = 147{,}1(10^4)^{-0{,}0740} = 74{,}4 \text{ kpsi}$$

(*c*) A partir da Equação (7-15),

Resposta

$$N = \left(\frac{55}{147{,}1}\right)^{1/-0{,}0740} = 593\,810 = 5{,}9(10^5) \text{ ciclos}$$

7-9 Fatores Modificadores do Limite de Resistência

Vimos que o espécime de viga rotativa usado em laboratório para determinar os limites de resistência é preparado com muito cuidado e ensaiado sob condições controladas atentamente. É irrealista esperar que o limite de resistência de um membro mecânico ou estrutural iguale os valores obtidos em laboratório. Algumas diferenças incluem:

- *Material:* composição, base de falha, variabilidade
- *Manufatura:* método, tratamento térmico, corrosão por microabrasão, condição de superfície, concentração de tensão
- *Ambiente:* corrosão, temperatura, estado de tensão, tempo de relaxação
- *Projeto:* tamanho, forma, vida, estado de tensão, concentração de tensão, velocidade, microabrasão, escoriação

Marin[14] identificou fatores que quantificavam os efeitos da condição de superfície, tamanho, carregamento, temperatura e itens variados. A questão de ajustar o limite de resistência por correções subtrativas ou multiplicativas foi resolvida por uma análise estatística extensiva de um aço 4340 (forno elétrico, qualidade aeronáutica), na qual um coeficiente de correlação de 0,85 foi encontrado para a forma multiplicativa e um de 0,40, para a forma aditiva. Uma equação de Marin é, portanto, escrita como

$$S_e = k_a k_b k_c k_d k_e k_f S'_e \tag{7-17}$$

em que k_a = fator de modificação de condição de superfície

k_b = fator de modificação de tamanho

k_c = fator de modificação de carga

[14] Joseph Marin, *Mechanical Behavior of Engineering Materials*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962, p. 224.

k_d = fator de modificação de temperatura

k_e = fator de confiabilidade[15]

k_f = fator de modificação por efeitos variados

S'_e = limite de resistência de espécime de teste do tipo viga rotativa

S_e = limite de resistência no local crítico de uma peça de máquina na geometria e na condição de uso

Quando os ensaios de resistência de peças não estiverem disponíveis, estimativas serão realizadas aplicando-se os fatores de Marin ao limite de resistência.

Fator de Superfície k_a

A superfície de um espécime de viga rotativa é altamente polida, com um polimento final na direção axial que visa a alisar completamente quaisquer riscos circunferentes. O fator de modificação depende da qualidade do acabamento da superfície da peça real e da resistência à tração do material que a constitui. Para encontrar expressões quantitativas para acabamentos comuns de peças de máquina (retificado, usinado ou repuxado a frio, laminado a quente e como forjado), as coordenadas dos pontos de dados foram recaptadas de um gráfico de limite de resistência *versus* resistência à tração de dados coletados por Lipson e Noll e reproduzidos por Horger.[16] O resultado da análise de regressão por Mischke foi da forma

$$k_a = aS_{ut}^b \tag{7-18}$$

em que S_{ut} é a resistência à tração mínima e a e b são encontrados a partir da Tabela 7-4.

Tabela 7-4 Parâmetros para o fator de modificação superficial de Marin, Equação (7-18)

Acabamento superficial	Fator a S_{ut}, kpsi	Fator a S_{ut}, MPa	Expoente b
Retificado	1,34	1,58	–0,085
Usinado ou laminado a frio	2,70	4,51	–0,265
Laminado a quente	14,4	57,7	–0,718
Como forjado	39,9	272,	–0,995

Fonte: C. J. Noll e C. Lipson, "Allowable Working Stresses," *Society for Experimental Stress Analysis*, vol. 3, no. 2, 1946, p. 29. Reproduzida por O. J.Horger (eds.) *Metals Engineering Design ASME Handbook*, McGraw-Hill, New York. Copyright © 1953 The McGraw-Hill Companies, Inc. Reimpressa com permissão.

EXEMPLO 7-3

Um aço tem uma resistência última mínima de 520 MPa e uma superfície usinada. Estime k_a.

Solução A partir da Tabela 7-4, $a = 4{,}51$ e $b = -0{,}265$. Logo, a partir da Equação (7-18),

$$k_a = 4{,}51(520)^{-0{,}265} = 0{,}860$$

Fator de Tamanho k_b

O fator de tamanho foi avaliado usando 133 conjuntos de pontos de dados.[17] Os resultados para flexão e torção podem ser expressos como

[15] Uma análise estocástica completa é apresentada na Seção 7-17. Até aquele ponto, a apresentação será de caráter determinístico. Contudo, devemos levar em conta a conhecida dispersão de dados de fadiga. Isso significa que não iremos desenvolver uma análise de confiabilidade verdadeira neste momento, mas tentaremos responder à seguinte questão: qual a probabilidade de que uma tensão *conhecida* (assumida) exceda à resistência de uma componente selecionada arbitrariamente e feita a partir dessa população material?

[16] C. J. Noll e C. Lipson, "Allowable Working Stresses", *Society for Experimental Stress Analysis*, vol. 3, n° 2, 1946, p. 29. Reproduzido por O. J. Horger (ed.) *Metals Engineering Design ASME Handbook*, McGraw-Hill, New York, 1953, p. 102.

[17] Mischke, *op. cit*, Tabela 3.

$$k_b = \begin{cases} (d/0{,}3)^{-0{,}107} = 0{,}879d^{-0{,}107} & 0{,}11 \le d \le 2 \text{ in} \\ 0{,}91d^{-0{,}157} & 2 < d \le 10 \text{ in} \\ (d/7{,}62)^{-0{,}107} = 1{,}24d^{-0{,}107} & 2{,}79 \le d \le 51 \text{ mm} \\ 1{,}51d^{-00{,}157} & 51 < d \le 254 \text{ mm} \end{cases} \tag{7-19}$$

Para carregamento axial não há efeito de tamanho, de modo que

$$k_b = 1 \tag{7-20}$$

mas veja k_c.

Um dos problemas que surgem ao se empregar a Equação (7-19) é o que fazer quando uma barra redonda em flexão não está rodando, ou quando uma secção transversal não-circular é usada. Por exemplo, qual é o fator de tamanho para uma barra de 6 mm de espessura e 40 mm de largura? O enfoque a ser utilizado aqui emprega uma *dimensão efetiva* d_e obtida igualando-se o volume de material tensionado a, e acima de, 95% da tensão máxima ao mesmo volume em um espécime de viga rotativa.[18] Ocorre que, quando esses dois volumes são igualados, os comprimentos se cancelam, de modo que necessitamos somente considerar as áreas. Para uma secção redonda rodando, a área de tensão de 95% é a área em um anel tendo um diâmetro externo d e um diâmetro interno de $0{,}95d$. Assim, designando a área de tensão de 95% como $A_{0{,}95\sigma}$, temos

$$A_{0{,}95\sigma} = \frac{\pi}{4}[d^2 - (0{,}95d)^2] = 0{,}0766d^2 \tag{7-21}$$

Essa equação é também válida para um círculo vazado rodando. Para um sólido não-rotativo ou para elementos circulares vazados, a área de tensão de 95% é duas vezes a área externa de duas cordas paralelas tendo um espaçamento de $0{,}95d$, em que d é o diâmetro. Utilizando uma computação exata, isso é

$$A_{0{,}95\sigma} = 0{,}01046d^2 \tag{7-22}$$

com d_e na Equação (7-12), igualar as Equações (7-21) e (7-22) permite-nos solucionar para o diâmetro efetivo. Isso nos dá

$$d_e = 0{,}370d \tag{7-23}$$

como o tamanho efetivo de um círculo correspondente a um sólido não-rodante ou a um círculo vazado.

Uma secção retangular de dimensões $h \times b$ tem $A_{0{,}95\sigma} = 0{,}05hb$. Empregando o mesmo enfoque de antes, temos

$$d_e = 0{,}808(hb)^{1/2} \tag{7-24}$$

A Tabela 7-5 provê valores de $A_{0{,}95\sigma}$ de formas estruturais comuns sob flexão não-rotativa.

EXEMPLO 7-4

Um eixo de aço carregado sob flexão tem 32 mm de diâmetro, com uma manga afiletada de 38 mm de diâmetro. O material desse eixo tem uma resistência média à tração de 690 MPa. Estime o fator de tamanho de Marin k_b se o eixo for utilizado em um

(*a*) Modo rotativo.

(*b*) Modo não-rotativo.

Solução (*a*) A partir da Equação (7-19),

Resposta
$$k_b = \left(\frac{d}{7{,}62}\right)^{-0{,}107} = \left(\frac{32}{7{,}62}\right)^{-0{,}107} = 0{,}858$$

(*b*) A partir da Tabela 7-5,

[18] Ver R. Kuguel, "A Relation between Theoretical Stress Concentration Factor and Fatigue Notch Factor Deduced from the Concept of Highly Stressed Volume", *Proc. ASTM*, vol. 61, 1961, p. 732-748.

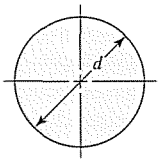
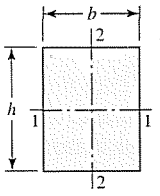
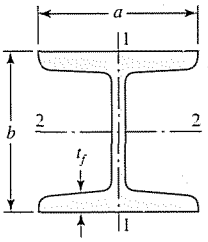
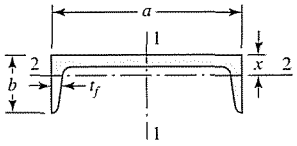
$$d_e = 0{,}37d = 0{,}37(32) = 11{,}84 \text{ mm}$$

A partir da Equação (7-19),

Resposta

$$k_b = \left(\frac{11{,}84}{7{,}62}\right)^{-0{,}107} = 0{,}954$$

Tabela 7-5 Áreas $A_{0,95\sigma}$ de formas estruturais não-rotativas comuns

	$A_{0,95\sigma} = 0{,}01046d^2$ $d_e = 0{,}370d$	
	$A_{0,95\sigma} = 0{,}05hb$ $d_e = 0{,}808\sqrt{hb}$	
	$A_{0,95\sigma} = \begin{cases} 0{,}10at_f & \\ 0{,}05ba & t_f > 0{,}025a \end{cases}$	eixo 1-1 eixo 2-2
	$A_{0,95\sigma} = \begin{cases} 0{,}05ab & \\ 0{,}052xa + 0{,}1t_f(b-x) & \end{cases}$	eixo 1-1 eixo 2-2

Fator de Carregamento k_c

Quando ensaios de fadiga são realizados com flexão rotativa, axial (de puxar-empurrar) e carregamento torcional, os limites de resistência diferem, com S_{ut}. Isso é discutido na Seção 7-17. Aqui, especificaremos valores médios do fator de carga na forma

$$k_c = \begin{cases} 1 & \text{flexão} \\ 0{,}85 & \text{axial} \\ 0{,}59 & \text{torção}^{19} \end{cases} \tag{7-25}$$

Fator de Temperatura k_d

Quando as temperaturas operacionais estão abaixo da temperatura ambiente, a fratura frágil é uma forte possibilidade e, portanto, deve ser investigada primeiramente. Quando as temperaturas operacionais são mais

[19] Use isto somente para carregamento de fadiga de torção. Quando a torção está combinada com outras tensões, tais como flexão, $k_c = 1$ e o carregamento combinado é tratado usando a tensão efetiva de von Mises, como visto na Seção 6-5. *Nota*: Para torção pura, a energia de distorção prevê que $(k_c)_{\text{torção}} = 0{,}577$.

altas que a temperatura ambiente, o escoamento deve ser investigado a princípio, pois a resistência a ele cai muito rapidamente com a temperatura; ver Figura 3-8. Qualquer tensão induzirá fluência em um material operando a altas temperaturas, de modo que esse fator deve também ser considerado. Por fim, pode ser verdade que não haja limite de fadiga para materiais operando a altas temperaturas. Em virtude da reduzida resistência à fadiga, o processo de falha é, até certo ponto, dependente do tempo.

A quantidade limitada de dados disponíveis mostra que o limite de resistência para aços aumenta ligeiramente à medida que a temperatura sobe e, então, começa a cair no intervalo de 400 até 700°F, não diferindo do comportamento da resistência à tração mostrado na Figura 3-8. Por essa razão, provavelmente é verdade que o limite de resistência esteja relacionado com a resistência à tração a elevadas temperaturas da mesma maneira que com a temperatura ambiente.[20] Parece bastante lógico, portanto, empregar as mesmas relações para predizer o limite de resistência a elevadas temperaturas que aquelas usadas à temperatura ambiente, pelo menos até que dados de maior abrangência estejam disponíveis. No mínimo, essa prática proverá um padrão útil ao qual o desempenho de vários materiais poderá ser comparado.

A Tabela 7-6 foi obtida a partir da Figura 3-8 utilizando-se somente os dados de resistência à tração. Observe que essa tabela representa 145 ensaios de 21 diferentes aços carbono e liga. Um ajuste por curva polinomial de quarta ordem aos dados que produziram a Figura 3-8 fornece

$$k_d = 0{,}975 + 0{,}432(10^{-3})T_F - 0{,}115(10^{-5})T_F^2 + 0{,}104(10^{-8})T_F^3 - 0{,}595(10^{-12})T_F^4 \tag{7-26}$$

em que $70 \le T_F \le 1000$°F.

Dois tipos de problemas surgem quando a temperatura é um fator a ser considerado. Se o limite de resistência da vida rodando for conhecido à temperatura ambiente, então utilize

$$k_d = \frac{S_T}{S_{RT}} \tag{7-27}$$

a partir da Tabela 7-6 ou da Equação (7-26) e proceda como de costume. Se o limite de resistência da viga rotativa não for dado, então compute-o utilizando a Equação (7-8) e a resistência à tração – corrigida da temperatura – obtida empregando-se o fator proveniente da Tabela 7-6. Assim, use $k_d = 1$.

EXEMPLO 7-5

Um aço 1035 apresenta uma resistência à tração de 70 kpsi e deve ser usado em uma peça que trabalhe a 450°F. Estime o fator de modificação de temperatura de Marin e $(S_e)_{450°}$, se

(*a*) O limite de resistência à temperatura ambiente por ensaio for $(S'_e)_{70°} = 39{,}0$ kpsi.

(*b*) Somente a resistência à tração, à temperatura ambiente, for conhecida.

Solução

(*a*) Primeiro, a partir da Equação (7-26),

$$k_d = 0{,}975 + 0{,}432(10^{-3})(450) - 0{,}115(10^{-5})(450^2) + 0{,}104(10^{-8})(450^3) - 0{,}595(10^{-12})(450^4) = 1{,}007$$

Logo,

Resposta

$$(S_e)_{450°} = k_d(S'_e)_{70°} = 1{,}007(39{,}0) = 39{,}3 \text{ kpsi}$$

(*b*) Interpolar a partir da Tabela 7-6 produz

$$(S_T/S_{RT})_{450°} = 1{,}018 + (0{,}995 - 1{,}018)\frac{450 - 400}{500 - 400} = 1{,}007$$

Logo, a resistência à tração, a 450°F, é estimada como

$$(S_{ut})_{450°} = (S_T/S_{RT})_{450°}(S_{ut})_{70°} = 1{,}007(70) = 70{,}5 \text{ kpsi}$$

[20] Para mais detalhes, ver a Tabela 2 do padrão de eixos ANSI/ASME B106. 1M-1985 e E. A. Brandes (ed.), *Smithell's Metals Reference Book*, 6th ed., Butterworth, London, 1983, p. 22-134 a 22-136, em que os limites de resistência entre 100 e 650°C estão tabulados.

Resposta

A partir da Equação (7-8), então,

$$(S_e)_{450^\circ} = 0{,}504\,(S_{ut})_{450^\circ} = 0{,}504(70{,}5) = 35{,}5 \text{ kpsi}$$

A parte *a* fornece uma melhor estimativa devido ao ensaio real do material específico.

Tabela 7-6 Efeito da temperatura de operação sobre a resistência à tração de aço.*(S_T = resistência à tração à temperatura de operação; S_{RT} = resistência à tração à temperatura ambiente; $0{,}099 \leq \hat{\sigma} \leq 0{,}110$)

Temperatura, °C	S_T/S_{RT}	Temperatura, °F	S_T/S_{RT}
20	1,000	70	1,000
50	1,010	100	1,008
100	1,020	200	1,020
150	1,025	300	1,024
200	1,020	400	1,018
250	1,000	500	0,995
300	0,975	600	0,963
350	0,943	700	0,927
400	0,900	800	0,872
450	0,843	900	0,797
500	0,768	1000	0,698
550	0,672	1100	0,567
600	0,549		

* *Fonte de dados*: Figura 3-8.

Fator de Confiabilidade k_e

A discussão aqui apresentada leva em conta o espalhamento de dados tal como mostrado na Figura 7-18, em que o limite de resistência médio é mostrado como $S'_e/S_{ut} \doteq 0{,}5$, ou como fornecido pela Equação (7-8). A maioria dos dados de resistência é relatada como valores médios. Os dados apresentados por Haugen e Wirching[21] mostram desvios-padrão da resistência de menos de 8%. Dessa forma, o fator modificador de confiabilidade para dar conta desse fato pode ser escrito como

$$k_e = 1 - 0{,}08\,z_a \tag{7-28}$$

em que z_a é definido pela Equação (2-16) e valores para qualquer confiabilidade que se deseje podem ser determinados a partir da Tabela A-10. A Tabela 7-7 provê fatores de confiabilidade para algumas confiabilidades-padrão especificadas.

Para um procedimento mais completo relativo à confiabilidade, ver a Seção 7-17.

Fator de Efeitos Diversos k_f

Embora o fator k_f destine-se a levar em conta a redução no limite de resistência devido a todos os outros efeitos, ele realmente é tido como um lembrete de que estes devem ser considerados, uma vez que os valores reais de k_f não estão sempre disponíveis.

Tensões residuais podem melhorar o limite de resistência ou afetá-lo adversamente. Em geral, se a tensão residual na superfície de uma peça for de compressão, o limite de resistência será melhorado. Falhas por fadiga parecem ser falhas por tração, ou pelo menos causadas por tensão de tração, de modo que qualquer coisa que reduza a tensão de tração reduzirá também a possibilidade de falha por fadiga. Operações como jateamento de esferas, martelamento e laminação a frio constroem tensões compressivas na superfície da peça e melhoram o limite de resistência de forma significativa. Naturalmente, o material não deve ser trabalhado à exaustão.

[21] E. B. Haugen e P. H. Wirsching, "Probabilistic Design", *Machine Design*, vol. 47, nº 12, 1975, p. 10-14.

Tabela 7-7 Fatores de confiabilidade k_e correspondentes a 8% de desvio-padrão do limite de resistência

Confiabilidade, %	Variante de transformação z_a	Fator de confiabilidade k_e
50	0	1,000
90	1,288	0,897
95	1,645	0,868
99	2,326	0,814
99,9	3,091	0,753
99,99	3,719	0,702
99,999	4,265	0,659
99,9999	4,753	0,620

Os limites de resistência de peças feitas de chapas laminadas ou repuxadas, ou de barras, bem como de peças forjadas, podem ser afetados pelas chamadas *características direcionais* da operação. Peças laminadas ou repuxadas, por exemplo, têm um limite de resistência na direção transversal que pode ser 10 a 20% menor que o limite de resistência na direção longitudinal.

Peças endurecidas superficialmente podem falhar na superfície ou no raio máximo do núcleo, dependendo do gradiente de tensão. A Figura 7-19 mostra a distribuição de tensão triangular típica de uma barra sob flexão ou torção. Também traçados como uma linha grossa nesta figura estão os limites de resistência S_e para a camada endurecida e o núcleo. Para esse exemplo, o limite de resistência do núcleo domina o projeto porque a figura mostra que a tensão σ ou τ, qualquer que se aplique, no raio externo do núcleo, é apreciavelmente maior que o limite de resistência desse núcleo.

Naturalmente, se também houver concentração de tensão, o gradiente de tensão será muito mais íngreme, de modo que falha no núcleo é improvável.

Corrosão

É de se esperar que peças que operem em uma atmosfera corrosiva tenham uma resistência à fadiga reduzida. Isso é obviamente verdade e se deve à formação de asperezas ou à cavitação da superfície por material corrosivo. Entretanto, o problema não é tão simples quanto aquele de encontrar o limite de resistência de um espécime que foi corroído. A razão para tal é que a corrosão e o tensionamento ocorrem ao mesmo tempo. Basicamente, isso significa que com o tempo qualquer peça falhará quando sujeita a tensionamento repetido em uma atmosfera corrosiva. Não há limite de fadiga. Logo, o problema do projetista é tentar minimizar os fatores que afetam a vida de fadiga, a saber:

- Tensão média ou estática
- Tensão alternante
- Concentração de eletrólito
- Oxigênio dissolvido no eletrólito
- Propriedades do material e composição

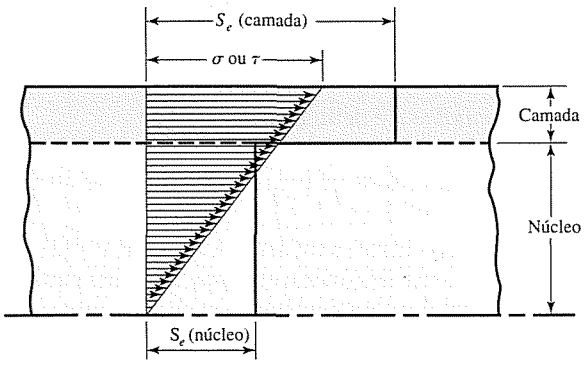


Figura 7-19 A falha de uma peça com camada endurecida em flexão ou torção. Neste exemplo, ocorre falha no núcleo.

- Temperatura
- Freqüência cíclica
- Taxa de fluxo de fluido ao redor do espécime
- Fendas locais

Chapeamento Eletrolítico

Revestimentos metálicos, tais como chapeamentos de cromo, de níquel ou de cádmio, reduzem o limite de resistência em até 50%. Em alguns casos, a redução por revestimentos foi tão intensa que se fez necessário eliminar o processo de chapeamento. O chapeamento de zinco não afeta a resistência à fadiga. A oxidação anódica de ligas leves reduz os limites de resistência sob flexão em cerca de 39%, mas não tem efeito no limite de resistência torcional.

Pulverização de Metal

A pulverização de metal resulta em imperfeições de superfície que podem iniciar trincas. Ensaios limitados mostram redução de 14% na resistência à fadiga.

Freqüência Cíclica

Se, por qualquer razão, o processo de fadiga tornar-se dependente do tempo, então também se tornará dependente da freqüência. Sob condições normais, a falha por fadiga é independente da freqüência. Porém, quando corrosão ou altas temperaturas, ou ambas, forem encontradas, a razão de ciclo tornar-se-á importante. Quanto menor a freqüência e mais alta a temperatura, mais alta a taxa de propagação de trinca e mais curta a vida a um dado nível de tensão.

Corrosão com Microabrasão

O fenômeno de corrosão com microabrasão é o resultado de movimentos microscópicos de peças ou estruturas muito atarraxadas. Juntas parafusadas, ajustes mancal-pista, cubos de roda e qualquer conjunto de peças muito atarraxadas são exemplos. O processo envolve descoloração superficial, cavitação e eventual fadiga. O fator de microabrasão k_f depende do material das partes unidas e varia entre 0,24 e 0,90.

7-10 Concentração de Tensão e Sensibilidade a Entalhe

Na Seção 4-14 foi assinalado que a existência de irregularidades ou descontinuidades, tais como furos, reentrâncias ou entalhes, em uma peça aumenta as tensões teóricas significativamente na vizinhança imediata da descontinuidade. A Equação (4-48) definiu um fator de concentração de tensão K_t (ou K_{ts}), que é utilizado com a tensão nominal para obter a máxima tensão resultante decorrente da irregularidade ou defeito. Ocorre que alguns materiais não são completamente sensíveis à presença de entalhes e, assim, para estes, um valor reduzido de K_t pode ser utilizado. Para esses materiais, a máxima tensão é, de fato,

$$\sigma_{\max} = K_f \sigma_0 \qquad \text{ou} \qquad \tau_{\max} = K_{fs} \tau_0 \tag{7-29}$$

em que K_f é um valor reduzido de K_t e σ_0 é a tensão nominal. O fator K_f é normalmente denominado *fator de concentração de tensão em fadiga*, daí o uso do subscrito f. Assim, é conveniente pensar em K_f como um fator de concentração de tensão reduzido de K_t devido a uma reduzida sensibilidade a entalhes. O fator resultante é definido pela equação

$$K_f = \frac{\text{tensão máxima em material entalhado}}{\text{tensão em material sem entalhe}} \tag{a}$$

A *sensibilidade a entalhe* q é definida pela equação

$$q = \frac{K_f - 1}{K_t - 1} \quad \text{ou} \quad q_{\text{cisalhamento}} = \frac{K_{fs} - 1}{K_{ts} - 1} \tag{7-30}$$

em que q fica geralmente entre zero e a unidade. A Equação (7-30) mostra que, quando $q = 0$, então $K_f = 1$ e o material não tem qualquer sensibilidade a entalhes. De outra parte, se $q = 1$, então $K_f = K_t$ e o material tem sensibilidade completa a entalhe. No trabalho de análise ou projeto, encontre primeiramente K_t, a partir da geometria da peça. Especifique então o material, encontre q e solucione para K_f a partir da equação

$$K_f = 1 + q(K_t - 1) \qquad \text{ou} \qquad K_{fs} = 1 + q_{\text{cisalhamento}}(K_{ts} - 1) \tag{7-31}$$

Para aços e ligas de alumínio 2024, utilize a Figura 7-20 para determinar q para flexão e carregamento axial. Para carregamento de cisalhamento, utilize a Figura 7-21. Ao utilizar esses diagramas, é importante saber que os resultados de testes reais a partir dos quais as curvas foram derivadas exibem muita dispersão. Por causa dessa dispersão, é sempre seguro utilizar $K_f = K_t$ toda vez que houver dúvida com relação ao valor real de q. Ademais, observe que q não está distante da unidade para raios de entalhe grandes.

A sensibilidade a entalhes de ferros fundidos é muito pequena, variando entre 0 e cerca de 0,20, dependendo da resistência à tração. Para ficar no lado conservador, recomenda-se que o valor $q = 0{,}20$ seja utilizado para todos os graus de ferro fundido.

A Figura 7-20 tem como base a *equação de Neuber*, que é fornecida por

$$K_f = 1 + \frac{K_t - 1}{1 + \sqrt{a/r}} \tag{7-32}$$

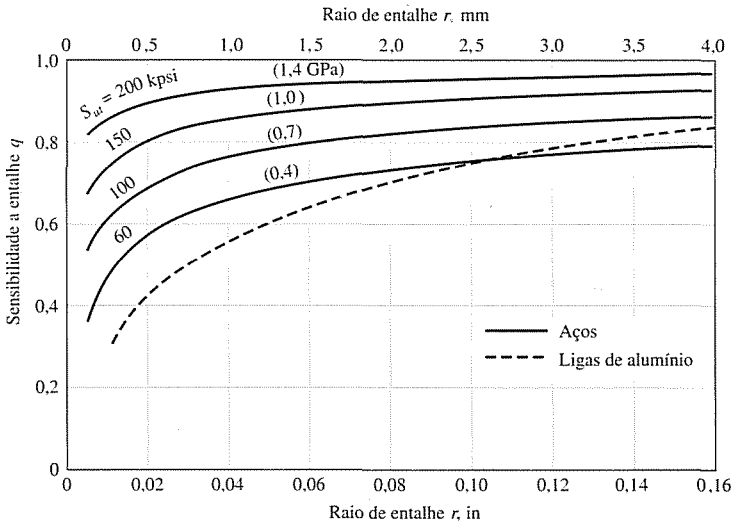


Figura 7-20 Diagrama de sensibilidade a entalhe para aços e ligas de alumínio forjado UNS A92024-T submetidas a flexão inversa ou a cargas axiais inversas. Para entalhes de raio maiores, use os valores de q correspondentes à ordenada $r = 0{,}16$ in (4 mm). *(De George Sines e J. L. Waisman (eds.),* Metal Fatigue, *McGraw-Hill, New York. Copyright © 1969 The McGraw-Hill Companies, Inc. Reimpressa com permissão.)*

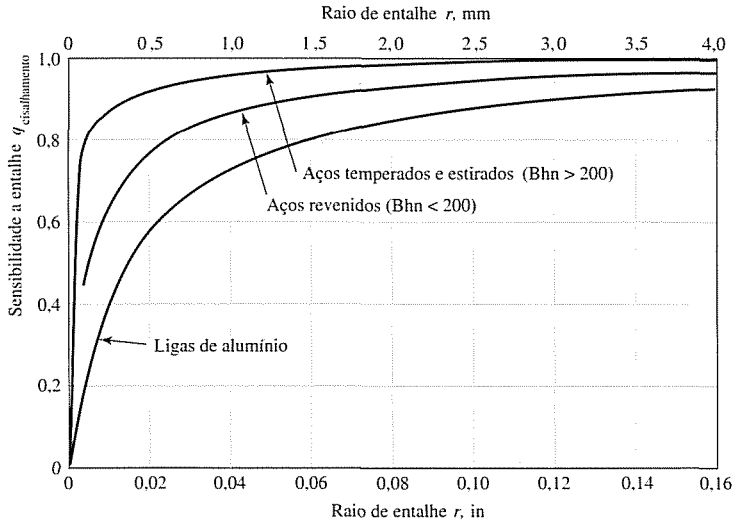


Figura 7-21 Curvas de sensibilidade a entalhe para materiais em torção inversa. Para raios de entalhe maiores, utilize os valores de $q_{\text{cisalhamento}}$ correspondentes a $r = 0{,}16$ in (4 mm).

em que $\sqrt{a}$ é definida como a *constante de Neuber* e é uma constante do material. Igualar as Equações (7-30) e (7-32) produz a equação de sensibilidade a entalhe

$$q = \frac{1}{1 + \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{r}}} \tag{7-33}$$

Para o aço, com S_{ut} em kpsi, a constante de Neuber pode ser aproximada por ajuste de dados com polinômio de terceira ordem na forma

$$\sqrt{a} = 0{,}245\,799 - 0{,}307\,794(10^{-2})S_{ut} + 0{,}150\,874(10^{-4})S_{ut}^2 - 0{,}266\,978(10^{-7})S_{ut}^3 \tag{7-34}$$

De modo a utilizar a Equação (7-32) ou (7-33) para a torção de aços de baixa liga, aumente a resistência última de 20 kpsi na Equação (7-34) e aplique esse valor de $\sqrt{a}$.

Uma distinção na configuração do entalhe é levada em conta na equação de Neuber modificada (por Heywood), na qual o fator de concentração de tensão de fadiga K_f é fornecido por

$$K_f = \frac{K_t}{1 + \dfrac{2(K_t - 1)}{K_t}\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{r}}} \tag{7-35}$$

sendo que a Tabela 7-8 provê valores de $\sqrt{a}$ para aços com furos transversais, mangas e reentrâncias.

Tabela 7-8 Parâmetro de Heywood $\sqrt{a}$ para aços;

Atributo	$\sqrt{a}(\sqrt{\text{in}})$, S_{ut} em kpsi	$\sqrt{a}(\sqrt{\text{mm}})$, S_{ut} em MPa
Furo transversal	$5/S_{ut}$	$174/S_{ut}$
Ombro	$4/S_{ut}$	$139/S_{ut}$
Fenda	$3/S_{ut}$	$104/S_{ut}$

EXEMPLO 7-6

Um eixo de aço sob flexão tem uma resistência última de 690 MPa e uma manga com um raio de filete de 3 mm conectando um diâmetro de 32 mm a um de 38 mm. Estime K_f usando:

(*a*) A Figura 7-20.

(*b*) As Equações (7-32) e (7-34).

(*c*) A Equação (7-35).

Solução

A partir da Figura A-15-9, empregando $D/d = 38/32 = 1{,}1875$, $r/d = 3/32 = 0{,}093\,75$, lemos o gráfico para encontrar $K_t \doteq 1{,}65$.

(*a*) A partir da Figura 7-20, para $S_{ut} = 690$ MPa e $r = 3$ mm, $q = 0{,}84$. Logo, a partir da Equação (7-31),

$$K_f = 1 + q(K_t - 1) \doteq 1 + 0{,}84(1{,}65 - 1) = 1{,}55$$

(*b*) A partir da Equação (7-34), com $S_{ut} = 690$ MPa = 100 kpsi, $\sqrt{a} = 0{,}062\sqrt{\text{in}} = 0{,}312\sqrt{\text{mm}}$. Substituindo isso na Equação (7-32) com $r = 3$ mm, obtemos

$$K_f = 1 + \frac{K_t - 1}{1 + \sqrt{a/r}} \doteq 1 + \frac{1{,}65 - 1}{1 + \dfrac{0{,}312}{\sqrt{3}}} = 1{,}55$$

(*c*) A partir da Tabela 7-8,

$$\sqrt{a} = \frac{139}{S_{ut}} = \frac{139}{690} = 0{,}2015\ \sqrt{\text{mm}}$$

A partir da Equação (7-35),

$$K_f = \frac{K_t}{1 + \dfrac{2(K_t - 1)}{K_t}\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{r}}} = \frac{1{,}65}{1 + \dfrac{2(1{,}65 - 1)}{1{,}65}\dfrac{0{,}2015}{\sqrt{3}}} = 1{,}51$$

que é 2,5% menor que nas partes *a* e *b*.

Para carregamento simples, é aceitável reduzir o limite de resistência tanto pela sua divisão em espécimes sem entalhe por K_f, quanto pela multiplicação da tensão inversa por K_f. Contudo, ao lidar com problemas de tensões combinadas que podem envolver mais do que um valor de fator de concentração para fadiga, as tensões são multiplicadas por K_f.

EXEMPLO 7-7

Considere um espécime não-entalhado com um limite de resistência de 55 kpsi. Se tal espécime fosse entalhado de modo que $K_f = 1{,}6$, qual seria o fator de segurança contra falha para $N > 10_6$ ciclos, em uma tensão inversa de 30 kpsi?

(*a*) Solucione reduzindo S'_e.

(*b*) Solucione aumentando a tensão aplicada.

Solução

(*a*) O limite de resistência do espécime entalhado é fornecido por

$$S_e = \frac{S'_e}{K_f} = \frac{55}{1{,}6} = 34{,}4\ \text{kpsi}$$

e o fator de segurança vale

$$n = \frac{S_e}{\sigma_a} = \frac{34{,}4}{30} = 1{,}15$$

(*b*) A máxima tensão pode ser escrita como

$$(\sigma_a)_{\max} = K_f \sigma_a = 1{,}6(30) = 48{,}0\ \text{kpsi}$$

e o fator de segurança é

$$n = \frac{S'_e}{K_f \sigma_a} = \frac{55}{48} = 1{,}15$$

Quando os ciclos até falha, N_f, são menores que 10^6, há evidência experimental de que o fator de concentração de tensão de fadiga $(K_f)_{N_f}$ é menor que K_f. Estudos mostraram que à medida que N_f se aproxima de 10^3 ciclos, $(K_f)_{N_f}$ para metais de alta resistência (geralmente de baixa ductilidade) aproxima-se de K_f, enquanto que para metais de baixa resistência (geralmente dúcteis) $(K_f)_{N_f}$ aproxima-se da unidade. Um enfoque conservador consiste em manter K_f constante dentro do intervalo $10^3 \leq N \leq 10^6$. Para levar em consideração uma redução de K_f, Shigley e Mischke[22] sugerem definir uma sensibilidade a entalhe a 10^3 ciclos, q_{10^3}, dada por

$$q_{10^3} = \frac{(K_f)_{10^3} - 1}{K_f - 1} = -0{,}18 + 0{,}43(10^{-2})S_{ut} - 0{,}45(10^{-5})S_{ut}^2 \qquad (7\text{-}36)$$

[22] J. E. Shigley e C. R. Mischke, *Mechanical Engineering Design*, 6th ed., McGraw-Hill, New York, 2001, p. 386-387.

em que S_{ut} está em kpsi, $S_{ut} < 330$ kpsi e K_f é o fator de concentração de tensão de fadiga a 10^6 ciclos. Solucionar para $(K_f)_{10^3}$ produz

$$(K_f)_{10^3} = 1 - (K_f - 1)[0{,}18 - 0{,}43(10^{-2})S_{ut} + 0{,}45(10^{-5})S_{ut}^2] \tag{7-37}$$

Supor um gráfico *S-N* de linha reta em *log-log* para o espécime entalhado desde $f\,S_{ut}/(K_f)_{10^3}$, 10^3 a S'_e/Kf, 10^6 produz, para $S_f/(K_f)_N$, N,

$$(K_f)_N = \frac{(K_f)_{10^3}^2}{K_f} N^{(1/3)\log[K_f/(K_f)_{10^3}]} \tag{7-38}$$

EXEMPLO 7-8

Empregando os resultados do Exemplo 7-6, encontre o valor de $(K_f)_{10^5}$.

Solução

A partir do Exemplo 7-6, $K_f = 1{,}51$ (parte c), $S_{ut} = 690/6{,}89 = 100$ kpsi. A partir da Equação (7-37),

$$\begin{aligned}(K_f)_{10^3} &= 1 - (K_f - 1)[0{,}18 - 0{,}43(10^{-2})S_{ut} + 0{,}45(10^{-5})S_{ut}^2] \\ &= 1 - (1{,}51 - 1)[0{,}18 - 0{,}43(10^{-2})100 + 0{,}45(10^{-5})100^2] \\ &= 1{,}105\end{aligned}$$

A partir da Equação (7-38),

Resposta

$$(K_f)_{10^3} = \frac{1{,}105^2}{1{,}51} 10^{5(1/3)\log(1{,}51/1{,}105)} = 1{,}36$$

Até aqui, os exemplos ilustraram cada fator da equação de Marin e fatores de concentração de tensão isoladamente. Consideremos agora fatores ocorrendo simultaneamente.

EXEMPLO 7-9

Uma barra de aço 1015 laminada a quente foi usinada a um diâmetro de 1 in. Ela deve ser posta sob carregamento axial inverso por 70 000 ciclos até falhar, em um ambiente operacional de 550°F. Utilizando as propriedades mínimas da ASTM e uma confiabilidade de 99%, estime o limite de resistência e a resistência à fadiga a 70 000 ciclos.

Solução

A partir da Tabela A-20, $S_{ut} = 50$ kpsi a 70°F. Uma vez que o limite de resistência do espécime de viga rotativa não é conhecido à temperatura ambiente, determinamos primeiramente a resistência última à temperatura elevada, utilizando a Tabela 7-6. A partir dessa tabela,

$$\left(\frac{S_T}{S_{RT}}\right)_{550^\circ} = \frac{0{,}995 + 0{,}963}{2} = 0{,}979$$

A resistência última a 550°F é, então,

$$(S_{ut})_{550^\circ} = (S_T/S_{RT})_{550^\circ}\,(S_{ut})_{70^\circ} = 0{,}979(50) = 49{,}0 \text{ kpsi}$$

O limite de resistência do espécime de viga rotativa a 550°F é então estimado, a partir da Equação (7-8), como

$$S'_e = 0{,}504(49) = 24{,}7 \text{ kpsi}$$

A seguir, determinamos os fatores de Marin. Para uma superfície usinada, a Equação (7-18), com a Tabela 7-4, produz

$$k_a = aS_{ut}^b = 2{,}70(49^{-0{,}265}) = 0{,}963$$

Para o carregamento axial, a partir da Equação (7-20), o fator de tamanho $k_b = 1$, e o fator de carregamento é $k_c = 0{,}85$ a partir da Equação (7-25). O fator de temperatura $k_d = 1$, uma vez que levamos em conta a temperatura ao modificarmos a resistência última e, conseqüentemente, o limite de resistência. Para uma confiabilidade de 99%, a partir da Tabela 7-7, $k_e = 0{,}814$. Por fim, à medida que quaisquer outras condições foram dadas, o fator de efeitos diversos é $k_f = 1$. O limite de resistência para a peça é estimado pela Equação (7-17) como

$$\begin{aligned} S_e &= k_a k_b k_c k_d k_e k_f S'_e \\ &= 0{,}963(1)(0{,}85)(1)(0{,}814)(1)24{,}7 = 16{,}5 \text{ kpsi} \end{aligned}$$

Resposta

Para obter a resistência à fadiga a 70 000 ciclos, necessitamos construir a equação *S-N*. A partir da Seção 7-8, Equação (7-10),

$$\sigma'_F = 49 + 50 = 99 \text{ kpsi}$$

A partir da Equação (7-11),

$$b = -\frac{\log(\sigma'_F/S_e)}{\log(2N_e)} = -\frac{\log(99/16{,}5)}{\log(2 \cdot 10^6)} = -0{,}1235$$

A Equação (7-9) então produz

$$f = \frac{\sigma'_F}{S_{ut}}(2 \cdot 10^3)^b = \frac{99}{49}(2 \cdot 10^3)^{-0{,}1235} = 0{,}790$$

A partir da Equação (7-13),

$$a = \frac{(fS_{ut})^2}{S_e} = \frac{[0{,}790(49)]^2}{16{,}5} = 90{,}8 \text{ kpsi}$$

Finalmente, a Equação (7-12) provê

$$S_f = aN^b = 90{,}8(70\,000)^{-0{,}1235} = 22{,}9 \text{ kpsi}$$

Resposta

EXEMPLO 7-10

A Figura 7-22(*a*) mostra um eixo rotativo, sustentado em mancais de esferas em *A* e *D* e carregado por uma força não-rotativa *F* de 6,8 kN. Empregando resistências "mínimas" ASTM, estime a vida da peça.

Solução

A partir da Figura 7-22(*b*), aprendemos que a falha provavelmente ocorrerá em *B*, em vez de *C*, ou no ponto de momento máximo. O ponto *B* tem uma secção transversal menor, um momento flexor maior e um fator de concentração de tensão mais alto do que *C*; além disso, na localização de momento máximo existe um tamanho maior e nenhum fator de concentração de tensão.

Solucionaremos o problema estimando primeiramente a resistência no ponto *B*, visto que ela será diferente em outro lugar, e comparando-a com a tensão no mesmo ponto.

A partir da Tabela A-20, encontramos $S_{ut} = 690$ MPa e $S_y = 580$ MPa. O limite de resistência é estimado como

$$S'_e = 0{,}504(690) = 347{,}8 \text{ MPa}$$

A partir da Equação (7-18) e da Tabela 7-4,

$$k_a = 4{,}51(690)^{-0{,}265} = 0{,}798$$

A partir da Equação (7-19),

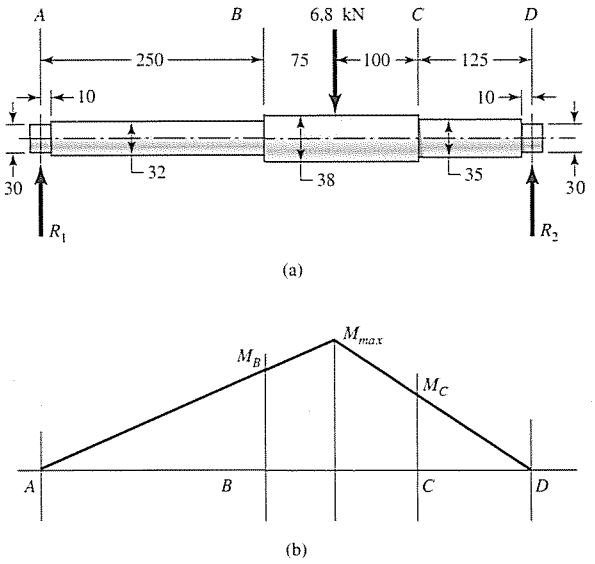


Figura 7-22 (*a*) Desenho de eixo mostrando todas as dimensões em milímetros; todos os arredondamentos com 3 mm de raio. O eixo roda e a carga é estacionária; o material é usinado a partir de aço AISI 1050 repuxado a frio. (*b*) Diagrama de momento flexor.

$$k_b = (32/7{,}62)^{-0{,}107} = 0{,}858$$

Uma vez que $k_c = k_d = k_e = k_f = 1$,

$$S_e = 0{,}798(0{,}858)347{,}8 = 238 \text{ MPa}$$

Para encontrar o fator geométrico de concentração de tensão K_t, entramos na Figura A-15-9 com D/d = 38/32 = 1,1875 e r/d = 3/32 = 0,093 75, bem como lemos $K_t \doteq 1{,}65$. A partir da Tabela 7-8, $\sqrt{a} = 139/690 = 0{,}201\ \sqrt{\text{mm}}$. A partir da Equação (7-35),

$$K_f = \frac{K_t}{1 + \dfrac{2(K_t - 1)}{K_t}\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{r}}} \doteq \frac{1{,}65}{1 + \dfrac{2(1{,}65 - 1)}{1{,}65}\dfrac{0{,}201}{\sqrt{3}}} = 1{,}51$$

Esse fator de concentração de tensão aplica-se a 10^6 ciclos ou mais.

O próximo passo é estimar a tensão de flexão no ponto B. O momento flexor é

$$M_B = R_1 x = \frac{225F}{550}250 = \frac{225(6{,}8)}{550}250 = 695 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Logo à esquerda de B, o módulo da secção é $I/c = \pi d^3/32 = \pi 3{,}2^3/32 = 3{,}22 \text{ cm}^3$. A tensão de flexão inversa é, supondo vida infinita,

$$\sigma = K_f \frac{M_B}{I/c} = 1{,}51\frac{695}{3{,}22} = 325{,}9 \text{ MPa}$$

Essa tensão é maior que S_e e menor que S_y. Isso significa que temos vida finita e nenhum escoamento no primeiro ciclo. Há dois procedimentos que podemos assumir nesse momento. O primeiro, conservador, consiste em supor que K_f seja constante, independentemente do número de ciclos N. O segundo consiste em utilizar a Equação (7-38). Veremos que, para este problema, o procedimento 1 é muito mais simples.

Procedimento 1. A partir da Equação (7-10),

$$\sigma'_F = S_{ut} + 345 = 690 + 345 = 1035 \text{ MPa}$$

A partir da Equação (7-11),

$$b = -\frac{\log(\sigma'_F/S_e)}{\log(2N_e)} = -\frac{\log(1035/238)}{\log(2 \cdot 10^6)} = -0{,}1013$$

A partir da Equação (7-9)

$$f = \frac{\sigma'_F}{S_{ut}}(2 \cdot 10^3)^b = \frac{1035}{690}(2 \cdot 10^3)^{-0.1013} = 0{,}695$$

A partir da Equação (7-13),

$$a = \frac{(fS_{ut})^2}{S_e} = \frac{[0{,}695(690)]^2}{238} = 966{,}3 \text{ MPa}$$

Resposta (Procedimento 1) A partir da Equação (7-15),

$$N = \left(\frac{\sigma_a}{a}\right)^{1/b} = \left(\frac{325{,}9}{966{,}3}\right)^{-1/0.1013} = 45{,}7(10^3) \text{ ciclos}$$

Procedimento 2. Ao utilizar a Equação (7-38), é requerido um valor para N, que é desconhecido. Como não conhecemos K_N, em vez de aplicar o fator de concentração de tensão de fadiga à tensão σ, reduziremos as resistências no diagrama S-N desse fator. Observe que tal procedimento não é aconselhável para problemas que envolvam tensões combinadas. A tensão nominal é

$$\sigma_{\text{nom}} = \frac{M_B}{I/c} = \frac{695}{3{,}22} = 215{,}8 \text{ MPa}$$

A partir da Equação (7-37), com $S_{ut} = 690/6{,}9 = 100$ kpsi,

$$\begin{aligned}(K_f)_{10^3} &= 1 - (K_f - 1)\left[0{,}18 - 0{,}43(10^{-2})S_{ut} + 0{,}45(10^{-5})S_{ut}^2\right] \\ &= 1 - (1{,}51 - 1)[0{,}18 - 0{,}43(10^{-2})100 + 0{,}45(10^{-5})100^2] \\ &= 1{,}105\end{aligned}$$

A equação S-N incorporando o fator de concentração de tensão de fadiga pode ser escrita como $N = (\sigma_a/a')^{1/b'}$ em que, de forma similar à das Equações (7-13) e (7-14),

$$a' = \frac{[fS_{ut}/(K_f)_{10^3}]^2}{S_e/K_f} = a\frac{K_f}{(K_f)^2_{10^3}} = 966{,}3\frac{1{,}51}{1{,}105^2} = 1195 \text{ MPa}$$

$$b' = -\frac{1}{3}\log\left[\frac{fS_{ut}/(K_f)_{10^3}}{S_e/K_f}\right] = b - \frac{1}{3}\log\frac{K_f}{(K_f)_{10^3}}$$

$$= -0{,}1013 - \frac{1}{3}\log\frac{1{,}51}{1{,}105} = -0{,}147$$

em que houve o uso de a e b proveniente do procedimento 1. O número de ciclos pode agora ser determinado, a partir da Equação (7-15), como

Resposta (Procedimento 2)

$$N = \left(\frac{\sigma_a}{a'}\right)^{1/b'} = \left(\frac{215{,}8}{1195}\right)^{-1/0.147} = 113{,}9(10^3) \text{ ciclos}$$

Vemos que o procedimento 1 é, de fato, mais conservador que o procedimento 2, por um fator de 2,5. Esse fator é efeito a partir de uma escala logarítmica. O procedimento 2 prediz um fator de concentração de tensão de fadiga, conforme a Equação (7-38), de

$$(K_f)_{113,9(10^3)} = \frac{(K_f)^2_{10^3}}{K_f} N^{(1/3)\log[K_f/(K_f)_{10^3}]}$$

$$= \frac{1{,}105^2}{1{,}51}[113{,}9(10^3)]^{(1/3)\log(1{,}51/1{,}105)} = 1{,}37$$

Sem qualquer conhecimento adicional do comportamento do material dado, pode-se selecionar a solução correspondente ao procedimento 1. Contudo, se é sabido que K_f aproxima a unidade para 10^3 ciclos, no caso desse material, então o procedimento 2 seria apropriado.

7-11 Caracterização de Tensões Flutuantes

Tensões flutuantes em maquinaria freqüentemente tomam a forma de um padrão senoidal, devido à natureza de algumas maquinarias rotativas. Contudo, outros padrões, alguns bastante irregulares, de fato ocorrem. Descobriu-se que, em padrões periódicos exibindo um único máximo e um único mínimo de força, a forma da onda não é importante, mas os picos em ambos os lados, alto (máximo) e baixo (mínimo), sim. Logo, F_{max} e F_{min} em um ciclo de força podem ser usados para caracterizar o padrão de força. É também verdade que variar acima e abaixo de alguma linha de base pode ser igualmente efetivo na caracterização do padrão de força. Se a força maior é F_{max} e a menor, F_{min}, então uma componente estável, fixa, e uma componente alternante podem ser construídas como segue:

$$F_m = \frac{F_{max} + F_{min}}{2} \qquad F_a = \left| \frac{F_{max} - F_{min}}{2} \right|$$

em que F_m é a componente média da variação da força e F_a, a componente de amplitude da força.

A Figura 7-23 ilustra alguns dos vários sinais de tensão-tempo que ocorrem. As componentes de tensão, algumas das quais mostradas na Figura 7-23(*d*), são

σ_{min} = tensão mínima	σ_m = componente média
σ_{max} = tensão máxima	σ_r = variação de tensão
σ_a = componente de amplitude	σ_s = tensão estática ou estável

A tensão estável, ou estática, *não* é igual à tensão média; de fato, ela pode ter qualquer valor entre σ_{min} e σ_{max} e existe devido a uma carga fixa ou pré-carga aplicada à peça, sendo geralmente independente da porção variante da carga. Uma mola helicoidal de compressão, por exemplo, está sempre carregada em um espaço menor que o comprimento livre da mola. A tensão criada por essa compressão inicial é chamada componente estável, ou estática, da tensão, não sendo a mesma que a tensão média.

Teremos oportunidade de aplicar os subscritos dessas componentes a tensões de cisalhamento, bem como a tensões normais.

As seguintes relações são evidentes a partir da Figura 7-23:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}$$
$$\sigma_a = \left| \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \right| \tag{7-39}$$

Além da Equação (7-39), a *razão de tensão*

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} \tag{7-40}$$

e a razão de tensão

$$A = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} \tag{7-41}$$

também são definidas e utilizadas em conexão com tensões flutuantes.

As Equações (7-39) utilizam os símbolos σ_a e σ_m como componentes de tensão no local sob escrutínio. Isso significa que, na ausência de um entalhe, σ_a e σ_m são iguais às tensões nominais σ_{ao} e σ_{mo} induzi-

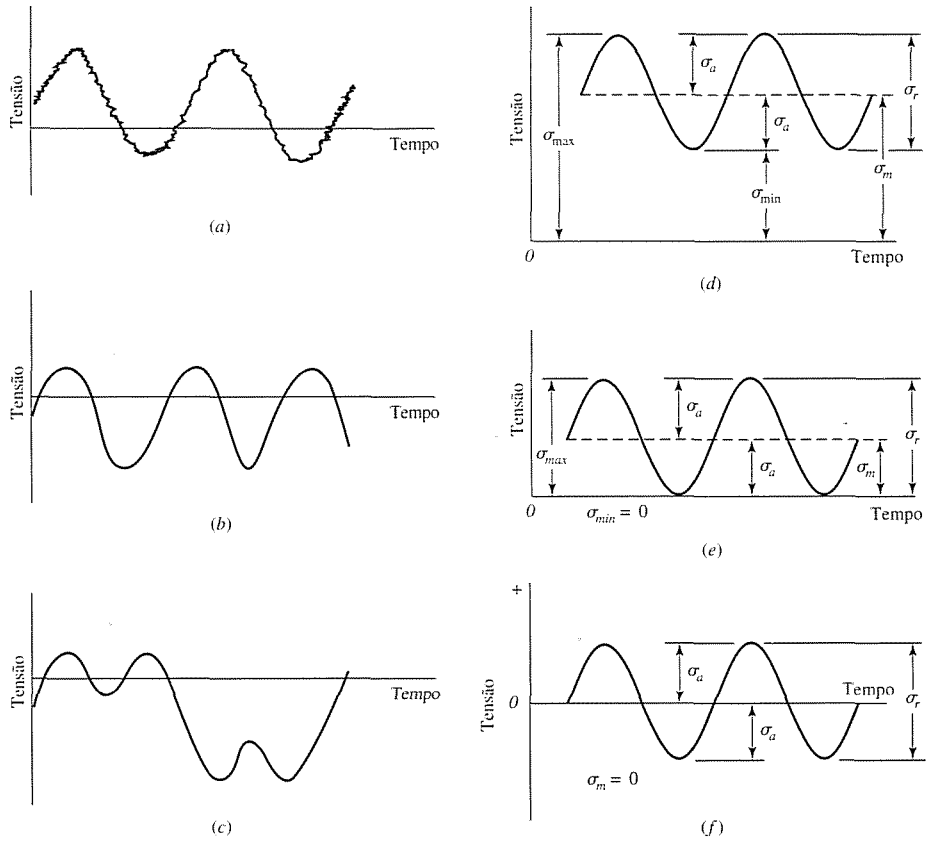


Figura 7-23 Algumas relações de tensão-tempo: (*a*) tensão flutuante com ondulação de alta freqüência; (*b* e *c*) tensão flutuante não-senoidal; (*d*) tensão flutuante senoidal; (*e*) tensão repetida; (*f*) tensão senoidal completamente inversa.

das pelas cargas F_a e F_m, respectivamente; na presença de um entalhe, elas são $K_f\sigma_{ao}$ e $K_f\sigma_{mo}$, respectivamente, contanto que o material permaneça sem deformação plástica. Em outras palavras, o fator de concentração de tensão de fadiga K_f é aplicado a *ambas* as componentes.

Quando a componente estável de tensão é elevada o suficiente para provocar escoamento localizado do entalhe, o projetista está diante de um problema. O escoamento local de primeiro ciclo produz deformação plástica e de enrijecimento. Isso ocorre no local onde a nucleação e o crescimento de trinca de fadiga são mais prováveis. As propriedades do material (S_y e S_{ut}) são novas e difíceis de quantificar. O engenheiro prudente controla o conceito, o material e a condição de uso, bem como a geometria, para que nenhuma deformação plástica ocorra. Há discussões concernentes às possíveis formas de quantificar o que ocorre sob escoamento localizado e geral na presença de um entalhe, referido como método da *tensão média nominal*, *da tensão residual* e similares.[23] O método da tensão média nominal (estabeleça $\sigma_a = K_f\sigma_{ao}$ e $\sigma_m = \sigma_{mo}$) produz resultados grosseiramente comparáveis aos do método da tensão residual, mas ambos são apenas *aproximações*.

Há o método de Dowling[24] para material dúctil, o qual, para materiais com um ponto de escoamento pronunciado e comportamento aproximado pelo modelo elástico-perfeitamente plástico, quantitativamente expressa o fator de concentração de tensão K_{fm} da componente de tensão estável como

$$\begin{aligned} K_{fm} &= K_f & K_f|\sigma_{\max,o}| &< S_y \\ K_{fm} &= \frac{S_y - K_f\sigma_{ao}}{|\sigma_{mo}|} & K_f|\sigma_{\max,o}| &> S_y \\ K_{fm} &= 0 & K_f|\sigma_{\max,o} - \sigma_{\min,o}| &> 2S_y \end{aligned} \tag{7-42}$$

[23] R. C. Juvinall, *Stress, Strain, and Strength*, McGraw-Hill, New York, 1967, artigos 14.9-14.12; R. C. Juvinall e K. M. Marshek, *Fundamentals of Machine Component Design*, Wiley, New York, 1991, Seção 8.11; M. E. Dowling, *Mechanical Behavior of Materials*, 2nd ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1999, Seções 10.3-10.5.

[24] Dowling, *op.cit.*, p. 437-438.

Para os propósitos deste livro, para materiais dúcteis em fadiga:

- Evite a deformação plástica localizada em um entalhe. Estabeleça $\sigma_a = K_f\sigma_{ao}$ e $\sigma_m = K_f\sigma_{mo}$.
- Quando a deformação plástica em um entalhe não puder ser evitada, use as Equações (7-42); ou, conservadoramente, estabeleça $\sigma_a = K_f\sigma_{ao}$ e utilize $K_{mf} = 1$, isto é, $\sigma_m = \sigma_{mo}$.

7-12 Critérios de Falha por Fadiga sob Tensões Flutuantes

Agora que definimos as várias componentes de tensão associadas a uma peça sujeita a tensão flutuante, desejamos variar tanto a tensão média como a amplitude de tensão, ou componente alternante, para aprender algo a respeito da resistência à fadiga das peças quando sujeitas a tais situações. Três métodos de representação gráfica dos resultados desses ensaios estão em uso geral e são mostrados nas Figuras 7-24 a 7-26.

O *diagrama de Goodman modificado* da Figura 7-24 tem a tensão média traçada ao longo da abscissa e todas as demais componentes de tensão na ordenada, com a tração na direção positiva. O limite de resistência, de resistência à fadiga ou à vida finita, qual seja o aplicável, é traçado na ordenada acima e abaixo da origem. A linha de tensão média é uma linha a 45° a partir da origem até a resistência sob tração da peça. O diagrama de Goodman modificado consiste em linhas construídas a S_e (ou S_f) acima e abaixo da origem. Observe que a resistência ao escoamento também aparece traçada em ambos os eixos, uma vez que tal escoamento seria o critério de falha se σ_{max} excedesse a S_y.

Uma outra forma de apresentar resultados de testes é ilustrada na Figura 7-25. Aqui, a abscissa representa a razão entre a resistência média S_m e a resistência última, com a tração desenhada à direita e a compressão, à esquerda. A ordenada é a razão entre a resistência alternante e o limite de resistência. A linha BC representa, então, o critério de falha de Goodman modificado. Observe que a existência de tensão média na região de compressão tem pouco efeito sobre o limite de resistência.

O engenhoso diagrama da Figura 7-26 é único na medida em que mostra as quatro componentes de tensão, bem como as duas razões de tensão. A curva que representa o limite de resistência para valores de R iniciando em $R = -1$ e terminando com $R = 1$ começa em S_e, no eixo σ_a, e termina em S_{ut}, no eixo σ_m. Curvas de vida constante para $N = 10^5$ ciclos e $N = 10^4$ ciclos foram também desenhadas. Qualquer estado de tensão, tal como aquele em A, pode ser descrito pelas componentes mínima e máxima, ou pelas componentes média e alternante. Além disso, a segurança é indicada sempre que o ponto descrito pelas componentes de tensão estiver situado abaixo da linha de vida constante.

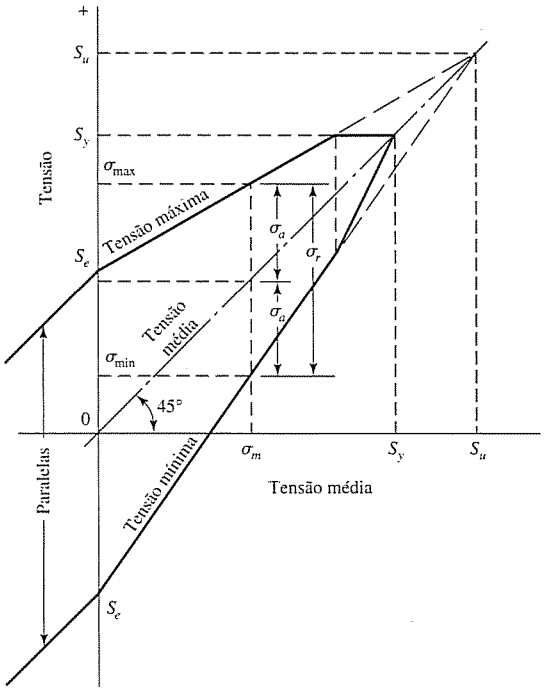


Figura 7-24 Diagrama modificado de Goodman mostrando todas as resistências e os valores-limite de todas as componentes de tensão para uma tensão média particular.

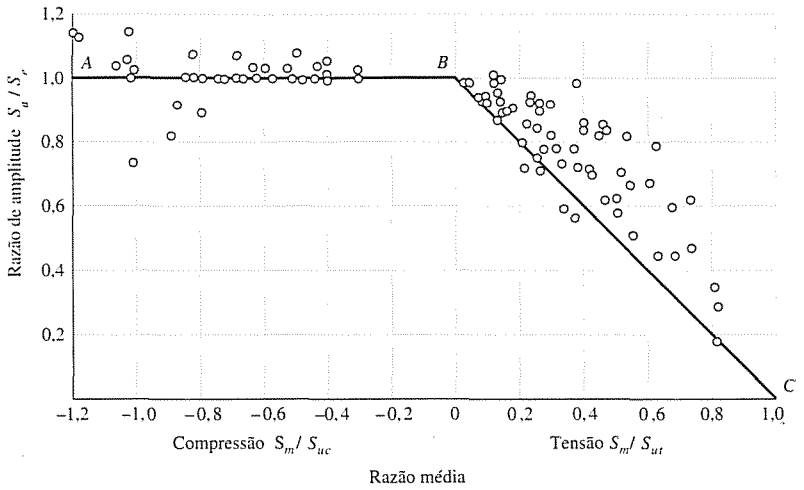


Figura 7-25 Gráfico das falhas de fadiga por tensões médias em ambas as regiões, de tração e compressão. Normalizar os dados usando-se a razão da componente de resistência estável para a resistência à tração S_m/S_{ut}, a componente de resistência estável para resistência à compressão S_m/S_{uc} e a amplitude da componente de resistência para o limite de resistência S_a/S'_e permite um gráfico dos resultados experimentais para diversos tipos de aço. *(Fonte de dados: Thomas J. Dolan, "Stress Range", Seção 6.2, em O. J. Horger (ed.),* ASME Handbook – Metals Engineering Design, *McGraw-Hill, New York, 1953.)*

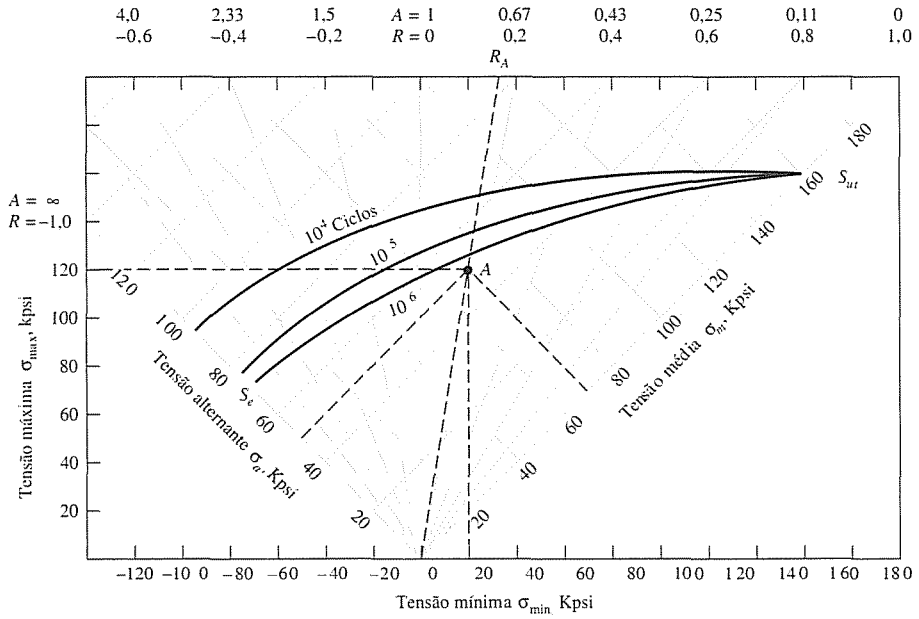


Figura 7-26 Diagrama-mestre de fadiga criado para o aço AISI 4340 tendo S_{ut} = 158 kpsi e S_y = 147 kpsi. As componentes de tensão em *A* são σ_{min} = 20, σ_{max} = 120, σ_m = 70 e σ_a = 50, todas em kpsi. *(Fonte: H. J. Grover,* Fatigue of Aircraft Structures, *U.S. Government Printing Office, Washington, D.C., 1966, p. 317, 322. Ver também J. A. Collins,* Failure of Materials in Mechanical Design, *Wiley, New York, 1981, p. 216.)*

Quando a tensão média é de compressão, ocorre falha sempre que $\sigma_a = S_e$ ou quando $\sigma_{max} = S_{yc}$, como indicado pelo lado esquerdo da Figura 7-25. Nem um diagrama de fadiga, ou qualquer outro critério de falha, necessita ser desenvolvido.

Na Figura 7-27, o lado de tração da Figura 7-25 foi redesenhado quanto às resistências, e não quanto às razões de resistência, com o mesmo critério de Goodman modificado ao lado de quatro critérios de falha adicionais. Tais diagramas são, com freqüência, construídos com o propósito de analisar e projetar; são de fácil utilização, e os resultados podem ser postos diretamente em escala.

O ponto de vista anterior, expresso em um diagrama $\sigma_a\sigma_m$, era o de que existia um local geométrico que dividia combinações seguras de combinações inseguras de σ_a, σ_m. As propostas resultantes incluíam a

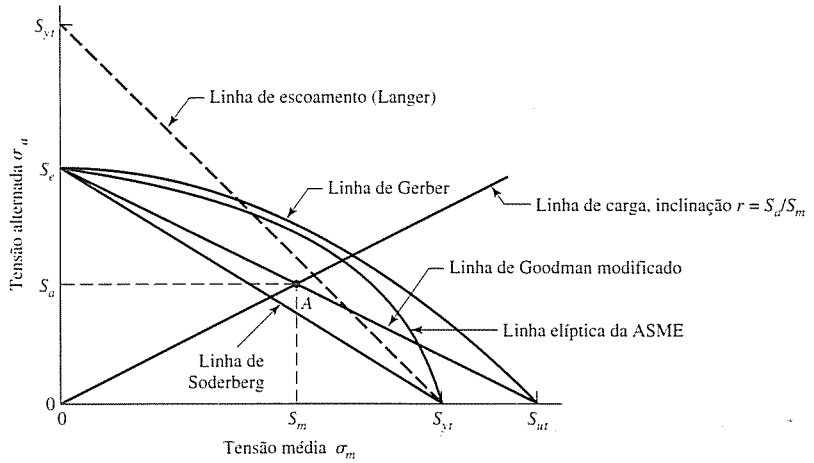


Figura 7-27 Diagrama de fadiga mostrando vários critérios de falha. Para cada critério, pontos na, ou "acima" da, respectiva linha indicam falha. Um ponto *A* na linha de Goodman, por exemplo, provê a resistência S_m como o valor-limite de σ_m correspondente à resistência S_a, que, emparelhada com σ_m , é o valor-limite de σ_a.

parábola de Gerber (1874), a linha (reta) de Goodman (1890)[25] e a linha (reta) de Soderberg (1930). À medida que mais dados foram gerados, ficou claro que um local geométrico de falha, em vez de ser uma "cerca", era mais como uma zona ou banda a partir da qual a probabilidade de falha poderia ser estimada. Incluímos o critério de falha de Goodman porque

- É uma linha reta e a álgebra é linear e fácil.
- É facilmente traçado – a qualquer tempo, para qualquer problema.
- Revela sutilezas de percepção nos problemas de fadiga.
- As respostas podem ser representadas em escala, a partir dos diagramas, como uma verificação da álgebra.

Também advertimos ser ele determinístico, ao passo que o fenômeno não o é. Trata-se de algo tendencioso, e não podemos quantificar a tendenciosidade. Tampouco é conservador. Constitui-se em uma pedra fundamental para o entendimento. É *história*! Portanto, para ler o trabalho de outros engenheiros e para com eles trocar idéias significativas, é necessário que você entenda a abordagem de Goodman, caso ela surja.

Seja o limite de fadiga S_e ou a resistência de vida finita S_f, ambos são marcados na ordenada da Figura 7-27. Esses valores já terão sido corrigidos usando-se os fatores de Marin da Equação (7-17). Observe que a resistência ao escoamento S_{yt} é marcada também na ordenada. Isso serve como um lembrete de que o escoamento de primeiro ciclo, em vez da fadiga, pode ser o critério de falha.

O eixo de tensão média da Figura 7-27 tem a resistência ao escoamento S_{yt} e a resistência à tração S_{ut} marcadas ao longo de si.

Cinco critérios de falha estão diagramados na Figura 7-27: o de Soderberg, o de Goodman modificado, o de Gerber, o elíptico da ASME e o de escoamento. O diagrama mostra que somente o critério de Soderberg protege contra o escoamento, mas é tendencioso abaixo.

Considerando a linha de Goodman modificada como um critério, o ponto *A* representa um ponto-limite, com uma resistência alternante S_a e uma resistência média S_m. A inclinação da linha de carga mostrada é definida como $r = S_a/S_m$.

A equação de critério para a linha de Soderberg é

$$\frac{S_a}{S_e} + \frac{S_m}{S_{yt}} = 1 \tag{7-43}$$

De maneira semelhante, encontramos a relação de Goodman modificado como

[25] É difícil datar o trabalho de Goodman porque ele passou por várias modificações e nunca foi publicado.

$$\frac{S_a}{S_e} + \frac{S_m}{S_{ut}} = 1 \tag{7-44}$$

O exame da Figura 7-25 mostra que ambas, uma parábola e uma elipse, contam com uma melhor oportunidade de passar entre os dados de tensão média e permitir a quantificação da probabilidade de falha. O critério de falha de Gerber é escrito como

$$\frac{S_a}{S_e} + \left(\frac{S_m}{S_{ut}}\right)^2 = 1 \tag{7-45}$$

e o critério elíptico da ASME é escrito como

$$\left(\frac{S_a}{S_e}\right)^2 + \left(\frac{S_m}{S_y}\right)^2 = 1 \tag{7-46}$$

O critério de escoamento de primeiro ciclo de *Langer* é utilizado em conexão com o local geométrico de fadiga:

$$\frac{S_a}{S_{yt}} + \frac{S_m}{S_{yt}} = 1 \tag{7-47}$$

As tensões $n\sigma_a$ e $n\sigma_m$ podem substituir S_a e S_m, sendo n o fator de projeto ou de segurança. Assim, a Equação (7-43), a linha de Soderberg, torna-se

$$\frac{\sigma_a}{S_e} + \frac{\sigma_m}{S_y} = \frac{1}{n} \tag{7-48}$$

A Equação (7-44), a linha de Goodman modificada, torna-se

$$\frac{\sigma_a}{S_e} + \frac{\sigma_m}{S_{ut}} = \frac{1}{n} \tag{7-49}$$

A Equação (7-45), a linha de Gerber, torna-se

$$\frac{n\sigma_a}{S_e} + \left(\frac{n\sigma_m}{S_{ut}}\right)^2 = 1 \tag{7-50}$$

A Equação (7-46), a linha elíptica da ASME, torna-se

$$\left(\frac{n\sigma_a}{S_e}\right)^2 + \left(\frac{n\sigma_m}{S_y}\right)^2 = 1 \tag{7-51}$$

Enfatizaremos as linhas de Gerber e elíptica da ASME para o critério de falha por fadiga, e a de Langer para o escoamento de primeiro ciclo. Contudo, projetistas conservadores freqüentemente empregam o critério de Goodman modificado, de modo que continuaremos incluindo-o em nossas discussões. Os critérios de falha são utilizados em conjunção com uma linha de carga, $r = S_a / S_m = \sigma_a / \sigma_m$. As intersecções principais estão dispostas nas Tabelas 7-9 a 7-11. Expressões formais para o fator de segurança de fadiga são fornecidas na parte inferior dessas mesmas tabelas.

Alguns exemplos ajudarão a solidificar as idéias recentemente discutidas.

Tabela 7-9 Amplitude e coordenadas estáveis de resistência e intersecções importantes no primeiro quadrante para critérios de falha de Goodman modificado e Langer

Equações da intersecção	Coordenadas da intersecção
$\frac{S_a}{S_e} + \frac{S_m}{S_{ut}} = 1$	$S_a = \frac{r S_e S_{ut}}{r S_{ut} + S_e}$
Linha de carga $r = \frac{S_a}{S_m}$	$S_m = \frac{S_a}{r}$

(continua...)

Tabela 7-9 Amplitude e coordenadas estáveis de resistência e intersecções importantes no primeiro quadrante para critérios de falha de Goodman modificado e Langer *(continuação)*

Equações da intersecção	Coordenadas da intersecção
$\frac{S_a}{S_y} + \frac{S_m}{S_y} = 1$ Linha de carga $r = \frac{S_a}{S_m}$	$S_a = \frac{r S_y}{1 + r}$ $S_m = \frac{S_y}{1 + r}$
$\frac{S_a}{S_e} + \frac{S_m}{S_{ut}} = 1$ $\frac{S_a}{S_y} + \frac{S_m}{S_y} = 1$	$S_m = \frac{(S_y - S_e) S_{ut}}{S_{ut} - S_e}$ $S_a = S_y - S_m, r_{crit} = S_a / S_m$

Fator de segurança de fadiga

$$n_f = \frac{1}{\frac{\sigma_a}{S_e} + \frac{\sigma_m}{S_{ut}}}$$

Tabela 7-10 Amplitude e coordenadas estáveis de resistência e intersecções importantes no primeiro quadrante para critérios de falha de Gerber e Langer

Equações da intersecção	Coordenadas da intersecção
$\frac{S_a}{S_e} + \left(\frac{S_m}{S_{ut}}\right)^2 = 1$ Linha de carga $r = \frac{S_a}{S_m}$	$S_a = \frac{r^2 S_{ut}^2}{2 S_e}\left[-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2 S_e}{r S_{ut}}\right)^2}\right]$ $S_m = \frac{S_a}{r}$
$\frac{S_a}{S_y} + \frac{S_m}{S_y} = 1$ Linha de carga $r = \frac{S_a}{S_m}$	$S_a = \frac{r S_y}{1 + r}$ $S_m = \frac{S_y}{1 + r}$
$\frac{S_a}{S_e} + \left(\frac{S_m}{S_{ut}}\right)^2 = 1$ $\frac{S_a}{S_y} + \frac{S_m}{S_y} = 1$	$S_m = \frac{S_{ut}^2}{2 S_e}\left[1 - \sqrt{1 + \left(\frac{2 S_e}{S_{ut}}\right)^2 \left(1 - \frac{S_y}{S_e}\right)}\right]$ $S_a = S_y - S_m, r_{crit} = S_a / S_m$

Fator de segurança de fadiga

$$n_f = \frac{1}{2}\left(\frac{S_{ut}}{\sigma_m}\right)^2 \frac{\sigma_a}{S_e}\left[-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2 \sigma_m S_e}{S_{ut} \sigma_a}\right)^2}\right] \qquad \sigma_m > 0$$

Tabela 7-11 Amplitude e coordenadas estáveis de resistência e intersecções importantes no primeiro quadrante para critérios de falha de Langer e ASME elíptico

Equações da intersecção	Coordenadas da intersecção
$\left(\frac{S_a}{S_e}\right)^2 + \left(\frac{S_m}{S_y}\right)^2 = 1$ Linha de carga $r = S_a/S_m$	$S_a = \sqrt{\frac{r^2 S_e^2 S_y^2}{S_e^2 + r^2 S_y^2}}$ $S_m = \frac{S_a}{r}$
$\frac{S_a}{S_y} + \frac{S_m}{S_y} = 1$ Linha de carga $r = S_a/S_m$	$S_a = \frac{r S_y}{1 + r}$ $S_m = \frac{S_y}{1 + r}$
$\left(\frac{S_a}{S_e}\right)^2 + \left(\frac{S_m}{S_y}\right)^2 = 1$ $\frac{S_a}{S_y} + \frac{S_m}{S_y} = 1$ Fator de segurança de fadiga	$S_a = 0,\ \frac{2 S_y S_e^2}{S_e^2 + S_y^2}$ $S_m = S_y - S_a,\ r_{crit} = S_a/S_m$
$n_f = \sqrt{\frac{1}{(\sigma_a/S_e)^2 + (\sigma_m/S_y)^2}}$	

EXEMPLO 7-11

Uma barra de diâmetro 1,5 in foi usinada a partir de uma barra AISI 1050 repuxada a frio. Essa peça deve agüentar uma carga de tração flutuante variando de 0 a 16 kip. Por causa das extremidades e do raio de arredondamento, o fator de concentração de tensão de fadiga K_f é de 1,85 para vida de 10^6 ou mais ciclos. Encontre S_a e S_m, mais o fator de segurança protegendo contra fadiga e escoamento de primeiro ciclo, mediante a utilização (*a*) da linha de fadiga de Gerber e (*b*) da linha de fadiga elíptica da ASME.

Solução

Comecemos com algumas preliminares. A partir da Tabela A-20, $S_{ut} = 100$ kpsi e $S_y = 84$ kpsi. Observe que $F_a = F_m = 8$ kip. Os fatores de Marin são, deterministicamente,

$$k_a = 2{,}70(100)^{-0{,}265} = 0{,}797\text{: Equação (7–18), Tabela 7–4}$$

$$k_b = 1 \text{ (axial carregamento, ver } k_c)$$

$$k_c = 0{,}85\text{: Equação (7–25)}$$

$$k_d = k_e = k_f = 1$$

$$S_e = 0{,}797(1)0{,}850(1)(1)(1)0{,}504(100) = 34{,}1 \text{ kpsi: Equações (7–8), (7–17)}$$

As componentes nominais de tensão normal σ_{ao} e σ_{mo} são

$$\sigma_{ao} = \frac{4F_a}{\pi d^2} = \frac{4(8)}{\pi 1{,}5^2} = 4{,}53 \text{ kpsi} \qquad \sigma_{mo} = \frac{4F_m}{\pi d^2} = \frac{4(8)}{\pi 1{,}5^2} = 4{,}53 \text{ kpsi}$$

Aplicar K_f a ambas as componentes σ_{ao} e σ_{mo} constitui uma prescrição de nenhum escoamento de entalhe:

$$\sigma_a = K_f \sigma_{ao} = 1{,}85(4{,}53) = 8{,}38 \text{ kpsi} = \sigma_m$$

A inclinação da linha de carga é $r = \sigma_a / \sigma_m = 1$.

(*a*) A partir do primeiro painel da Tabela 7-10,

$$S_a = \frac{(1)^2 100^2}{2(34,1)} \left\{ -1 + \sqrt{1 + \left[\frac{2(34,1)}{(1)100} \right]^2} \right\} = 30,9 \text{ kpsi}$$

$$S_m = \frac{S_a}{r} = \frac{30,9}{1} = 30,9 \text{ kpsi}$$

Na Figura 7-28, a intersecção entre a linha de carga e a linha de Gerber é o ponto *B*. O ponto *A* na linha de carga representa as componentes de tensão σ_a e σ_m. O ponto *C* representa a intersecção entre a linha de carga e a linha de escoamento de Langer. A partir da Tabela 7-10,

$$S_a = \frac{rS_y}{1+r} = \frac{(1)84}{1+1} = 42 \text{ kpsi} \qquad S_m = \frac{S_a}{r} = \frac{42}{1} = 42 \text{ kpsi}$$

A linha de carga é o local geométrico de possíveis estados de tensão. À medida que o carregamento aumentar, o ponto *A* se moverá em direção aos pontos *B* e *C*. O primeiro encontro é com o ponto *B*, na linha de Gerber; logo, a ameaça à peça é de fadiga. O fator de segurança em fadiga n_f é

$$n_f = \frac{OB}{OA} = \frac{(S_a)_{\text{Gerber}}}{\sigma_a} = \frac{30,9}{8,38} = 3,69$$

Alternativamente, a partir do quarto painel da Tabela 7-10,

$$n_f = \frac{1}{2}\left(\frac{100}{8,38}\right)^2 \left(\frac{8,38}{34,1}\right) \left\{ -1 + \sqrt{1 + \left[\frac{2(8,38)34,1}{100(8,38)} \right]^2} \right\} = 3,68$$

indicando erro de arredondamento. O fator de segurança protegendo contra escoamento de primeiro ciclo é

$$n_y = \frac{OC}{OA} = \frac{(S_a)_{\text{Langer}}}{\sigma_a} = \frac{42,0}{8,38} = 5,01$$

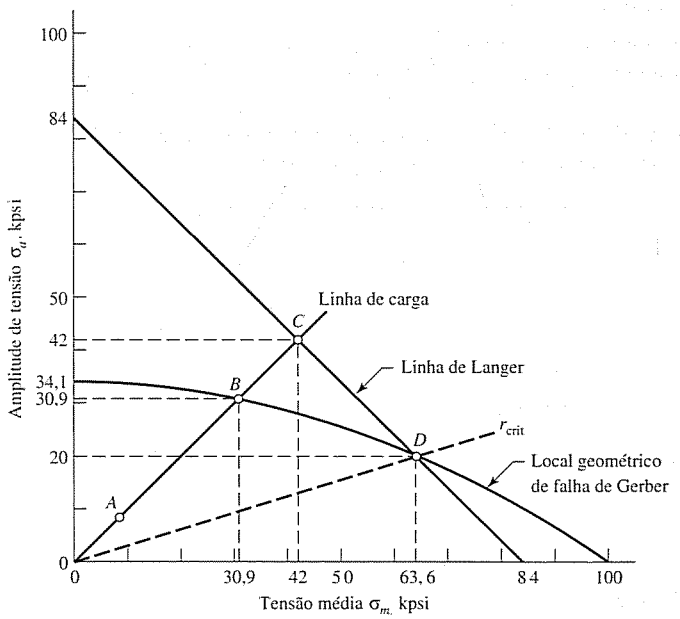


Figura 7-28 Pontos principais *A*, *B*, *C* e *D* no diagrama do projetista traçado para linhas de Gerber, de Langer e de carga.

Isso confirma não haver escoamento local no arredondamento. O ponto D representa a mudança de falha por fadiga para escoamento de primeiro ciclo. As coordenadas do ponto D podem ser encontradas a partir da solução simultânea das Equações (7-45) e (7-47), como mostrado no terceiro painel da Tabela 7-10:

$$S_m = \frac{100^2}{2(34,1)}\left[1 - \sqrt{1 + \left(\frac{2(34,1)}{100}\right)^2\left(1 - \frac{84}{34,1}\right)}\right] = 63,8 \text{ kpsi}$$

$$S_a = S_y - S_m = 84 - 63,8 = 20,2 \text{ kpsi}$$

A inclinação crítica da linha de carga r_{crit} é

$$r_{crit} = \frac{S_a}{S_m} = \frac{20,2}{63,8} = 0,317$$

O fato de a inclinação da linha de carga ser $r = 1$ e $r_{crit} < r$ confirma que há uma ameaça primária de fadiga.

(*b*) A partir do painel 1 da Tabela 7-11, com $r = 1$, obtemos as coordenadas S_a e S_m do ponto B na Figura 7-29:

$$S_a = \sqrt{\frac{(1)^2 34,1^2 84^2}{34,1^2 + (1)^2 84^2}} = 31,6 \text{ kpsi} \qquad S_m = \frac{S_a}{r} = \frac{31,6}{1} = 31,6 \text{ kpsi}$$

A partir do painel 3 da Tabela 7-11, as coordenadas S_a e S_m do ponto D na Figura 7-29 são

$$S_a = \frac{2}{84(1/34,1^2 + 1/84^2)} = 23,8 \text{ kpsi} \qquad S_m = S_y - S_a = 84 - 23,8 = 60,2 \text{ kpsi}$$

$$r_{crit} = \frac{S_a}{S_m} = \frac{23,8}{60,2} = 0,395$$

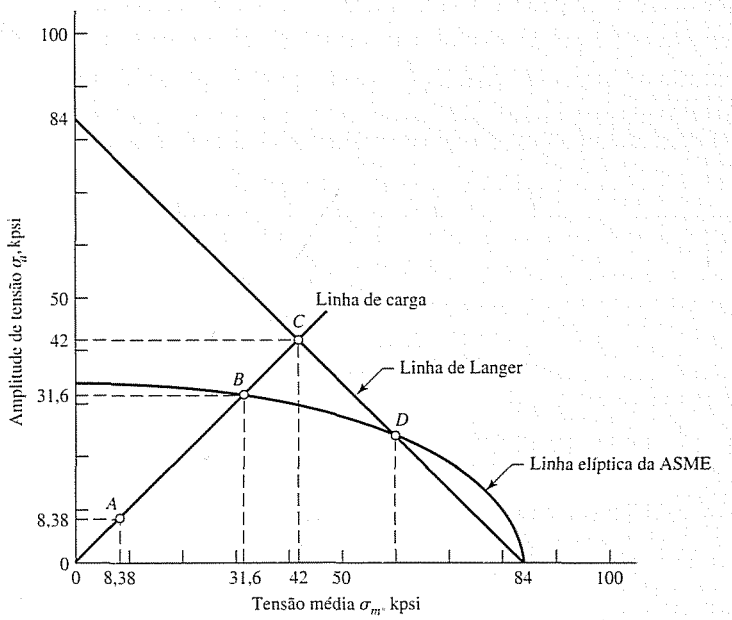


Figura 7-29 Pontos principais *A*, *B*, *C* e *D* no diagrama do projetista traçado para linhas elípticas da ASME, de Langer e de carga.

Visto que $r_{crit} < r$, a ameaça primária é de fadiga. O fator de segurança em fadiga n_f é fornecido por

$$n_f = \frac{S_a}{\sigma_a} = \frac{31{,}6}{8{,}38} = 3{,}77$$

Alternativamente, a partir do quarto painel da Tabela 7-11,

$$n_f = \sqrt{\frac{1}{(8{,}38/34{,}1)^2 + (8{,}38/84)^2}} = 3{,}77$$

O fator de segurança protegendo contra escoamento de primeiro ciclo n_y é

$$n_y = \frac{(S_a)_y}{\sigma_a} = \frac{42}{8{,}38} = 5{,}01$$

Os critérios de falha por fadiga ASME-Gerber e ASME elíptico aproximam-se muito um do outro e são utilizados intercambiavelmente. A norma ANSI/ASME B106.1M-1985 emprega o critério ASME elíptico para eixos.

EXEMPLO 7-12

Uma mola de chapa plana é usada para reter um seguidor de face plana em contato com um came de placa. O intervalo de movimento do seguidor é de 2 in e está fixo; logo, a componente alternante de força, o momento flexor e a tensão também estarão fixos. A mola é pré-carregada para se ajustar a várias velocidades do came. A pré-carga deve ser aumentada para prevenir flutuação e salto do seguidor. Para velocidades baixas, ela deve ser diminuída para obter uma vida mais longa das superfícies do came e do seguidor. A mola é uma viga de aço em balanço com comprimento de 32 in, largura de 2 in e espessura de $\frac{1}{4}$ in, conforme visto na Figura 7-30(*a*). As resistências da mola são $S_{ut} = 150$ kpsi, $S_y = 127$ kpsi e $S_e = 28$ kpsi completamente corrigidas. O movimento total do came é de 2 in. O projetista deseja pré-carregar a mola deflectindo-a 2 in para baixas velocidades, e 5 in para altas velocidades.

(*a*) Trace as linhas de falha de Gerber-Langer com a linha de carga.

(*b*) Quais são os fatores de segurança da resistência correspondentes às pré-cargas de 2 in e 5 in?

(*c*) Quais são os fatores de segurança baseados na deflexão da pré-carga?

Solução

Iniciemos com preliminares. O segundo momento de área da secção transversal da viga em balanço é

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{2(0{,}25)^3}{12} = 0{,}00260 \text{ in}^4$$

Visto que, a partir da Tabela A-9, a viga 1, a força F e a deflexão y em uma viga em balanço são relacionadas por $F = 3\,EIy/l^3$, então a tensão σ e a deflexão y são relacionadas por

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{32Fc}{I} = \frac{32(3EIy)}{l^3}\frac{c}{I} = \frac{96Ecy}{l^3} = Ky$$

em que $K = \dfrac{96(30 \cdot 10^6)0{,}125}{32^3} = 10{,}99(10^3)$ psi/in $= 10{,}99$ kpsi/in

Agora, os máximos e mínimos de F, y e σ podem ser definidos por

$$y_{min} = \delta \qquad y_{max} = 2 + \delta$$

$$F_{min} = 3EI\delta/l^3 \qquad F_{max} = 3EI(2 + \delta)/l^3$$

$$\sigma_{min} = K\delta \qquad \sigma_{max} = K(2 + \delta)$$

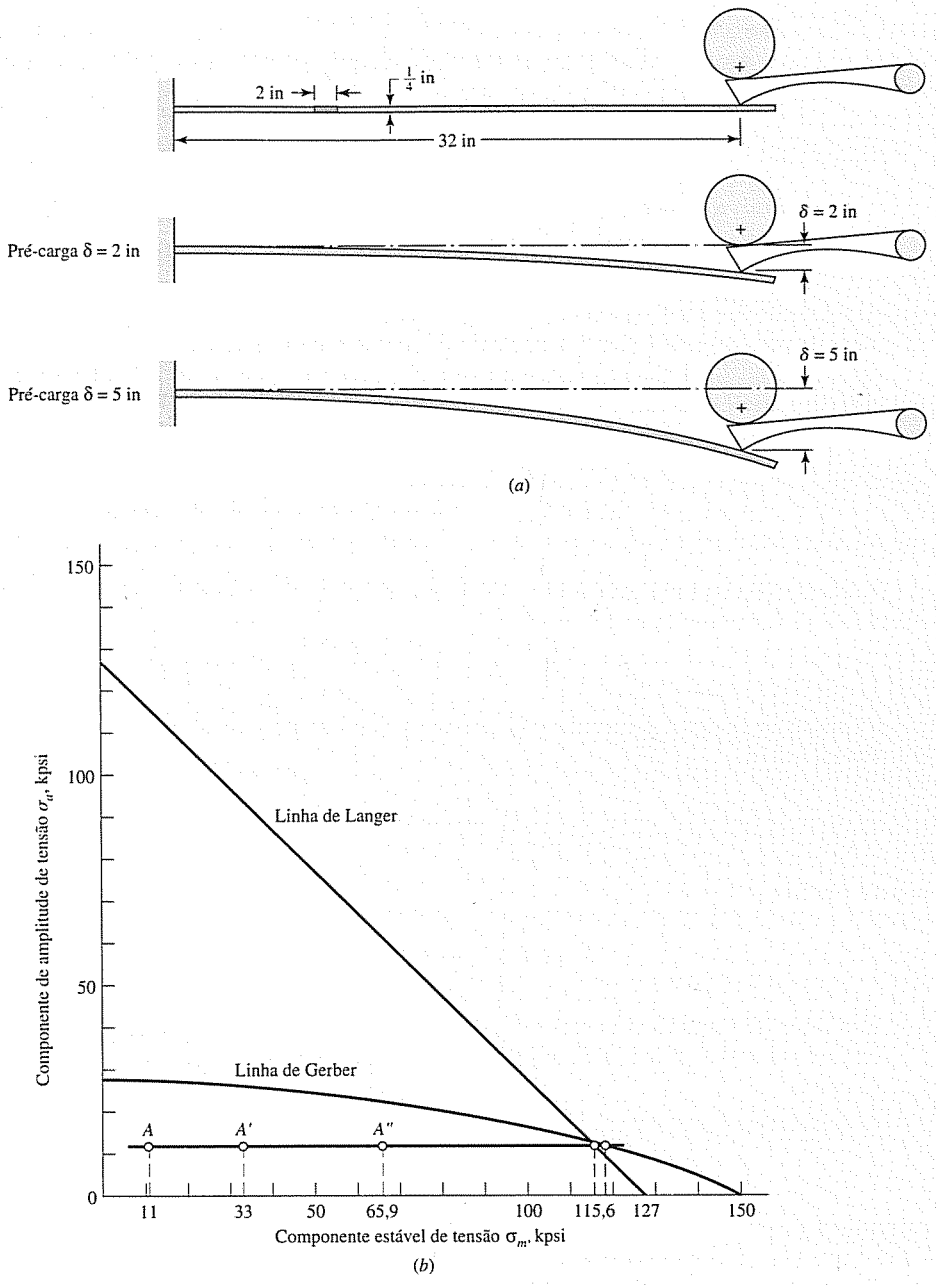


Figura 7-30 Mola de retenção de came e seguidor. (*a*) Geometria; (*b*) diagrama de fadiga do projetista para o Exemplo 7-12.

As componentes de tensão são, portanto,

$$\sigma_a = \frac{K(2+\delta) - K\delta}{2} = K$$

$$\sigma_m = \frac{K(2+\delta) + K\delta}{2} = K(1+\delta)$$

Para $\delta = 0$,

$$\sigma_{\max} = K(2+\delta) = 10{,}99(2) = 22 \text{ kpsi} \qquad \sigma_a = (22-0)/2 = 11 \text{ kpsi}$$

$$\sigma_{\min} = K\delta = 0 \text{ kpsi} \qquad \sigma_m = (22+0)/2 = 11 \text{ kpsi}$$

Para $\delta = 2$,

$$\sigma_{max} = K(2 + 2) = 10{,}99(4) = 44 \text{ kpsi} \qquad \sigma_a = (44 - 22)/2 = 11 \text{ kpsi}$$
$$\sigma_{min} = K\delta = 10{,}99(2) = 22 \text{ kpsi} \qquad \sigma_m = (44 + 22)/2 = 33 \text{ kpsi}$$

Para $\delta = 5$,

$$\sigma_{max} = K(2 + \delta) = 10{,}99(2 + 5) = 76{,}9 \text{ kpsi} \qquad \sigma_a = (76{,}9 - 54{,}9)/2 = 11 \text{ kpsi}$$
$$\sigma_{min} = K\delta = 10{,}99(5) = 54{,}9 \text{ kpsi} \qquad \sigma_m = (76{,}9 + 54{,}9)/2 = 65{,}6 \text{ kpsi}$$

(*a*) Um gráfico dos locais geométricos de Gerber e Langer é mostrado na Figura 7-30(*b*). As três deflexões de pré-carga de 0, 2 e 5 in são exibidas como pontos A, A' e A''. Observe que, uma vez σ_a constante a 11 kpsi, a linha de carga é horizontal e não contém a origem. A intersecção entre a linha de Gerber e a linha de carga é encontrada a partir da solução da Equação (7-45) para S_m e da substituição de 11 kpsi por S_a:

$$S_m = S_{ut}\sqrt{1 - \frac{S_a}{S_e}} = 150\sqrt{1 - \frac{11}{28}} = 116{,}9 \text{ kpsi}$$

A intersecção da linha de Gerber com a linha de carga é encontrada solucionando-se a Equação (7-47) para S_m e substituindo-se 11 kpsi por S_a:

$$S_m = S_y - S_a = 127 - 11 = 116 \text{ kpsi}$$

Os riscos de fadiga e escoamento de primeiro ciclo são aproximadamente iguais.

(*b*) Para $\delta = 2$ in,

$$n_f = \frac{S_m}{\sigma_m} = \frac{116{,}9}{33} = 3{,}54 \qquad n_y = \frac{116}{33} = 3{,}52$$

e, para $\delta = 5$ in,

$$n_f = \frac{116{,}9}{65{,}9} = 1{,}77 \qquad n_y = \frac{116}{65{,}9} = 1{,}76$$

(*c*) Um fator de segurança baseado na deflexão de pré-carga implica encontrar a deflexão de pré-carga associada à falha. Tratando a fadiga como a ameaça, a relação de Gerber pode ser expressa como

$$\frac{11}{28} + \left(\frac{K\delta^*}{150}\right)^2 = 1$$

e a partir daí

$$\delta^* = \frac{150}{K}\sqrt{1 - \frac{11}{28}} = \frac{150}{11}\sqrt{1 - \frac{11}{28}} = 10{,}6 \text{ in}$$

Para velocidades mais lentas, o fator de segurança pode ser definido como

Resposta
$$n = \frac{\text{deflexão de pré-carga de perda de função}}{\text{deflexão de pré-varga de trabalho}} = \frac{\delta^*}{\delta} = \frac{10{,}6}{2} = 5{,}3$$

Para velocidades mais altas, a mesma definição se aplica e o fator de segurança é

Resposta
$$n = \frac{10{,}6}{5} = 2{,}12$$

EXEMPLO 7-13

Uma barra de aço é submetida a um carregamento cíclico tal que $\sigma_{max} = 60$ kpsi e $\sigma_{min} = -20$ kpsi. Para o material, $S_{ut} = 80$ kpsi, $S_y = 65$ kpsi, o limite de resistência completamente corrigido é $S_e = 40$ kpsi e $f = 0{,}9$. Estime o número de ciclos para falha por fadiga empregando:

(*a*) O critério de Goodman modificado.

(*b*) O critério de Gerber.

Solução

A partir das tensões fornecidas,

$$\sigma_a = \frac{60 - (-20)}{2} = 40 \text{ kpsi} \qquad \sigma_m = \frac{60 + (-20)}{2} = 20 \text{ kpsi}$$

A partir das propriedades do material, as Equações (7-13) a (7-15) produzem

$$a = \frac{(f S_{ut})^2}{S_e} = \frac{[0{,}9(80)]^2}{40} = 129{,}6 \text{ kpsi}$$

$$b = -\frac{1}{3}\log\left(\frac{f S_{ut}}{S_e}\right) = -\frac{1}{3}\log\left[\frac{0{,}9(80)}{40}\right] = -0{,}0851$$

$$N = \left(\frac{S_f}{a}\right)^{1/b} = \left(\frac{S_f}{129{,}6}\right)^{-1/0{,}0851}$$

em que S_f substituiu σ_a na Equação (7-15).

(*a*) Para o critério de Goodman, com $n = 1$ e $S_e = S_f$, a Equação (7-49) produz

$$S_f = \frac{\sigma_a}{1 - \dfrac{\sigma_m}{S_{ut}}} = \frac{40}{1 - \dfrac{20}{80}} = 53{,}3 \text{ kpsi}$$

Substituir esse resultado na Equação (1) resulta em

Resposta

$$N = \left(\frac{53{,}3}{129{,}6}\right)^{-1/0{,}0851} = 3{,}40(10^4) \text{ ciclos}$$

(*b*) Para Gerber, de modo semelhante a (*a*), a partir da Equação (7-50),

$$S_f = \frac{\sigma_a}{1 - \left(\dfrac{\sigma_m}{S_{ut}}\right)^2} = \frac{40}{1 - \left(\dfrac{20}{80}\right)^2} = 42{,}7 \text{ kpsi}$$

Novamente, a partir da Equação (1),

Resposta

$$N = \left(\frac{42{,}7}{129{,}6}\right)^{-1/0{,}0851} = 4{,}68(10^5) \text{ ciclos}$$

Comparando as respostas, observamos uma grande diferença nos resultados. Novamente o critério de Goodman modificado é conservador se comparado ao de Gerber, para o qual a diferença moderada em S_f é então aumentada por uma relação logarítmica S, N.

Para muitos materiais *frágeis*, o critério de falha por fadiga de primeiro quadrante segue um local geométrico côncavo para cima de Smith-Dolan, representado por

$$\frac{S_a}{S_e} = \frac{1 - S_m/S_{ut}}{1 + S_m/S_{ut}} \tag{7-52}$$

ou, como uma equação de projeto,

$$\frac{n\sigma_a}{S_e} = \frac{1 - n\sigma_m/S_{ut}}{1 + n\sigma_m/S_{ut}} \tag{7-53}$$

Para uma linha de carga radial de inclinação r, substituímos S_a/r por S_m na Equação (7-52) e solucionamos para S_a, obtendo

$$S_a = \frac{rS_{ut} + S_e}{2}\left[-1 + \sqrt{1 + \frac{4rS_{ut}S_e}{(rS_{ut} + S_e)^2}}\right] \tag{7-54}$$

O diagrama de fadiga para um material frágil difere marcadamente daquele para um material dúctil:

- Não ocorre escoamento, uma vez que o material pode não apresentar uma resistência a ele.
- Tipicamente, a resistência à compressão última excede à resistência à tração última em várias vezes.
- O local geométrico de falha por fadiga no primeiro quadrante é côncavo para cima (Smith-Dolan), por exemplo, e tão plano quanto o de Goodman. Materiais frágeis são mais sensíveis à tensão média, sendo (o local geométrico) mais baixo (que Goodman), porém tensões de compressão médias são benéficas.
- Uma quantidade insuficiente de trabalho sobre fadiga frágil não permitiu descobrir generalidades intrínsecas, de modo que permanecemos no primeiro quadrante e um pouco no segundo quadrante.

O domínio mais provável de utilização pelo projetista está no intervalo de $-S_{ut} \le \sigma_m \le S_{ut}$. O local geométrico no primeiro quadrante é o de Goodman, o de Smith-Dolan ou de algo entre eles. A porção utilizada do segundo quadrante é representada por uma linha reta entre os pontos $-S_{ut}$, S_{ut} e 0, S_e, que possui a equação

$$S_a = S_e + \left(\frac{S_e}{S_{ut}} - 1\right)S_m \qquad -S_{ut} \le S_m \le 0 \quad \text{(para ferro fundido)} \tag{7-55}$$

A Tabela A-24 apresenta propriedades de ferro fundido cinza. O limite de resistência declarado é realmente $k_a k_b S'_e$, e apenas as correções k_c, k_d, k_e e k_f necessitam ser feitas. O valor médio de k_c para carregamento axial e torcional é 0,9.

EXEMPLO 7-14

Um ferro fundido cinza, grau 30, está sujeito a uma carga F aplicada a um conector de secção transversal de 1 por $\frac{3}{8}$ in, com um orifício de diâmetro de $\frac{1}{4}$ in furado no centro, como representado na Figura 7-31(*a*). As superfícies são usinadas. Nos arredores do orifício, indique qual é o fator de segurança protegendo contra falha sob as seguintes condições:

(*a*) A carga $F = 1000$ lbf em tração, permanente.

(*b*) A carga é de 1000 lbf e aplicada repetidamente.

(*c*) A carga flutua entre −1000 lbf e 300 lbf, sem ação de coluna.

Utilize o local geométrico de fadiga de Smith-Dolan.

Solução

Algum trabalho preparatório é necessário. A partir da Tabela A-24, $S_{ut} = 31$ kpsi, $S_{uc} = 109$ kpsi, $k_a k_b S'_e = 14$ kpsi. Visto que k_c para carregamento axial é 0,9, então $S_e = (k_a k_b S'_e)k_c = 14(0,9) = 12,6$ kpsi. Utilizando a Tabela A-15-1, $A = t(w - d) = 0,375(1 - 0,25) = 0,281$ in^2, $d/w = 0,25/1 = 0,25$ e $K_t = 2,45$. A sensibilidade a entalhe para o ferro fundido é 0,20 (ver p. 333), de modo que

$$K_f = 1 + q(K_t - 1) = 1 + 0,20(2,45 - 1) = 1,29$$

(*a*) $$\sigma_a = \frac{K_f F_a}{A} = \frac{1,29(0)}{0,281} = 0 \qquad \sigma_m = \frac{K_f F_m}{A} = \frac{1,29(1000)}{0,281}(10^{-3}) = 4,59 \text{ kpsi}$$

e

Resposta

$$n = \frac{S_{ut}}{\sigma_m} = \frac{31,0}{4,59} = 6,75$$

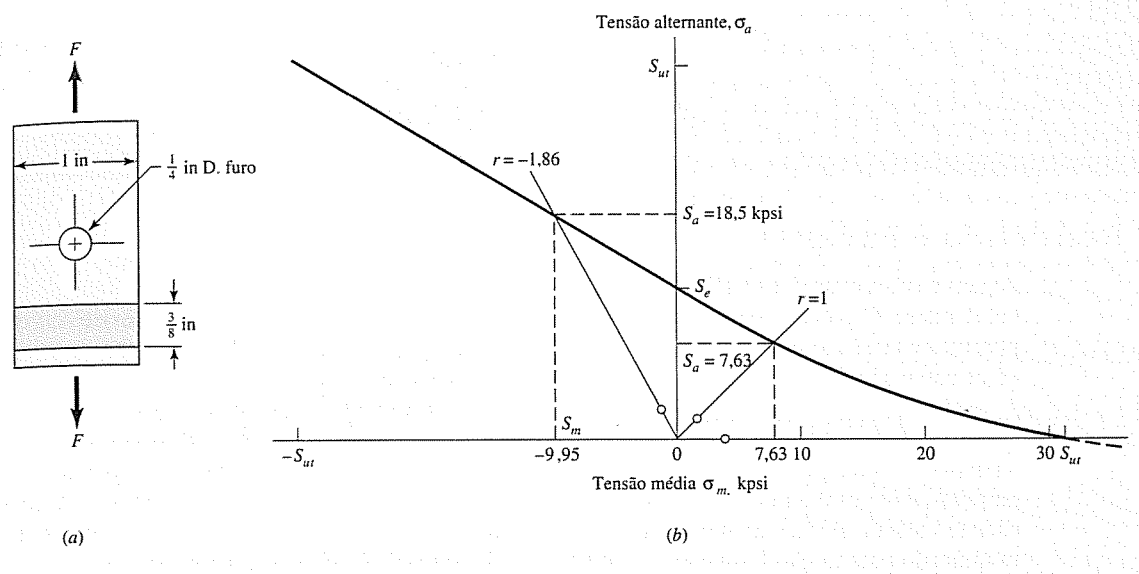


Figura 7-31 Peça de ferro fundido grau 30, sob fadiga axial, com (*a*) sua geometria exibida e (*b*) seu diagrama de fadiga do projetista para as circunstâncias do Exemplo 7-14.

(*b*)
$$F_a = F_m = \frac{F}{2} = \frac{1000}{2} = 500 \text{ lbf}$$

$$\sigma_a = \sigma_m = \frac{K_f F_a}{A} = \frac{1{,}29(500)}{0{,}281}(10^{-3}) = 2{,}30 \text{ kpsi}$$

$$r = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = 1$$

A partir da Equação (7-54),

$$S_a = \frac{(1)31 + 12{,}6}{2}\left[-1 + \sqrt{1 + \frac{4(1)31(12{,}6)}{[(1)31 + (12{,}6)]^2}}\right] = 7{,}63 \text{ kpsi}$$

Resposta
$$n = \frac{S_a}{\sigma_a} = \frac{7{,}63}{2{,}30} = 3{,}32$$

(*c*)
$$F_a = \frac{1}{2}|300 - (-1000)| = 650 \text{ lbf} \qquad \sigma_a = \frac{1{,}29(650)}{0{,}281}(10^{-3}) = 3{,}0 \text{ kpsi}$$

$$F_m = \frac{1}{2}[300 + (-1000)] = -350 \text{ lbf} \qquad \sigma_m = \frac{1{,}29(-350)}{0{,}281}(10^{-3}) = -1{,}61 \text{ kpsi}$$

$$r = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = \frac{3{,}0}{-1{,}61} = -1{,}86$$

A partir da Equação (7-55), $S_a = S_e + (S_e/S_{ut} - 1)S_m$ e $S_m = S_a/r$. Segue-se que

$$S_a = \frac{S_e}{1 - \frac{1}{r}\left(\frac{S_e}{S_{ut}} - 1\right)} = \frac{12{,}6}{1 - \frac{1}{-1{,}86}\left(\frac{12{,}6}{31} - 1\right)} = 18{,}5 \text{ kpsi}$$

Resposta

$$n = \frac{S_a}{\sigma_a} = \frac{18,5}{3,0} = 6,17$$

A Figura 7-31(*b*) mostra a porção do diagrama de fadiga construído pelo projetista.

7-13 Resistência à Fadiga Torcional sob Tensões Flutuantes

Alguns ensaios extensivos realizados por Smith[26] apresentam resultados muito interessantes sobre a fadiga torcional flutuante. O primeiro desses resultados, baseado em 72 outros ensaios, mostra que a existência de uma componente de tensão torcional permanente (estável), não maior que a resistência ao escoamento torcional, não tem efeito sobre o limite de resistência torcional, contanto que o material seja *dúctil*, *polido*, *sem entalhe* e *cilíndrico*.

O segundo resultado de Smith aplica-se a materiais com concentração de tensão, entalhes ou imperfeições superficiais. Nesse caso, ele descobre que o limite de fadiga torcional decresce monotonicamente com a tensão torcional permanente. Visto que a grande maioria das peças terá superfícies que são menos do que perfeitas, esse resultado indica que Gerber, ASME-elíptica e outras aproximações são úteis. Joerres,[27] do Associated Spring-Barnes Group, confirma os resultados de Smith e recomenda o uso da relação de Goodman modificado para torção flutuante. Ao construir o diagrama de Goodman, Joerres utiliza

$$S_{su} = 0,67S_{ut} \tag{7-56}$$

Ademais, partindo do Capítulo 6, $S_{sy} = 0,577S_{yt}$ a partir da teoria de energia de distorção, e o fator de carga médio k_c é fornecido pela Equação (7-25), ou 0,577. Isso será discutido mais adiante, no Capítulo 10.

7-14 Combinações de Modos de Carregamento

Na Seção 7-9, aprendemos que um fator de carga k_c é usado para obter o limite de resistência e que, portanto, o resultado é dependente de o carregamento ser axial, de flexão ou de torção. Nesta seção, queremos responder à seguinte questão: como devemos proceder quando o carregamento for uma combinação de, digamos, cargas axiais, flexionais e torcionais? Além da complicação introduzida pelo fato de um limite de resistência separado estar associado a cada modo de carregamento, podem também existir múltiplos fatores de concentração de tensão, um também para cada modo de carregamento. Felizmente, a resposta vem a ser um tanto simples. Assumindo que todas as componentes de tensão estejam se invertendo completamente e que estejam sempre em fase entre si:

1. Para a resistência, use o limite de resistência completamente corrigido para flexão, S_e.
2. Aplique os fatores de concentração de tensão de fadiga apropriados para as componentes de tensão torcional, tensão de flexão e tensão axial.
3. Multiplique quaisquer componentes axiais alternantes de tensão pelo fator $1/k_{c,ax}$.
4. Insira as tensões resultantes em uma análise de círculo de Mohr e encontre as tensões principais.
5. Utilizando os resultados do passo 4, encontre a tensão alternante σ'_a de von Mises.
6. Compare σ'_a com S_a para encontrar o fator de segurança.

Se as componentes de tensão não estiverem em fase, mas apresentarem a mesma freqüência, a máxima poderá ser encontrada expressando-se cada componente em termos trigonométricos, utilizando-se ângulos de fase e então encontrando-se a soma. Se duas ou mais componentes de tensão têm freqüências diferentes, então o problema é difícil; uma solução é assumir que duas (ou mais) componentes freqüentemente alcançam uma condição de fase, de modo que suas magnitudes são aditivas.

Se tensões médias também estiverem presentes, então os passos 4 e 5 poderão lhes ser repetidos e a componente resultante permanente de tensão de von Mises σ'_m será usada com σ'_a na formação de uma solução de Gerber ou ASME-elíptica. Ambas as componentes, permanente e de amplitude, são aumentadas pelo fator de concentração de tensão K_f ou K_{fs}.

[26] James O. Smith, "The Effect of Range of Stress on the Fatigue Strength of Metals", *Univ. of Ill. Eng. Exp. Sta. Bull.* 344, 1942.

[27] Robert E. Joerres, "Springs", Cap. 24, em Joseph E. Shigley e Charles R. Mischke, *Standard Handbook of Machine Design*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1996.

EXEMPLO 7-15

Um eixo rotativo é feito de um tubo de 42 x 4 mm, construído de AISI 1018 repuxado a frio, com um diâmetro de orifício de 6 mm furado transversalmente em relação a si. Estime o fator de segurança protegendo contra fadiga e falhas estáticas mediante o uso dos critérios de falha de Gerber e Langer para as seguintes condições de carregamento:

(*a*) O eixo está sujeito a um torque completamente inverso de 120 N · m, em fase com um momento flexor completamente inverso de 150 N · m.

(*b*) O eixo está sujeito a um torque pulsante flutuando de 20 a 160 N · m e a um momento flexor permanente de 150 N · m.

Solução

Aqui, seguimos o procedimento de estimativa das resistências e então das tensões, seguido pelo da relação de ambas.

A partir da Tabela A-20, encontramos as resistências mínimas como $S_{ut} = 440$ MPa e $S_{yt} = 370$ MPa. O limite de resistência do espécime de viga rodando é de 0,504(440) = 222 MPa. O fator de superfície, obtido da Equação (7-18) e da Tabela 7-4, é

$$k_a = 4{,}51 S_{ut}^{-0{,}265} = 4{,}51(440)^{-0{,}265} = 0{,}899$$

A partir da Equação (7-20), o fator de tamanho é

$$k_b = \left(\frac{d}{7{,}62}\right)^{-0{,}107} = \left(\frac{42}{7{,}62}\right)^{-0{,}107} = 0{,}833$$

Os demais fatores de Marin são todos unitários, de modo que a resistência modificada S_e é

$$S_e = 0{,}899(0{,}833)222 = 166 \text{ MPa}$$

(*a*) Fatores de concentração de tensão teóricos são encontrados a partir da Tabela A-16. Utilizando $a/D = 6/42 = 0{,}143$ e $d/D = 34/42 = 0{,}810$, bem como interpolação linear, obtemos $A = 0{,}798$ e $K_t = 2{,}366$ para flexão, e $A = 0{,}89$ e $K_{ts} = 1{,}75$ para torção. Logo, para flexão,

$$Z_{\text{net}} = \frac{\pi A}{32D}(D^4 - d^4) = \frac{\pi(0{,}798)}{32(4{,}2)}[(4{,}2)^4 - (3{,}4)^4] = 3{,}31 \text{ cm}^3$$

e para torção

$$J_{\text{net}} = \frac{\pi A}{32}(D^4 - d^4) = \frac{\pi(0{,}89)}{32}[(4{,}2)^4 - (3{,}4)^4] = 15{,}5 \text{ cm}^4$$

A seguir, utilizando as Figuras 7-20 e 7-21 com um raio de entalhe de 3 mm, encontramos as sensibilidades a entalhe como 0,78 para flexão e 0,96 para torção. Os dois fatores de concentração de tensão sob fadiga correspondentes são obtidos da Equação (7-31) como

$$K_f = 1 + q(K_t - 1) = 1 + 0{,}78(2{,}366 - 1) = 2{,}07$$

$$K_{fs} = 1 + 0{,}96(1{,}75 - 1) = 1{,}72$$

A tensão de flexão é encontrada agora como

$$\sigma_{xa} = K_f \frac{M}{Z_{\text{net}}} = 2{,}07\frac{150}{3{,}31} = 93{,}8 \text{ MPa}$$

e a tensão torcional é

$$\tau_{xya} = K_{fs}\frac{TD}{2J_{\text{net}}} = 1{,}72\frac{120(4{,}2)}{2(15{,}5)} = 28{,}0 \text{ MPa}$$

A componente de tensão permanente de von Mises σ'_m é zero. A componente de amplitude σ'_a é fornecida por

$$\sigma'_a = \left(\sigma_{xa}^2 + 3\tau_{xya}^2\right)^{1/2} = [93{,}8^2 + 3(28^2)]^{1/2} = 105{,}6 \text{ MPa}$$

Visto que $S_e = S_a$, o fator de segurança contra a fadiga n_f é

$$n_f = \frac{S_a}{\sigma'_a} = \frac{166}{105{,}6} = 1{,}57$$

O fator de segurança contra o escoamento de primeiro ciclo é

$$n_y = \frac{S_{yt}}{\sigma'_a} = \frac{370}{105{,}6} = 3{,}50$$

Não existe escoamento localizado; a ameaça é de fadiga. Veja a Figura 7-32.

(*b*) Essa peça nos pede para encontrar os fatores de segurança quando a componente alternante é causada por torção pulsante e uma componente permanente se deve a ambas, torção e flexão. Temos $T_a = (160 - 20)/2 = 70 \text{ N} \cdot \text{m}$ e $T_m = 20 + 70 = 90 \text{ N} \cdot \text{m}$. A amplitude correspondente e as componentes de tensão permanente são

$$\tau_{xya} = K_{fs}\frac{T_a D}{2J_{\text{net}}} = 1{,}72\frac{70(4{,}2)}{2(15{,}5)} = 16{,}3 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xym} = K_{fs}\frac{T_m D}{2J_{\text{net}}} = 1{,}72\frac{90(4{,}2)}{2(15{,}5)} = 21{,}0 \text{ MPa}$$

A componente de tensão de flexão permanente σ_{xm} é

$$\sigma_{xm} = K_f\frac{M_m}{Z_{\text{net}}} = 2{,}07\frac{150}{3{,}31} = 93{,}8 \text{ MPa}$$

As componentes de von Mises σ'_a e σ'_m são

$$\sigma'_a = [3(16{,}3)^2]^{1/2} = 28{,}2 \text{ MPa}$$

$$\sigma'_m = [93{,}8^2 + 3(21)^2]^{1/2} = 100{,}6 \text{ MPa}$$

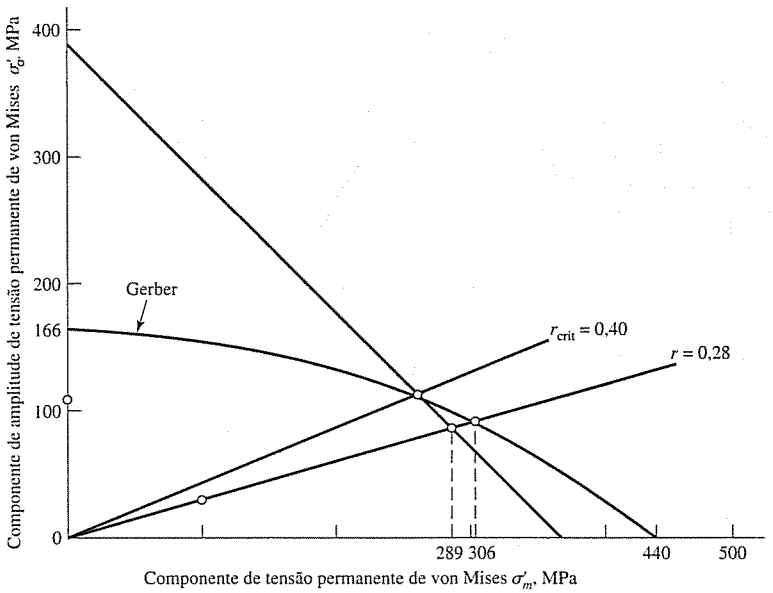


Figura 7-32 Diagrama de fadiga do projetista para o Exemplo 7-15.

A inclinação da linha de carga é $r = \sigma'_a/\sigma'_m = 28{,}2/100{,}6 = 0{,}28$. A partir da Tabela 7-10, a componente de amplitude de resistência S_a e a componente permanente de resistência S_m são

$$S_a = \frac{0{,}28^2 440^2}{2(166)}\left\{-1+\sqrt{1+\left[\frac{2(166)}{0{,}28(440)}\right]^2}\right\} = 85{,}7 \text{ MPa}$$

$$S_m = \frac{85{,}7}{0{,}28} = 306{,}1 \text{ MPa}$$

O fator de segurança contra a fadiga n_f é

Resposta
$$n_f = \frac{S_a}{\sigma'_a} = \frac{85{,}7}{28{,}2} = 3{,}04$$

O fator de segurança contra o escoamento de primeiro ciclo n_y é

Resposta
$$n_y = \frac{S_y}{\sigma'_a + \sigma'_m} = \frac{370}{28{,}2 + 100{,}6} = 2{,}87$$

Não há escoamento de entalhe. A ameaça é de escoamento de primeiro ciclo no entalhe. Veja o gráfico da Figura 7-32.

7-15 Tensões Flutuantes e Variáveis; Dano Cumulativo de Fadiga

Em vez de um bloco de história de tensão completamente invertida composto de n ciclos, suponha que uma peça de máquina, em local crítico, esteja sujeita a

- Uma tensão completamente invertida σ_1 por n_1 ciclos, σ_2 por n_2 ciclos... ou
- Uma linha temporal "bamboleante" de tensão exibindo muitos picos diferentes e vales.

Quais tensões são significativas, o que conta como um ciclo e qual é a medida de dano incorrido? Considere um ciclo completamente inverso, com tensões variando em 60, 80, 40 e 60 kpsi, e um segundo ciclo também completamente inverso, com –40, –60, –20 e –40 kpsi, como representado na Figura 7-33(a). A princípio, está claro que, para impor o padrão de tensão da Figura 7-33(a) a uma peça, é necessário que o traço de tempo se pareça com a linha sólida mais a linha tracejada na Figura 7-33(a). A Figura 7-33(b) move o instantâneo para que exista começando com 80 kpsi e termine com 80 kpsi. Reconhecer a existência de um único traço de tensão-tempo é descobrir um ciclo "escondido", mostrado como a linha tracejada na Figura 7-33(b). Se houver cem aplicações do ciclo de tensão completamente positivo, e então cem aplicações do ciclo de tensão completamente negativo, o ciclo escondido será aplicado apenas uma vez. Se o ciclo de tensão completamente positivo for aplicado em alternância com o ciclo de tensão completamente negativo, o ciclo escondido será aplicado cem vezes.

Para assegurar que o ciclo escondido não está perdido, comece no instantâneo com a maior (ou menor) tensão e acrescente a história prévia ao lado direito, como foi feito na Figura 7-33(b). A caracterização de um ciclo toma uma forma máx-mín-mesmo máx (ou mín-máx-mesmo mín). Identificamos o ciclo escondido primeiro movendo-nos ao longo da linha tracejada na Figura 7-33(b), identificando um ciclo com um máx de 80 kpsi, um mín de 60 kpsi e retornando a 80 kpsi. Apagar mentalmente a linha tracejada deixa um ciclo com 40, 60 e 40, e outro ciclo com –40, –20 e –40. Visto que os locais geométricos de falha são expressos em termos da componente de amplitude de tensão σ_a e da componente permanente σ_m, empregamos a Equação (7-39) para construir a seguinte tabela:

Número do ciclo	σ_{max}	σ_{min}	σ_a	σ_m
1	80	–60	70	10
2	60	40	10	50
3	–20	–40	10	–30

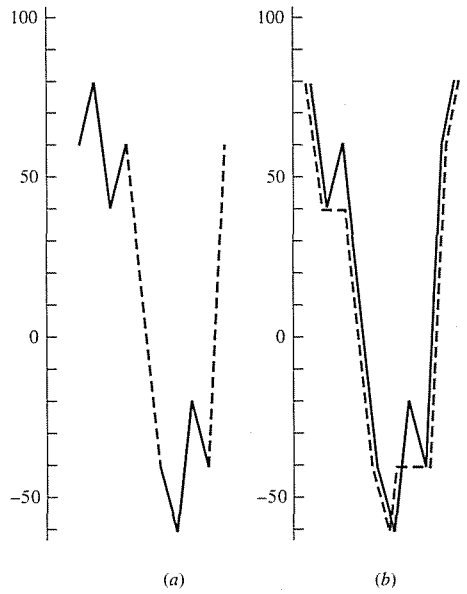


Figura 7-33 Diagrama de tensão variável preparado para estimar dano cumulativo.

O ciclo mais danoso é o de número 1. Poderia ter sido perdido.
Os métodos para a contagem de ciclos incluem:

- O número de picos de tração até falha.
- Todos os máximos acima da média em forma de onda e todos os mínimos abaixo.
- Os máximos globais entre intersecções acima da média e os mínimos globais entre intersecções abaixo da média.
- Todas as intersecções de inclinação positiva de níveis acima da média e todas as intersecções de inclinação negativa de níveis abaixo da média.
- Uma modificação do método precedente com apenas uma contagem feita entre intersecções sucessivas de um nível associado a cada nível de contagem.
- Cada variação máximo-mínimo local é contada como meio ciclo, e a amplitude associada é meio intervalo.
- O método precedente mais a consideração da média local.
- Técnica de contagem de fluxo de chuva.

O método aqui empregado resume-se a uma variação da *técnica de contagem de fluxo de chuva*.
A *regra de soma da razão de ciclo de Palmgren-Miner*,[28] também chamada de *regra de Miner*, é escrita

$$\sum \frac{n_i}{N_i} = c \tag{7-57}$$

em que n_i é o número de ciclos no nível de tensão σ_i, e N_i é o número de ciclos até a ocorrência de falha nesse mesmo nível de tensão. O parâmetro c foi determinado por experimento; é geralmente encontrado no intervalo $0{,}7 < c < 2{,}2$ com um valor médio próximo da unidade.

Empregando a formulação determinística como uma regra linear de dano, escrevemos

$$D = \sum \frac{n_i}{N_i} \tag{7-58}$$

em que D é o dano acumulado. Quando $D = c = 1$, ocorre falha.

[28] A. Palmgren, "Die Lebensdauer von Kugellagern", *ZVDI*, vol. 68, p. 339-341, 1924; M. A. Miner, "Cumulative Damage in Fatigue", *J. Appl. Mech.*, vol. 12, *Trans. ASME*, vol. 67, p. A159-A164, 1945.

EXEMPLO 7-16

Para o carregamento da Figura 7-33 em uma peça, na localidade crítica existem as seguintes propriedades: $S_{ut} = 151$ kpsi, $\sigma_0 = 210$ kpsi, $\varepsilon_f = 0{,}45$, $m = 0{,}09$, $S_e = 67{,}5$ kpsi. Estime o número de repetições do bloco de tensão-tempo da Figura 7-33 que podem ser realizadas antes da ocorrência de falha.

Solução

$$\sigma_F' = \sigma_0 \varepsilon^m = 210(0{,}45)^{0{,}09} = 195{,}4 \text{ kpsi}$$

A partir da Equação (7-11),

$$b = -\frac{\log(\sigma_F'/S_e)}{\log(2N_e)} = -\frac{\log(195{,}4/67{,}5)}{\log(2 \cdot 10^6)} = -0{,}07326$$

A partir da Equação (7-9),

$$f = \frac{\sigma_F'}{S_{ut}}(2 \cdot 10^3)^b = \frac{195{,}4}{151}(2 \cdot 10^3)^{-0{,}07326} = 0{,}7415$$

A partir da Equação (7-13),

$$a = \frac{(f S_{ut})^2}{S_e} = \frac{[0{,}7415(151)]^2}{67{,}5} = 186 \text{ kpsi}$$

assim,

$$S_f = 186N^{-0{,}07326} \qquad N = \left(\frac{\sigma_a}{186}\right)^{-1/0{,}07326}$$

Nós nos preparamos para adicionar duas colunas à tabela anterior. Empregando o critério de fadiga de Gerber, Equação (7-45), com $S_a = S_f$, no diagrama de fadiga do projetista, podemos escrever

$$S_f = \begin{cases} \dfrac{\sigma_a}{1 - (\sigma_m/S_{ut})^2} & \sigma_m > 0 \\ S_e & \sigma_m \le 0 \end{cases} \tag{1}$$

Ciclo 1: $r = 70/10 = 7$, e a amplitude de resistência é, a partir da Tabela 7-9,

$$S_a = \frac{7^2 151^2}{2(67{,}5)}\left\{-1 + \sqrt{1 + \left[\frac{2(67{,}5)}{7(151)}\right]^2}\right\} = 67{,}2 \text{ kpsi}$$

Visto que $\sigma_a > S_a$, isto é, $70 > 67{,}2$, a vida é reduzida. A partir da Equação (1),

$$S_f = \frac{70}{1 - (10/151)^2} = 70{,}3 \text{ kpsi} \qquad N = \left(\frac{70{,}3}{186}\right)^{-1/0{,}07326} = 0{,}586(10^6) \text{ ciclos}$$

Ciclo 2: $r = 10/50 = 0{,}2$, e a amplitude de resistência é

$$S_a = \frac{0{,}2^2 151^2}{2(67{,}5)}\left\{-1 + \sqrt{1 + \left[\frac{2(67{,}5)}{0{,}2(151)}\right]^2}\right\} = 24{,}2 \text{ kpsi}$$

Visto que $\sigma_a < S_a$, isto é, $10 < 24{,}2$, então $S_f = S_e$, seguindo-se vida indefinida.
Ciclo 3: $r = 10/-30 = -0{,}333$ e, sendo que $\sigma_m < 0$, $S_f = S_e$, seguindo-se vida indefinida.

Número do ciclo	S_f, kpsi	N, ciclos
1	70,3	$0{,}58(10^6)$
2	67,5	∞
3	67,5	∞

A partir da Equação (7-62), o dano por bloco é

$$D = \sum \frac{n_i}{N_i} = N\left[\frac{1}{0{,}586(10^6)} + \frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty}\right] = \frac{N}{0{,}586(10^6)}$$

Resposta Estabelecer $D = 1$ resulta em $N = 0{,}586(10^6)$ ciclos.

Para ilustrar o emprego da regra de Miner, vamos utilizar um aço que tenha as propriedades $S_{ut} = 80$ kpsi, $S'_{e.0} = 40$ kpsi e $f = 0{,}9$, no qual utilizamos a designação $S'_{e.0}$ em vez da mais usual S'_e, para indicar o limite de resistência do *material virgem, sem dano.* O diagrama *log S-log N* para esse material é exibido na Figura 7-34 pela linha contínua mais grossa. Agora aplique, digamos, um ciclo inverso $\sigma_1 = 60$ kpsi para $n_1 = 3000$ ciclos. Visto que $\sigma_1 > S'_{e.0}$, o limite de resistência será danificado, de modo que desejaremos encontrar o novo limite de resistência $S'_{e.1}$ do material danificado empregando a regra de Miner. A equação da linha de falha do material virgem na Figura 7-34, no intervalo de 10^3 a 10^6 ciclos, é

$$S_f = aN^b = 129{,}6N^{-0{,}085\,091}$$

O número de ciclos para a ocorrência de falha no nível de tensão $\sigma_1 = 60$ kpsi é

$$N_1 = \left(\frac{\sigma_1}{129{,}6}\right)^{-1/0{,}085\,091} = \left(\frac{60}{129{,}6}\right)^{-1/0{,}085\,091} = 8520 \text{ ciclos}$$

A Figura 7-34 mostra que o material tem uma vida $N_1 = 8520$ ciclos de vida a 60 *kpsi*; conseqüentemente, após a aplicação de σ_1 para 3000 ciclos, haverá $N_1 - n_1 = 5520$ ciclos de vida restantes. Isso localiza a resistência de vida finita $S_{f.1}$ do material danificado, como mostrado na Figura 7-34. Para obter um segundo ponto, fazemos a seguinte pergunta: com n_1 e N_1 fornecidos, quantos ciclos de tensão $\sigma_2 = S'_{e.0}$ podem ser aplicados antes que o material danificado falhe? Isso corresponde a n_2 ciclos de tensão inversa; portanto, a partir da Equação (7-57), temos

$$\frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2} = 1 \qquad (a)$$

ou

$$n_2 = \left(1 - \frac{n_1}{N_1}\right) N_2 \qquad (b)$$

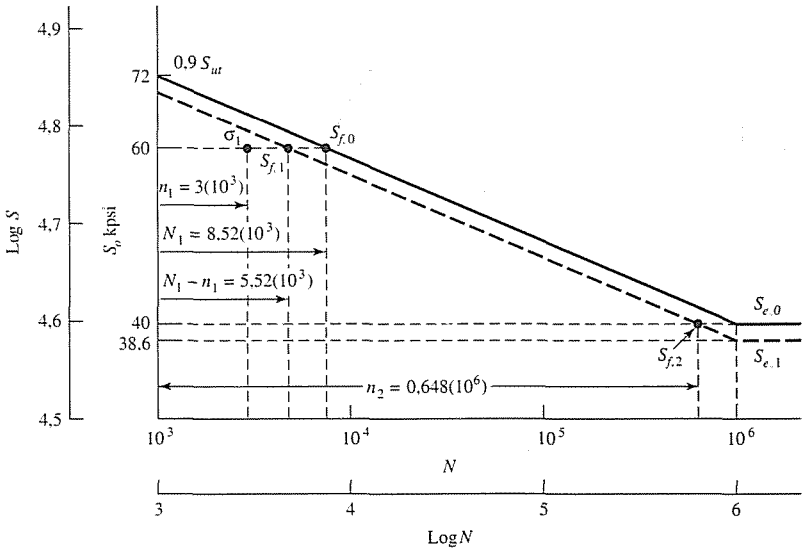


Figura 7-34 Uso da regra de Miner para predizer o limite de resistência de um material que foi supertensionado por um número finito de ciclos.

Então,

$$n_2 = \left[1 - \frac{3(10)^3}{8{,}52(10)^3}\right](10^6) = 0{,}648(10^6) \text{ ciclos}$$

Isso corresponde à resistência de vida finita $S_{f,2}$ na Figura 7-34. Uma linha através de $S_{f,1}$ e $S_{f,2}$ é o diagrama *log S-log N* do material danificado, conforme a regra de Miner. O novo limite de resistência é $S_{e,1} = 38{,}5$ kpsi.

Poderíamos encerrar por aqui, mas um pouco mais de investigação pode ser útil. Temos dois pontos no novo local geométrico de fadiga, $N_1 - n_1$, σ_1 e n_2, σ_2. É útil provar que a inclinação da nova linha ainda é b. Para a equação $S_f = a'N^{b'}$, na qual os valores de a' e b' são estabelecidos por dois pontos α e β, a equação para b' é

$$b' = \frac{\log \sigma_\alpha/\sigma_\beta}{\log N_\alpha/N_\beta} \qquad (c)$$

Examine o denominador da Equação (*c*):

$$\log \frac{N_\alpha}{N_\beta} = \log \frac{N_1 - n_1}{n_2} = \log \frac{N_1 - n_1}{(1 - n_1/N_1)N_2} = \log \frac{N_1}{N_2}$$
$$= \log \frac{(\sigma_1/a)^{1/b}}{(\sigma_2/a)^{1/b}} = \log \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^{1/b} = \frac{1}{b} \log \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)$$

Substituindo isso na Equação (*c*) com $\sigma_\alpha / \sigma_\beta = \sigma_1 / \sigma_2$, obtemos

$$b' = \frac{\log(\sigma_1/\sigma_2)}{(1/b)\log(\sigma_1/\sigma_2)} = b$$

o que significa que a linha do material danificado tem a mesma inclinação que a linha do material virgem; logo, ambas as linhas são paralelas. Essa informação pode ser útil ao se escrever um programa de computador para a hipótese de Palmgren-Miner.

Embora a regra de Miner seja bastante empregada, ela falha de duas maneiras ao concordar com experimentos. Primeiro, observe que tal teoria afirma que a resistência estática S_{ut} é danificada, isto é, decrescida, devido à aplicação de σ_1; veja a Figura 7-34 a $N = 10^3$ ciclos. Experimentos falham ao verificar essa predição.

A regra de Miner, tal como fornecida pela Equação (7-53), não leva em conta a ordem em que as tensões são aplicadas e, portanto, ignora quaisquer tensões menores que $S'_{e,0}$. Contudo, pode-se ver, na Figura 7-34, que uma tensão σ_3 no intervalo $S'_{e,1} < \sigma_3 < S'_{e,0}$ causaria dano se aplicada depois que o limite de resistência tivesse sido danificado pela aplicação de σ_1.

O enfoque de Manson[29] supera ambas as deficiências observadas no método Palmgren-Miner; historicamente, trata-se de um enfoque muito mais recente e igualmente fácil de empregar. Exceto por uma leve mudança, o utilizaremos e recomendaremos neste livro. Manson traçou o diagrama *S-log N*, em vez de um gráfico *log S-log N*, como recomendado aqui. Ele também recorreu a experimentos para encontrar o ponto de convergência das linhas *S-log N* correspondentes à resistência estática, em vez de arbitrariamente selecionar a intersecção de $N = 10^3$ ciclos com $S = 0{,}9S_{ut}$, como feito aqui. Naturalmente, é sempre melhor utilizar-se de experimentos, mas nosso propósito neste livro foi empregar dados de ensaio simples para aprender o que fosse possível sobre a falha por fadiga.

O método de Manson, como aqui apresentado, consiste em ter todas as linhas *log S-log N* – isto é, linhas para o material danificado e para o material virgem – convergindo para o mesmo ponto, $0{,}9S_{ut}$ a 10^3 ciclos. Além disso, as linhas *log S-log N* devem ser construídas na mesma ordem histórica em que as tensões ocorrem.

Os dados do exemplo precedente são usados para propósitos ilustrativos. Os resultados são mostrados na Figura 7-35. Observe que a resistência $S_{f,1}$ correspondendo a $N_1 - n_1 = 5{,}52(10^3)$ ciclos é encontrada da mesma maneira que antes. Através desse ponto e de $0{,}9S_{ut}$ a 10^3 ciclos, desenhe a linha tracejada grossa para encontrar $N = 10^6$ ciclos e defina o limite de resistência $S'_{e,1}$ do material danificado. Nesse caso, o novo limite de resistência é de 34,4 kpsi, um tanto inferior àquele encontrado pelo método de Miner.

[29] S. S. Manson, A. J. Nachtigall, C. R. Ensign e J. C. Fresche, "Further Investigation of a Relation for Cumulative Damage in Bending", *Trans. ASME, J. Eng. Ind.*, ser. B, vol. 87, nº 1, p. 25-35, fevereiro de 1965.

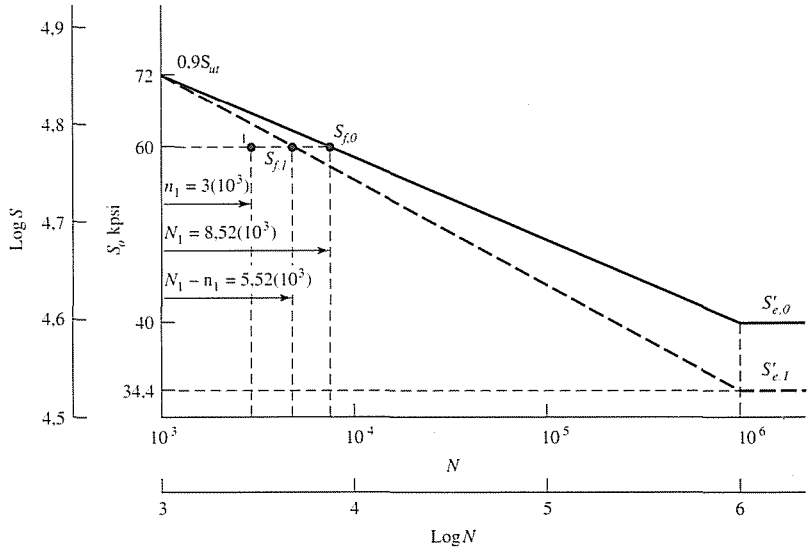


Figura 7-35 Uso do método de Manson para predizer o limite de resistência de um material que foi supertensionado por um *número finito de ciclos*.

Agora é fácil ver, a partir da Figura 7-35, que uma tensão inversa $\sigma = 36$ kpsi, digamos, não prejudicaria o limite de resistência de um material virgem, não obstante quantos ciclos pudessem ser aplicados. Contudo, se $\sigma = 36$ kpsi fosse aplicado *depois* de o material ter sido danificado por $\sigma_1 = 60$ kpsi, então seria feito um dano adicional.

Essas duas regras envolvem um número de computações que são repetidas toda vez que o dano é estimado. Para traços complicados de tensão-tempo, isso pode ocorrer a cada ciclo. Obviamente, um programa de computador é útil para executar as tarefas, incluindo varrer o traço e identificar os ciclos.

Collins disse-o bem: "Apesar de todos os problemas citados, a regra linear de dano de Palmgren é freqüentemente usada devido à sua simplicidade e ao fato experimental de que outras teorias de dano mais complexas nem sempre produzem um melhoramento significativo na confiabilidade de predição de falha".[30]

7-16 Resistência à Fadiga de Superfície

O mecanismo de fadiga de superfície ainda não está definitivamente entendido. A zona afetada de contato, na ausência de tensões de cisalhamento de superfície, mantém as tensões principais de compressão. A fadiga rotativa tem o crescimento de suas trincas na, ou próximo da, superfície na presença de tensões de tração que estão associadas com a propagação de trinca, para falha catastrófica. Há tensões de cisalhamento na zona que são as maiores justamente abaixo da superfície. As trincas parecem crescer a partir desse estrato, até que peças menores de material são expelidas, deixando buracos na superfície. Uma vez que os engenheiros tinham de projetar máquinas duráveis antes mesmo de o fenômeno de fadiga de superfície ser entendido com mais detalhes, eles adotavam a postura de conduzir ensaios, observando os buracos na superfície e declarando falha em uma área projetada arbitrária de cavidade, o que relacionaram à pressão de contato hertziana. Essa tensão compressiva não produzia falha diretamente, mas – independentemente do mecanismo de falha do tipo de tensão que foi instrumental nessa falha – a área de contato era um *índice* para sua magnitude.

Buckingham[31] conduziu vários ensaios relacionando a fadiga a 10^8 ciclos com a resistência (pressão de contato hertziana). Ao passo que há evidência de um limite de resistência de cerca de $3(10^7)$ ciclos para materiais fundidos, rolos de aço endurecido não mostraram limite algum de fadiga até $4(10^8)$ ciclos. Ensaios subseqüentes em aços duros também não apresentaram qualquer limite de resistência. O aço endurecido exibe resistências à fadiga tão altas que seu uso para resistir à fadiga de superfície é muito difundido.

Nossos estudos até aqui lidaram com a falha de um elemento de máquina por escoamento, por fratura e por fadiga. O limite de resistência obtido pelo ensaio de viga rodante é freqüentemente denomina-

[30] J. A. Collins, *Failure of Materials in Mechanical Design*, John Wiley & Sons, New York, 1981, p. 243.
[31] Earle Buckingham, *Analytical Mechanics of Gears*, McGraw-Hill, New York, 1949.

do *limite de resistência flexural*, haja vista ser um teste de uma viga rodando. Nesta seção, estudaremos uma propriedade de *materiais acasalados* denominada *resistência superficial de cisalhamento*. O engenheiro de projeto deve com freqüência resolver problemas em que dois elementos de máquina unem-se por rolamento, escorregamento, ou por uma combinação de contato de rolamento e escorregamento. Exemplos óbvios de tais combinações são os dentes emparelhados de um par de engrenagens; um came e um seguidor; uma roda e um trilho; uma corrente e uma roda dentada. Um conhecimento da resistência de superfície de materiais faz-se necessário se o projetista for criar máquinas que devam ter uma vida longa e satisfatória.

Quando duas superfícies rolam ou rolam e deslizam uma contra a outra com força suficiente, uma falha de cavitação ocorrerá após um certo número de ciclos de operação. Ainda não se chegou a um consenso sobre o mecanismo exato de formação de cavidades; embora o assunto seja bastante complicado, há a concordância de que as tensões de Hertz, o número de ciclos, o acabamento de superfície, a dureza, o grau de lubrificação e a temperatura influenciam na resistência. Na Seção 4-20 foi aprendido que, quando duas superfícies são pressionadas uma contra a outra, uma tensão de cisalhamento máxima é desenvolvida ligeiramente abaixo da superfície que contata. É postulado por algumas autoridades que uma falha de fadiga de superfície é iniciada por tal tensão de cisalhamento máxima e então propagada rapidamente à superfície. O lubrificante, assim, entra na trinca que é formada e, sob pressão, acaba cunhando a lasca solta.

Para determinar a resistência de fadiga de superfície de materiais acasalados, Buckingham projetou uma máquina simples para ensaiar um par de superfícies em contato de rolamento, em conexão com sua investigação do desgaste de dentes de engrenagens. Buckingham e, depois, Talbourdet reuniram uma grande quantidade de dados procedentes de muitos ensaios, de modo que considerável informação de projeto está agora disponível. Para tornar os resultados úteis aos projetistas, Buckingham definiu um *fator de carga-tensão*, também denominado *fator de desgaste*, que é derivado das equações de Hertz. As Equações (4-77) e (4-78) para cilindros em contato devem ser

$$b = \sqrt{\frac{2F}{\pi l}\frac{\left(1-\nu_1^2\right)/E_1 + \left(1-\nu_2^2\right)/E_2}{(1/d_1)+(1/d_2)}} \tag{7-59}$$

$$p_{\max} = \frac{2F}{\pi b l} \tag{7-60}$$

em que b = meia largura da área de contato retangular
F = força de contato
l = comprimento dos cilindros
ν = coeficiente de Poison
E = módulo de elasticidade
D = diâmetro do cilindro

É mais conveniente usar o raio do cilindro; portanto, considere $2r = d$. Se então designarmos o comprimento dos cilindros como w (para largura de engrenagens, mancais, cames, etc.), em vez de l, e removermos o sinal de raiz quadrada, a Equação (7-59) tornar-se-á

$$b^2 = \frac{4F}{\pi w}\frac{\left(1-\nu_1^2\right)/E_1 + \left(1-\nu_2^2\right)/E_2}{1/r_1 + 1/r_2} \tag{7-61}$$

Podemos definir uma *resistência de superfície* S_C utilizando

$$p_{\max} = \frac{2F}{\pi b w} \tag{7-62}$$

como

$$S_C = \frac{2F}{\pi b w} \tag{7-63}$$

que pode também ser denominada *resistência de contato*, *resistência de fadiga de contato* ou *resistência hertziana*. A resistência é a pressão de contato que, após um número especificado de ciclos, causará falha na superfície. Essas falhas são freqüentemente denominadas *desgaste*, porque ocorrem durante um tempo mui-

to longo. Entretanto, elas não devem ser confundidas com desgaste abrasivo. Substituindo-se o valor de b na Equação (7-61) e o resultado na Equação (7-63), obtemos

$$\frac{F}{w}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)=\pi S_C^2\left[\frac{1-\nu_1^2}{E_1}+\frac{1-\nu_2^2}{E_2}\right]=K_1 \tag{7-64}$$

A expressão esquerda consiste em parâmetros que um projetista pode buscar controlar independentemente. A expressão central consiste em propriedades do material que advêm com este e a especificação de condição. A terceira expressão é o parâmetro K_1, fator de carga-tensão de Buckingham, determinado por um acessório de ensaio com valores de F, w, r_1, r_2 e o número de ciclos associados à primeira evidência tangível de fadiga. Em estudos de engrenagens, um fator K similar é utilizado:

$$K_g=\frac{K_1}{4}\operatorname{sen}\phi \tag{7-65}$$

em que ϕ é o ângulo de pressão do dente e o termo $[(1-\nu_1^2)/E_1+(1-\nu_2^2)/E_2]$ é definido como $1/(\pi C_P^2)$, de modo que

$$S_C=C_P\sqrt{\frac{F}{w}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)} \tag{7-66}$$

Buckingham e outros relataram K_1 para 10^8 ciclos e nada mais. Isso provê somente um ponto na curva S_CN, o que, para metais fundidos, pode ser suficiente; no entanto, para aços forjados, tratados termicamente, alguma idéia da inclinação é útil tendo em vista alcançar metas de projeto que não de 10^8 ciclos.

Experimentos mostram que os dados de K_1 *versus* N, K_g *versus* N e S_C *versus* N são retificados pela transformação *loglog*. Isso sugere que

$$K_1=\alpha_1 N^{\beta_1} \qquad K_g=aN^b \qquad S_C=\alpha N^{\beta}$$

Os três expoentes são fornecidos por

$$\beta_1=\frac{\log(K_1/K_2)}{\log(N_1/N_2)} \qquad b=\frac{\log(K_{g1}/K_{g2})}{\log(N_1/N_2)} \qquad \beta=\frac{\log(S_{C1}/S_{C2})}{\log(N_1/N_2)} \tag{7-67}$$

Dados relativos a aço induzido-endurecido sobre aço produzem $(S_C)_{10^7}=271$ kpsi e $(S_C)_{10^8}=239$ kpsi, de modo que β, a partir da Equação (7-67), é

$$\beta=\frac{\log(271/239)}{\log(10^7/10^8)}=-0{,}055$$

Pode ser de interesse que a *American Gear Manufacturers Association* (AGMA) utilize –0,056 entre $10^4<N<10^{10}$ se o projetista não dispuser de dados contrários além de 10^7 ciclos.

Uma correlação antiga para aços entre S_C e H_B a 10^8 ciclos é

$$(S_C)_{10^8}=\begin{cases}0{,}4H_B-10\text{ kpsi}\\ 2{,}76H_B-70\text{ MPa}\end{cases} \tag{7-68}$$

A AGMA utiliza

$$_{0,99}(S_C)_{10^7}=0{,}327H_B+26\text{ kpsi} \tag{7-69}$$

A Equação (7-66) pode ser empregada em projeto para encontrar a tensão de superfície permissível usando-se um fator de projeto. Visto que essa equação é não-linear em sua transformação tensão-carga, o projetista deve decidir se a perda de função denota incapacidade de suportar a carga. Se for esse o caso, então, para encontrar a tensão permissível, divide-se a carga F pelo fator de projeto n_d:

$$\sigma_C=C_P\sqrt{\frac{F}{wn_d}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)}=\frac{C_P}{\sqrt{n_d}}\sqrt{\frac{F}{w}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)}=\frac{S_C}{\sqrt{n_d}}$$

e $n_d=(S_C/\sigma_C)^2$. Se a perda de função estiver focada na tensão, então $n_d=S_C/\sigma_C$. É recomendado que um engenheiro

- Decida se a perda de função é falha para carregar carga ou tensão.
- Defina o fator de projeto e o fator de segurança adequadamente.
- Declare o que está utilizando e por quê.
- Esteja preparado para defender sua posição.

Dessa forma, todo aquele que for parte interessada da comunicação saberá o que um fator de projeto (ou fator de segurança) de 2 significa e ajustará, se necessário, a perspectiva julgável.

7-17 Análise Estocástica

Como já demonstrado neste capítulo, há muitos fatores a considerar em uma análise de fadiga – muito mais do que em uma análise estática. Até o momento, cada fator tem sido tratado de uma forma determinística, e, mesmo que não seja óbvio, esses fatores estão sujeitos à variabilidade e controlam a confiabilidade geral dos resultados. Quando a confiabilidade é importante, então testes de fadiga devem certamente ser realizados. Não há outra maneira. Conseqüentemente, os métodos de análise estocástica apresentados aqui e em outras seções deste livro constituem princípios que permitem ao projetista obter um bom entendimento a respeito dos vários assuntos envolvidos, bem como auxiliam no desenvolvimento de um projeto seguro e confiável.

Nesta seção, modificações estocásticas cruciais para os atributos determinísticos e para as equações descritas em seções anteriores serão fornecidos na mesma ordem de apresentação.

Limite de Resistência

Para começar, um método para estimar limites de resistência – o *método da correlação da resistência à tração* – é apresentado. A razão $\phi = \mathbf{S}'_e / \bar{S}_{ut}$ é denominada *razão de fadiga*.[32] Para metais ferrosos, a maioria dos quais exibe um limite de resistência, o limite de resistência é utilizado como um numerador. Para materiais que não apresentam esse limite, uma resistência a um número especificado de ciclos até a falha é utilizada e anotada. Gough[33] relatou a natureza estocástica da razão de fadiga ϕ para várias classes de metais, o que é apresentado na Figura 7-36. O primeiro item a ser observado é que o coeficiente de variação é da ordem 0,10 a 0,15 e que a distribuição varia para classes de metais. O segundo item a ser observado é que os dados de Gough incluem materiais sem interesse para engenheiros. Na ausência de teste, estes empregam a correlação que ϕ representa para estimar o limite de resistência $\mathbf{S}'_e$ a partir da resistência última média $\bar{S}_{ut}$.

Os dados de Gough destinam-se a conjuntos de metais, alguns escolhidos por interesse metalúrgico, e incluem materiais que não são normalmente selecionados para peças de máquinas. Mischke[34] analisou dados para 133 aços comuns e tratamentos em diâmetros variáveis sob flexão rotativa,[35] e o resultado foi

$$\phi = 0{,}445d^{-0{,}107}\mathbf{LN}(1, 0{,}138)$$

em que d é o diâmetro do espécime em polegadas e $\mathbf{LN}(1, 0{,}138)$ é uma variante *lognormal* unitária com média de 1 e um desvio-padrão (e coeficiente de variação) de 0,138. Para o espécime-padrão de R. R. Moore,

$$\phi_{0{,}30} = 0{,}445(0{,}30)^{-0{,}107}\mathbf{LN}(1, 0{,}138) = 0{,}506\mathbf{LN}(1, 0{,}138)$$

Ademais, 25 aços carbono e aços de baixa liga com $S_{ut} > 212$ kpsi são descritos por

$$\mathbf{S}'_e = 107\mathbf{LN}(1, 0{,}139) \text{ kpsi}$$

Em suma, para o espécime de viga rotativa,

$$\mathbf{S}'_e = \begin{cases} 0{,}506\bar{S}_{ut}\mathbf{LN}(1, 0{,}138) \text{ kpsi ou MPa} & \bar{S}_{ut} \leq 212 \text{ kpsi (1460 MPa)} \\ 107\mathbf{LN}(1, 0{,}139) \text{ kpsi} & \bar{S}_{ut} > 212 \text{ kpsi} \\ 740\mathbf{LN}(1, 0{,}139) \text{ MPa} & \bar{S}_{ut} > 1460 \text{ MPa} \end{cases} \quad (7\text{-}70)$$

em que $\bar{S}_{ut}$ é a média da resistência à tração.

[32] A partir deste ponto, uma vez que estaremos lidando com distribuições estatísticas no que diz respeito a médias, desvios-padrão, etc., a resistência última será apresentada por seu valor médio, $\bar{S}_{ut}$. Isso significa que alguns termos que foram antes definidos quanto ao valor mínimo de S_{ut} irão mudar ligeiramente.

[33] Em J. A. Pope, *Metal Fatigue*, Chapman and Hall, London, 1959.

[34] Charles R. Mischke, "Prediction of Stochastic Endurance Strength", *Trans. ASME, Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, vol. 109, nº 1, janeiro de 1987, p. 113-122.

[35] Dados extraídos de H. J. Grover, S. A. Gordon e L. R. Jackson, *Fatigue of Metals and Structures*, Bureau of Naval Weapons, Document NAVWEPS 00-2500435, 1960.

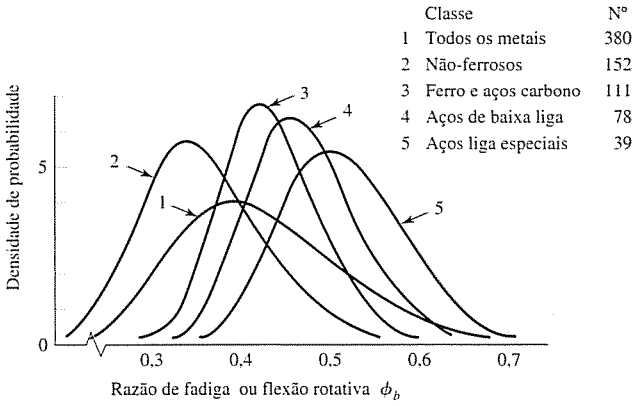


Figura 7-36 A densidade de probabilidade PDF *lognormal* da razão de fadiga ϕ_b de Gough.

As Equações (7-70) representam o estado de informação antes de um engenheiro ter escolhido um material. Ao escolher, o projetista realizou uma escolha aleatória dentro de um conjunto de possibilidades, e as estatísticas podem fornecer as oportunidades para um desapontamento. Se o teste é limitado a encontrar uma estimativa da média da resistência à tração $\bar{S}_{ut}$ com o material escolhido, as Equações (7-70) são diretamente úteis. Se deve haver teste de fadiga com viga rotativa, então informação estatística sobre o limite de resistência será recolhida e não há necessidade da correlação supramencionada.

A Tabela 7-12 compara valores médios aproximados da razão de fadiga $\bar{\phi}_{0.30}$ para várias classes de materiais ferrosos.

Fatores Modificadores do Limite de Resistência

Uma equação de Marin pode ser escrita como

$$\mathbf{S}_e = \mathbf{k}_a k_b \mathbf{k}_c \mathbf{k}_d \mathbf{k}_f \mathbf{S}'_e \tag{7-71}$$

em que o fator de tamanho k_b é determinístico e permanece inalterado relativamente àquele da Seção 7-9. Além disso, uma vez que estamos realizando uma análise estocástica, o "fator de confiabilidade" k_e é desnecessário aqui.

O fator de superfície $\mathbf{k}_a$ citado anteriormente de forma determinística, como a Equação (7-19), é agora fornecido de forma estocástica por

$$\mathbf{k}_a = a\bar{S}_{ut}^{b}\mathbf{LN}(1, C) \qquad (\bar{S}_{ut} \text{ em kpsi ou MPa}) \tag{7-72}$$

em que a Tabela 7-13 provê valores de a, b e C para várias condições de superfície.

Tabela 7-12 Comparação de valores aproximados da razão de fadiga média para algumas classes de metais

Classe do material	$\bar{\phi}_{0.30}$
Aços forjados	0,50
Aços fundidos	0,40
Aços sinterizados	0,38
Ferro fundido cinza	0,35
Ferro fundido maleável	0,40
Ferro fundido nodular normalizado	0,33

Tabela 7-13 Parâmetros no fator de condição de superfície de Marin

Acabamento superficial	$k_a = aS_{ut}^b \mathbf{LN}(1, C)$ a kpsi	a MPa	b	Coeficiente de variação
Retificado*	1,34	1,58	−0,086	0,120
Usinado ou laminado a frio	2,67	4,45	−0,265	0,058
Laminado a quente	14,5	58,1	−0,719	0,110
Como forjado	39,8	271	−0,995	0,145

* Devido ao espalhamento largo dos dados da superfície retificada, uma função alternativa é $\mathbf{k}_a = 0{,}878\mathbf{LN}(1, 0{,}120)$.
Nota: S_{ut} em kpsi ou MPa.

EXEMPLO 7-17

Um aço tem uma resistência última média de 520 MPa e uma superfície usinada. Estime $\mathbf{k}_a$.

Solução A partir da Tabela 7-13,

$$\mathbf{k}_a = 4{,}45(520)^{-0{,}265}\mathbf{LN}(1, 0{,}058)$$
$$\bar{k}_a = 4{,}45(520)^{-0{,}265}(1) = 0{,}848$$
$$\hat{\sigma}_{ka} = C\bar{k}_a = (0{,}058)4{,}45(520)^{-0{,}265} = 0{,}049$$

Resposta Logo, $\mathbf{k}_a = \mathbf{LN}(0{,}848, 0{,}049)$.

O fator de carga $\mathbf{k}_c$ para carregamento axial e torcional é fornecido por

$$(\mathbf{k}_c)_{\text{axial}} = 1{,}23\bar{S}_{ut}^{-0{,}0778}\mathbf{LN}(1, 0{,}125) \tag{7-73}$$

$$(\mathbf{k}_c)_{\text{torção}} = 0{,}328\ \bar{S}_{ut}^{0{,}125}\mathbf{LN}(1, 0{,}125) \tag{7-74}$$

Há menos dados de estudos para fadiga axial. A Equação (7-73) foi deduzida a partir dos dados de Landgraf e de Grover, Gordon e Jackson (como citado anteriormente).

Os dados torcionais são mais esparsos, e a Equação (7-74) é deduzida a partir de dados em Grover *et al.* Observe a sensibilidade média à resistência no fator de carga torcional e axial, de modo que $\mathbf{k}_c$ nesses casos não é constante. Valores médios são mostrados na última coluna da Tabela 7-14 e nas notas de rodapé das Tabelas 7-15 e 7-16. A Tabela 7-17 apresenta a influência das classes de material sobre o fator de carga $\mathbf{k}_c$. A teoria da energia de distorção prediz $(k_c)_{\text{torção}} = 0{,}577$ para materiais aos quais ela se aplica. Para flexão, $\mathbf{k}_c = \mathbf{LN}(1, 0)$.

Tabela 7-14 Parâmetros no fator de carregamento de Marin

Modo de carregamento	$k_c = \alpha\bar{S}_{ut}^{\beta}\mathbf{LN}(1, C)$ α kpsi	α MPa	β	C	Médio k_c
Flexão	1	1	0	0	1
Axial	1,23	1,43	−0,078	0,125	0,85
Torção	0,328	0,258	0,125	0,125	0,59

Tabela 7-15 Fator de carregamento médio de Marin para carga axial

$\bar{S}_{ut}$, kpsi	k_c^*
50	0,907
100	0,860
150	0,832
200	0,814

* Entrada média 0,85.

Tabela 7-16 Fator de carregamento médio de Marin para carga torcional

$\bar{S}_{ut}$, kpsi	k_c^*
50	0,535
100	0,583
150	0,614
200	0,636

* Entrada média 0,59.

Tabela 7-17 Fator de carregamento torcional médio de Marin k_c para vários materiais

Material	Intervalo	n	$\bar{k}_c$	$\hat{\sigma}_{kc}$
Aços forjados	0,52–0,69	31	0,60	0,03
Al forjado	0,43–0,74	13	0,55	0,09
Cu forjado e liga	0,41–0,67	7	0,56	0,10
Mg forjado e liga	0,49–0,60	2	0,54	0,08
Titânio	0,37–0,57	3	0,48	0,12
Ferro fundido	0,79–1,01	9	0,90	0,07
Al fundido, Mg e liga	0,71–0,91	5	0,85	0,09

Fonte: A tabela é uma extensão de P. G. Forrest, *Fatigue of Metals*, Pergamon Press, London, 1962, Tabela 17, p. 110, com desvios-padrão estimados a partir do intervalo e do tamanho de amostra utilizando a Tabela A-1 em J. B. Kennedy e A. M. Neville, *Basic Statistical Methods for Engineers and Scientists*, 3rd ed. Harper & Row, New York, 1986, p. 54-55.

EXEMPLO 7-18

Estime o fator de carregamento de Marin $\mathbf{k}_c$ para uma barra de 1 in de diâmetro utilizada como segue:

(*a*) Em flexão. A barra é feita de um aço com $\mathbf{S}_{ut} = 100\mathbf{LN}(1, 0{,}035)$ kpsi, e o projetista pretende utilizar a correlação $\mathbf{S}'_e = \boldsymbol{\phi}_{0,30}\bar{S}_{ut}$ para estimar $\mathbf{S}'_e$.

(*b*) Em flexão, mas o teste de endurança deu $\mathbf{S}'_e = \boldsymbol{\phi}_{0,30}S_{ut}$ para prever $\mathbf{S}'_e$.

(*c*) Em fadiga puxa-empurra (axial), $\mathbf{S}_{ut} = \mathbf{LN}(86{,}2, 3{,}92)$ kpsi, e o projetista pretende utilizar a correlação $\mathbf{S}'_e = \phi_{0,30}\bar{S}_{ut}$.

(*d*) Em fadiga torcional. O material é ferro fundido, e $\mathbf{S}'_e$ é conhecido a partir de teste.

Solução (*a*) Uma vez que a barra está sob flexão,

Resposta
$$\mathbf{k}_c = (1, 0)$$

(*b*) Uma vez que o teste e o uso são feitos em flexão,

Resposta

$$\mathbf{k}_c = (1, 0)$$

(*c*) A partir da Equação (7-73),

Resposta

$$(\mathbf{k}_c)_{ax} = 1{,}23(86{,}2)^{-0{,}0778}\mathbf{LN}(1, 0{,}125)$$

$$\bar{k}_c = 1{,}23(86{,}2)^{-0{,}0778}(1) = 0{,}870$$

$$\hat{\sigma}_{kc} = C\bar{k}_c = 0{,}125(0{,}870) = 0{,}109$$

(*d*) A partir da Tabela 7-17, $\bar{k}_c = 0{,}90$, $\hat{\sigma}_{kc} = 0{,}07$ e

Resposta

$$C_{kc} = \frac{0{,}07}{0{,}90} = 0{,}08$$

O fator de temperatura $\mathbf{k}_d$ é

$$\mathbf{k}_d = \bar{k}_d\mathbf{LN}(1, 0{,}11) \tag{7-75}$$

em que $\bar{k}_d = k_d$, fornecido pela Equação (7-26).

Por fim, $\mathbf{k}_e$ é, como antes, o fator de efeitos variados que podem ter origens diversas, como discutido na Seção 7-9, em que agora distribuições e estatísticas, possivelmente de ensaios, são consideradas.

Concentração de Tensão e Sensibilidade a Entalhe

A sensibilidade a entalhe q foi definida pela Equação (2-30). O equivalente estocástico é

$$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{K}_f - 1}{K_t - 1} \tag{7-76}$$

em que K_t é o fator de concentração de tensão teórico (ou geométrico), uma quantidade determinística. Um estudo das linhas 3 e 4 da Tabela 2-6 revelará que adicionar um escalar a (ou subtrair um de) uma variante $\mathbf{x}$ irá afetar somente a média. Além disso, a multiplicação (ou divisão) por um escalar afeta ambos, a média e o desvio-padrão. Tendo isso em mente, podemos relacionar os parâmetros estatísticos do fator de concentração de tensão de fadiga $\mathbf{K}_f$ àqueles da sensibilidade a entalhe $\mathbf{q}$. Segue-se que

$$\mathbf{q} = \mathbf{LN}\left(\frac{\bar{K}_f - 1}{K_t - 1}, \frac{C\bar{K}_f}{K_t - 1}\right)$$

em que $C = C_{Kf}$ e

$$\bar{q} = \frac{\bar{K}_f - 1}{K_t - 1}$$

$$\hat{\sigma}_q = \frac{C\bar{K}_f}{K_t - 1} \tag{7-77}$$

$$C_q = \frac{C\bar{K}_f}{\bar{K}_f - 1}$$

O fator de concentração de tensão de fadiga $\mathbf{K}_f$ foi investigado mais na Inglaterra do que nos Estados Unidos. Valores de C_{Kf} para furos transversais, mangas e fendas estão listados na Tabela 7-18. Uma vez que $\mathbf{K}_f$ seja descrito, $\mathbf{q}$ também poderá ser quantificado utilizando-se o conjunto de Equações (7-77).

A equação de Neuber modificada (por Heywood) provê o fator de concentração de tensão de fadiga como

$$\mathbf{K}_f = \bar{K}_f\mathbf{LN}\left(1, C_{K_f}\right) \tag{7-78}$$

em que $\bar{K}_f = K_f$, fornecido pela Equação (7-35).

Tabela 7-18 Coeficiente de variação C_{Kf} para aços

Tipo de entalhe	Coeficiente de variação C_{Kf}
Furo transversal	0,10
Ombro	0,11
Fenda	0,15

Notas: Coeficientes de variação de Heywood. Diagramas de sensibilidade a entalhe podem ser evitados utilizando-se uma equação de Neuber modificada. Ver Seção 7-10.

EXEMPLO 7-19

Estime $\mathbf{K}_f$ e $\mathbf{q}$ para o eixo de aço fornecido no Exemplo 7-6.

Solução

A partir do Exemplo 7-6 e da Equação (7-35), $K_f = 1{,}51$. A partir da Tabela 7-18, $C_{K_f} = 0{,}11$. Logo, a partir da Equação (7-78),

Resposta

$$\mathbf{K}_f = 1{,}51\mathbf{LN}(1, 0{,}11)$$

A partir da Equação (7-77), com $K_t = 1{,}65$ obtido do Exemplo 7-6,

$$\bar{q} = \frac{1{,}51 - 1}{1{,}65 - 1} = 0{,}785$$

$$C_q = \frac{C_{K_f}\bar{K}_f}{\bar{K}_f - 1} = \frac{0{,}11(1{,}51)}{1{,}51 - 1} = 0{,}326$$

$$\hat{\sigma}_q = C_q\bar{q} = 0{,}326(0{,}785) = 0{,}256$$

Assim,

Resposta

$$\mathbf{q} = \mathbf{LN}(0{,}785, 0{,}256)$$

EXEMPLO 7-20

A barra mostrada na Figura 7-37 é usinada a partir de um perfil plano, laminado a frio, que tem uma resistência última $\mathbf{S}_{ut} = \mathbf{LN}(87{,}6, 5{,}74)$ kpsi. A carga axial mostrada é completamente inversa. A amplitude de carga é $\mathbf{F}_a = \mathbf{LN}(1000, 120)$ lbf.

(*a*) Estime a confiabilidade.

(*b*) Estime novamente a confiabilidade quando um teste rotativo de resistência de flexão mostrar que $\mathbf{S}'_e = \mathbf{LN}(40, 2)$ *kpsi*.

Solução

(*a*) A partir da Equação (7-70),

$$\mathbf{S}'_e = 0{,}506\,\bar{S}_{ut}\mathbf{LN}(1, 0{,}138) = 0{,}506(87{,}6)\mathbf{LN}(1, 0{,}138)$$
$$= 44{,}3\mathbf{LN}(1, 0{,}138) \text{ kpsi}$$

A partir da Equação (7-72) e da Tabela 7-13,

$$\mathbf{k}_a = 2{,}67\bar{S}_{ut}^{-0{,}265}\mathbf{LN}(1, 0{,}058) = 2{,}67(87{,}6)^{-0{,}265}\mathbf{LN}(1, 0{,}058)$$
$$= 0{,}816\mathbf{LN}(1, 0{,}058)$$

$$k_b = 1 \qquad \text{(carregamento axial)}$$

A partir da Equação (7-73),

$$\mathbf{k}_c = 1{,}23\bar{S}_{ut}^{-0{,}0778}\mathbf{LN}(1, 0{,}125) = 1{,}23(87{,}6)^{-0{,}0778}\mathbf{LN}(1, 0{,}125)$$
$$= 0{,}869\mathbf{LN}(1, 0{,}125)$$

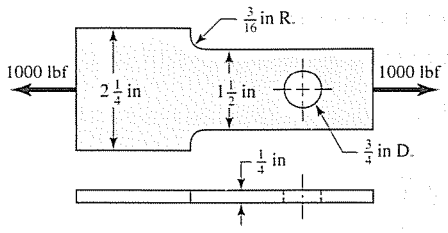


Figura 7-37

$$\mathbf{k}_d = \mathbf{k}_f = (1, 0)$$

A resistência, a partir da Equação (7-71), é

$$\mathbf{S}_e = \mathbf{k}_a k_b \mathbf{k}_c \mathbf{k}_d \mathbf{k}_f \mathbf{S}'_e$$

$$\mathbf{S}_e = 0{,}816\mathbf{LN}(1, 0{,}058)(1)0{,}868\mathbf{LN}(1, 0{,}125)(1)(1)44{,}3\mathbf{LN}(1, 0{,}138)$$

Os parâmetros de $\mathbf{S}_e$ são

$$\bar{S}_e = 0{,}816(0{,}868)44{,}3 = 31{,}4 \text{ kpsi}$$

$$C_{Se} = (0{,}058^2 + 0{,}125^2 + 0{,}138^2)^{1/2} = 0{,}195$$

de modo que $\mathbf{S}_e = 31{,}4\ \mathbf{LN}(1, 0{,}195)$ kpsi.

Ao computar a tensão, a secção de furo prevalece. Utilizando a terminologia da Tabela A-15-1, determinamos que $d/w = 0{,}50$; portanto, $K_t = 2{,}18$. A partir das Tabelas 7-8 e 7-18, $\sqrt{a} = 5/S_{ut} = 5/87{,}6 = 0{,}057$ e $C_{kf} = 0{,}10$. A partir das Equações (7-35) e (7-78), com $r = 0{,}375$ in,

$$\mathbf{K}_f = \frac{K_t}{1 + \dfrac{2(K_t - 1)}{K_t}\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{r}}}\mathbf{LN}\left(1, C_{K_f}\right) = \frac{2{,}18}{1 + \dfrac{2(2{,}18 - 1)}{2{,}18}\dfrac{0{,}057}{\sqrt{0{,}375}}}\mathbf{LN}(1, 0{,}10)$$

$$= 1{,}98\mathbf{LN}(1, 0{,}10)$$

A tensão no furo é

$$\sigma = \mathbf{K}_f \frac{\mathbf{F}}{A} = 1{,}98\mathbf{LN}(1, 0{,}10)\frac{1000\mathbf{LN}(1, 0{,}12)}{0{,}25(0{,}75)}$$

$$\bar{\sigma} = 1{,}98\frac{1000}{0{,}25(0{,}75)}10^{-3} = 10{,}56 \text{ kpsi}$$

$$C_\sigma = (0{,}10^2 + 0{,}12^2)^{1/2} = 0{,}156$$

de modo que a tensão pode ser expressa como $\sigma = 10{,}56\mathbf{LN}(1, 0{,}156)$ kpsi.

O limite de resistência é consideravelmente maior que a tensão induzida pela carga, indicando que vida finita não é um problema. Para interferência entre distribuições *lognormal-lognormal*, a Equação (6-57) fornece

$$z = -\frac{\ln\left(\dfrac{\bar{S}_e}{\bar{\sigma}}\sqrt{\dfrac{1 + C_\sigma^2}{1 + C_{S_e}^2}}\right)}{\sqrt{\ln\left[\left(1 + C_{S_e}^2\right)\left(1 + C_\sigma^2\right)\right]}} = -\frac{\ln\left(\dfrac{31{,}4}{10{,}56}\sqrt{\dfrac{1 + 0{,}156^2}{1 + 0{,}195^2}}\right)}{\sqrt{\ln[(1 + 0{,}195^2)(1 + 0{,}156^2)]}} = -4{,}36$$

A partir da Tabela A-10, a probabilidade de falha $p_f = \Phi(-4{,}36) = 0{,}000\ 006\ 66$ e a confiabilidade é

Resposta
$$R = 1 - 0{,}000\ 006\ 66 = 0{,}999\ 993\ 34$$

(*b*) Os testes de resistência rotativos são descritos por $\mathbf{S}'_e = 40\mathbf{LN}(1, 0{,}05)$ kpsi, cuja média é menor que a prevista na parte (*a*). A resistência média $\bar{S}_e$ é

$$\bar{S}_e = 0{,}816(0{,}868)40 = 28{,}3 \text{ kpsi}$$
$$C_{Se} = (0{,}058^2 + 0{,}125^2 + 0{,}05^2)^{1/2} = 0{,}147$$

de modo que a resistência pode ser expressa como $\mathbf{S}_e = 28{,}3\ \mathbf{LN}(1, 0{,}147)$ kpsi. A partir da Equação (6-57),

$$z = -\frac{\ln\left(\dfrac{28{,}3}{10{,}56}\sqrt{\dfrac{1+0{,}156^2}{1+0{,}147^2}}\right)}{\sqrt{\ln[(1+0{,}147^2)(1+0{,}156^2)]}} = -4{,}63$$

Utilizando a Tabela A-10, vemos que a probabilidade de falha $p_f = \Phi(-4{,}63) = 0{,}000\ 001\ 87$ kpsi e que

$$R = 1 - 0{,}000\ 001\ 87 = 0{,}999\ 998\ 13$$

um verdadeiro aumento! A redução na probabilidade de falha é (0,000 001 87 – 0,000 006 66) / 0,000 006 66 = –0,72, uma redução de 72%. Estamos analisando um projeto existente, de modo que, na parte (*a*), o fator de segurança era $\bar{n} = \bar{S}/\bar{\sigma} = 31{,}3/10{,}56 = 2{,}96$. Na parte (*b*), $\bar{n} = 28{,}3/10{,}56 = 2{,}68$, um *decréscimo*. Esse exemplo oferece a você oportunidade de ver a função do fator de segurança. Considerados o conhecimento de $\bar{S}$, C_S, $\bar{\sigma}$, C_σ e a confiabilidade (por meio de z), esse fator de segurança médio (como um fator de projeto) separa $\bar{S}$ e $\bar{\sigma}$, de modo que a meta de confiabilidade é atingida. O conhecimento de $\bar{n}$ por si só *nada diz a respeito da probabilidade de falha*. Da mesma forma, olhar para $\bar{n} = 2{,}96$ e $\bar{n} = 2{,}68$ nada diz com relação às respectivas probabilidades de falha. Os testes não reduziram significativamente $\bar{S}_e$, mas reduziram a variação C_S, de modo que a confiabilidade foi *aumentada*.

Quando se diz que um fator de projeto médio (ou fator de segurança médio) definido como $\bar{S}_e/\bar{\sigma}$ é silencioso quanto à freqüência de falhas, isso significa que um fator de segurança escalar por si só não oferece qualquer informação com relação à probabilidade de falha. Não obstante, alguns engenheiros deixam o fator de segurança falar mais alto, podendo estar enganados em suas conclusões.

Tão revelador quanto o Exemplo 7-20, no que concerne ao significado (e à falta de significado) de um fator de projeto ou fator de segurança é o ensaio rotativo associado à parte, onde se percebe que (*b*) nada mudou em relação a esta; mudou, apenas, o nosso conhecimento sobre a mesma. O limite de resistência médio era de 40 kpsi todo o tempo, e nosso julgamento de adequação teve de se adaptar àquilo que era conhecido.

Tensões Flutuantes

Os pontos de falha determinísticos que se situam entre os dados são candidatos a modelos de regressão. Incluídos entre estes estão os modelos de Gerber, os elípticos da ASME e, para materiais frágeis, os de Smith-Dolan, que utilizam valores médios para suas apresentações. A parábola de Gerber é

$$\frac{\bar{S}_a}{\bar{S}_e} + \left(\frac{\bar{S}_m}{\bar{S}_{ut}}\right)^2 = 1 \tag{7-79}$$

Assim como os pontos de falha determinísticos são localizados pela resistência e pela resistência à tração (ou ao escoamento), também os pontos de falha estocásticos são determinados por $\mathbf{S}_e$ e por $\mathbf{S}_{ut}$ ou $\mathbf{S}_y$. A Figura 7-32 mostra como o ponto médio da Equação (7-79) se ajusta a uma parábola para formar o ponto médio de Gerber. Necessitamos também estabelecer um contorno localizado um desvio-padrão distante da média. Haja vista ser mais provável que os pontos estocásticos sejam usados com uma linha de carga radial, desenvolveremos a equação utilizando a inclinação da linha de carga $r = \bar{S}_a/\bar{S}_m$. Substituindo $\bar{S}_m = \bar{S}_a/r$ na Equação (7-79) e solucionando para $\bar{S}_a$, obtemos

$$\bar{S}_a = \frac{r^2\bar{S}_{ut}^2}{2\bar{S}_e}\left[-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2\bar{S}_e}{r\bar{S}_{ut}}\right)^2}\right] \tag{7-80}$$

Devido à correlação positiva entre $\mathbf{S}_e$ e $\mathbf{S}_{ut}$, incrementamos $\bar{S}_e$ por $C_{Se}\bar{S}_e$, $\bar{S}_{ut}$ por $C_{Sut}\bar{S}_{ut}$ e $\bar{S}_a$ por $C_{Sa}\bar{S}_a$, substituímos na Equação (7-80) e solucionamos para C_{Sa} a fim de obter

$$C_{Sa} = \frac{(1+C_{Sut})^2}{1+C_{Se}} \frac{\left\{-1+\sqrt{1+\left[\dfrac{2\bar{S}_e(1+C_{Se})}{r\bar{S}_{ut}(1+C_{Sut})}\right]^2}\right\}}{\left[-1+\sqrt{1+\left(\dfrac{2\bar{S}_e}{r\bar{S}_{ut}}\right)^2}\right]} - 1 \tag{7-81}$$

A Equação (7-81) pode ser vista como uma fórmula de interpolação para C_{Sa}, que cai entre C_{Se} e C_{Sut}, dependendo da inclinação da linha de carga r. Observe que $\mathbf{S}_a = \bar{S}_a\mathbf{LN}(1, C_{Sa})$.

O critério elíptico da ASME é expresso quanto à sua média como

$$\left(\frac{\bar{S}_a}{\bar{S}_e}\right)^2 + \left(\frac{\bar{S}_m}{\bar{S}_y}\right)^2 = 1 \tag{7-82}$$

De maneira semelhante, substituindo $\bar{S}_m = \bar{S}_a / r$ na Equação (7-82) e solucionando para $\bar{S}_a$, obtemos

$$\bar{S}_a = \frac{r\bar{S}_y\bar{S}_e}{\sqrt{r^2\bar{S}_y^2 + \bar{S}_e^2}} \tag{7-83}$$

Similarmente, incrementamos $\bar{S}_e$ por $C_{Se}\bar{S}_e$, $\bar{S}_y$ por $C_{Sy}\bar{S}_y$ e $\bar{S}_a$ por $C_{Sa}\bar{S}_a$, substituímos na Equação (7-83) e solucionamos para C_{Sa}:

$$C_{Sa} = (1+C_{Sy})(1+C_{Se})\sqrt{\frac{r^2\bar{S}_y^2 + \bar{S}_e^2}{r^2\bar{S}_y^2(1+C_{Sy})^2 + \bar{S}_e^2(1+C_{Se})^2}} - 1 \tag{7-84}$$

Muitos materiais *frágeis* seguem um critério de falha de Smith-Dolan, escrito deterministicamente como

$$\frac{n\sigma_a}{S_e} = \frac{1 - n\sigma_m/S_{ut}}{1 + n\sigma_m/S_{ut}} \tag{7-85}$$

Expresso quanto à sua média,

$$\frac{\bar{S}_a}{\bar{S}_e} = \frac{1 - \bar{S}_m/\bar{S}_{ut}}{1 + \bar{S}_m/\bar{S}_{ut}} \tag{7-86}$$

Para uma inclinação de linha de carga radial de r, substituímos $\bar{S}_a/r$ por $\bar{S}_m$ e solucionamos para $\bar{S}_a$, obtendo

$$\bar{S}_a = \frac{r\bar{S}_{ut} + \bar{S}_e}{2}\left[-1+\sqrt{1+\frac{4r\bar{S}_{ut}\bar{S}_e}{(r\bar{S}_{ut} + \bar{S}_e)^2}}\right] \tag{7-87}$$

e a expressão para C_{Sa} é

$$C_{Sa} = \frac{r\bar{S}_{ut}(1+C_{Sut}) + \bar{S}_e(1+C_{Se})}{2\bar{S}_a} \cdot \left\{-1+\sqrt{1+\frac{4r\bar{S}_{ut}\bar{S}_e(1+C_{Se})(1+C_{Sut})}{[r\bar{S}_{ut}(1+C_{Sut}) + \bar{S}_e(1+C_{Se})]^2}}\right\} - 1 \tag{7-88}$$

EXEMPLO 7-21

Um eixo rotativo experimenta um torque permanente $\mathbf{T} = 1360\mathbf{LN}(1, 0{,}05)$ lbf · in e, em um ressalto com diâmetro pequeno de 1,1 in, um fator de concentração de tensão $\mathbf{K}_f = 1{,}50\mathbf{LN}(1, 0{,}11)$, K_{fs}=1,28**LN**(1, 0,11) e, naquela localidade, um momento flexor de $\mathbf{M} = 1260\mathbf{LN}(1, 0{,}05)$ lbf · in. O material do qual o eixo é usinado é um aço 1035, laminado a quente, com $\mathbf{S}_{ut} = 86{,}2\mathbf{LN}(1, 0{,}045)$ kpsi e $\mathbf{S}_y = 56{,}0\mathbf{LN}(1{,}0{,}077)$ *kpsi*. Estime a confiabilidade usando uma zona de falha estocástica de Gerber.

Solução Estabeleça a resistência. A partir das Equações (7-70) a (7-72) e da Equação (7-19),

$$\mathbf{S}'_e = 0{,}506(86{,}2)\mathbf{LN}(1,\,0{,}138) = 43{,}6\mathbf{LN}(1,\,0{,}138)\ \text{kpsi}$$
$$\mathbf{k}_a = 2{,}67(86{,}2)^{-0.265}\mathbf{LN}(1,\,0{,}058) = 0{,}820\mathbf{LN}(1,\,0{,}058)$$
$$k_b = (1{,}1/0{,}30)^{-0.107} = 0{,}870$$
$$\mathbf{k}_c = \mathbf{k}_d = \mathbf{k}_f = \mathbf{LN}(1,\,0)$$
$$\mathbf{S}_e = 0{,}820\mathbf{LN}(1,\,0{,}058)0{,}870(43{,}6)\mathbf{LN}(1,\,0{,}138)$$
$$\bar{S}_e = 0{,}820(0{,}870)43{,}6 = 31{,}1\ \text{kpsi}$$
$$C_{Se} = (0{,}058^2 + 0{,}138^2)^{1/2} = 0{,}150$$

e, assim, $S_e = 31{,}1\mathbf{LN}(1,\,0{,}150)$ kpsi.

Tensão (em kpsi):

$$\boldsymbol{\sigma}_a = \frac{32\mathbf{K}_f\mathbf{M}_a}{\pi d^3} = \frac{32(1{,}50)\mathbf{LN}(1,\,0{,}11)1{,}26\mathbf{LN}(1,\,0{,}05)}{\pi(1{,}1)^3}$$

$$\bar{\sigma}_a = \frac{32(1{,}50)1{,}26}{\pi(1{,}1)^3} = 14{,}5\ \text{kpsi}$$

$$C_{\sigma a} = (0{,}11^2 + 0{,}05^2)^{1/2} = 0{,}121$$

$$\boldsymbol{\tau}_m = \frac{16\mathbf{K}_{fs}\mathbf{T}_m}{\pi d^3} = \frac{16(1{,}28)\mathbf{LN}(1,\,0{,}11)1{,}36\mathbf{LN}(1,\,0{,}05)}{\pi(1{,}1)^3}$$

$$\bar{\tau}_m = \frac{16(1{,}28)1{,}36}{\pi(1{,}1)^3} = 6{,}66\ \text{kpsi}$$

$$C_{\tau m} = (0{,}11^2 + 0{,}05^2)^{1/2} = 0{,}121$$

$$\bar{\sigma}'_a = \left(\bar{\sigma}_a^2 + 3\bar{\tau}_a^2\right)^{1/2} = [14{,}5^2 + 3(0)^2]^{1/2} = 14{,}5\ \text{kpsi}$$

$$\bar{\sigma}'_m = \left(\bar{\sigma}_m^2 + 3\bar{\tau}_m^2\right)^{1/2} = [0 + 3(6{,}66)^2]^{1/2} = 11{,}54\ \text{kpsi}$$

$$r = \frac{\bar{\sigma}'_a}{\bar{\sigma}'_m} = \frac{14{,}5}{11{,}54} = 1{,}26$$

Resistência: A partir das Equações (7-80) e (7-81),

$$\bar{S}_a = \frac{1{,}26^2 86{,}2^2}{2(31{,}1)}\left\{-1 + \sqrt{1 + \left[\frac{2(31{,}1)}{1{,}26(86{,}2)}\right]^2}\right\} = 28{,}9\ \text{kpsi}$$

$$C_{Sa} = \frac{(1 + 0{,}045)^2}{1 + 0{,}150}\,\frac{-1 + \sqrt{1 + \left[\dfrac{2(31{,}1)(1 + 0{,}15)}{1{,}26(86{,}2)(1 + 0{,}045)}\right]^2}}{-1 + \sqrt{1 + \left[\dfrac{2(31{,}1)}{1{,}26(86{,}2)}\right]^2}} - 1 = 0{,}134$$

Confiabilidade: Sendo que $\mathbf{S}_a = 28{,}9\mathbf{LN}(1,\,0{,}134)$ kpsi e $\sigma'_a = 14{,}5\mathbf{LN}(1,\,0{,}121)$ kpsi, a Equação (6-58) produz

$$z = -\frac{\ln\left(\dfrac{\bar{S}_a}{\bar{\sigma}}\sqrt{\dfrac{1 + C_\sigma^2}{1 + C_{S_a}^2}}\right)}{\sqrt{\ln\left[\left(1 + C_{S_a}^2\right)\left(1 + C_\sigma^2\right)\right]}} = -\frac{\ln\left(\dfrac{28{,}9}{14{,}5}\sqrt{\dfrac{1 + 0{,}121^2}{1 + 0{,}134^2}}\right)}{\sqrt{\ln[(1 + 0{,}134^2)(1 + 0{,}121^2)]}} = -3{,}83$$

Resposta

A partir da Tabela A-10, a probabilidade de falha é $p_f = 0{,}000\,065$ e a confiabilidade, contra fadiga,

$$R = 1 - p_f = 1 - 0{,}000\,065 = 0{,}999\,935$$

A chance de escoamento de primeiro ciclo é estimada pela interferência de $\mathbf{S}_y$ em $\sigma'_{\max}$. A quantidade $\sigma'_{\max}$ é formada de $\sigma'_a + \sigma'_m$. A média de $\sigma'_{\max}$ é $\bar{\sigma}'_a + \bar{\sigma}'_m = 14{,}5 + 11{,}54 = 26{,}04$ kpsi. O coeficiente de variação da soma é 0,121, visto que ambos os COVs são 0,121; logo, $C_{\sigma\,\max} = 0{,}121$. Inferimos $\mathbf{S}_y = 56\mathbf{LN}(1, 0{,}077)$ kpsi com $\sigma'_{\max} = 26{,}04\mathbf{LN}(1, 0{,}121)$ kpsi. A variável z correspondente é

$$z = -\frac{\ln\left(\dfrac{56}{26{,}04}\sqrt{\dfrac{1+0{,}121^2}{1+0{,}077^2}}\right)}{\sqrt{\ln[(1+0{,}077^2)(1+0{,}121^2)]}} = -5{,}39$$

o que representa, a partir da Tabela A-10, uma probabilidade de falha de aproximadamente $0{,}0^7358$ [o que representa $3{,}58(10^{-8})$] de escoamento de primeiro ciclo no filete.

A probabilidade de observação de uma falha por fadiga excede à probabilidade de uma falha por escoamento, algo que uma análise determinística não prevê, podendo, de fato, levar à expectativa de uma falha por escoamento, caso venha a ocorrer uma falha. Observe as interferências $\sigma'_a\mathbf{S}_a$ e $\sigma'_{max}\mathbf{S}_y$ e examine as expressões de z. Estas controlam as probabilidades relativas. Uma análise determinística é obscura em relação a isso, podendo desorientar. Verifique seus textos de estatística para eventos que não sejam mutuamente exclusivos, mas independentes, a fim de quantificar a probabilidade de falha:

$$\begin{aligned} p_f &= p(\text{escoamento}) + p(\text{fadiga}) - p(\text{escoamento e fadiga}) \\ &= p(\text{escoamento}) + p(\text{fadiga}) - p(\text{escoamento})\,p(\text{fadiga}) \\ &= 0{,}358(10^{-7}) + 0{,}65(10^{-4}) - 0{,}358(10^{-7})0{,}65(10^{-4}) = 0{,}650(10^{-4}) \\ R &= 1 - 0{,}650(10^{-4}) = 0{,}999\,935 \end{aligned}$$

contra cada um ou contra ambos os modos de falha.

Examine a Figura 7-38, que apresenta os resultados do Exemplo 7-16. A distribuição do problema para $\mathbf{S}_e$ foi composta de experiência histórica com $\mathbf{S}'_e$ e com as manifestações de incerteza decorrentes de atributos requerendo considerações de Marin. A "zona de falha" de Gerber mostra isso. A interferência com tensão induzida por carga prediz o risco de falha. Se informação adicional for conhecida (o ensaio de R. R. Moore, com ou sem os atributos de Marin), a Gerber estocástica poderá se acomodar a essa informação. Normalmente, a acomodação à informação adicional de teste significa movimento e contração da zona de falha. À sua maneira, o modelo de falha estocástico alcança mais precisamente o que os modelos determinísticos e as posturas conservadoras pretendem. Além disso, os modelos estocásticos podem estimar a probabilidade de falha, algo que um enfoque determinístico não pode considerar.

O Fator de Projeto em Fadiga

O projetista, ao imaginar o modo como executar a geometria de uma peça submetida a restrições impostas, pode começar tomando decisões iniciais sem perceber o impacto na tarefa de projeto. Agora é o momento de observar como essas coisas estão relacionadas com a meta de confiabilidade.

O valor médio do fator de projeto é fornecido pela Equação (6-59),

$$\bar{n} = \exp\left[-z\sqrt{\ln\left(1+C_n^2\right)} + \ln\sqrt{1+C_n^2}\right] \doteq \exp[C_n(-z + C_n/2)] \tag{6-59}$$

no qual, a partir da Tabela 2-6 para o quociente $\mathbf{n} = \mathbf{S} / \sigma$,

$$C_n = \sqrt{\frac{C_S^2 + C_\sigma^2}{1 + C_\sigma^2}}$$

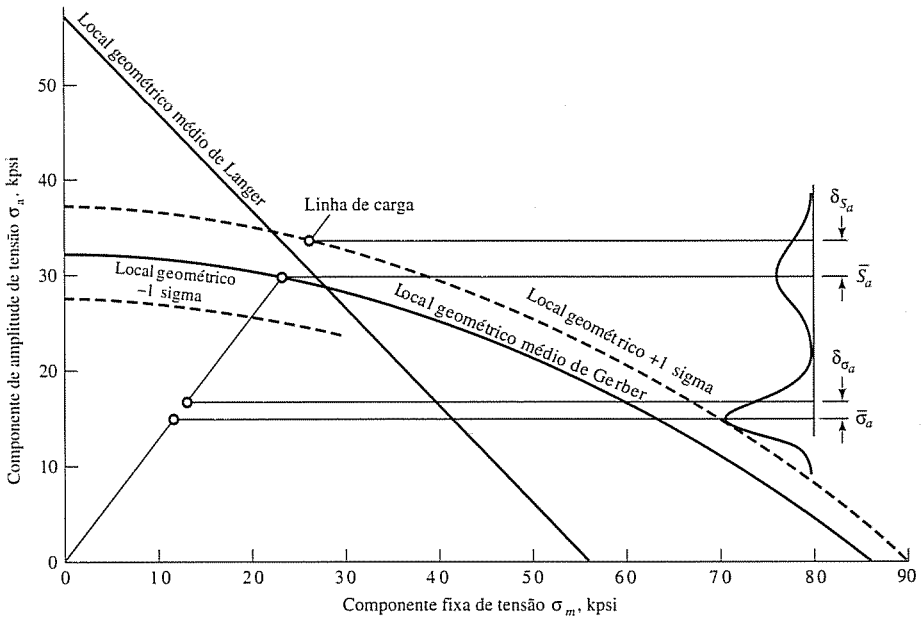


Figura 7-38 Diagrama de fadiga do projetista para o Exemplo 7-21.

em que C_S é a COV da resistência significativa e C_σ é a COV da tensão significativa no ponto crítico. Observe que $\bar{n}$ é uma função da meta de confiabilidade (por intermédio de z) e as COVs da resistência e da tensão. Não há médias presentes, apenas medidas de variabilidade. A natureza de C_S em uma situação de fadiga pode ser de C_{Se} para carregamento completamente inverso ou C_{Sa}, em caso contrário. Além disso, a experiência mostra que $C_{Se} > C_{Sa} > C_{Sut}$, de modo que C_{Se} pode ser usado como uma estimativa conservadora de C_S. Se o carregamento for de flexão ou axial, a forma de σ'_a poderá ser

$$\sigma'_a = \mathbf{K}_f \frac{\mathbf{M}_a c}{I} \qquad \text{ou} \qquad \sigma'_a = \mathbf{K}_f \frac{\mathbf{F}}{A}$$

respectivamente. Isso faz a COV de σ'_a, isto é, $C_{\sigma'_a}$, ser expressa como

$$C_{\sigma'_a} = \left(C_{Kf}^2 + C_F^2\right)^{1/2}$$

novamente uma função de variabilidades. A COV de $\mathbf{S}_e$, isto é, C_{Se}, é

$$C_{Se} = \left(C_{ka}^2 + C_{kc}^2 + C_{kd}^2 + C_{kf}^2 + C_{Se'}^2\right)^{1/2}$$

novamente, uma função de variabilidades. Um exemplo será útil.

EXEMPLO 7-22

Uma tira a ser feita a partir de um pedaço de faixa de aço repuxado a frio deve carregar uma carga axial completamente inversa $\mathbf{F} = \mathbf{LN}(1000, 120)$ lbf, como mostrado na Figura 7-39. Considerações das peças adjacentes estabeleceram a geometria tal como mostrado na figura, exceto pela espessura t. Tome uma decisão quanto à magnitude do fator de projeto se a meta de confiabilidade for de 0,999 95; tome então outra decisão quanto à espessura t do pedaço.

Solução Tomemos cada decisão *a priori* e observemos as conseqüências:

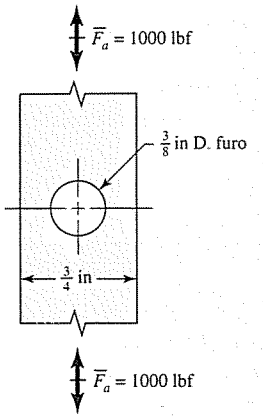


Figura 7-39 Uma tira com uma espessura t é submetida a uma carga axial completamente inversa de 1000 lbf. O Exemplo 7-22 considera a espessura necessária para obter uma confiabilidade de 0,999 95 contra falha por fadiga.

Decisão a priori	Conseqüência
Usar aço CD 1018	$\bar{S}_{ut} = 87{,}6$ kpsi, $C_{Sut} = 0{,}0655$
Função:	
Carregar carga axial	$C_F = 0{,}12$, $C_{kc} = 0{,}125$
$R \geq 0{,}999\ 95$	$z = -3{,}891$
Superfícies usinadas	$C_{ka} = 0{,}058$
Orifício crítico	$C_{Kf} = 0{,}10$, $C_{\sigma_a'} = (0{,}10^2 + 0{,}12^2)^{1/2} = 0{,}156$
Temperatura ambiente	$C_{kd} = 0$
Método de correlação	$C_{S_e'} = 0{,}138$
Orifício furado	$C_{Se} = (0{,}058^2 + 0{,}125^2 + 0{,}138^2)^{1/2} = 0{,}195$
	$C_n = \sqrt{\dfrac{C_{Se}^2 + C_{\sigma_a'}^2}{1 + C_{\sigma_a'}^2}} = \sqrt{\dfrac{0{,}195^2 + 0{,}156^2}{1 + 0{,}156^2}} = 0{,}2467$
	$\bar{n} = \exp\left[-(-3{,}891)\sqrt{\ln(1 + 0{,}2467^2)} + \ln\sqrt{1 + 0{,}2467^2}\right]$ $= 2{,}65$

Essas oito decisões *a priori* quantificaram o fator de projeto médio como $\bar{n} = 2{,}65$. Procedendo de forma determinística daqui em diante, escreveremos

$$\sigma_a' = \frac{\bar{S}_e}{\bar{n}} = \bar{K}_f \frac{\bar{F}}{(w-d)t}$$

e a partir daí

$$t = \frac{\bar{K}_f \bar{n} \bar{F}}{(w-d)\bar{S}_e}$$

Para avaliar a equação precedente, necessitamos de $\bar{S}_e$ e $\bar{K}_f$. Os fatores de Marin são

$$\mathbf{k}_a = 2{,}67\bar{S}_{ut}^{-0{,}265}\mathbf{LN}(1, 0{,}058) = 2{,}67(87{,}6)^{-0{,}265}\mathbf{LN}(1, 0{,}058)$$
$$\bar{k}_a = 0{,}816$$

$$k_b = 1 \text{ (ver } \mathbf{k}_c\text{)}$$
$$\mathbf{k}_c = 1{,}23\bar{S}_{ut}^{-0.078}\mathbf{LN}(1,\ 0{,}125) = 0{,}868\mathbf{LN}(1,\ 0{,}125)$$
$$\bar{k}_c = 0{,}868$$
$$\bar{k}_d = \bar{k}_f = 1$$

e a resistência é

$$\bar{S}_e = 0{,}816(0{,}868)(1)(1)(1)0{,}506(87{,}6) = 31{,}4 \text{ kpsi}$$

O orifício prevalece. A partir da Tabela A-15-1, encontramos $d/w = 0{,}50$; logo, $K_t = 2{,}18$. A partir da Tabela 7-7, $\sqrt{a} = 5/\bar{S}_{ut} = 5/87{,}6 = 0{,}057$, $r = 0{,}375$ in. A partir da Equação (7-34), o fator de concentração de tensão de fadiga é

$$\bar{K}_f = \frac{2{,}18}{1 + \dfrac{2}{\sqrt{0{,}375}}\dfrac{2{,}18 - 1}{2{,}18}\,0{,}057} = 1{,}98$$

A espessura t pode agora ser determinada a partir de $S_e/\bar{n} = \bar{K}_f\bar{F}/A$,

$$t \geq \frac{\bar{K}_f\bar{n}\bar{F}}{(w - d)S_e} = \frac{1{,}98(2{,}65)1000}{(0{,}75 - 0{,}375)31\,400} = 0{,}446 \text{ in}$$

Utilize uma tira de $\frac{1}{2}$ in de espessura para o pedaço de faixa. Essa espessura atinge a meta de confiabilidade e, no tamanho nominal disponível mais próximo, excede a ela.

O exemplo demonstra que, para uma dada meta de confiabilidade, o fator de projeto de fadiga que facilita sua consecução é decidido pelas variabilidades da situação. Além do mais, o fator de projeto necessário não é uma constante independente da maneira como o conceito se forma. Ao contrário, é uma função de um conjunto de decisões iniciais, aparentemente não-relacionadas, que são providas ao se dar definição ao conceito. O envolvimento de metodologia estocástica pode ser limitado à definição do fator de projeto necessário. Em particular, no exemplo, o fator de projeto não é uma função da variável de projeto t; em vez disso, t resulta do fator de projeto.

PROBLEMAS

Os Problemas 7-1 a 7-31 devem ser solucionados por métodos determinísticos, e os Problemas 7-32 a 7-38, por métodos estocásticos. Já os Problemas 7-39 a 7-46 são computacionais.

Problemas Determinísticos

ANÁLISE **7-1** Uma broca de perfuração de $\frac{3}{16}$ in foi tratada termicamente e retificada. Descobriu-se que a dureza medida era de 490 Brinell. Estime a resistência se a broca for utilizada em flexão rotativa.

ANÁLISE **7-2** Estime S'_e para os seguintes materiais:

(*a*) Aço AISI 1020 repuxado a frio.

(*b*) Aço AISI 1080 laminado a quente.

(*c*) Alumínio 2024 T3.

(*d*) Aço AISI 4340 tratado termicamente a uma resistência à tração de 250 kpsi.

ANÁLISE **7-3** Estime a resistência à fadiga de um espécime de viga rotativa, feito de aço AISI 1020 laminado a quente, correspondente a uma vida de 12,5 quilociclos de tensão inversa. Estime também a vida do espécime correspondendo a uma amplitude de tensão de 36 kpsi. As propriedades conhecidas são $S_{ut} = 66{,}2$ kpsi, $\sigma_0 = 115$ kpsi, $m = 0{,}22$ e $\epsilon_f = 0{,}90$.

ANÁLISE **7-4** Derive a Equação (7-16). Para o espécime do Problema 7-3, estime a resistência correspondente a 500 ciclos.

ANÁLISE **7-5** Para o intervalo $10^3 \le N \le 10^6$ ciclos, desenvolva uma expressão para a resistência $(S'_f)_{ax}$ em fadiga axial para os espécimes polidos de 4130 usados para obter a Figura 7-10. A resistência última é $S_{ut} = 125$ kpsi, e o limite de resistência, $(S'_e)_{ax} = 49$ kpsi.

7-6 Estime a resistência de uma barra de aço AISI 1035 com 32 mm de diâmetro, acabamento de usinagem, tratada termicamente a uma resistência à tração de 710 MPa.

ANÁLISE **7-7** Dois aços estão sendo considerados para a manufatura de barras conectoras na condição de forjamento. Um deles é um aço AISI 4340 Cr-Mo-Ni, capaz de ser tratado termicamente até uma resistência à tração de 260 kpsi. O outro é um aço carbono AISI 1040 simples, com uma S_{ut} atingível de 113 kpsi. Se cada barra tiver de ter um tamanho que produza um diâmetro equivalente d_e de 0,75 in, há alguma vantagem em utilizar o aço liga para essa aplicação de fadiga?

ANÁLISE **7-8** Uma barra redonda sólida, com 25 mm de diâmetro, tem um entalhe de 2,5 mm de profundidade, com um raio de 2,5 mm usinado em si. Essa barra é feita de aço AISI 1018 repuxado a frio e submetida a um torque puramente inverso de 200 N · m. Para a curva *S-N* desse material, considere $f = 0{,}9$.

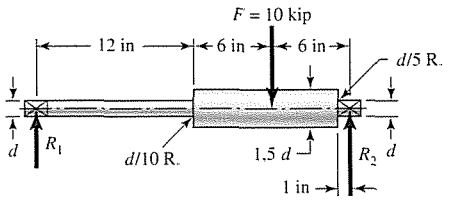
(*a*) Estime o número de ciclos até falha.

(*b*) Se a barra for também colocada em um meio com temperatura de 450°C, estime o número de ciclos até falha.

ANÁLISE **7-9** Uma barra quadrada sólida é sustentada em balanço por uma extremidade. Ela tem 0,8 m de comprimento e agüenta uma carga transversal completamente inversa de ±1 kN na outra extremidade. O material é aço AISI 1045 laminado a quente. Se essa barra tiver de suportar tal carga por 10^4 ciclos com um fator de segurança de 1,5, que dimensão deverá ter sua secção transversal? Despreze quaisquer concentrações de tensão na extremidade de suporte e considere $f = 0{,}9$.

ANÁLISE **7-10** Uma barra retangular é cortada a partir de um perfil plano de aço AISI 1018 repuxado a frio. Ela tem 60 mm de largura por 10 mm de espessura e um orifício de 12 mm feito pelo centro, como representado na Tabela A-15-1. Essa barra é carregada concentricamente, em fadiga puxa-empurra, por forças axiais F_a, uniformemente distribuídas ao longo da largura. Empregando um fator de projeto de $n_d = 1{,}8$, estime a maior força F_a possível de ser aplicada, ignorando a ação de coluna.

PROJETO **7-11** As reações de mancal R_1 e R_2 são exercidas no eixo mostrado na figura, o qual roda a 1150 rpm e suporta uma força flexora de 10 kip. Use um aço 1095 laminado a quente. Especifique o diâmetro d utilizando um fator de projeto de $n_d = 1{,}6$ para uma vida de 3 min. As superfícies são usinadas.



Problema 7-11

ANÁLISE **7-12** Uma barra de aço apresenta as propriedades mínimas $S_e = 276$ MPa, $S_y = 413$ MPa e $S_{ut} = 551$ MPa. Ela é submetida a uma tensão torcional fixa de 103 MPa e a uma tensão flexional alternante de 172 MPa. Encontre o fator de segurança protegendo contra uma falha estática, bem como aquele protegendo contra uma falha por fadiga, ou a vida esperada da peça. Para a análise de fadiga, utilize:

(*a*) O critério de Goodman modificado.

(*b*) O critério de Gerber.

(*c*) O critério elíptico da ASME.

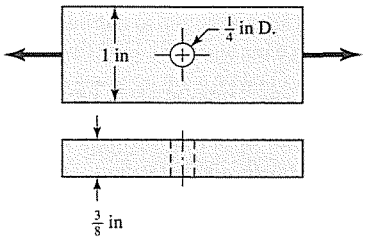
ANÁLISE **7-13** Repita o Problema 7-12, mas com uma tensão torcional fixa de 138 MPa e uma tensão de flexão alternante de 69 MPa.

ANÁLISE **7-14** Repita o Problema 7-12, mas com uma tensão torcional de 103 MPa, uma tensão torcional alternante de 69 MPa e uma tensão de flexão alternante de 83 MPa.

ANÁLISE **7-15** Repita o Problema 7-12, mas com uma tensão torcional alternante de 207 MPa.

7-16 Repita o Problema 7-12, mas com uma tensão torcional alternante de 103 MPa e uma tensão de flexão fixa de 103 MPa.

ANÁLISE **7-17** A barra de aço AISI 1018 repuxado a frio mostrada na figura é submetida a uma carga de tração flutuante entre 800 e 3000 lbf. Estime os fatores de segurança n_y e n_f utilizando (*a*) o critério de falha por fadiga de Gerber e (*b*) o critério elíptico de falha por fadiga da ASME, ambos como parte do diagrama de fadiga do projetista.



Problema 7-17

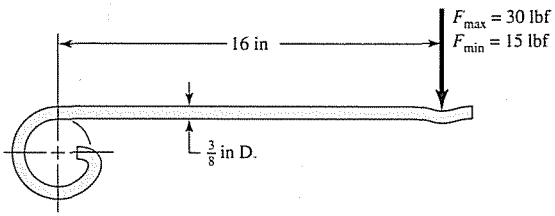
7-18 Repita o Problema 7-17 com uma carga flutuante entre –800 e 3000 lbf. Assuma a não-ocorrência de flambagem.

ANÁLISE **7-19** Repita o Problema 7-17 com uma carga flutuante entre 800 e –3000 lbf. Assuma a não-ocorrência de flambagem.

ANÁLISE **7-20** A figura mostra uma mola de viga em balanço, com arame redondo conformado, sujeita a uma força variante. Os ensaios de dureza realizados em 25 molas deram, como resultado, uma dureza mínima de 380 Brinell. Está claro, pelos detalhes de montagem, que não existe concentração de tensão. Uma inspeção visual das molas indica que o acabamento de superfície corresponde aproximadamente a um acabamento de laminado a quente. Que números de aplicações são prováveis de causar falha? Solucione o problema utilizando:

(*a*) O critério de Goodman modificado.

(*b*) O critério de Gerber.

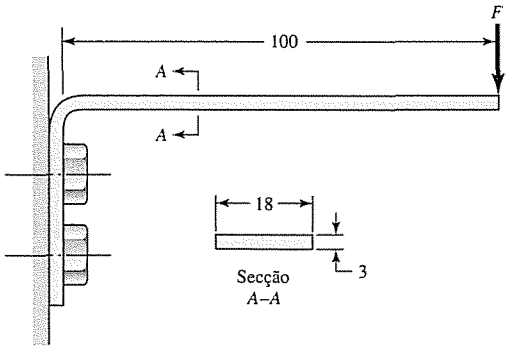


Problema 7-20

ANÁLISE **7-21** A figura apresenta o desenho de uma mola de fecho de 3 por 18 mm. Uma pré-carga é obtida, durante a montagem, cunhando-se sob os parafusos de porca, para se obter uma deflexão inicial estimada de 2 mm. A própria operação de fecho requer uma deflexão adicional de exatamente 4 mm. O material é aço de alto carbono retificado, fletido e então endurecido e revenido a uma dureza mínima de 490 Bhn. O raio de curvatura é de 3 mm. Estime a resistência ao escoamento como 90% da resistência última.

(*a*) Encontre as forças de fechamento máxima e mínima.

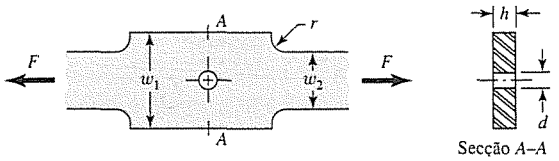
(*b*) Há a probabilidade de que a mola falhe em fadiga? Utilize o critério de Gerber.



Problema 7-21
Dimensões em milímetros.

ANÁLISE **7-22** Repita o Problema 21, parte *b*, utilizando o critério de Goodman modificado.

ANÁLISE **7-23** A figura exibe o diagrama de corpo livre de parte de um elo de conexão tendo concentração de tensão em três secções. As dimensões são $r = 0{,}25$ in, $d = 0{,}75$ in, $h = 0{,}50$ in, $w_1 = 3{,}75$ in e $w_2 = 2{,}5$ in. As forças F flutuam entre uma tração de 4 kip e uma compressão de 16 kip. Ignore a ação de coluna e encontre o menor fator de segurança se o material for um aço AISI 1018 repuxado a frio.



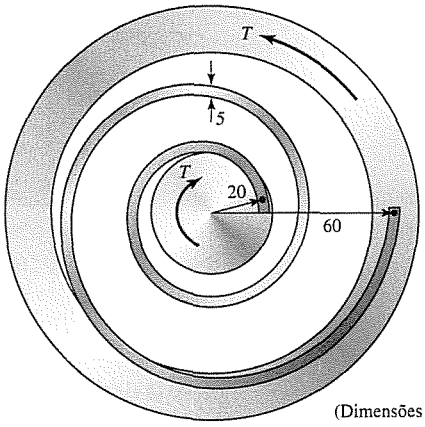
Problema 7-23

ANÁLISE **7-24** O acoplamento torcional na figura é composto de uma viga curva, de secção transversal quadrada, soldada a um eixo de entrada e a uma placa de saída. Um torque é aplicado ao eixo e aos ciclos, de zero a T. A secção transversal da viga tem dimensões de 5 por 5 mm, e seu eixo centroidal descreve uma curva da forma $r = 10\,\theta / \pi$, em que r e θ apresentam-se em mm e radianos, respectivamente ($2\pi \le \theta \le 6\pi$). A viga curva tem superfície usinada com valores de resistências ao escoamento e última de 420 a 770 MPa, respectivamente.

(*a*) Utilizando o critério de Goodman modificado, determine o valor permissível máximo de T para que o acoplamento tenha uma vida infinita com um fator de segurança $n = 3$.

(*b*) Repita a parte (*a*) utilizando o critério de Gerber.

(*c*) Utilizando T encontrado na parte (*b*), determine o fator de segurança protegendo contra escoamento.



Problema 7-24

ANÁLISE **7-25** Repita o Problema 7-24 ignorando os efeitos de curvatura na tensão de flexão.

ANÁLISE **7-26** Na figura mostrada, o eixo *A*, feito de aço AISI 1010 laminado a quente, é soldado a um suporte fixo e submetido a carregamento por forças iguais e opostas F, via eixo *B*. Uma concentração de tensão teórica K_{ts} de 1,6 é induzida por um filete de 3 mm. O comprimento do eixo *A*, a partir do suporte fixo à conexão no eixo *B*, é de 1 m. Os ciclos de carga F vão de 0,5 a 2 kN.

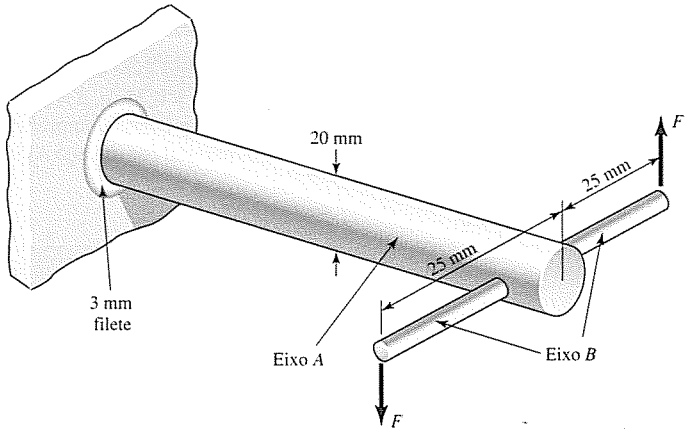
(*a*) Para o eixo *A*, encontre o fator de segurança para vida infinita utilizando o critério de falha por fadiga de Goodman.

(*b*) Repita a parte (*a*) utilizando o critério de falha por fadiga de Gerber.

ANÁLISE **7-27** Um esquema de uma máquina de teste de embreagem é mostrado. O eixo de aço roda a uma velocidade constante ω. Uma carga axial é aplicada a esse eixo e ciclada de zero a P. O torque T induzido pela face da embreagem no eixo é fornecido por

$$T = \frac{fP(D+d)}{4}$$

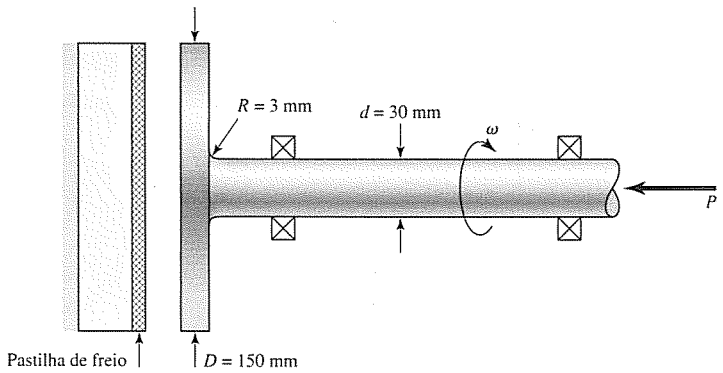
em que D e d são definidos na figura e f é o coeficiente de atrito da face da embreagem. O eixo é usinado com $S_y = 800$ MPa e $S_{ut} = 1000$ MPa. Os fatores de concentração de tensão teóricos para o filete são 3,0 e 1,8 para as cargas axial e torcional, respectivamente.



Problema 7-26

(*a*) Assuma que a variação da carga P é síncrona com a rotação do eixo. Com $f = 0{,}3$, encontre a máxima carga permissível P para que o eixo sobreviva um mínimo de 10^6 ciclos com um fator de segurança de 3. Utilize o critério de Goodman modificado. Determine o correspondente fator de segurança protegendo contra o escoamento.

(*b*) Suponha que o eixo não esteja rodando, mas que a carga P seja ciclada como mostrado. Com $f = 0{,}3$, encontre a carga permissível máxima P para que o eixo sobreviva um mínimo de 10^6 ciclos com um fator de segurança de 3. Utilize o critério de Goodman modificado. Determine o correspondente fator de segurança protegendo contra o escoamento.



Problema 7-27

ANÁLISE **7-28** Para a embreagem do Problema 7-27, a carga externa P é ciclada entre 20 e 80 kN. Assumindo que o eixo esteja rodando sincronicamente com o ciclo de carga externa, estime o número de ciclos até a ocorrência de falha. Utilize o critério modificado de falha por fadiga de Goodman.

ANÁLISE **7-29** Uma mola de lâmina plana tem uma tensão flutuante entre $\sigma_{max} = 420$ MPa e $\sigma_{min} = 140$ MPa aplicada por $5(10^4)$ ciclos. Se a carga mudar para $\sigma_{max} = 350$ MPa e $\sigma_{min} = -200$ MPa, por quantos ciclos a mola deverá sobreviver? O material é AISI 1040 repuxado a frio e tem uma resistência corrigida completamente de $S_e = 200$ MPa. Assuma que $f = 0{,}9$.

(*a*) Utilize o método de Miner.

(*b*) Utilize o método de Manson.

ANÁLISE **7-30** Uma peça de máquina será ciclada para ±48 kpsi por $4(10^3)$ ciclos. A seguir, o carregamento será modificado para ±38 kpsi por $6(10^4)$ ciclos. Por último, a carga será mudada para ±32 kpsi. Quantos ciclos de operação podem ser esperados a tal nível de tensão? Para a peça, $S_{ut} = 76$ kpsi e $f = 0{,}9$, e uma resistência completamente corrigida de $S_e = 30$ kpsi.

(*a*) Utilize o método de Miner.

(*b*) Utilize o método de Manson.

ANÁLISE **7-31** Um espécime de viga rotativa com limite de resistência de 50 kpsi e uma resistência última de 100 kpsi é ciclado 20% do tempo a 70 kpsi, 50% a 55 kpsi e 30% a 40 kpsi. Considere $f = 0{,}9$ e estime o número de ciclos até a ocorrência de falha.

Problemas Estocásticos

ANÁLISE **7-32** Solucione o Problema 7-1 se a dureza das peças em produção for $\mathbf{H}_b = 495\mathbf{LN}(1, 0{,}03)$.

PROJETO **7-33** A situação aqui é similar à do Problema 7-10, na qual a carga axial completamente inversa $F_a = 15\mathbf{LN}(1, 0{,}20)$ kN deve ser carregada pelo elo com a espessura a ser especificada por você. Use o aço 1018 repuxado a frio do Problema 7-10 com $\mathbf{S}_{ut} = 440\mathbf{LN}(1, 0{,}030)$ MPa e $\mathbf{S}_{yt} = 370\mathbf{LN}(1, 0{,}061)$ MPa. A meta de confiabilidade deve exceder a 0,999. Utilizando o método de correlação, especifique a espessura t.

ANÁLISE **7-34** Uma barra redonda sólida é usinada para um diâmetro de 1,25 in. Um entalhe de $\frac{1}{8}$ in, com um raio de $\frac{1}{8}$ in, é feito nela. O material tem uma resistência à tração média de 110 kpsi. Um momento flexor completamente inverso $M = 1400$ lbf · in é aplicado. Estime a confiabilidade. O fator de tamanho deve ser baseado no diâmetro bruto. A barra roda.

7-35 Repita o Problema 7-34, com um momento torcional completamente inverso de $T = 1400$ lbf · in aplicado.

ANÁLISE **7-36** Uma barra de aço laminado a quente, com um diâmetro de $\frac{1}{4}$ in, tem um orifício de $\frac{1}{8}$ in furado transversalmente em relação ao mesmo. Essa barra não está rodando e encontra-se submetida a um momento flexor completamente inverso de $M = 1600$ lbf · in no mesmo plano que o eixo do furo transversal. O material tem uma resistência à tração média de 58 kpsi. Estime a confiabilidade. O fator de tamanho deve ser baseado no tamanho bruto. Utilize a Tabela A-16 para K_t.

7-37 Repita o Problema 7-36, com uma barra submetida a um momento torcional completamente inverso de 2400 lbf · in.

PROJETO **7-38** A vista plana de um elo é igual à do Problema 7-23; contudo, as forças F são completamente inversas, a meta de confiabilidade é 0,998 e as propriedades do material são $\mathbf{S}_{ut} = 64\mathbf{LN}(1, 0{,}045)$ kpsi e $\mathbf{S}_y = 54\mathbf{LN}(1, 0{,}077)$ kpsi. Trate F_a como determinística e especifique a espessura h.

Problemas Computacionais

ANÁLISE **7-39** Uma barra de aço de $\frac{1}{4}$ por $1\frac{1}{2}$ in tem um orifício furado de $\frac{3}{4}$ in localizado no centro, semelhante ao exibido na Tabela A-15-1. Essa barra está sujeita a uma carga axial completamente inversa, com uma carga determinística de 1200 lbf. O material apresenta uma resistência à tração média de $\bar{S}_{ut} = 80$ kpsi.

(*a*) Estime a confiabilidade.

(*b*) Conduza uma simulação de computador para confirmar sua resposta à parte *a*.

7-40 A partir de sua experiência com o Problema 7-39 e com o Exemplo 7-20, você observou que, para a fadiga axial completamente inversa e para a fadiga de flexão, é possível

- Observar os COVs associados a considerações de projeto *a priori*.
- Observar a meta de confiabilidade.
- Encontrar o fator de projeto médio $\bar{n}_d$ que permita tomar uma decisão de geometria de projeto que atingirá a meta por meio da utilização de métodos determinísticos em conjunção com $\bar{n}_d$.

Formule um programa de computador interativo que habilite o usuário a encontrar $\bar{n}_d$. Ao passo que as propriedades do material $\mathbf{S}_{ut}$, $\mathbf{S}_y$ e o COV de carga devem ser introduzidos pelo usuário, todos os COVs associados a $\phi_{0.30}$, $\mathbf{k}_a$, $\mathbf{k}_c$, $\mathbf{k}_d$ e $\mathbf{K}_f$ podem ser internos, e as respostas às questões permitirão que C_σ e C_S, bem como C_n e $\bar{n}_d$, sejam calculados. Posteriormente você poderá acrescentar melhorias. Teste seu programa com problemas que já tenha solucionado.

7-41 Quando se utiliza o local geométrico de falha por fadiga de Gerber em um problema estocástico, as Equações (7-80) e (7-81) são úteis. Todavia, elas são também complicadas computacionalmente. É útil ter uma sub-rotina de computador ou procedimento que execute esses cálculos. Quando se escreve um programa executivo, e é apropriado encontrar S_a e C_{Sa}, uma simples chamada à sub-rotina faz isso com um mínimo de esforço. Ademais, uma vez que a sub-rotina seja testada, estará sempre pronta para funcionar. Escreva e teste um programa desse tipo.

7-42 Repita o Problema 7-41 para o local de falha por fadiga elíptico da ASME, implementando as Equações (7-83) e (7-84).

7-43 Repita o Problema 7-41 para o local de falha de fadiga de Smith-Dolan, implementando as Equações (7-87) e (7-88).

7-44 Escreva e teste sub-rotinas de computador ou procedimentos que implementarão

(*a*) A Tabela 7-4, retornando a, b, C e $\bar{k}_a$.

(*b*) A Equação (7-19) usando a Tabela 7-5, retornando k_b.

(*c*) A Tabela 7-14, retornando α, β, C e $\bar{k}_c$.

(*d*) As Equações (7-26) e (7-75), retornando $\bar{k}_d$ e C_{kd}.

7-45 Escreva e teste uma sub-rotina de computador ou procedimento que implemente as Equações (7-76) e (7-77), retornando $\bar{q}$, $\hat{\sigma}_q$ e C_q.

7-46 Escreva e teste uma sub-rotina de computador ou procedimento que implemente a Equação (7-35) e as Tabelas 7-8 e 7-18, retornando $\sqrt{a}$, C_{Kf} e $\bar{K}_f$.

Resumo das Partes 1 e 2

Nossa primeira recomendação é a releitura do Capítulo 1. Com a experiência adquirida até o momento, você só lucrará em fazê-lo. (O capítulo introdutório, por exemplo, passará a ter um maior significado.) Na Seção 1-3, há mais de duas dúzias de considerações de projeto. Consideramos o item 2 detalhadamente, a questão da relação tensão/resistência em uma perda de função de materiais dúcteis e frágeis, para carregamento fixo e de fadiga, bem como para vida finita e ilimitada. Também começamos no item 7, confiabilidade, no que tange às relações tensão/resistência. Ao investigar essas relações, você deverá estar preparado agora para:

- Identificar a(s) localidade(s) crítica(s) tanto por inspeção como, se não for óbvio, por análise entre diversas candidatas e identificação do "pior caso".
- Identificar a resistência significativa naquela localidade.
- Identificar a tensão significativa naquela localidade.
- Considerar a questão de a disparidade entre tensão e resistência ser ou não suficiente para que a função seja preservada em face da carga de serviço.

Tal preparação levou bastante tempo, uma vez que um conjunto de idéias e percepções teve de ser identificado em e entre seus estudos preliminares e posto em um contexto útil.

A questão de rigidez, distorção e deflexão, item 3, e sua influência na perda de função também foi considerada. Você deverá agora estar preparado para identificar:

- O nível de distorção que traz o risco de perda de função.
- A(s) localidade(s) em que a perda de função em decorrência da distorção é possível.
- O nível de distorção presente.
- Se a diferença é suficiente.

Algumas outras considerações serão abordadas na Parte 3, e aquelas recém-observadas serão desenvolvidas para imediata aplicação. À medida que adentrarmos na Parte 3, nosso foco se tornará mais específico, uma vez que consideraremos elementos de máquinas particulares e suas aplicações.

Por ora, você deve se sentir confortável com um grupo de ferramentas a partir do qual uma avaliação de adequação é elaborada. A habilidade 1 ganhará um conteúdo adicional à medida que as aplicações surgirem. Além disso, ao focar elementos individuais, idéias de projeto/síntese irão aparecer com mais freqüência, e a habilidade 2 tomará forma e crescerá.

PARTE III

PROJETOS DE ELEMENTOS MECÂNICOS

CAPÍTULO 8

Parafusos, Fixadores e Projeto de Junções Não-Permanentes

8-1 Padrões de Rosca e Definições 386
8-2 Mecânica dos Parafusos de Potência 387
8-3 Fixadores Rosqueados 397
8-4 Junções – Rigidez de Fixadores 398
8-5 Junções – Rigidez de Membro 402
8-6 Resistência de Parafuso de Porca 405
8-7 Junções de Tração – Carga Externa 407
8-8 Relacionando o Torque à Tração de Parafuso de Porca 409
8-9 Junção de Tração Carregada Estaticamente com Pré-Carga 412
8-10 Junções de Gaxeta 415
8-11 Carregamento de Fadiga de Junções de Tração 415
8-12 Junções de Cisalhamento 421
8-13 Parafusos de Retenção 426
8-14 Chavetas e Pinos 427
8-15 Considerações Estocásticas 433

O parafuso de rosca helicoidal foi sem dúvida uma invenção mecânica extremamente importante. É a base para parafusos de potência – que transformam o movimento angular em movimento linear, a fim de transmitir potência ou desenvolver grandes forças (prensas, macacos, etc.) – e fixadores rosqueados – um elemento importante em junções não-permanentes.

Este livro pressupõe um conhecimento dos métodos elementares de fixação. Os métodos típicos de fixação ou de união de peças utilizam dispositivos como parafusos de porca, porcas, parafusos de cabeça, parafusos de retenção, rebites, retentores de mola, dispositivos de travamento, pinos, chavetas, soldas e adesivos. Os estudos nos desenhos de engenharia e no processo do metal freqüentemente incluem instruções sobre vários métodos de junção, e a curiosidade de qualquer pessoa interessada em engenharia mecânica naturalmente resulta na aquisição de um bom conhecimento básico sobre métodos de fixação. Contrariando as primeiras impressões, o assunto é um dos mais interessantes em todo o campo de projetos mecânicos.

Atualmente, um dos objetivos-chave dos projetos para manufatura é reduzir o número de fixadores. Estes, contudo, serão sempre necessários para facilitar a desmontagem, sejam quais forem os propósitos. Por exemplo, jatos gigantes como o Boeing 747 requerem tanto quanto 2,5 milhões de fixadores, alguns dos quais custam vários dólares por unidade. Para manter os custos baixos, os fabricantes de aeronaves, e seus subcontratadores, revêem constantemente novos projetos de fixadores, técnicas de instalação e ferramental.

O número de inovações no campo de fixadores para qualquer período que você venha a imaginar é enorme. Vários tipos de fixadores estão disponíveis para a seleção do projetista. Os projetistas mais sérios geralmente mantêm à parte cadernos de especificação sobre fixadores. Os métodos de juntar peças são extremamente importantes na engenharia de um projeto de qualidade, sendo necessário um entendimento completo do desempenho dos fixadores e das junções sob todas condições de uso e projeto.

8-1 Padrões de Rosca e Definições

A terminologia de roscas de parafusos, ilustrada na Figura 8-1, é explicada como segue:

O *passo* é a distância entre formas adjacentes de rosca medidas paralelamente ao eixo de rosca. O passo em unidades inglesas é o recíproco do número de formas de rosca por polegada N.

O *diâmetro maior* d é o maior diâmetro de uma rosca de parafuso.

O *diâmetro menor* d_r ou d_l é o menor diâmetro de uma rosca de parafuso.

O avanço l, não mostrado, é a distância em que a porca se move paralelamente ao eixo do parafuso quando lhe é dada uma volta. Para uma única rosca, como na Figura 8-1, o avanço é igual ao passo.

Um produto de *rosqueado múltiplo* é um produto com dois ou mais cortes de rosca, um ao lado do outro (imagine duas ou mais cordas enroladas lado a lado, ao redor de um lápis). Produtos padronizados, tais como parafusos, parafusos de porca e porcas, têm uma só rosca; um parafuso *de rosqueado duplo* tem um avanço igual a duas vezes o passo; já um parafuso de *rosqueado triplo* tem um avanço igual a três vezes o passo; e assim por diante.

Todas as roscas são feitas conforme a *regra da mão direita, se nada em contrário for indicado.*

A norma de rosca *American National (Unified)* foi aprovada nos Estados Unidos e na Grã-Bretanha para uso em todos os produtos rosqueados padronizados. O ângulo de rosca é de 60°, e as cristas da rosca podem ser planas ou arredondadas.

A Figura 8-2 mostra a geometria de rosca de perfis métricos M e MJ. O perfil M substitui a classe polegada e é o perfil básico da ISO 68, com roscas simétricas de 60°. O perfil MJ, por sua vez, tem um filete

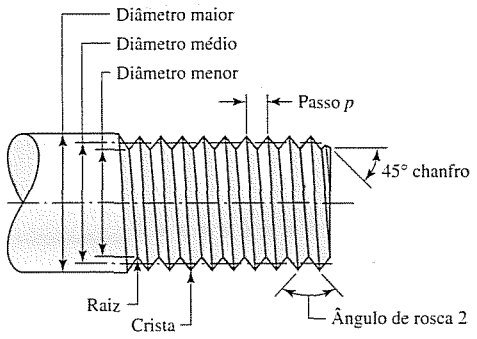


Figura 8-1 Terminologia de roscas de parafuso. Roscas afiadas em "v" mostradas para clareza; as cristas e as raízes são, na verdade, aplanadas ou arredondadas durante a operação de conformação.

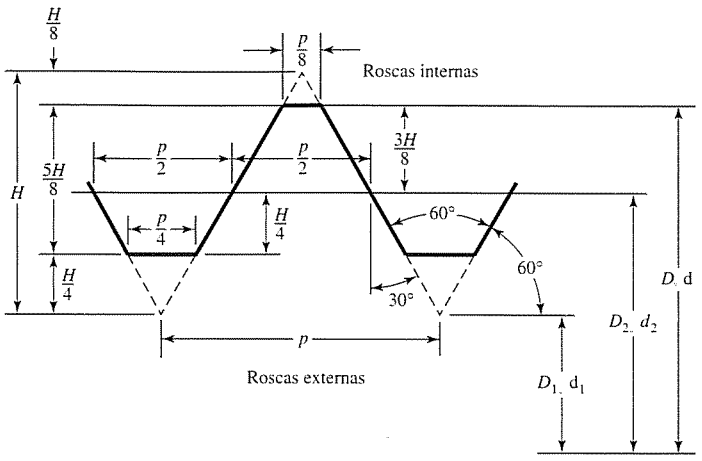


Figura 8-2 Perfil básico de rosca para roscas métricas M e MJ. $D(d)$ = diâmetro básico maior da rosca interna (externa); $D_1(d_1)$ = diâmetro básico menor da rosca interna (externa); $D_2(d_2)$ = diâmetro básico do passo da rosca interna (externa); p = passo; $H = 0{,}5(3)^{1/2}p$.

ou tira arredondada na raiz da rosca externa e o diâmetro menor acrescido de ambas as roscas interna e externa. Esse perfil é especialmente útil quando alta resistência de fadiga é requerida.

As Tabelas 8-1 e 8-2 serão úteis ao se especificar e projetar peças rosqueadas. Observe que o tamanho de rosca é especificado dando-se o passo p para tamanhos métricos e o número de roscas por polegada N para tamanhos unificados. Os tamanhos de parafuso, na Tabela 8-2, com diâmetro menor que $\frac{1}{4}$ in são tamanhos numerados ou de bitola. A segunda coluna dessa tabela mostra que um parafuso nº 8 tem um diâmetro maior nominal de 0,1640 in.

Diversos ensaios de tração de barras rosqueadas mostraram que uma barra não-rosqueada tendo um diâmetro igual à média do diâmetro de passo e do diâmetro menor terá a mesma resistência de tração que uma barra rosqueada. A área dessa barra não-rosqueada é denominada área de tensão de tração A_t da barra rosqueada; valores de A_t estão listados em ambas as tabelas.

Duas séries principais de roscas unificadas encontram-se em uso comum: UN e UNR. A diferença entre elas é simplesmente que um raio da raiz deve ser usado nas séries UNR. Por causa dos fatores de concentração de tensão de rosca reduzidos, as roscas das séries UNR apresentam resistências de fadiga melhores. As roscas unificadas são especificadas declarando-se o diâmetro maior nominal, o número de roscas por polegada e a série de rosca, por exemplo: $\frac{5}{8}$ in – 18 UNRF ou 0,625 in – 18 UNRF.

Roscas métricas são especificadas escrevendo-se o diâmetro e o passo em milímetros, nessa ordem. Assim, M12 x 1,75 é uma rosca com um diâmetro maior nominal de 12 mm e um passo de 1,75 mm. Observe que a letra M, que precede o diâmetro, é a indicação para a designação métrica.

As roscas quadradas e Acme mostradas nas Figuras 8-3(*a*) e (*b*), respectivamente, são utilizadas em parafusos quando potência deve ser transmitida. A Tabela 8-3 lista os passos preferidos para roscas Acme de séries em polegadas. Contudo, outros passos podem, e costumam, ser utilizados, visto que a necessidade de um padrão para tais roscas não é tão grande.

Modificações são freqüentemente realizadas tanto nas roscas quadradas quanto nas Acme. Por exemplo, a rosca quadrada é às vezes modificada cortando-se o espaço entre os dentes, a fim de ter um ângulo de rosca incluído de 10 a 15°. Isso, de qualquer forma, não é difícil, visto que tais roscas costumam ser cortadas com uma ferramenta de ponto único; as modificações retêm a maior parte da alta eficiência inerente às roscas quadradas e tornam o corte mais simples. As roscas Acme são às vezes modificadas para uma forma de toco fazendo-se os dentes mais curtos. Isso resulta em um diâmetro menor acrescido (maior) e um parafuso um tanto mais forte.

8-2 Mecânica dos Parafusos de Potência

Um parafuso de potência é um dispositivo usado em maquinaria para transformar o movimento angular em linear e geralmente transmitir potência. Aplicações familiares incluem parafusos de avanço de tornos mecânicos e parafusos para morsa, prensas e macacos.

Uma aplicação dos parafusos de potência para macacos movidos à eletricidade é ilustrada na Figura 8-4. Você deve ser capaz de identificar o sem-fim, a engrenagem do sem-fim, o parafuso e a porca. A engrenagem sem-fim é suportada por um ou dois mancais?

Tabela 8-1 Diâmetros e áreas de roscas métricas de passo grosso e passo fino (todas as dimensões em milímetros)*

Diâmetro maior nominal d	Série de passo grosso Passo p	Área de tensão de tração A_t	Área do diâmetro menor A_r	Série de passo fino Passo p	Área de tensão de tração A_t	Área do diâmetro menor A_r
1,6	0,35	1,27	1,07			
2	0,40	2,07	1,79			
2,5	0,45	3,39	2,98			
3	0,5	5,03	4,47			
3,5	0,6	6,78	6,00			
4	0,7	8,78	7,75			
5	0,8	14,2	12,7			
6	1	20,1	17,9			
8	1,25	36,6	32,8	1	39,2	36,0
10	1,5	58,0	52,3	1,25	61,2	56,3
12	1,75	84,3	76,3	1,25	92,1	86,0
14	2	115	104	1,5	125	116
16	2	157	144	1,5	167	157
20	2,5	245	225	1,5	272	259
24	3	353	324	2	384	365
30	3,5	561	519	2	621	596
36	4	817	759	2	915	884
42	4,5	1120	1050	2	1260	1230
48	5	1470	1380	2	1670	1630
56	5,5	2030	1910	2	2300	2250
64	6	2680	2520	2	3030	2980
72	6	3460	3280	2	3860	3800
80	6	4340	4140	1,5	4850	4800
90	6	5590	5360	2	6100	6020
100	6	6990	6740	2	7560	7470
110				2	9180	9080

* As equações e os dados usados para desenvolver esta tabela foram obtidos da ANSI B1.1-1974 e B18.3.1-1978. O diâmetro menor foi encontrado a partir da equação $d_r = d - 1{,}226\,869p$, e o diâmetro de passo, a partir de $d_m = d - 0{,}64\,9519p$. A média do diâmetro de passo e do diâmetro menor foi usada para computar a área de tensão de tração.

Na Figura 8-5, um parafuso de potência de rosqueado quadrado, com uma só rosca tendo um diâmetro médio d_m, um passo p, um ângulo de avanço λ e um ângulo de hélice ψ, é carregado pela força de compressão axial F. Desejamos encontrar uma expressão para o torque requerido para elevar essa carga, bem como uma outra expressão para o torque requerido para baixá-la.

Primeiramente, imagine que uma única rosca do parafuso é desenrolada ou desenvolvida (Figura 8-6) por exatamente uma única volta. Então, uma beira dessa rosca formará a hipotenusa de um triângulo reto cuja base é o comprimento da circunferência do círculo de diâmetro médio de rosca e cuja altura é o avanço. O ângulo λ, nas Figuras 8-5 e 8-6, é o ângulo de avanço da rosca. Representamos a soma de todas as forças axiais unitárias atuando sobre a área normal de rosca por F. Para elevar a carga, uma força P_R atua para a direita (Figura 8-6(a)), e para baixá-la, P_L atua para a esquerda (Figura 8-6(b)). A força de fricção é o produto do coeficiente de fricção pela força normal N e atua para opor-se ao movimento. O sistema está em equilíbrio sob a ação dessas forças, de modo que, para elevar a carga, temos

$$\sum F_H = P_R - N \operatorname{sen} \lambda - fN \cos \lambda = 0 \qquad (a)$$

$$\sum F_V = F + fN \operatorname{sen} \lambda - N \cos \lambda = 0$$

Tabela 8-2 Diâmetros e área de roscas de parafusos unificados UNC e UNF*

		Série grossa – UNC			Série fina – UNF		
Designação do tamanho	Diâmetro maior nominal in	Roscas por polegada N	Áreas de tensão de tração A_t in^2	Área do diâmetro menor A_r in^2	Roscas por polegada N	Áreas de tensão de tração A_t in^2	Área do diâmetro menor A_r in^2
0	0,0600				80	0,001 80	0,001 51
1	0,0730	64	0,002 63	0,002 18	72	0,002 78	0,002 37
2	0,0860	56	0,003 70	0,003 10	64	0,003 94	0,003 39
3	0,0990	48	0,004 87	0,004 06	56	0,005 23	0,004 51
4	0,1120	40	0,006 04	0,004 96	48	0,006 61	0,005 66
5	0,1250	40	0,007 96	0,006 72	44	0,008 80	0,007 16
6	0,1380	32	0,009 09	0,007 45	40	0,010 15	0,008 74
8	0,1640	32	0,014 0	0,011 96	36	0,014 74	0,012 85
10	0,1900	24	0,017 5	0,014 50	32	0,020 0	0,017 5
12	0,2160	24	0,024 2	0,020 6	28	0,025 8	0,022 6
$\frac{1}{4}$	0,2500	20	0,031 8	0,026 9	28	0,036 4	0,032 6
$\frac{5}{16}$	0,3125	18	0,052 4	0,045 4	24	0,058 0	0,052 4
$\frac{3}{8}$	0,3750	16	0,077 5	0,067 8	24	0,087 8	0,080 9
$\frac{7}{16}$	0,4375	14	0,106 3	0,093 3	20	0,118 7	0,109 0
$\frac{1}{2}$	0,5000	13	0,141 9	0,125 7	20	0,159 9	0,148 6
$\frac{9}{16}$	0,5625	12	0,182	0,162	18	0,203	0,189
$\frac{5}{8}$	0,6250	11	0,226	0,202	18	0,256	0,240
$\frac{3}{4}$	0,7500	10	0,334	0,302	16	0,373	0,351
$\frac{7}{8}$	0,8750	9	0,462	0,419	14	0,509	0,480
1	1,0000	8	0,606	0,551	12	0,663	0,625
$1\frac{1}{4}$	1,2500	7	0,969	0,890	12	1,073	1,024
$1\frac{1}{2}$	1,5000	6	1,405	1,294	12	1,581	1,521

* Esta tabela foi compilada a partir da ANSI B1.1-1974. O diâmetro menor foi encontrado a partir da equação $d_r = d - 1{,}299\,038p$, e o diâmetro de passo, a partir da equação $d_m = d - 0{,}649\,519p$. A média do diâmetro de passo e do diâmetro menor foi usada para computar a área de tensão de tração.

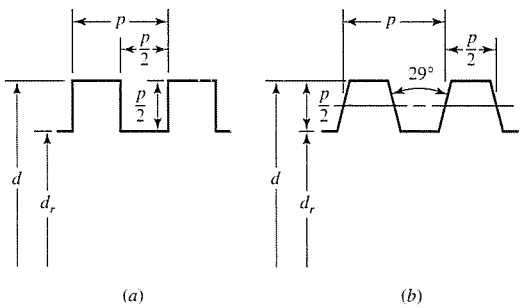


Figura 8-3 (*a*) Rosca quadrada; (*b*) rosca Acme.

Tabela 8-3 Passos preferidos para roscas Acme

d, in	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	1	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{3}{4}$	2	$2\frac{1}{2}$	3
p, in	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

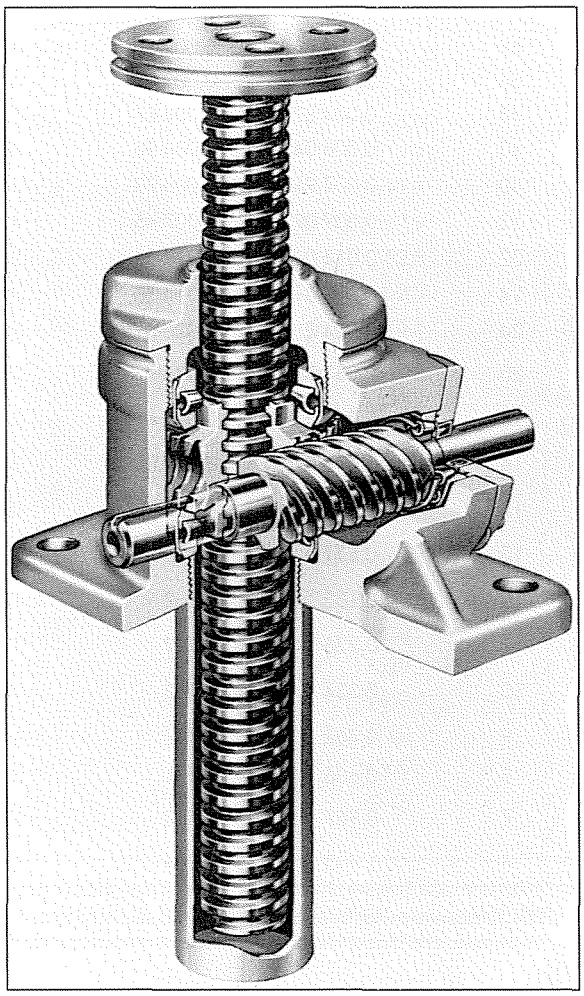


Figura 8-4 O macaco Joyce de parafuso de engrenagem sem-fim. *(Cortesia da Joyce-Dayton Corp., Dayton, Ohio.)*

De maneira semelhante, para baixar a carga temos

$$\sum F_H = -P_L - N \operatorname{sen}\lambda + fN\cos\lambda = 0$$

$$\sum F_V = F - fN\operatorname{sen}\lambda - N\cos\lambda = 0 \qquad (b)$$

Visto que não estamos interessados na força normal N, nós a eliminamos de cada um desses conjuntos de equações e solucionamos o resultado para P. Para elevar a carga, isso produz

$$P_R = \frac{F(\operatorname{sen}\lambda + f\cos\lambda)}{\cos\lambda - f\operatorname{sen}\lambda} \qquad (c)$$

e, para baixá-la,

$$P_L = \frac{F(f\cos\lambda - \operatorname{sen}\lambda)}{\cos\lambda + f\operatorname{sen}\lambda} \qquad (d)$$

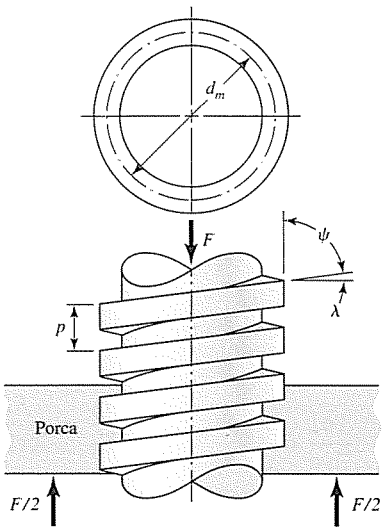


Figura 8-5 Porção de um parafuso de potência.

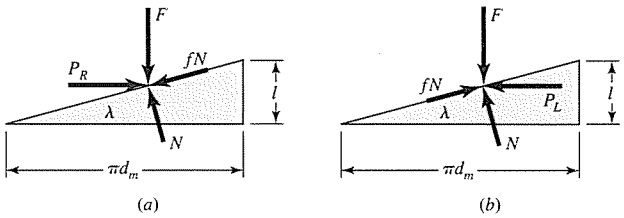


Figura 8-6 Diagramas de força: (*a*) elevando a carga; (*b*) baixando a carga.

A seguir, divida o numerador e o denominador dessas equações por cos λ e utilize a relação tan $\lambda = l/\pi d_m$ (Figura 8-6). Assim, teremos, respectivamente,

$$P_R = \frac{F[(l/\pi d_m) + f]}{1 - (fl/\pi d_m)} \tag{e}$$

$$P_L = \frac{F[f - (l/\pi d_m)]}{1 + (fl/\pi d_m)} \tag{f}$$

Finalmente, observando que o torque é o produto da força P e do raio médio $d_m/2$, para elevar a carga podemos escrever

$$T_R = \frac{Fd_m}{2}\left(\frac{l + \pi f d_m}{\pi d_m - fl}\right) \tag{8-1}$$

sendo que T_R é o torque requerido para dois propósitos: superar a fricção de rosca e elevar a carga.

O torque requerido para baixar a carga, a partir da Equação (*f*), é

$$T_L = \frac{Fd_m}{2}\left(\frac{\pi f d_m - l}{\pi d_m + fl}\right) \tag{8-2}$$

Esse é o torque requerido para superar uma parte da fricção ao baixar a carga. Pode ocorrer, em casos específicos em que o avanço é grande ou a fricção é pequena, que a carga baixe por si mesma, fazendo o parafuso rodar sem qualquer esforço externo. Em tais casos, o torque T_L da Equação (8-2) será negativo ou zero. Quando um torque positivo é obtido dessa equação, diz-se que o parafuso é *autobloqueante*. Dessa forma, a condição para autobloqueio é

$$\pi f d_m > l$$

Agora, divida ambos os lados dessa desigualdade por πd_m. Reconhecendo que $l/\pi d_m = \tan \lambda$, obtemos

$$f > \tan \lambda \tag{8-3}$$

Essa relação afirma que o autobloqueio é obtido sempre que o coeficiente de fricção de rosca é igual a ou maior que a tangente do ângulo de avanço de rosca.

Uma expressão para a eficiência é também útil na avaliação de parafusos de potência. Se estabelecermos $f = 0$ na Equação (8-1), obteremos

$$T_0 = \frac{Fl}{2\pi} \tag{g}$$

o que, devido ao fato de a fricção de rosca ter sido eliminada, é o torque requerido somente para elevar a carga. A eficiência é, portanto,

$$e = \frac{T_0}{T_R} = \frac{Fl}{2\pi T_R} \tag{8-4}$$

As equações precedentes foram desenvolvidas para roscas quadradas em que as cargas de rosca normais são paralelas ao eixo do parafuso. No caso de roscas Acme ou outras roscas, a carga de rosca normal está inclinada relativamente ao eixo, devido ao ângulo de rosca 2α e ao ângulo de avanço λ. Visto que os ângulos de avanço são pequenos, essa inclinação pode ser desprezada e somente o efeito do ângulo de rosca (Figura 8-7(*a*)) será considerado. O efeito do ângulo α é aumentar a força friccional pela ação de calço das roscas. Logo, os termos friccionais na Equação (8-1) devem ser divididos por cos α. Para elevar a carga, ou para apertar um parafuso ou um parafuso de porca*, isso produz

$$T_R = \frac{Fd_m}{2}\left(\frac{l + \pi f d_m \sec\alpha}{\pi d_m - fl \sec\alpha}\right) \tag{8-5}$$

Ao utilizar a Equação (8-5), lembre-se de que ela é uma aproximação porque o efeito do ângulo de avanço foi desprezado.

Para parafusos de potência, a rosca Acme não é tão eficiente quanto a quadrada, devido à fricção adicional decorrente da ação de calço (ou cunha), mas freqüentemente é preferida por ser mais fácil de usinar e por permitir o uso de uma porca partida, que pode ser ajustada para compensar o desgaste.

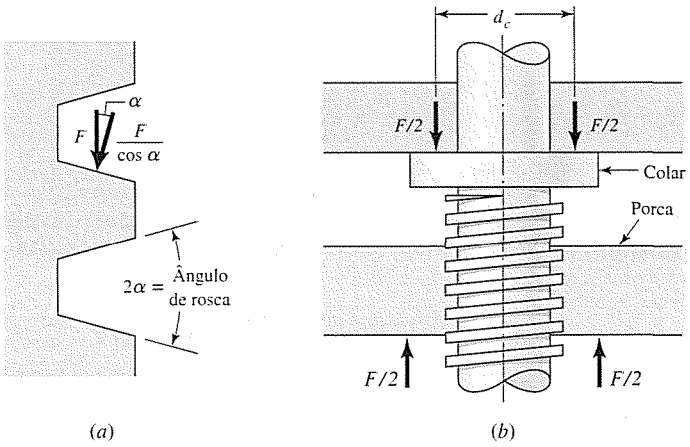


Figura 8-7 (*a*) A força normal de rosca é aumentada devido ao ângulo α; (*b*) o colar de empuxo tem diâmetro friccional d_c.

* N. de T.: *Dicionário Houaiss*. Etimologia: parafuso = *par (conjunto de duas entidades) + fusu (de fiar, traçar fios)*. Peça cônica ou cilíndrica, estriada em hélice, que se embute fazendo-a girar sobre eixo longitudinal, seja em outra peça (porca), seja num meio resistente, por efeito combinado de rotação e pressão. Em inglês existem os termos *screw* e *bolt*. O termo *screw* refere-se a embutir com rotação em meio resistente. O termo *bolt* refere-se a embutir em outra peça sulcada (porca). Em português normalmente não se faz essa distinção.

Em geral, uma terceira componente de torque deve ser utilizada em aplicações de parafuso de potência. Quando determinado parafuso é carregado axialmente, um mancal axial ou colar deve ser empregado entre os membros rotantes e estacionários a fim de carregar a componente axial. A Figura 8-7(*b*) mostra um colar típico de empuxo no qual assume-se que a carga seja concentrada no diâmetro médio do colar d_c. Se f_c é o coeficiente de fricção desse colar, o torque requerido é

$$T_c = \frac{F f_c d_c}{2} \tag{8-6}$$

Para colares grandes, o torque deve ser provavelmente computado de uma maneira similar àquela empregada para embreagens de disco.

Tensões nominais de corpo em parafusos de potência podem ser relacionadas aos parâmetros de rosca como segue. A tensão nominal de cisalhamento τ na torção do corpo do parafuso pode ser expressa como

$$\tau = \frac{16T}{\pi d_r^3} \tag{8-7}$$

A tensão axial σ no corpo do parafuso devido à carga F é

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{4F}{\pi d_r^2} \tag{8-8}$$

na ausência de ação de coluna. Para uma coluna curta, a equação de J. B. Johnson é

$$\left(\frac{F}{A}\right)_{\text{crit}} = S_y - \left(\frac{S_y}{2\pi}\frac{l}{k}\right)^2 \frac{1}{CE} \tag{8-9}$$

decorrente da Equação (5-50).

As tensões nominais de rosca em parafusos de potência podem ser relacionadas a parâmetros de rosca como segue. A tensão de apoio na Figura 8-8, σ_B, é

$$\sigma_B = -\frac{F}{\pi d_m n_t p/2} = -\frac{2F}{\pi d_m n_t p} \tag{8-10}$$

em que n_t é o número de roscas engajadas. A tensão de flexão na raiz da rosca σ_b é encontrada a partir de

$$\frac{I}{c} = \frac{(\pi d_r n_t)\,(p/2)^2}{6} = \frac{\pi}{24} d_r n_t p^2 \qquad M = \frac{Fp}{4}$$

assim,

$$\sigma_b = \frac{M}{I/c} = \frac{Fp}{4}\frac{24}{\pi d_r n_t p^2} = \frac{6F}{\pi d_r n_t p} \tag{8-11}$$

A tensão transversal de cisalhamento τ, no centro da raiz da rosca, decorrente da carga F é

$$\tau = \frac{3V}{2A} = \frac{3}{2}\frac{F}{\pi d_r n_t p/2} = \frac{3F}{\pi d_r n_t p} \tag{8-12}$$

e no topo da raiz é zero. A tensão de von Mises σ' no topo do "plano" da raiz é encontrada primeiro ao identificarmos as tensões ortogonais normais e as tensões de cisalhamento. A partir do sistema de coordenadas da Figura 8-8, observamos que

$$\sigma_x = \frac{6F}{\pi d_r n_t p} \qquad \tau_{xy} = 0$$

$$\sigma_y = 0 \qquad \tau_{yz} = \frac{16T}{\pi d_r^3}$$

$$\sigma_z = -\frac{4F}{\pi d_r^2} \qquad \tau_{zx} = 0$$

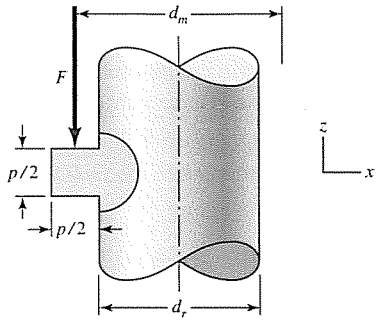


Figura 8-8 Geometria da rosca quadrada útil na procura de tensões de flexão e tensão transversa de cisalhamento na raiz da rosca.

então, utilize a Equação (6-14) da Seção 6-5.

A forma do parafuso-rosca é complicada do ponto de vista de análise. Lembre-se da origem da área de tensão de tração A_t, a qual procede de experimento. Um parafuso de potência levantando uma carga está em compressão e seu passo de rosca é *encurtado* devido à deformação elástica. Sua porca de engajamento está em tração e seu passo de rosca é *alongado*. As roscas engajadas não podem compartilhar a carga igualmente. Alguns experimentos mostram que a primeira rosca engajada carrega 0,38 da carga; a segunda, 0,25; a terceira, 0,18; e a sétima está livre de carga. Ao estimar as tensões de rosca usando as equações supracitadas, substituir $0{,}38F$ por F e estabelecer n_t em 1 proverá o nível mais elevado de tensões na combinação rosca-porca.

EXEMPLO 8-1

Um parafuso de potência de rosca quadrada tem um diâmetro maior de 32 mm e um passo de 4 mm com roscas duplas, devendo ser usado em uma aplicação similar à da Figura 8-4. Os dados fornecidos incluem $f = f_c = 0{,}08$, $d_c = 40$ mm e $F = 6{,}4$ kN por parafuso.

(*a*) Encontre a profundidade de rosca, a largura de rosca, o diâmetro de passo, o diâmetro menor e o avanço.

(*b*) Encontre o torque requerido para elevar e baixar a carga.

(*c*) Encontre a eficiência durante a elevação da carga.

(*d*) Encontre as tensões de corpo, torcional e compressiva.

(*e*) Encontre a tensão de mancal.

(*f*) Encontre as tensões de rosca fletindo na raiz, o cisalhamento na raiz, bem como a tensão de von Mises e a tensão máxima de cisalhamento no mesmo local.

Solução (*a*) A partir da Figura 8-3(*a*), a profundidade de rosca e a largura são as mesmas e iguais à metade do passo, ou 2 mm. Ademais,

$$d_m = d - p/2 = 32 - 4/2 = 30 \text{ mm}$$

Resposta

$$d_r = d - p = 32 - 4 = 28 \text{ mm}$$

$$l = np = 2(4) = 8 \text{ mm}$$

(*b*) Utilizando as Equações (8-1) e (8-6), o torque requerido para girar o parafuso contra a carga é

$$T_R = \frac{Fd_m}{2}\left(\frac{l + \pi f d_m}{\pi d_m - fl}\right) + \frac{Ff_c d_c}{2}$$

$$= \frac{6{,}4(30)}{2}\left[\frac{8 + \pi(0{,}08)(30)}{\pi(30) - 0{,}08(8)}\right] + \frac{6{,}4(0{,}08)40}{2}$$

Resposta

$$= 15{,}94 + 10{,}24 = 26{,}18 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Utilizando as Equações (8-2) e (8-6), o torque de abaixamento de carga é

$$T_L = \frac{Fd_m}{2}\left(\frac{\pi f d_m - l}{\pi d_m + fl}\right) + \frac{Ff_c d_c}{2}$$

$$= \frac{6{,}4(30)}{2}\left[\frac{\pi(0{,}08)30 - 8}{\pi(30) + 0{,}08(8)}\right] + \frac{6{,}4(0{,}08)(40)}{2}$$

Resposta
$$= -0{,}466 + 10{,}24 = 9{,}77 \text{ N} \cdot \text{m}$$

O sinal negativo no primeiro termo indica que o parafuso por si só não é autobloqueante e rodaria sob a ação da carga, exceto pelo fato de que a fricção do colar está presente e deve também ser superada. Assim, o torque requerido para rodar o parafuso "com" a carga é menor que o requerido para superar a fricção de colar sozinha.

(c) A eficiência global na elevação da carga é

Resposta
$$e = \frac{Fl}{2\pi T_R} = \frac{6{,}4(8)}{2\pi(26{,}18)} = 0{,}311$$

(*d*) A tensão de cisalhamento de corpo τ decorrente do momento de torção T_R no exterior do corpo do parafuso é

Resposta
$$\tau = \frac{16T_R}{\pi d_r^3} = \frac{16(26{,}18)(10^3)}{\pi(28^3)} = 6{,}07 \text{ MPa}$$

A tensão nominal normal de eixo é

Resposta
$$\sigma = -\frac{4F}{\pi d_r^2} = -\frac{4(6{,}4)10^3}{\pi(28^2)} = -10{,}39 \text{ MPa}$$

(*e*) A tensão de apoio σ_B, com uma rosca carregando $0{,}38F$, é

Resposta
$$\sigma_B = -\frac{2(0{,}38F)}{\pi d_m(1)p} = -\frac{2(0{,}38)(6{,}4)10^3}{\pi(30)(1)(4)} = -12{,}9 \text{ MPa}$$

(*f*) A tensão de flexão de raiz de rosca σ_b, com uma rosca carregando $0{,}38F$, é

$$\sigma_b = \frac{6(0{,}38F)}{\pi d_r(1)p} = \frac{6(0{,}38)(6{,}4)10^3}{\pi(28)(1)4} = 41{,}5 \text{ MPa}$$

O cisalhamento transverso no extremo da secção transversal de raiz decorrente da flexão é zero. Contudo, existe uma tensão circunferente de cisalhamento no extremo da secção transversal da raiz da rosca, como mostrado em (*d*), de 6,07 MPa. As tensões tridimensionais, conforme a Figura 8-8, observando que a coordenada y aponta para dentro da página, são

$$\sigma_x = 41{,}5 \text{ MPa} \qquad \tau_{xy} = 0$$
$$\sigma_y = 0 \qquad \tau_{yz} = 6{,}07 \text{ MPa}$$
$$\sigma_z = -10{,}39 \text{ MPa} \qquad \tau_{zx} = 0$$

A Equação (6-14) da Seção 6-5 pode ser escrita como

Resposta
$$\sigma' = \frac{1}{\sqrt{2}}\{(41{,}5 - 0)^2 + [0 - (-10{,}39)]^2 + (-10{,}39 - 41{,}5)^2 + 6(6{,}07)^2\}^{1/2}$$

$$= 48{,}7 \text{ MPa}$$

De outra forma, você pode determinar as tensões principais e então usar a Equação (6-12) para encontrar a tensão de von Mises. Isso é útil ao avaliar também τ_{max}. As tensões principais podem ser encontradas a partir da Equação (4-15); todavia, esboce o elemento de tensão e observe que não existem tensões de ci-

salhamento na face x. Isso significa que σ_x é uma tensão principal. As tensões restantes podem ser transformadas utilizando-se a equação da tensão plana, a Equação (4-13). Logo, as tensões principais restantes são

$$\frac{-10,39}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-10,39}{2}\right)^2 + 6,07^2} = 2,79, -13,18 \text{ MPa}$$

Ordenar as tensões principais produz σ_1, σ_2, σ_3 = 41,5, 2,79, – 13,18 Mpa. Substituindo estas na Equação (6-12), obtemos

Resposta

$$\sigma' = \left\{\frac{[41,5 - 2,79]^2 + [2,79 - (-13,18)]^2 + [-13,18 - 41,5]^2}{2}\right\}^{1/2}$$

$$= 48,7 \text{ MPa}$$

A tensão máxima de cisalhamento é fornecida pela Equação (4-16), na qual $\tau_{max} = \tau_{1/3}$, produzindo

Resposta

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{41,5 - (-13,18)}{2} = 27,3 \text{ MPa}$$

Ham e Ryan[1] mostraram que o coeficiente de fricção em roscas de parafusos independe da carga axial (longitudinal), praticamente independe da velocidade, decresce com lubrificantes mais pesados, mostra pouca variação com combinação de materiais e é melhor para aços em bronze. Os coeficientes de escorregamento de fricção em parafusos de potência são de cerca de 0,10 a 0,15.

A Tabela 8-4 apresenta pressões seguras de apoio em roscas, para proteger as superfícies móveis de desgaste anormal. A Tabela 8-5 mostra os coeficientes de fricção de escorregamento para pares comuns de materiais. A Tabela 8-6 exibe coeficientes de fricção de começo e de funcionamento para pares de materiais comuns.

Tabela 8-4 Pressão de apoio de parafuso p_b

Material do parafuso	Material da porca	Segura p_b, psi	Notas
Aço	Bronze	2500-3500	Baixa velocidade
Aço	Bronze	1600-2500	10 fpm
	Ferro fundido	1800-2500	8 fpm
Aço	Bronze	800-1400	20-40 fpm
	Ferro fundido	600-1000	20-40 fpm
Aço	Bronze	150-240	50 fpm

Fonte: H. A. Rothbart, *Mechanical Design and Systems Handbook*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1985.

Tabela 8-5 Coeficientes de fricção f para pares enroscados

Material do parafuso	Material de porca			
	Aço	Bronze	Latão	Ferro fundido
Aço, seco	0,15-0,25	0,15-0,23	0,15-0,19	0,15-0,25
Aço, óleo de máquina	0,11-0,17	0,10-0,16	0,10-0,15	0,11-0,17
Bronze	0,08-0,12	0,04-0,06	—	0,06-0,09

Fonte: H. A. Rothbart, *Mechanical Design and Systems Handbook*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1985.

[1] Ham e Ryan, *An Experimental Investigation of the Friction of Screw-threads*, Bulletin 247, University of Illinois Experiment Station, Champaign-Urbana, Ill., 7 de junho de 1932.

Tabela 8-6 Coeficientes de fricção de colar de empuxo

Combinação	Funcionando	Começo
Aço mole em ferro fundido	0,12	0,17
Aço duro em ferro fundido	0,09	0,15
Aço mole em bronze	0,08	0,10
Aço duro em bronze	0,06	0,08

Fonte: H. A. Rothbart, *Mechanical Design and Systems Handbook*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1985.

8-3 Fixadores Rosqueados

À medida que você estudar as seções sobre fixadores rosqueados e seu uso, esteja alerta para os pontos de vista estocástico e determinístico. Na maioria dos casos, a ameaça provém do carregamento de sobreprova dos fixadores, e isso é melhor tratado utilizando-se métodos estatísticos. Já a ameaça de fadiga é menor, de modo que os métodos determinísticos podem ser adequados.

A Figura 8-9 é um desenho de um parafuso de porca de cabeça hexagonal padronizada. Os pontos de concentração de tensão estão no arredondamento (filete), no começo das roscas (saída) e no arredondamento da raiz da rosca no plano da porca, quando esta estiver presente. Veja a Tabela A-29 para dimensões. O diâmetro de face da arruela é igual à largura entre as faces opostas do hexágono. O comprimento de rosca de parafusos de porca de série em polegadas, em que D é o diâmetro nominal, é

$$L_T = \begin{cases} 2D + \frac{1}{4} \text{ in} & L \leq 6 \text{ in} \\ 2D + \frac{1}{2} \text{ in} & L > 6 \text{ in} \end{cases} \tag{8-13}$$

e, para parafusos de porca métricos,

$$L_T = \begin{cases} 2D + 6 & L \leq 125 \quad D \leq 48 \\ 2D + 12 & 125 < L \leq 200 \\ 2D + 25 & L > 200 \end{cases} \tag{8-14}$$

sendo as dimensões em milímetros. O comprimento ideal dos parafusos de porca é aquele em que apenas uma ou duas roscas projetam-se da porca depois que ele é apertado. Os orifícios de tais parafusos podem ter rebarbas ou arestas afiadas após a furação. Estas podem "morder" o filete e aumentar a concentração de tensão. Logo, arruelas sempre devem ser usadas sob a cabeça dos parafusos de porca, para evitar que isso aconteça. Elas devem ser de aço endurecido e colocadas no parafuso de porca para que a borda arredondada do orifício estampado encare a face da arruela desse parafuso. Às vezes é necessário usar arruelas também sob a porca.

O propósito de um parafuso de porca é manter duas ou mais peças unidas. A carga de retenção estica ou alonga esse parafuso; ela é obtida ao torcer a porca até que o parafuso tenha se alongado quase até o limite elástico. Se a porca não afrouxar, essa tensão no parafuso permanecerá como a pré-carga ou a força de retenção. Ao apertar, o mecânico deve, se possível, segurar a cabeça do parafuso de porca estacionária e torcê-la; dessa maneira, a haste do parafuso não sentirá o torque de atrito de rosca.

As cabeças dos parafusos de calota de cabeça hexagonal são ligeiramente mais finas que aquelas de parafusos de porca de cabeça hexagonal. Dimensões de parafusos de calota com cabeça hexagonal estão lis-

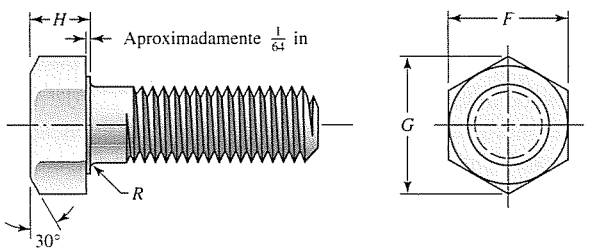


Figura 8-9 Parafuso de porca com cabeça hexagonal; observe a face da arruela, o filete (estria) abaixo da cabeça, o começo de roscas e o chanfro em ambas as extremidades. Os comprimentos dos parafusos de porca são sempre medidos a partir da parte de baixo da cabeça.

tadas na Tabela A-30. Esses parafusos são usados nas mesmas aplicações que os parafusos de porcas e também em aplicações nas quais um dos membros retidos é rosqueado. Três outros estilos comuns de cabeça de parafuso de calota são mostrados na Figura 8-10.

Vários estilos de cabeça de parafuso de máquina são mostrados na Figura 8-11. Parafusos de máquina de série em polegadas estão geralmente disponíveis em tamanhos de nº 0 até cerca de $\frac{3}{8}$ in.

Estilos de porcas hexagonais estão ilustrados na Figura 8-12; suas dimensões são fornecidas na Tabela A-31. O material da porca deve ser selecionado cuidadosamente, de modo a conformar-se com o do parafuso de porca. Durante o aperto, a primeira rosca da porca tende a receber a carga total; contudo, há escoamento, com algum enrijecimento decorrente do trabalho a frio que ocorre, e a carga é dividida sobre cerca de três roscas da porca. Por essa razão, você jamais deve reutilizar porcas; fazê-lo pode ser perigoso.

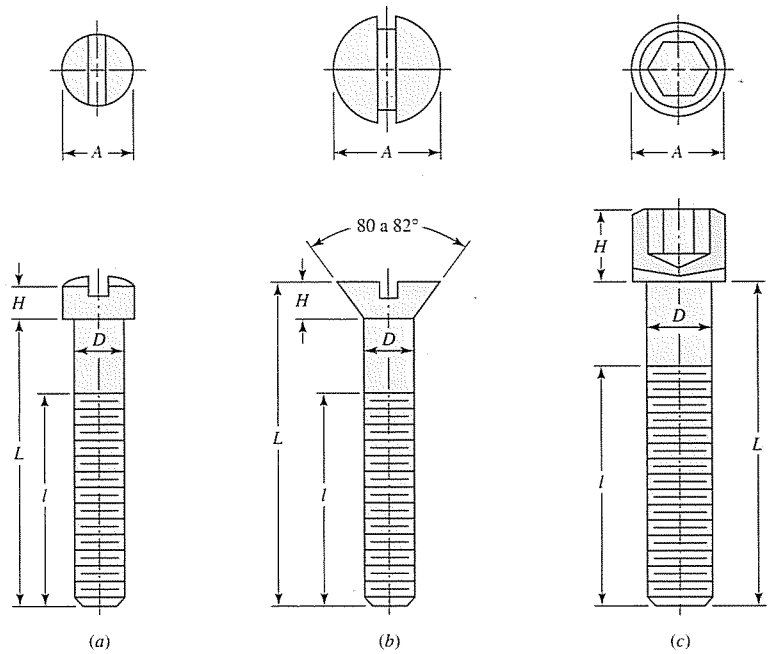


Figura 8-10 Cabeças típicas de parafusos de calota: (*a*) cabeça *fillister* (cilíndrica-oval de fenda); (*b*) cabeça plana (cônica-plana de fenda); (*c*) cabeça de bocal hexagonal. Parafusos de calota são sempre manufaturados com cabeças hexagonais similares às mostradas na Figura 8-9, bem como com diversos outros estilos de cabeça. Essa ilustração utiliza um dos métodos convencionais de representação de roscas.

8-4 Junções – Rigidez de Fixadores

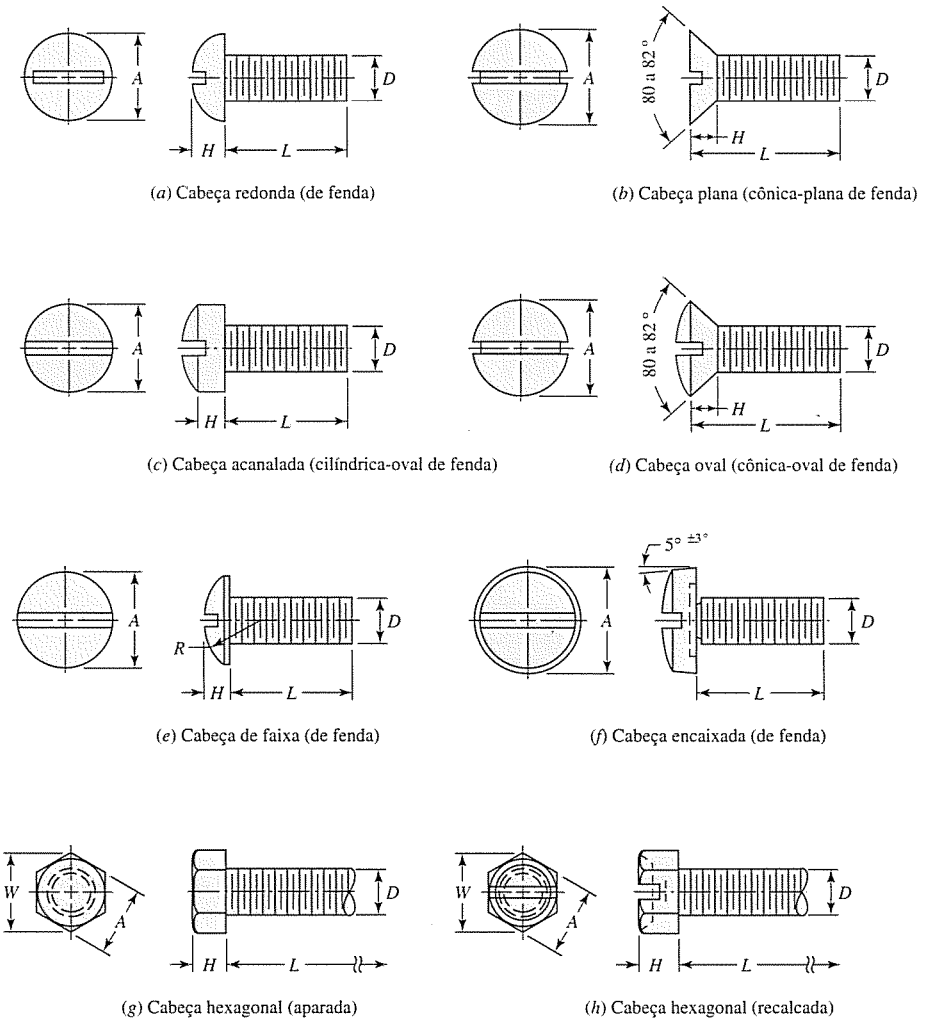
Quando se deseja uma conexão que possa ser desmontada sem métodos destrutivos e que seja forte o suficiente para resistir a cargas externas de tração, a cargas de momento e de cisalhamento, ou a uma combinação destas, então a junção parafusada simples, com porcas usando arruelas de aço endurecido, é uma boa solução. Uma junção desse tipo pode ser perigosa, a menos que propriamente projetada e montada por um mecânico *treinado.*

Uma secção através de uma junção parafusada carregada em tração é ilustrada na Figura 8-13. Observe o espaço de folga provido pelos orifícios do parafuso de porca. Observe, também, como as roscas desse parafuso se estendem no corpo da conexão.

Como observado anteriormente, o propósito do parafuso de porca é reter duas ou mais partes. Torcer a porca estica esse parafuso de modo a produzir a força de retenção. Essa força de retenção (ou engaste) é denominada *pré-tração* ou *pré-carga de parafuso de porca.* Ela existe na conexão depois de a porca haver sido propriamente apertada, não obstante a carga P de tração externa ter sido exercida ou não.

Naturalmente, visto que os membros estão sendo retidos juntos, a força de retenção que produz tensão no parafuso de porca induz a compressão neles.

A Figura 8-14 mostra uma outra conexão carregada em tração. Essa junção usa parafusos de calota rosqueados a um dos membros. Uma abordagem alternativa a esse problema (de não utilizar uma porca) seria usar parafusos prisioneiros. Um prisioneiro é uma barra rosqueada em ambas as extremidades. Ele é apa-



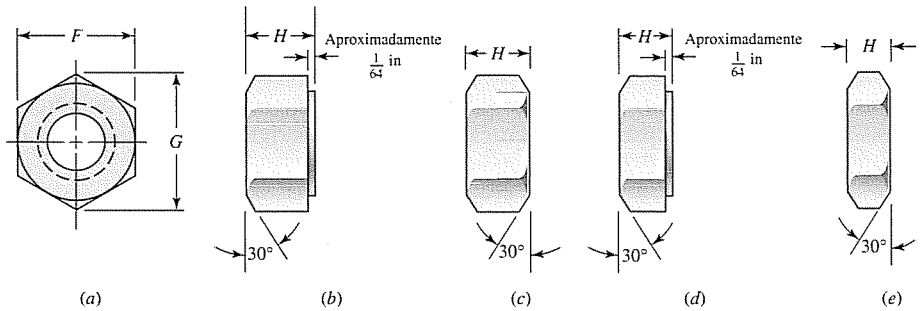
(*a*) Cabeça redonda (de fenda) (*b*) Cabeça plana (cônica-plana de fenda)

(*c*) Cabeça acanalada (cilíndrica-oval de fenda) (*d*) Cabeça oval (cônica-oval de fenda)

(*e*) Cabeça de faixa (de fenda) (*f*) Cabeça encaixada (de fenda)

(*g*) Cabeça hexagonal (aparada) (*h*) Cabeça hexagonal (recalcada)

Figura 8-11 Tipos de cabeças usadas em parafusos de máquina.*



(*a*) (*b*) (*c*) (*d*) (*e*)

Figura 8-12 Porcas hexagonais: (*a*) vista de extremidade, geral; (*b*) porca regular de arruela frontal; (*c*) porca regular, chanfrada em ambos os lados; (*d*) porca de travamento com face de arruela; (*e*) porca de travamento chanfrada em ambos os lados.

rafusado no membro inferior primeiro, então o membro de cima é posicionado e fixado para baixo, com arruelas endurecidas e porcas. Os prisioneiros são considerados permanentes; dessa forma, a junção pode ser desmontada simplesmente removendo-se a porca e a arruela. Assim, a parte rosqueada do membro inferior não é danificada pela reutilização de roscas.

* Comercialmente, as denominações usadas pelos fabricantes são mais detalhadas, incluindo quase sempre o tipo de fenda, encaixe ou reentrância. Por exemplo, o parafuso de cabeça plana é conhecido como parafuso chato de fenda comum, ou cônico-plano de fenda.

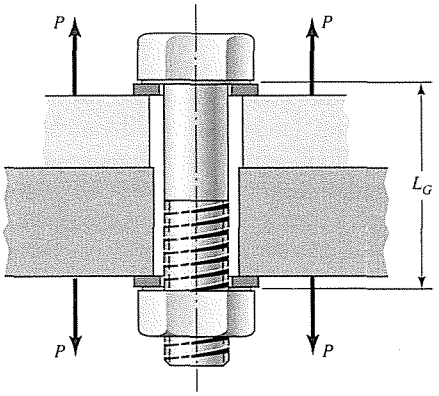


Figura 8-13 Uma conexão de parafuso de porca carregada em tração pelas forças *P*. Observe o uso de duas arruelas. Observe também como as roscas se estendem no corpo da conexão. Isso é normal e desejável. L_G é o alcance da conexão.

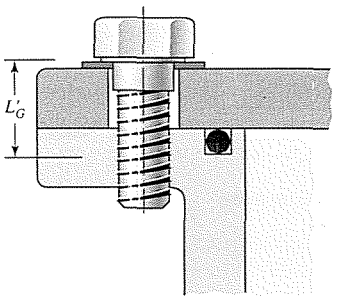


Figura 8-14 Secção de vaso de pressão cilíndrico. Parafusos de cabeça hexagonal são usados para apertar a cabeça do cilindro no corpo. Observe o uso de um retentor de anel. L_G é o alcance efetivo da conexão (ver Tabela 8-7).

A *razão de mola* é um limite, como expresso na Equação (5-1). Para um membro elástico tal como um parafuso de porca, conforme aprendemos na Equação (5-2), ela é a razão entre a força aplicada ao membro e a deflexão produzida pela força. Podemos usar a Equação (5-4) e os resultados do Problema 5-1 para encontrar a constante de rigidez de um fixador em qualquer conexão parafusada de porca.

O *alcance* ou *agarramento* L_G de uma conexão é a espessura total do material retido. Na Figura 8-13, o alcance é a soma das espessuras de ambos os membros e ambas as arruelas. Na Figura 8-14, o alcance efetivo é fornecido na Tabela 8-7.

A rigidez da porção de um parafuso de porca ou daquele sem porca dentro da zona de retenção geralmente consistirá em duas partes: a da porção de haste não-rosqueada e a da porção rosqueada. Assim, a constante de rigidez do parafuso de porca é equivalente às rigidezes de duas molas em série. Utilizando os resultados do Problema 5-1, encontramos

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \qquad \text{ou} \qquad k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \tag{8-15}$$

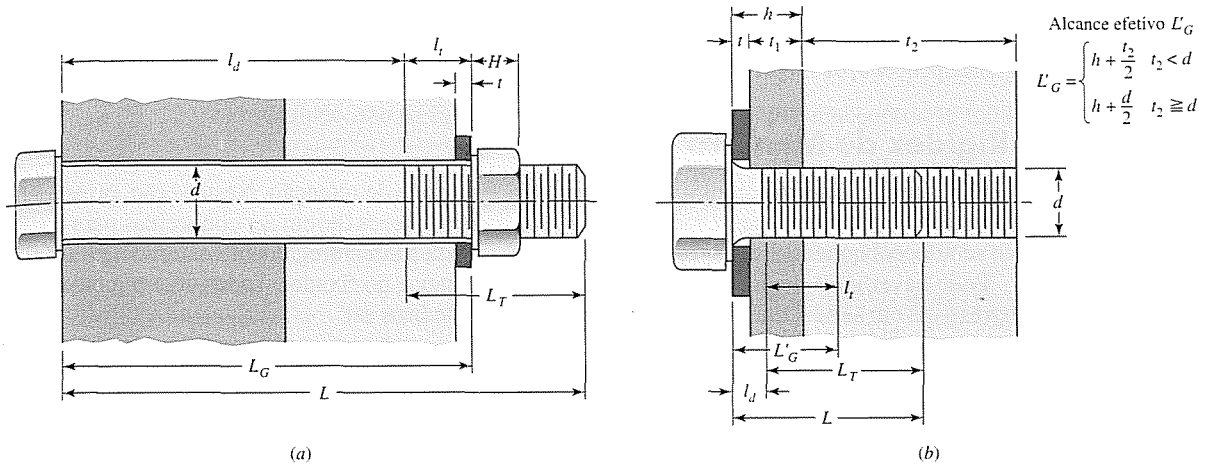
para duas molas em série. A partir da Equação (5-4), as razões de mola de porções rosqueadas e não-rosqueadas do parafuso de porca na zona de retenção são, respectivamente,

$$k_t = \frac{A_t E}{l_t} \qquad k_d = \frac{A_d E}{l_d} \tag{8-16}$$

em que A_t = área de tensão de tração (Tabelas 8-1, 8-2)
l_t = comprimento da porção rosqueada do arrocho
A_d = área de diâmetro maior do fixador
l_d = comprimento da porção não-roqueada em arrocho

Substituindo essas rigidezes na Equação (8-15), obtemos

Tabela 8-7 *Procedimento sugerido para encontrar rigidez de fixador*



Dado o diâmetro do fixador d
e o passo p ou número de roscas

Alcance efetivo

$$L'_G = \begin{cases} h + t_2/2, & t_2 < d \\ h + d/2, & t_2 > d \end{cases}$$

Alcance é a espessura L_G

Espessura de arruela das
Tabelas A-32 ou A-33
Comprimento rosqueado L_T
Série em polegadas:

$$L_T = \begin{cases} 2D + \frac{1}{4}\text{ in}, & L \leq 6\text{ in} \\ 2D + \frac{1}{2}\text{ in}, & L > 6\text{ in} \end{cases}$$

Série métrica:

$$L_T = \begin{cases} 2D + 6\text{ mm}, & L \leq 125,\ D \leq 48\text{ mm} \\ 2D + 12\text{ mm}, & 125 < L \leq 200\text{ mm} \\ 2D + 25\text{ mm}, & L > 200\text{ mm} \end{cases}$$

Comprimento do fixador: $L > L_G + H$

Comprimento do fixador: $L > h + 1{,}5d$

Arredondar para cima utilizando a Tabela A-17*

Comprimento de porção
não-rosqueada: $l_d = L - L_T$
Comprimento de porção
rosqueada: $l_t = L_G - l_d$

Comprimento de porção útil
não-rosqueada: $l_d = L - L_T$
Comprimento de porção útil
rosqueada: $l_t = L'_G - l_d$

Área de porção não-rosqueada

$$A_d = \pi d^2/4$$

Área de porção rosqueada:
A_t, Tabelas 8-1 ou 8-2
Espessura de fixador:

$$k_b = \frac{A_d A_t E}{A_d l_t + A_t l_d}$$

* É possível que parafusos de porca e parafusos de calota não estejam disponíveis em todos os comprimentos preferenciais listados na Tabela A-17. Fixadores mais compridos podem não existir em polegadas fracionárias ou em comprimentos milimétricos terminando em um dígito não-nulo. Verifique com seu fornecedor de parafusos de porca a respeito da disponibilidade.

$$k_b = \frac{A_d A_t E}{A_d l_t + A_t l_d} \tag{8-17}$$

em que k_b é a rigidez efetiva estimada do parafuso de porca ou de calota na zona de retenção. Para fixadores curtos – aquele da Figura 8-14, por exemplo –, a área não-rosqueada é pequena, de modo que a primeira das expressões da Equação (8-16) pode ser utilizada para encontrar k_b. Para fixadores longos, a área rosqueada é relativamente pequena, de modo que a segunda expressão da Equação (8-16) pode ser utilizada. A Tabela 8-7 é útil.

8-5 Junções – Rigidez de Membro

Na seção anterior, determinamos a rigidez do fixador na zona de retenção. Nesta seção, pretendemos estudar a rigidez dos membros nessa mesma zona. Ambas as rigidezes devem ser conhecidas para que saibamos o que acontecerá quando a conexão montada for submetida a um carregamento externo de tração.

Pode haver mais de dois membros incluídos no alcance do fixador. Todos atuam juntos como molas compressivas em série – daí a razão total de mola dos membros ser

$$\frac{1}{k_m} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \cdots + \frac{1}{k_i} \tag{8-18}$$

Se um dos membros for uma gaxeta flexível, sua rigidez relativa à dos outros membros será geralmente tão pequena que, para todos os propósitos práticos, as dos outros podem ser desprezadas e somente a rigidez da gaxeta será usada.

Se não houver gaxeta, a rigidez dos membros será um tanto difícil de obter, exceto por experimentação, uma vez que a compressão espalha-se entre a cabeça do parafuso e a porca, de modo que a área não é uniforme. Existem, contudo, alguns casos em que essa área pode ser determinada.

Ito[2] empregou técnicas ultra-sônicas para determinar a distribuição de pressão na interface do membro. Os resultados mostram que a pressão permanece alta até cerca de 1,5 raio do parafuso de porca. Contudo, ela cai mais adiante, ao longo desse parafuso. Assim, Ito sugere o uso do método de cone de pressão de Rotscher para cálculos de rigidez com um ângulo de cone variável. Esse método é bastante complicado, de modo que escolhemos aqui empregar uma abordagem mais simples, utilizando um ângulo de cone fixo.

A Figura 8-15 ilustra a geometria geral de cone usando um ângulo de meio ápice α. Um ângulo $\alpha = 45°$ foi utilizado, mas Little[3] relata que este superestima a rigidez de engaste. Quando o carregamento está restrito a um ânulo de face da arruela (aço endurecido, ferro fundido ou alumínio), o ângulo próprio de ápice é menor. Osgood[4] relata um intervalo de $25° \le \alpha \le 33°$ para a maioria das combinações. Neste livro, empregaremos $\alpha = 30°$, exceto nos casos em que o material for insuficiente para permitir a existência do frusto (tronco).

Referindo-nos agora à Figura 8-15(*b*), a contração de um elemento do cone de espessura dx sujeito a uma força de compressão P é, a partir da Equação (5-3),

$$d\delta = \frac{P\,dx}{EA} \tag{a}$$

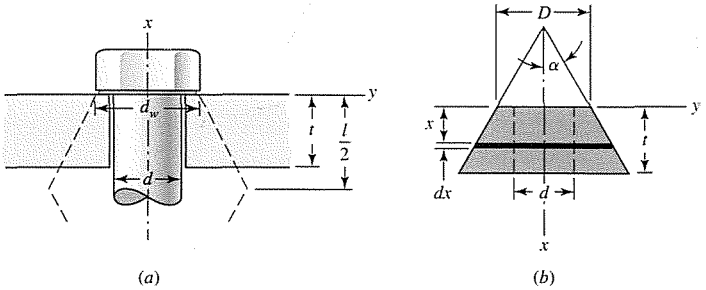


Figura 8-15 Compressão de um membro com propriedades elásticas equivalentes representadas por um frusto (tronco) de um cone vazado. Aqui, *l* representa o comprimento de alcance.

[2] Y. Ito, J. Toyoda e S. Nagata, "Interface Pressure Distribution in a Bold-Flange Assembly", ASME paper nº 77-WA/DE-11, 1977.
[3] R. E. Little, "Bolted Joints: How Much Give?", *Machine Design*, 9 de novembro de 1967.
[4] C. C. Osgood, "Saving Weight on Bolted Joints", *Machine Design*, 25 de outubro de 1979.

A área do elemento é

$$A = \pi\left(r_o^2 - r_i^2\right) = \pi\left[\left(x\tan\alpha + \frac{D}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2\right]$$
$$= \pi\left(x\tan\alpha + \frac{D+d}{2}\right)\left(x\tan\alpha + \frac{D-d}{2}\right) \qquad (b)$$

Substituindo isso na Equação (*a*) e integrando, obtemos uma contração total de

$$\delta = \frac{P}{\pi E}\int_0^t \frac{dx}{[x\tan\alpha + (D+d)/2][x\tan\alpha + (D-d)/2]} \qquad (c)$$

Utilizando uma tabela de integrais, encontrarmos o resultado valendo

$$\delta = \frac{P}{\pi Ed\tan\alpha}\ln\frac{(2t\tan\alpha + D - d)(D+d)}{(2t\tan\alpha + D + d)(D-d)} \qquad (d)$$

Logo, a razão de mola ou rigidez desse frusto é

$$k = \frac{P}{\delta} = \frac{\pi Ed\tan\alpha}{\ln\dfrac{(2t\tan\alpha + D - d)(D+d)}{(2t\tan\alpha + D + d)(D-d)}} \qquad (8\text{-}19)$$

Com $\alpha = 30°$, esta torna-se

$$k = \frac{0{,}5774\pi Ed}{\ln\dfrac{(1{,}155t + D - d)(D+d)}{(1{,}155t + D + d)(D-d)}} \qquad (8\text{-}20)$$

A Equação (8-20), ou (8-19), deve ser solucionada separadamente para cada frusto na junção. Assim, as rigidezes individuais são montadas para obter k_m usando a Equação (8-18).

Se os membros da junção têm o mesmo módulo de Young E, com frustos simétricos de lado a lado, então eles atuam como duas molas idênticas em série. A partir da Equação (8-18), aprendemos que $k_m = k/2$. Usando o agarramento como $l = 2t$ e d_w como o diâmetro da face da arruela, encontramos a razão de mola dos membros como

$$k_m = \frac{\pi Ed\tan\alpha}{2\ln\dfrac{(l\tan\alpha + d_w - d)(d_w + d)}{(l\tan\alpha + d_w + d)(d_w - d)}} \qquad (8\text{-}21)$$

O diâmetro da face da arruela é cerca de 50% maior que o diâmetro do fixador para parafusos de porca de cabeça hexagonal padronizados e para parafusos de calota. Assim, podemos simplificar a Equação (8-21) estabelecendo $d_w = 1{,}5d$. Se também utilizarmos $\alpha = 30°$, então essa equação poderá ser escrita como

$$k_m = \frac{0{,}5774\pi Ed}{2\ln\left(5\dfrac{0{,}5774l + 0{,}5d}{0{,}5774l + 2{,}5d}\right)} \qquad (8\text{-}22)$$

É fácil programar as equações numeradas nesta seção, de modo que você deve fazê-lo. O tempo gasto em programação evitará muitas horas de manipulação de fórmulas.

A fim de verificar quão boa é a Equação (8-21), nós a solucionamos para k_m/Ed:

$$\frac{k_m}{Ed} = \frac{\pi\tan\alpha}{2\ln\left[\dfrac{(l\tan\alpha + d_w - d)(d_w + d)}{(l\tan\alpha + d_w + d)(d_w - d)}\right]}$$

Anteriormente, nesta seção, o uso de $\alpha = 30°$ foi recomendado para membros de aço endurecido, ferro fundido ou alumínio. Wileman, Choudury e Green[5] conduziram um estudo de elemento finito desse problema.

[5] J. Wileman, M. Choudury e I. Green, "Computation of Member Stiffness in Bolted Connections", *Trans. ASME, J. Mech. Design*, vol. 113, dezembro de 1991, p. 432-437.

Os resultados, representados na Figura 8-16, concordam com a recomendação de $\alpha = 30°$, coincidindo exatamente na razão de aspecto $d/l = 0{,}4$. Além disso, eles ofereceram um ajuste de curva exponencial da forma

$$\frac{k_m}{Ed} = A \exp(Bd/l) \tag{8-23}$$

com as constantes A e B definidas na Tabela 8-8. Para faces de arruela padronizadas e membros do mesmo material, a Equação (8-23) apresenta um cálculo simples para rigidez de membro k_m. Em caso de desvio dessas condições, a Equação (8-20) permanece sendo a base para a abordagem do problema.

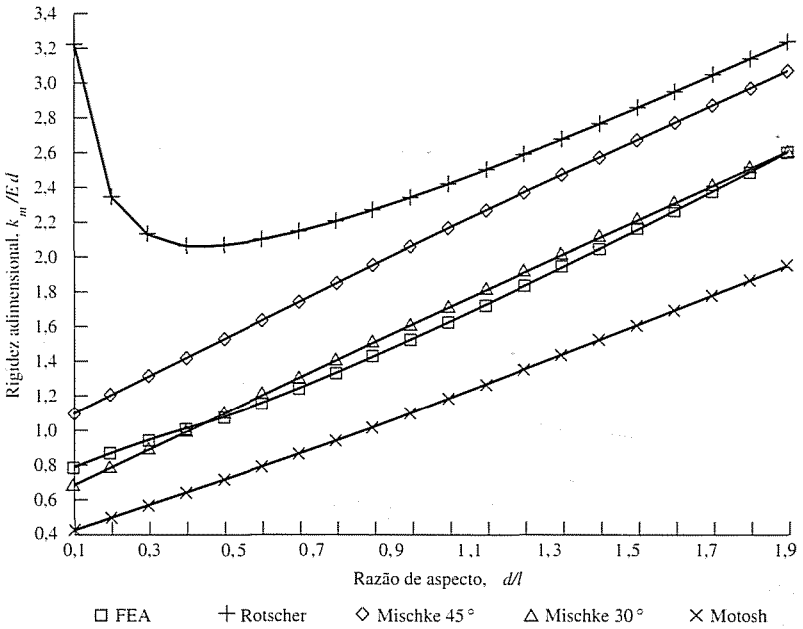


Figura 8-16 O gráfico adimensional da rigidez *versus* a razão de aspecto dos membros de uma junção parafusada, mostrando a precisão relativa dos métodos de Rotscher, Mischke e Motosh comparada com uma análise de elemento finito (FEA) conduzida por Wileman, Choudury e Green.

Tabela 8-8 Parâmetros de rigidez de materiais de vários membros†

Material usado	Razão de Poison	Elástico GPa	Módulo Mpsi	A	B
Aço	0,291	207	30,0	0,787 15	0,628 73
Alumínio	0,334	71	10,3	0,796 70	0,638 16
Cobre	0,326	119	17,3	0,795 68	0,635 53
Ferro fundido cinza	0,211	100	14,5	0,778 71	0,616 16
Expressão geral				0,789 52	0,629 14

†*Fonte*: J. Wileman, M. Choudury e I. Green, "Computation of Member Stiffness in Bolted Connections", *Trans. ASME, J. Mech. Design*, vol. 113, dezembro de 1991, p. 432-437.

EXEMPLO 8-2

Duas placas de aço de $\frac{1}{2}$ in de espessura, com um módulo de elasticidade de $30(10^6)$ psi, estão engastadas por parafusos de porca de $\frac{1}{2}$ in de diâmetro de arruela frontal, grau 5 da UNC SAE, com uma arruela de 0,095 in de espessura abaixo da porca. Encontre a razão de mola k_m do membro utilizando o método do frusto cônico e compare o resultado com o método de ajuste de curva de análise de elemento finito (FEA) de Wileman *et al.*

Solução O agarramento é de 0,5 + 0,5 + 0,095 = 1,095 in. Utilizando a Equação (8-22), com $l = 1{,}095$ e $d = 0{,}5$ in, escrevemos

$$k_m = \frac{0{,}5774\pi 30(10^6)0{,}5}{2\ln\left[5\dfrac{0{,}5774(1{,}095) + 0{,}5(0{,}5)}{0{,}5774(1{,}095) + 2{,}5(0{,}5)}\right]} = 15{,}97(10^6)\ \text{lbf/in}$$

A partir da Tabela 8-8, $A = 0{,}787\ 15$, $B = 0{,}628\ 73$. A Equação (8-23) provê

$$k_m = 30(10^6)(0{,}5)(0{,}787\ 15)\exp[0{,}628\ 73(0{,}5)/1{,}095]$$
$$= 15{,}73(10^6)\ \text{lbf/in}$$

Neste caso, a diferença entre os resultados para as Equações (8-22) e (8-23) é menor que 2%.

8-6 Resistência de Parafuso de Porca

Nas normas de especificação para parafusos de porca, a resistência é determinada declarando-se as quantidades mínimas da ASTM, a *resistência mínima à prova,* ou *carga mínima de prova,* e a *resistência mínima à tração.*

A *carga de prova* é a carga (força) máxima que o parafuso pode agüentar sem adquirir uma deformação permanente. A *resistência à prova* é o quociente da carga de prova e a área de tensão de tração. Assim, ela corresponde grosseiramente ao limite de proporcionalidade e a uma deformação permanente de 0,0001 in no fixador (primeiro desvio mensurável do comportamento elástico). Os valores da resistência média prova, da resistência média à tração e dos desvios-padrão correspondentes não fazem parte dos códigos de especificação; dessa forma, é responsabilidade do projetista obter esses valores, talvez a partir de ensaios de laboratório, antes de projetar para uma especificação de confiabilidade. A Figura 8-17 mostra a distribuição da resistência última à tração (limite de resistência) de uma série de produção de parafuso de porca. Se a resistência mínima da ASTM igualar-se ou exceder a 120 kpsi, os parafusos poderão ser oferecidos como grau 5 da SAE. O projetista não vê esse histograma. Em vez disso, na Tabela 8-9, ele observa a entrada $S_{ut} = 120$ kpsi, sob o tamanho de $\frac{1}{4}$–1 in, em parafusos de porca de grau 5. De maneira semelhante, as resistências mínimas são mostradas nas Tabelas 8-10 e 8-11.

As especificações da SAE são encontradas na Tabela 8-9. Os graus dos parafusos de porca estão numerados de acordo com as resistências à tração, com decimais usados para variações no mesmo nível de resistência. Os parafusos em geral estão disponíveis em todos os graus listados. Parafusos prisioneiros estão disponíveis nos graus 1, 2, 4, 5, 8 e 8,1. O grau 8,1 não está listado.

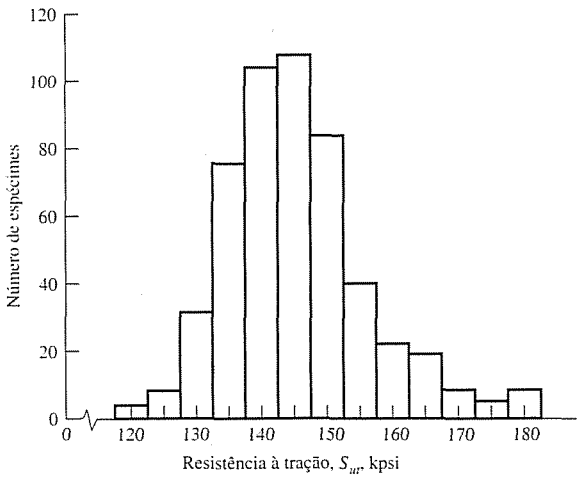
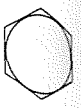
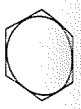
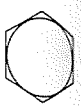
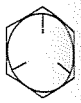
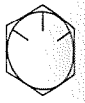
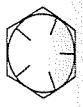
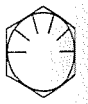


Figura 8-17 Histograma da resistência última à tração de parafuso de porca baseado em 539 ensaios mostrando a resistência última média à tração $\bar{S}_{ut} = 145{,}1$ kpsi e um desvio-padrão de $\hat{\sigma}S_{ut} = 10{,}3$ kpsi.

Tabela 8-9 Especificações da SAE para parafusos de aço (de porca)

Grau SAE nº	Intervalo de tamanho inclusivo, in	Resistência mínima à prova*, kpsi	Resistência mínima à tração*, kpsi	Resistência mínima ao escoamento*, kpsi	Material	Marcação de cabeça
1	$\frac{1}{4}$-1 $\frac{1}{2}$	33	60	36	Baixo ou médio carbono	
2	$\frac{1}{4}$-$\frac{3}{4}$	55	74	57	Baixo ou médio carbono	
	$\frac{7}{8}$-1 $\frac{1}{2}$	33	60	36		
4	$\frac{1}{4}$-1 $\frac{1}{2}$	65	115	100	Médio carbono, repuxado a frio	
5	$\frac{1}{4}$-1	85	120	92	Médio carbono, Q&T	
	1 $\frac{1}{8}$-1 $\frac{1}{2}$	74	105	81	(temperado e revenido)	
5,2	$\frac{1}{4}$-1	85	120	92	Martensita de baixo carbono, Q&T (temperada e revenida)	
7	$\frac{1}{4}$-1 $\frac{1}{2}$	105	133	115	Liga de médio carbono, Q&T (temperada e revenida)	
8	$\frac{1}{4}$-1 $\frac{1}{2}$	120	150	130	Liga de médio carbono, Q&T (temperada e revenida)	
8,2	$\frac{1}{4}$-1	120	150	130	Martensita de baixo carbono, Q&T (temperada e revenida)	

* Resistências mínimas são resistências excedidas por 99% dos fixadores.

As especificações da ASTM estão listadas na Tabela 8-10. As roscas da ASTM são mais curtas porque ela lida mormente com estruturas; conexões estruturais costumam ser carregadas em cisalhamento, e o comprimento de rosca decrescido provê uma maior área de haste.

As especificações para fixadores métricos são fornecidas na Tabela 8-11.

Vale a pena observar que todos os parafusos de porca com especificação de grau feitos nos Estados Unidos levam uma marca do fabricante ou emblema, além da marcação de grau, em sua cabeça. Tais marcas confirmam que o parafuso satisfaz ou excede às especificações. Se essas marcas estiverem ausentes, ele poderá ter sido importado; para parafusos de porca importados, não existe obrigação de satisfazer às especificações.

Os parafusos de porca em carregamento axial de fadiga falham no filete sob a cabeça, no fim do trecho rosqueado e na primeira rosca da porca. Se o parafuso de porca tiver um ressalto (ou colarinho) padrão sob a cabeça, terá um valor de K_f de 2,1 a 2,3, *e* esse filete do ressalto ficará protegido de riscadura ou escoriação por uma arruela. Se o fim do trecho rosqueado tiver um ângulo de meio cone de 15° ou menos, a tensão será maior na primeira rosca da porca. Parafusos são dimensionados examinando-se o carregamento no plano da face da arruela de porca. Essa será a parte mais fraca do parafuso de porca *se, e somente se*, as condições supramencionadas forem satisfeitas (proteção de arruela de filete de ressalto e fim de rosca ≤ 15°). A desatenção a esse requisito levou a um recorde de 15% de falha de fadiga de fixadores sob a cabeça, 20% no fim de rosca e 65% para onde o projetista estava dirigindo sua atenção. É de pouco auxílio concentrar-se no plano de face de arruela de porca se esta não for a localidade mais fraca.

Tabela 8-10 Especificações da ASTM para parafusos de aço (de porca)

Designação da ASTM nº	Intervalo de tamanho inclusivo, in	Resistência mínima à prova*, kpsi	Resistência mínima à tração*, kpsi	Resistência mínima ao escoamento*, kpsi	Material	Marcação de cabeça
A307	$\frac{1}{4}$-1 $\frac{1}{2}$	33	60	36	Baixo carbono	
A325	$\frac{1}{2}$-1	85	120	92	Médio carbono, Q&T	
tipo 1	1 $\frac{1}{8}$-1 $\frac{1}{2}$	74	105	81	(temperado e revenido)	A325
A325,	$\frac{1}{2}$-1	85	120	92	Baixo carbono, martensita Q&T	
tipo 2	1 $\frac{1}{8}$-1 $\frac{1}{2}$	74	105	81	(temperado e revenido)	A325
A325,	$\frac{1}{2}$-1	85	120	92	Aço envelhecido, Q&T	
tipo 3	1 $\frac{1}{8}$-1 $\frac{1}{2}$	74	105	81	(temperado e revenido)	A325
A354,	$\frac{1}{4}$-2 $\frac{1}{2}$	105	125	109	Aço liga, Q&T	
grade BC	2 $\frac{3}{4}$-4	95	115	99	(temperado e revenido)	BC
A354, grade BD	$\frac{1}{4}$-4	120	150	130	Aço liga, Q&T (temperado e revenido)	
A449	$\frac{1}{4}$-1	85	120	92	Médio carbono, Q&T	
	1 $\frac{1}{8}$-1 $\frac{1}{2}$	74	105	81	(temperado e revenido)	
	1 $\frac{3}{4}$-3	55	90	58		
A490, tipo 1	$\frac{1}{2}$-1 $\frac{1}{2}$	120	150	130	Aço liga, Q&T (temperado e revenido)	A490
A490, tipo 3	$\frac{1}{2}$-1 $\frac{1}{2}$	120	150	130	Aço envelhecido, Q&T (temperado e revenido)	A490

* Resistências mínimas são resistências excedidas por 99% dos fixadores.

As porcas são classificadas para uso em parafusos de grau correspondente ao seu. O propósito da porca é ter suas roscas defletidas para distribuir a carga do parafuso mais uniformemente. Suas propriedades são controladas a fim de obter isso. O grau da porca deve ser o mesmo do parafuso de porca.

8-7 Junções de Tração – Carga Externa

Consideremos agora o que ocorre quando uma carga externa P de tração, como na Figura 8-13, é aplicada a uma conexão de parafuso e porca. Deve-se assumir, naturalmente, que a força de engaste, a qual chamaremos de *pré-carga* F_i, foi corretamente aplicada apertando-se a porca *antes* que P fosse aplicada. A nomenclatura empregada é a seguinte:

F_i = pré-carga

P = carga externa de tração

Tabela 8-11 Categorias métricas de propriedades mecânicas para parafusos de aço (de porca), parafusos e prisioneiros*

Categoria da propriedade	Intervalo de tamanho, inclusivo	Resistência mínima à prova†, MPa	Resistência mínima à tração†, MPa	Resistência mínima ao escoamento†, MPa	Material	Marcação de cabeça
4,6	M5-M36	225	400	240	Baixo ou médio carbono	
4,8	M1,6-M16	310	420	340	Baixo ou médio carbono	
5,8	M5-M24	380	520	420	Baixo ou médio carbono	
8,8	M16-M36	600	830	660	Baixo carbono, martensita Q&T (temperado e revenido)	
9,8	M1,6-M16	650	900	720	Baixo carbono, martensita Q&T (temperado e revenido)	
10,9	M5-M36	830	1040	940	Médio carbono, Q&T (temperado e revenido)	
12,9	M1,6-M36	970	1220	1100	Liga, Q&T (temperada e revenida)	

* O comprimento de rosca para parafusos de rosca e de calota é

$$l_T = \begin{cases} 2d+6 & l \le 125 \\ 2d+12 & 125 < l \le 200 \\ 2d+25 & l > 200 \end{cases}$$

onde L é o comprimento do parafuso de porca. O comprimento de rosca para parafusos estruturais de porca é ligeiramente menor do que o fornecido *supra*.

† Resistências mínimas são resistências excedidas por 99% dos fixadores.

P_b = porção de P absorvida pelo parafuso de porca

P_m = porção de P absorvida pelos membros

$F_b = P_b + F_i$ = carga resultante de parafuso de porca

$F_m = P_m - F_i$ = carga resultante nos membros

C = fração da carga externa P carregada pelo parafuso de porca

$1 - C$ = fração da carga externa P carregada pelos membros

A carga P é a tração e faz a conexão estirar-se, ou elongar-se, por alguma distância δ. Podemos relacionar essa elongação às rigidezes recordando que k é a força dividida pela deflexão. Logo,

$$\delta = \frac{P_b}{k_b} \qquad \text{e} \qquad \delta = \frac{P_m}{k_m} \tag{a}$$

ou

$$P_m = P_b \frac{k_m}{k_b} \tag{b}$$

Visto que $P = P_b + P_m$, temos

$$P_b = \frac{k_b P}{k_b + k_m} = CP \tag{c}$$

e

$$P_m = P - P_b = (1 - C)P \tag{d}$$

em que

$$C = \frac{k_b}{k_b + k_m} \tag{e}$$

é denominada *constante de rigidez da junção*. A carga resultante do parafuso de porca é

$$F_b = P_b + F_i = CP + F_i \qquad F_m < 0 \tag{8-24}$$

e a carga resultante nos membros conectados é

$$F_m = P_m - F_i = (1 - C)P - F_i \qquad F_m < 0 \tag{8-25}$$

Naturalmente, esses resultados são válidos, contanto que alguma carga de engaste permaneça nos membros; isso é indicado pelo qualificador nas equações.

A Tabela 8-12 é incluída para prover alguma informação sobre valores relativos das rigidezes encontradas. O agarramento contém somente dois membros, ambos de aço, sem arruelas. As razões C e $1 - C$ são os coeficientes de P nas Equações (8-24) e (8-25), respectivamente. Elas descrevem a proporção da carga externa absorvida pelo parafuso de porca e pelos membros, respectivamente. Em todos os casos, os membros absorvem mais de 80% da carga externa. Pense em quão importante isso será quando algum carregamento de fadiga estiver presente. Observe também que tornar o agarramento mais longo leva os membros a absorver uma percentagem ainda maior da carga externa.

Tabela 8-12 Cálculo de rigidezes de membro e de parafusos de porca. Membros de aço engastados usando um parafuso de aço de $\frac{1}{2}$ in 13 NC. $C = \dfrac{k_b}{k_b + k_m}$

Agarramento do parafuso de porca, in	Rigidezes, Mlb/in			
	K_b	k_m	C	$1 - C$
2	2,57	12,69	0,168	0,832
3	1,79	11,33	0,136	0,864
4	1,37	10,36	0,114	0,886

8-8 Relacionando o Torque à Tração de Parafuso de Porca

Tendo aprendido que uma pré-carga elevada é muito desejável em conexões parafusadas importantes, devemos, a seguir, considerar meios de assegurar que essa pré-carga seja realmente desenvolvida quando as peças forem montadas.

Se o comprimento global de um parafuso de porca puder ser medido com um micrômetro quando for montado, a elongação do parafuso decorrente da pré-carga F_i poderá ser computada usando-se a fórmula $\delta = f_i l/(AE)$. Assim, a porca será simplesmente apertada até que o parafuso se elongue pela distância δ. Isso assegura que a pré-carga desejada foi atingida.

A elongação de um parafuso em geral não pode ser medida, pois a extremidade rosqueada está freqüentemente em um orifício cego. É também impraticável, em muitos casos, medir a elongação de um parafuso de porca. Nessas situações, o torque da chave (catraca) requerido para desenvolver a pré-carga especificada deve ser estimado. Dessa forma, o método da catraca de torque, a catraca de impacto pneumático ou o método do giro da porca poderão ser usados.

A catraca de torque tem um mostrador incorporado que indica o torque apropriado.

Com a catraca de impacto, a pressão de ar é ajustada de tal forma que a chave pára quando o torque apropriado é obtido; ou, em algumas chaves, o ar automaticamente se fecha no torque desejado.

O método do giro da porca requer que primeiro definamos o significado de um aperto confortável. A condição de *aperto confortável* é o arrocho obtido por uns poucos impactos de uma chave de impacto, ou o

esforço completo de uma pessoa usando uma chave comum. Quando tal condição é atingida, todo giro adicional desenvolve tração adicional útil no parafuso de porca. O método do giro da porca requer que você compute o número fracionário de voltas necessário para desenvolver a pré-carga requerida a partir da condição de aperto confortável. Por exemplo, para parafusos estruturais hexagonais de grande capacidade de carga, a especificação do giro da porca declara que esta deve ser girada num mínimo de 180° a partir da posição de aperto confortável sob condições ótimas. Observe que isso também é quase a rotação correta para porcas de roda de um carro de passageiros. Os Problemas 8-15 a 8-17 ilustram o método com mais detalhes.

Embora o coeficiente de fricção possa variar amplamente, podemos obter uma boa estimativa do torque requerido para produzir uma dada pré-carga combinando-se as Equações (8-5) e (8-6):

$$T = \frac{F_i d_m}{2}\left(\frac{l + \pi f d_m \sec\alpha}{\pi d_m - f l \sec\alpha}\right) + \frac{F_i f_c d_c}{2} \qquad (a)$$

Visto que $\tan\lambda = l/\pi d_m$, dividimos o numerador e o denominador do primeiro termo por πd_m e obtemos

$$T = \frac{F_i d_m}{2}\left(\frac{\tan\lambda + f\sec\alpha}{l - f\tan\lambda\sec\alpha}\right) + \frac{F_i f_c d_c}{2} \qquad (b)$$

O diâmetro da face da arruela de uma porca hexagonal é igual à largura entre faces opostas e a $1\frac{1}{2}$ vez o tamanho nominal. Portanto, o diâmetro médio do colar é $d_c = (d + 1{,}5d)/2 = 1{,}25d$. A Equação (b) pode agora ser rearranjada para dar

$$T = \left[\left(\frac{d_m}{2d}\right)\left(\frac{\tan\lambda + f\sec\alpha}{1 - f\tan\lambda\sec\alpha}\right) + 0{,}625 f_c\right] F_i d \qquad (c)$$

Definimos, nesse momento, um *coeficiente de torque K* como o termo em colchetes; logo,

$$K = \left(\frac{d_m}{2d}\right)\left(\frac{\tan\lambda + f\sec\alpha}{1 - f\tan\lambda\sec\alpha}\right) + 0{,}625 f_c \qquad (8\text{-}26)$$

A Equação (c) pode agora ser escrita

$$T = K F_i d \qquad (8\text{-}27)$$

O coeficiente de fricção depende da maciez da superfície, da precisão e do grau de lubrificação. Em média, f e f_c são aproximadamente 0,15. O fato interessante a respeito da Equação (8-26) é que $K \doteq 0{,}20$ para $f = f_c = 0{,}15$, sem importar que tamanho tenham os parafusos de porca empregados nem se as roscas são grossas ou finas.

Brake e Kurtz publicaram os resultados de numerosos ensaios de torque de parafusos de porca.[6] Ao submetermos seus dados a uma análise estatística, podemos aprender algo acerca da distribuição dos coeficientes de torque e da pré-carga resultante. Blake e Kurtz determinaram a pré-carga em quantidades de parafusos de porca não-lubrificados e lubrificados de tamanho $\frac{1}{2}$ in-20 UNF quando torcidos a 800 lbf · in. Isso corresponde grosseiramente a um parafuso de porca M12 × 1,25 torcido a 90 N · m. As análises estatísticas desses dois grupos de parafusos de porca, convertidas em unidades SI, são mostradas nas Tabelas 8-13 e 8-14.

Tabela 8-13 Distribuição de pré-carga F_i para 20 ensaios de parafusos de porca não-lubrificados, torcidos a 90 N · m

23,6.	27,6.	28,0.	29,4.	30,3.	30,7.	32,9.	33,8.	33,8.	33,8.
34,7.	35,6.	35,6.	37,4.	37,8.	37,8.	39,2.	40,0.	40,5.	42,7.

* Valor médio $F_i = 34{,}3$ kN. Desvio-padrão, $\hat{\sigma} = 4{,}9$ kN.

Tabela 8-14 Distribuição de pré-carga F_i para 10 ensaios de parafusos de porca lubrificados, torcidos a 90 N · m

30,3.	32,5.	32,5.	32,9.	32,9.	33,8.	34,3.	34,7.	37,4.	40,5.

* Valor médio $F_i = 34{,}18$ kN. Desvio-padrão, $\hat{\sigma} = 2{,}88$ kN.

[6] J. C. Blake e H. J. Kurtz, "The Uncertainties of Measuring Fastener Preload", *Machine Design*, vol. 37, 30 de setembro de 1965, p. 128-131.

A princípio, observamos que ambos os grupos têm aproximadamente a mesma pré-carga média, 34 kN. Os parafusos de porca não-lubrificados apresentam um desvio-padrão de 4,9 kN e uma COV de aproximadamente 0,15, e os lubrificados, um desvio-padrão de 3 kN e uma COV de aproximadamente 0,9.

As médias obtidas de duas amostras são quase idênticas, aproximadamente de 34 kN; utilizando a Equação (8-27), encontramos, para ambas as amostras, $K = 0{,}208$.

O distribuidor da Bowman, um grande fabricante de fixadores, recomenda os valores mostrados na Tabela 8-15. Neste livro, utilizaremos esses valores, bem como $K = 0{,}2$ quando a condição do parafuso de porca não for declarada.

Tabela 8-15 Fatores de torque K para uso com a Equação (8-27)

Condição do parafuso de porca	K
Não-metalizado (chapeado), acabamento negro	0,30
Chapeado de zinco (zincado)	0,20
Lubrificado	0,18
Chapeado de cádmio	0,16
Com Bowman antiagarramento	0,12
Com porcas Bowman de agarramento	0,09

EXEMPLO 8-3

Um parafuso de porca de $\frac{3}{4}$ in 16 UNF × $2\frac{1}{2}$ in grau 5 da SAE é submetido a uma carga P de 6 kip em uma junção de tração. A tração inicial do parafuso é $F_i = 25$ kip. Suas rigidezes e as da junção são $K_b = 6{,}50$ e $K_m = 13{,}8$ Mlb/in, respectivamente.

(*a*) Determine as tensões de pré-carga e de carga de serviço no parafuso. Compare-as à resistência mínima SAE de prova do parafuso.

(*b*) Especifique o torque necessário para desenvolver a pré-carga, usando a Equação (8-27).

(*c*) Especifique o torque necessário para desenvolver a pré-carga, usando a Equação (8-26) com $f = f_c = 0{,}15$.

Solução

A partir da Tabela 8-2, $A_t - 0{,}373$ in^2.

(*a*) A tensão de pré-carga é

Resposta

$$\sigma_i = \frac{F_i}{A_t} = \frac{25}{0{,}373} = 67{,}02 \text{ kpsi}$$

A constante de rigidez é

$$C = \frac{k_b}{k_b + k_m} = \frac{6{,}5}{6{,}5 + 13{,}8} = 0{,}320$$

A partir da Equação (8-24), a tensão sob a carga de serviço é

$$\sigma_b = \frac{F_b}{A_t} = \frac{CP + F_i}{A_t} = C\frac{P}{A_t} + \sigma_i$$

Resposta

$$= 0{,}320\frac{6}{0{,}373} + 67{,}02 = 72{,}17 \text{ kpsi}$$

A partir da Tabela 8-10, a resistência mínima SAE de prova do parafuso é $S_p = 85$ kpsi. As tensões de pré-carga e de carga de serviço são, respectivamente, 21 e 15% menores que a resistência à prova.

(*b*) A partir da Equação (8-27), o torque necessário para alcançar a pré-carga é

Resposta

$$T = K F_i d = 0{,}2(25)(10^3)(0{,}75) = 3750 \text{ lbf} \cdot \text{in}$$

(*c*) O diâmetro menor pode ser determinado a partir da área menor na Tabela 8-2. Logo, $d_r = \sqrt{4A_r/\pi} = \sqrt{4(0{,}351)/\pi} = 0{,}6685$ in. Dessa forma, o diâmetro médio é $d_m = (0{,}75 + 0{,}6685)/2 = 0{,}7093$ in. O ângulo de avanço é

$$\lambda = \tan^{-1}\frac{l}{\pi d_m} = \tan^{-1}\frac{1}{\pi d_m N} = \tan^{-1}\frac{1}{\pi(0{,}7093)(16)} = 1{,}6066^\circ$$

Para $\alpha = 30°$, a Equação (8-26) fornece

$$T = \left\{\left[\frac{0{,}7093}{2(0{,}75)}\right]\left[\frac{\tan 1{,}6066^\circ + 0{,}15(\sec 30^\circ)}{1 - 0{,}15(\tan 1{,}6066^\circ)(\sec 30^\circ)}\right] + 0{,}625(0{,}15)\right\} 25(10^3)(0{,}75)$$

$$= 3551 \text{ lbf} \cdot \text{in}$$

que é 5,3% menor que o valor encontrado em (*b*).

8-9 Junção de Tração Carregada Estaticamente com Pré-Carga

As Equações (8-24) e (8-25) representam as forças em uma junção de parafuso e porca com pré-carga. A tensão de tração no parafuso pode ser encontrada, como no Exemplo 8-3, valendo

$$\sigma_b = \frac{CP}{A_t} + \frac{F_i}{A_t} \tag{a}$$

O valor limitante de σ_b é a resistência à prova S_p. Assim, com a introdução de um *fator de carga* n, a Equação (*a*) torna-se

$$\frac{CnP}{A_t} + \frac{F_i}{A_t} = S_p \tag{b}$$

ou

$$n = \frac{S_p A_t - F_i}{CP} \tag{8-28}$$

Aqui, chamamos n de um fator de carga, em vez de um fator de segurança, embora as duas idéias estejam de certa forma relacionadas. Qualquer valor de $n > 1$ na Equação (8-28) assegura que a tensão do parafuso é menor que a resistência à prova.

Uma outra maneira de assegurar uma junção segura é requerer que a carga externa seja menor que aquela necessária para fazer a junção se separar. Se tal separação ocorrer, então a carga externa total será imposta sobre o parafuso. Considere P_0 o valor da carga externa que causaria a separação. Nessa separação, $F_i = 0$ na Equação (8-25); logo,

$$(1 - C)P_0 - F_i = 0 \tag{c}$$

Estabeleça o fator de segurança contra a separação da junção como

$$n_0 = \frac{P_0}{P} \tag{d}$$

Substituindo $P_0 = n_0 P$ na Equação (*c*), encontramos

$$n_0 = \frac{F_i}{P(1 - C)} \tag{8-29}$$

como um fator de carga protegendo contra a separação da junção.

A Figura 8-18 é o diagrama de tensão-deformação de um material de parafuso de boa qualidade. Observe que não existe ponto de escoamento claramente definido e que o diagrama progride suavemente até a fratura, a qual corresponde à tensão de resistência. Isso significa que não importa a quantidade de pré-carga

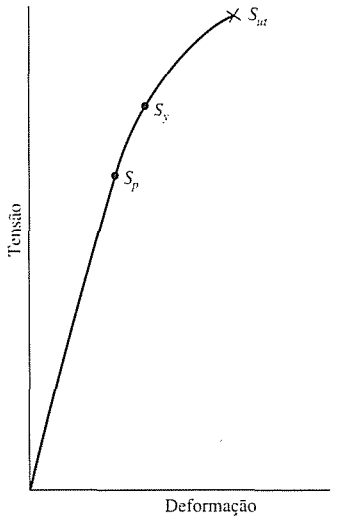


Figura 8-18 Diagrama típico de tensão-deformação para materiais de parafuso de porca mostrando a resistência à prova S_p, a resistência ao escoamento S_y e a resistência à tração S_{ut}.

fornecida ao parafuso de porca, ele reterá sua capacidade de carregar carga. Isso é o que o mantém apertado e determina a resistência da junção. A tensão de pré-carga é o "músculo" da junção, e sua magnitude é determinada pela resistência do parafuso. Se a resistência total deste não for usada ao desenvolver a pré-tração, a junção será mais fraca, o que será um desperdício, inclusive de dinheiro.

Parafusos de porca de boa qualidade podem ser pré-carregados dentro do intervalo plástico, de modo a desenvolver maior resistência. Parte do torque de parafuso de porca utilizado no aperto produz torção, que por sua vez aumenta a tensão principal de tração. Contudo, essa torção é mantida somente pela fricção da cabeça do parafuso de porca e da porca; com o tempo, ela relaxa e baixa a tração de parafuso ligeiramente. Assim, como regra, um parafuso de porca irá sofrer fratura durante o aperto, ou então não.

O importante, acima de tudo, é não confiar muito no torque de chave (de catraca), pois ele não é um bom indicador da pré-carga. Uma elongação verdadeira do parafuso de porca deve ser utilizada sempre que possível – especialmente com carregamento de fadiga. De fato, se alta confiabilidade é um requisito do projeto, então a pré-carga deve ser sempre determinada pela elongação do parafuso de porca.

As recomendações da Russell, Burdsall & Ward Inc. (RB&W) para pré-carga são 60 kpsi para parafusos de porca de grau 5 da SAE para conexões não-permanentes; recomendam também que parafusos de porca A325 (equivalente ao grau 5 da SAE) usados em aplicações estruturais sejam apertados à carga de prova ou além (85 kpsi até um diâmetro de 1 in).[7] Bowman[8] recomenda uma pré-carga de 75% da carga de prova, o que é aproximadamente igual às recomendações da RB&W para parafusos de porca reutilizados. Em vista dessas diretrizes, é recomendado, para carregamento estático e fadiga, que o seguinte seja usado para pré-carga:

$$F_i = \begin{cases} 0{,}75F_p & \text{para conexões não-permanentes, fixadores reutilizados} \\ 0{,}90F_p & \text{para conexões permanentes} \end{cases} \tag{8-30}$$

em que F_p é a carga de prova, obtida da equação

$$F_p = A_t S_p \tag{8-31}$$

Aqui, S_p é a resistência à prova obtida das Tabelas 8-9 a 8-11. Para outros materiais, um valor aproximado é $S_p = 0{,}85S_y$. Tenha cuidado para não utilizar um material mole em um fixador rosqueado. Para parafusos de porca de aço de alta resistência usados como conectores estruturais de aço, se métodos de aperto avançado forem utilizados, aperte até o escoamento.

É possível observar que as recomendações da RB&W sobre pré-carga estão de acordo com o que é mostrado neste capítulo. Os propósitos do desenvolvimento foram prover ao leitor as perspectivas de apreciar as Equações (8-30) e uma metodologia com a qual manipular casos mais especificamente do que com as recomendações.

[7] Russell, Burdsall & Ward Inc., *Helpful Hints for Fastener Design and Application*, Mentor, Ohio, 1965, p. 42.
[8] Bowman Distribution-Barnes Group, *Fastener Facts*, Cleveland, 1985, p. 90.

EXEMPLO 8-4

A Figura 8-19 é uma secção transversal de um vaso de pressão de ferro fundido de grau 25. Um total de N parafusos de porca é usado para resistir a uma força de separação de 36 kip.

(*a*) Determine k_b, k_m e C.

(*b*) Encontre o número de parafusos requerido para um fator de carga de 2 em que os parafusos podem ser reutilizados quando a junção é desmontada.

Solução

(*a*) O agarramento é $L_G = 1{,}50$ in. A partir da Tabela A-31, a espessura da porca é de $\frac{35}{64}$ in. Adicionar duas roscas além da porca de $\frac{2}{11}$ in produz um comprimento de parafuso de

$$L = \frac{35}{64} + 1{,}50 + \frac{2}{11} = 2{,}229 \text{ in}$$

A partir da Tabela A-17, o parafuso seguinte de tamanho fracionário é $L = 2\frac{1}{4}$ in. A partir da Equação (8-13), o comprimento de rosca é $L_T = 2(0{,}625) + 0{,}25 = 1{,}50$ in. Logo, o comprimento da porção não-rosqueada no agarramento é $l_d = 2{,}25 - 1{,}50 = 0{,}75$ in. O comprimento rosqueado no agarramento é $l_t = L_G - l_d = 0{,}75$ in. A partir da Tabela 8-2, $A_t = 0{,}226$ in^2. A área do diâmetro maior é $A_d = \pi(0{,}625)^2/4 = 0{,}3068$ in^2. A rigidez do parafuso de porca é, então,

Resposta

$$k_b = \frac{A_d A_t E}{A_d l_t + A_t l_d} = \frac{0{,}3068(0{,}226)(30)}{0{,}3068(0{,}75) + 0{,}226(0{,}75)}$$

$$= 5{,}21 \text{ Mlbf/in}$$

A partir da Tabela A-24, para ferro fundido nº 25, usaremos $E = 14$ Mpsi. A rigidez dos membros, a partir da Equação (8-22), é

Resposta

$$k_m = \frac{0{,}5774\pi Ed}{2\ln\left(5\dfrac{0{,}5774l + 0{,}5d}{0{,}5774l + 2{,}5d}\right)} = \frac{0{,}5774\pi(14)(0{,}625)}{2\ln\left[5\dfrac{0{,}5774(1{,}5) + 0{,}5(0{,}625)}{0{,}5774(1{,}5) + 2{,}5(0{,}625)}\right]}$$

$$= 8{,}95 \text{ Mlbf/in}$$

Se você estiver utilizando a Equação (8-23), a partir da Tabela 8-8, $A = 0{,}778\,71$ e $B = 0{,}616\,16$, de modo que

$$k_m = EdA \exp(Bd/l)$$

$$= 14(0{,}625)(0{,}778\,71) \exp[0{,}616\,16(0{,}625)/1{,}5]$$

$$= 8{,}81 \text{ Mlbf/in}$$

o que é apenas 1,6% menor que o resultado anterior.

A partir do primeiro cálculo para k_m, a constante de rigidez C é

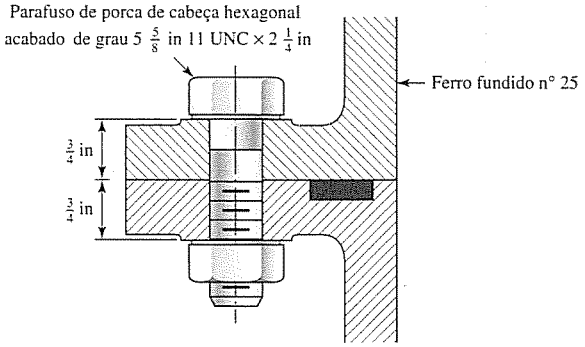


Figura 8-19

Resposta

$$C = \frac{k_b}{k_b + k_m} = \frac{5{,}21}{5{,}21 + 8{,}95} = 0{,}368$$

(*b*) A partir da Tabela 8-9, $S_p = 85$ kpsi. Assim, utilizando as Equações (8-30) e (8-31), descobrimos que a pré-carga recomendada é

$$F_i = 0{,}75 A_t S_p = 0{,}75(0{,}226)(85) = 14{,}4 \text{ kip}$$

Para N parafusos, a Equação (8-28) pode ser escrita como

$$n = \frac{S_p A_t - F_i}{C(P/N)} \tag{1}$$

ou

$$N = \frac{CnP}{S_p A_t - F_i} = \frac{0{,}368(2)(36)}{85(0{,}226) - 14{,}4} = 5{,}52$$

Com seis parafusos, a Equação (1) produz

$$n = \frac{85(0{,}226) - 14{,}4}{0{,}368(36/6)} = 2{,}18$$

o que é maior que o valor requerido. Por isso escolhemos seis parafusos de porca e usamos a pré-carga recomendada de aperto.

8-10 Junções de Gaxeta

Se uma gaxeta completa estiver presente em uma junção, sua pressão p é encontrada dividindo-se a força nos membros pela área de gaxeta por parafuso (de porca). Assim, para N parafusos de porca,

$$p = -\frac{F_m}{A_g/N} \tag{a}$$

Com um fator de carga n, a Equação (8-25) pode ser escrita como

$$F_m = (1 - C)nP - F_i \tag{b}$$

Substituindo isso na Equação (*a*), obtemos a pressão de gaxeta como

$$p = [F_i - nP(1 - C)]\frac{N}{A_g} \tag{8-32}$$

Em junções de gaxeta completa, a uniformidade da pressão na gaxeta é importante. Para manter tal uniformidade adequada, parafusos (de porca) adjacentes não devem ser colocados mais de seis diâmetros nominais separados no círculo de parafuso. Para manter a folga da chave, os parafusos de porca devem ser postos pelo menos três diâmetros separados. Uma regra rudimentar para espaçamento de parafusos de porca ao redor de um círculo de parafusos de porca é

$$3 \le \frac{\pi D_b}{Nd} \le 6 \tag{8-33}$$

em que D_b é o diâmetro do círculo de parafuso de porca e N, o número de parafusos de porca.

8-11 Carregamento de Fadiga de Junções de Tração

Junções parafusadas carregadas em tração, sujeitas à ação de fadiga, podem ser analisadas diretamente pelos métodos do Capítulo 7. A Tabela 8-16 lista fatores médios de concentração de tensão de fadiga para o filete sob a cabeça do parafuso de porca e também no começo das roscas da haste desse parafuso. Tais fatores já foram corrigidos para sensibilidade a entalhe e acabamento de superfície. Os projetistas devem estar cientes de que podem surgir situações nas quais seria aconselhável investigar esses fatores mais de perto, uma vez que

Tabela 8-16 Fatores de concentração de tensão de fadiga K_f para elementos rosqueados

Grau SAE	Grau métrico	Roscas laminadas	Roscas cortadas	Filete
0 a 2	3,6 a 5,8	2,2	2,8	2,1
4 a 8	6,6 a 10,9	3,0	3,8	2,3

são apenas valores médios. De fato, Peterson[9] observa que a distribuição de falhas típicas de parafusos de porca é de cerca de 15% sob a cabeça, 20% na extremidade de rosca e 65% na rosca na face da porca.

O uso de roscas laminadas é o método predominante de conformação de rosca em fixadores de parafuso, ao qual a Tabela 8-16 é aplicável. Na laminação de rosca, a quantidade de trabalho a frio e de deformação-enrijecimento é desconhecida do projetista; portanto, a resistência (limite de fadiga) axial completamente corrigida (incluindo K_f) é relatada na Tabela 8-17. Para roscas cortadas, os métodos do Capítulo 7 são úteis. Preveja que as resistências serão consideravelmente inferiores.

Na maioria das vezes, o tipo de carregamento de fadiga encontrado na análise de junções parafusadas é um carregamento em que a carga aplicada externamente flutua entre zero e alguma força máxima P. Essa seria a situação em um cilindro de pressão, por exemplo, em que a pressão ora existisse, ora deixasse de existir. Para tais casos, $F_{\max} = F_b$ e $F_{\min} = F_i$, sendo a componente alternante da força $F_a = (F_{\max} - F_{\min})/2 = (F_b - F_i)/2$. Dividir esta por A_t produz a componente alternante da tensão do parafuso. Empregando a notação da Seção 8-7 com a Equação (8-24), obtemos

$$\sigma_a = \frac{F_b - F_i}{2A_t} = \frac{(CP + F_i) - F_i}{2A_t} = \frac{CP}{2A_t} \tag{8-34}$$

A tensão média é igual à componente alternante mais a tensão mínima, $\sigma_i = F_i/A_i$, que resulta em

$$\sigma_m = \frac{CP}{2A_t} + \frac{F_i}{A_t} \tag{8-35}$$

No diagrama de fadiga do projetista, mostrado na Figura 8-20, a linha de carga é

$$\sigma_m = \sigma_a + \sigma_i \tag{8-36}$$

O problema seguinte é encontrar as componentes de resistência S_a e S_m do local geométrico de falha de fadiga. Essas componentes dependem dos seguintes critérios de falha:

Goodman:

$$\frac{S_a}{S_e} + \frac{S_m}{S_{ut}} = 1 \tag{8-37}$$

Tabela 8-17 Resistências completamente corrigidas para parafusos de porca e parafusos com roscas laminadas*

Grau ou classe	Intervalo de tamanho	Resistência
SAE 5	$\frac{1}{4}$-1 in	18,6 kpsi
	$1\frac{1}{8}$-$1\frac{1}{2}$ in	16,3 kpsi
SAE 7	$\frac{1}{4}$-$1\frac{1}{2}$ in	20,6 kpsi
SAE 8	$\frac{1}{4}$-$1\frac{1}{2}$ in	23,2 kpsi
ISO 8,8	M16-M36	129 MPa
ISO 9,8	M1,6-M16	140 MPa
ISO 10,9	M5-M36	162 MPa
ISO 12,9	M1,6-M36	190 MPa

* Aplicação repetida, carregamento axial, completamente corrigida.

[9] R. E. Peterson, *Stress Concentration Factors*, Wiley, New York, 1974, p. 253.

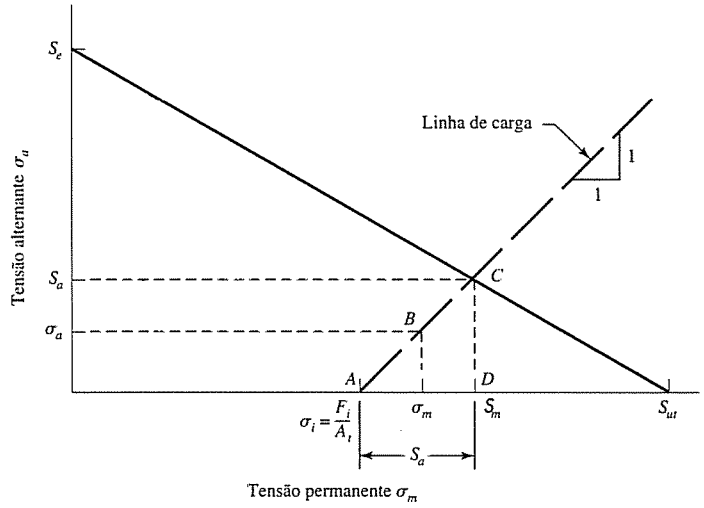


Figura 8-20 Diagrama de fadiga do projetista mostrando um local de falha de Goodman e o modo como uma linha de carga é usada para definir falha e segurança em junções pré-carregadas parafusadas em fadiga. O ponto *B* representa não-falha; o ponto *C*, falha.

Gerber:

$$\frac{S_a}{S_e} + \left(\frac{S_m}{S_{ut}}\right)^2 = 1 \tag{8-38}$$

ASME-elíptico:

$$\left(\frac{S_a}{S_e}\right)^2 + \left(\frac{S_m}{S_p}\right)^2 = 1 \tag{8-39}$$

Pela solução simultânea entre a Equação (8-36), como $S_m = S_a + \sigma_i$, e cada uma das equações, da (8-37) à (8-39), obtemos

Goodman:

$$S_a = \frac{S_e(S_{ut} - \sigma_i)}{S_{ut} + S_e} \tag{8-40}$$

$$S_m = S_a + \sigma_i \tag{8-41}$$

Gerber:

$$S_a = \frac{1}{2S_e}\left[S_{ut}\sqrt{S_{ut}^2 + 4S_e(S_e + \sigma_i)} - S_{ut}^2 - 2\sigma_i S_e\right] \tag{8-42}$$

$$S_m = S_a + \sigma_i$$

ASME-elíptico:

$$S_a = \frac{S_e}{S_p^2 + S_e^2}\left(S_p\sqrt{S_p^2 + S_e^2 - \sigma_i^2} - \sigma_i S_e\right) \tag{8-43}$$

$$S_m = S_a + \sigma_i$$

Ao utilizar as relações desta seção, esteja seguro de empregar K_f tanto para σ_a como para σ_m. Caso contrário, a inclinação da linha de carga não permanecerá de 1 para 1.

O exame das Equações (8-37) a (8-43) mostra equações paramétricas que relacionam as coordenadas de interesse às formas dos critérios. O fator de segurança protegendo contra fadiga é dado por

$$n_f = \frac{S_a}{\sigma_a} \tag{8-44}$$

Aplicando-o ao critério de Goodman, por exemplo, com as Equações (8-34) e (8-40), e $\sigma_i = F_i/A_t$, obtemos

$$n_f = \frac{2S_e(S_{ut}A_t - F_i)}{CP(S_{ut} + S_e)} \tag{8-45}$$

quando a pré-carga F_i estiver presente. Com nenhuma pré-carga, $C = 1$, $F_i = 0$ e a Equação (8-45) torna-se

$$n_{f0} = \frac{2S_e S_{ut} A_t}{P(S_{ut} + S_e)} \tag{8-46}$$

A pré-carga é benéfica para resistir à fadiga quando n_f/n_{f0} for maior que a unidade. Para Goodman, as Equações (8-45) e (8-46), com $n_f/n_{f0} \geq 1$, põem uma borda (limite) superior na pré-carga F_i de

$$F_i \leq (1 - C)S_{ut}A_t \tag{8-47}$$

Se este não puder ser atingido, e se n_f for insatisfatório, utilize o critério de Gerber ou o ASME-elíptico para obter uma avaliação menos conservadora. Se o projeto ainda não for satisfatório, parafusos adicionais e/ou um parafuso de tamanho diferente poderão ser requeridos. Parafusos soltos, na medida em que são dispositivos de fricção, e carregamento cíclico e vibração, bem como outros efeitos, levam os fixadores a, com o tempo, perder tração. Como se combate o afrouxamento? Dentro das limitações de resistência; quanto mais alta for a pré-carga, melhor. Uma regra prática é que pré-cargas de 60% da carga de prova raramente afrouxam. Se mais é melhor, quanto mais deve ser? Não o suficiente para criar fixadores reutilizados como uma ameaça futura. Alternativamente, esquemas de travamento de fixadores podem ser empregados.

Após solucionar a Equação (8-44), você também deve verificar a possibilidade de escoamento, usando a resistência à prova

$$n_p = \frac{S_p}{\sigma_m + \sigma_a} \tag{8-48}$$

EXEMPLO 8-5

A Figura 8-21 mostra uma conexão usando parafusos de calota. A junção está submetida a uma força flutuante cujo valor máximo é de 5 kip por parafuso. Os dados requeridos são os seguintes: parafuso de calota de 5/8 in-11 NC, SAE 5; arruela de aço endurecido com espessura $t_w = \frac{1}{16}$ in; chapa de aço de cobertura com espessura $t_1 = \frac{5}{8}$ in; módulo de elasticidade $E_s = 30$ Mpsi; base de ferro fundido de espessura $t_2 = \frac{5}{8}$ in; e módulo de elasticidade $E_{ci} = 16$ Mpsi.

(*a*) Encontre k_b, k_m e C usando as hipóteses aventadas na legenda da Figura 8-21.

(*b*) Encontre todos os fatores de segurança e explique o que significam.

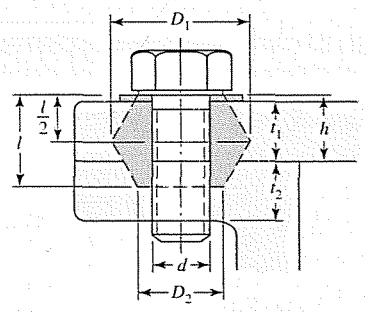


Figura 8-21 Modelo de tronco de cone de pressão de membro para um parafuso de calota. Para esse modelo, os tamanhos significativos são

$$l = \begin{cases} h + t_2/2 & t_2 < d \\ h + d/2 & t_2 \geq d \end{cases}$$

$D_1 = d_w + l \tan \alpha = 1{,}5 + 0{,}577l$

$D_2 = d_w = 1{,}5d$

em que l = agarramento efetivo. As soluções são para $\alpha = 30°$ e $d_w = 1{,}5d$.

Solução (*a*) Para os símbolos das Figuras 8-15 e 8-21, $h = t_1 + t_w = 0{,}6875$ in, $l = h + d/2 = 1$ in e $D_2 = 1{,}5d = 0{,}9375$ in. A junção é composta de três troncos; os dois troncos superiores são de aço, e o inferior é de ferro fundido.

Para o tronco superior: $t = l/2 = 0{,}5$ in, $D = 0{,}9375$ in e $E = 30$ Mpsi. Utilizando esses valores na Equação (8-20), obtemos $k_1 = 46{,}46$ Mlbf/in.

Para o tronco de meio: $t = h - l/2 = 0{,}1875$ in e $D = 0{,}9375 - 2(l - h)\tan 30° = 1{,}298$ in. Com estes e $E_s = 30$ Mpsi, a Equação (8-20) produz $k_2 = 197{,}43$ Mlbf/in.

O tronco inferior tem $D = 0{,}9375$ in, $t = l - h = 0{,}3125$ in e $E_{ci} = 16$ Mpsi. A mesma equação produz $k_3 = 32{,}39$ Mlbf/in.

Substituindo essas três rigidezes na Equação (8-18), obtemos $k_m = 17{,}40$ Mlbf/in. O parafuso de calota é curto e rosqueado de ponta a ponta. Usando $l = 1$ in para o agarramento e $A_t = 0{,}226$ in^2 da Tabela 8-2, encontramos a rigidez como $k_b = A_t E/l = 6{,}78$ Mlbf/in. Logo, a constante de junção é

Resposta
$$C = \frac{k_b}{k_b + k_m} = \frac{6{,}78}{6{,}78 + 17{,}40} = 0{,}280$$

(*b*) A Equação (8-30) provê a pré-carga como

$$F_i = 0{,}75F_p = 0{,}75A_t S_p = 0{,}75(0{,}226)(85) = 14{,}4 \text{ kip}$$

em que, a partir da Tabela 8-9, $S_p = 85$ kpsi para um parafuso de calota de grau 5 da SAE. Usando a Equação (8-28), obtemos o fator de carga como

Resposta
$$n = \frac{S_p A_t - F_i}{CP} = \frac{85(0{,}226) - 14{,}40}{0{,}280(5)} = 3{,}44$$

Esse fator previne que a tensão de parafuso torne-se igual à resistência à prova.

A seguir, utilizando a Equação (8-29), temos

Resposta
$$n_0 = \frac{F_i}{P(1 - C)} = \frac{14{,}40}{5(1 - 0{,}280)} = 4{,}00$$

Se a força P se tornar muito grande, a junção se separará e o parafuso receberá toda a carga. Esse fator protege o parafuso contra tal evento.

Para os fatores restantes, consulte a Figura 8-22. O diagrama nela exibido contém a linha de Goodman modificado, a linha de Gerber, a linha de resistência à prova e a linha de carga. A intersecção da linha de carga L com as respectivas linhas de falha nos pontos C, D e E define um conjunto de resistências S_a e S_m em cada intersecção. O ponto B representa o estado de tensão σ_a, σ_m. O ponto A é a tensão de pré-carga σ_i. Portanto, a linha de carga começa em A e faz um ângulo tendo uma inclinação unitária. Esse ângulo é de 45° somente quando ambos os eixos de tensão têm a mesma escala.

Os fatores de segurança são encontrados dividindo-se as distâncias AC, AD e AE pela distância AB. Observe que isso é o mesmo que dividir S_a de cada teoria por σ_a.

As quantidades mostradas na legenda da Figura 8-22 são obtidas como segue:

Ponto A

$$\sigma_i = \frac{F_i}{A_t} = \frac{14{,}40}{0{,}226} = 63{,}72 \text{ kpsi}$$

Ponto B

$$\sigma_a = \frac{CP}{2A_t} = \frac{0{,}280(5)}{2(0{,}226)} = 3{,}10 \text{ kpsi}$$

$$\sigma_m = \sigma_a + \sigma_i = 3{,}10 + 63{,}72 = 66{,}82 \text{ kpsi}$$

Ponto C

Esses são os critérios de Goodman modificado. A partir da Tabela 8-17, encontramos $S_e = 18{,}6$ kpsi. Então, utilizando a Equação (8-40), obtemos

$$S_a = \frac{S_e(S_{ut} - \sigma_i)}{S_{ut} + S_e} = \frac{18{,}6(120 - 63{,}72)}{120 + 18{,}6} = 7{,}55 \text{ kpsi}$$

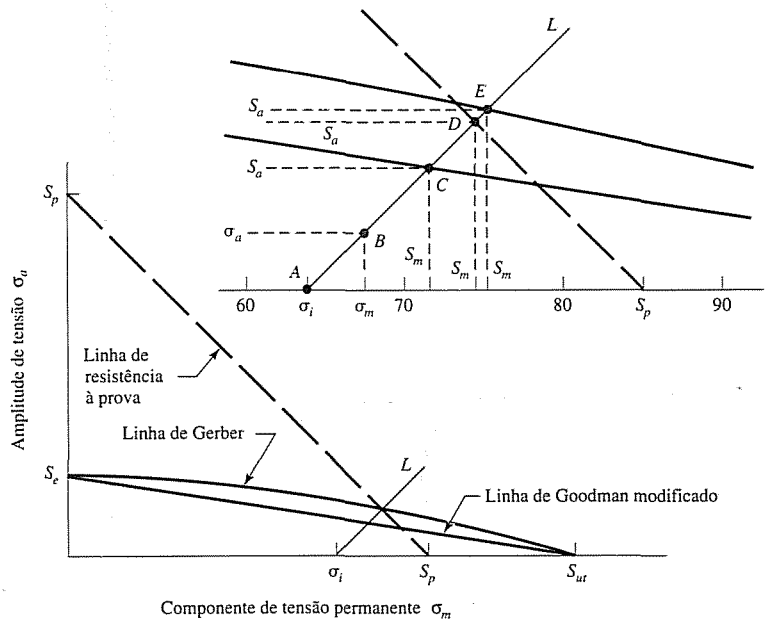


Figura 8-22 Diagrama de fadiga do projetista para parafusos (de porca) pré-carregados, desenhado em escala, mostrando o local geométrico de Goodman modificado, o local geométrico de Gerber e o local geométrico da resistência à prova de Lange, com uma vista expandida da área de interesse. As resistências usadas são $S_p = 85$ kpsi, $S_e = 18{,}6$ kpsi e $S_{ut} = 120$ kpsi. As coordenadas são *A*, $\sigma_i = 63{,}72$ kpsi; *B*, $\sigma_a = 3{,}10$ kpsi, $\sigma_m = 66{,}82$ kpsi; *C*, $S_a = 7{,}55$ kpsi, $S_m = 71{,}29$ kpsi; *D*, $S_a = 10{,}64$ kpsi, $S_m = 74{,}36$ kpsi; *E*, $S_a = 11{,}32$ kpsi, $S_m = 75{,}04$ kpsi.

O fator de segurança deve ser

Resposta
$$n_f = \frac{S_a}{\sigma_a} = \frac{7{,}55}{3{,}10} = 2{,}44$$

Ponto D

Este situa-se na linha de prova em que

$$S_m + S_a = S_p \tag{1}$$

Ademais, a projeção horizontal da linha de carga *AD* é

$$S_m = \sigma_i + S_a \tag{2}$$

Solucionar as Equações (1) e (2) simultaneamente resulta em

$$S_a = \frac{S_p - \sigma_i}{2} = \frac{85 - 63{,}72}{2} = 10{,}64 \text{ kpsi}$$

O fator de segurança resultante, a partir disso, é

Resposta
$$n_p = \frac{S_a}{\sigma_a} = \frac{10{,}64}{3{,}10} = 3{,}43$$

o qual, por certo, é idêntico ao resultado previamente obtido utilizando-se a Equação (8-28).

Uma análise similar de um diagrama de fadiga poderia ter sido feita usando-se a resistência ao escoamento, em vez da resistência à prova. Embora ambas as resistências estejam de certa forma relacionadas, a resistência à prova, em comparação com a resistência ao escoamento, é um indicador muito melhor e mais positivo de um parafuso completamente carregado. Cabe também recordar que os valores de resistência à prova são especificados em normas de projeto; os das resistências ao escoamento, não.

Encontramos $n_f = 2{,}44$ na hipótese de fadiga e na linha de Goodman modificado, além de $n_p = 3{,}43$ na hipótese de resistência à prova. Assim, o perigo de falha é por fadiga, e não por carregamento maior

que o carregamento de prova. Esses dois fatores devem sempre ser comparados para determinar onde se situa o perigo maior.

Ponto E

Para o critério de Gerber, a partir da Equação (8-42),

$$S_a = \frac{1}{2S_e}\left[S_{ut}\sqrt{S_{ut}^2 + 4S_e(S_e + \sigma_i)} - S_{ut}^2 - 2\sigma_i S_e\right]$$

$$= \frac{1}{2(18{,}6)}\left[120\sqrt{120^2 + 4(18{,}6)(18{,}6 + 63{,}72)} - 120^2 - 2(63{,}72)(18{,}6)\right]$$

$$= 11{,}33 \text{ kpsi}$$

Logo, para o critério de Gerber, o fator de segurança é

Resposta

$$n_f = \frac{S_a}{\sigma_a} = \frac{11{,}33}{3{,}10} = 3{,}65$$

o qual é maior que $n_p = 3{,}43$ e contradiz a conclusão anterior de que o perigo de falha era por fadiga. A Figura 8-22 mostra o conflito no local em que o ponto D está situado entre os pontos C e E. Novamente, a natureza conservadora do critério de Goodman explica a discrepância, de modo que o projetista deve formar sua própria conclusão.

8-12 Junções de Cisalhamento

Junções podem e devem ser carregadas em cisalhamento para que os fixadores não recebam tensão adicional além do aperto original. O carregamento de cisalhamento é resistido de duas formas principais:

- A carga de cisalhamento é suportada por fricção entre os membros e garantida pela ação de engastamento dos parafusos de porca ou de calota. Caso essa fricção seja insuficiente, a carga de cisalhamento é suportada por somente dois dos fixadores no padrão. Isso ocorre porque erros no tamanho dos orifícios e na colocação impossibilitam um compartilhamento uniforme da carga de cisalhamento. O problema de análise envolve identificar os dois fixadores que representam o pior caso.
- A carga de cisalhamento é suportada por pinos passantes em orifícios escareados, colocados em ambas as peças durante o aperto, a fim de assegurar alinhamento. As cavilhas carregarão a carga de cisalhamento. Os pinos são freqüentemente afunilados para assegurar um firme assentamento e uma fácil remoção, se necessário.

Quando a cravação de rebites quentes era um método comum de união estrutural, assegurava que os rebites preenchessem cada um dos orifícios totalmente e, por resfriamento, provia uma pré-carga de engastamento. Esse tipo de padrão de rebites pode compartilhar uma carga de cisalhamento.

Essencial à análise de uma junção de cisalhamento é a localização do centro de movimento relativo entre os dois membros. Na Figura 8-23, considere A_1 a A_5 as respectivas áreas de secção transversal de um grupo de cinco pinos ou rebites cravados a quente, ou parafusos de colarinho e porca de ajuste apertado. Sob tal hipótese, o ponto de rotação do pivô situa-se no centróide da distribuição de área de secção transversal dos pinos, rebites ou parafusos de porca. Empregando estática, aprendemos que o centróide G é localizado pelas coordenadas $\bar{x}$ e $\bar{y}$, nas quais x_i e y_i são as distâncias ao centro da i-ésima área:

$$\bar{x} = \frac{A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4x_4 + A_5x_5}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5} = \frac{\sum_1^n A_i x_i}{\sum_1^n A_i}$$

$$\bar{y} = \frac{A_1y_1 + A_2y_2 + A_3y_3 + A_4y_4 + A_5y_5}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5} = \frac{\sum_1^n A_i y_i}{\sum_1^n A_i} \qquad (8\text{-}49)$$

Em muitos exemplos, o centróide pode ser localizado por simetria.

Um exemplo de carregamento excêntrico de fixadores é mostrado na Figura 8-24. É uma peça de estrutura de máquina contendo uma viga sujeita à ação de uma carga de flexão. Nesse caso, tal viga é fixada a membros verticais nas extremidades com parafusos e porcas especialmente preparados para compartilha-

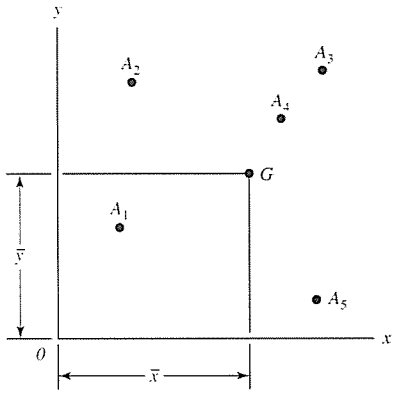


Figura 8-23 Centróide de pino, rebites ou parafusos de porca.

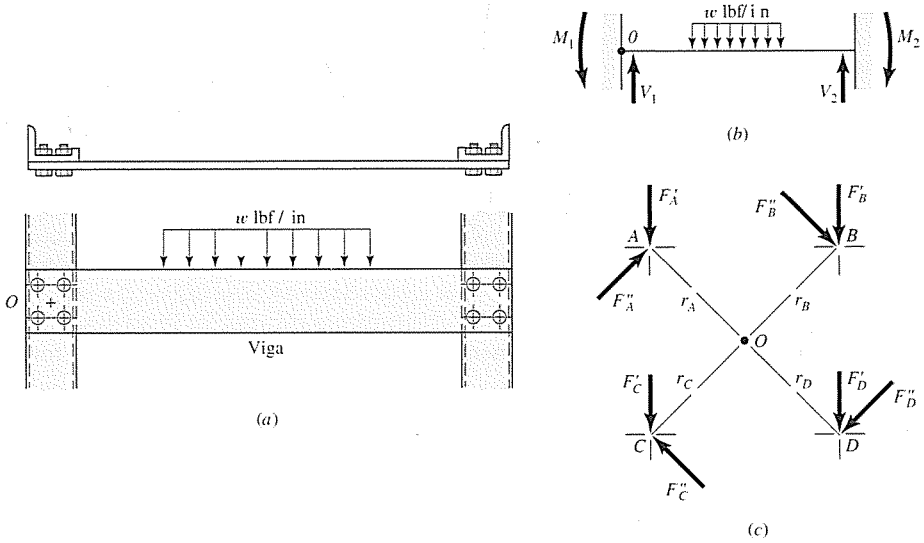


Figura 8-24 (*a*) Viga parafusada com porca em ambas as extremidades, com carga distribuída; (*b*) Diagrama de corpo livre da viga; (*c*) vista aumentada do grupo de parafusos centrados em *O*, mostrando as forças de cisalhamento primária e secundária.

mento de carga. Você reconhecerá a representação esquemática na Figura 8-24(*b*) como uma viga estaticamente indeterminada, com ambas as extremidades engastadas e com reações de momento e forças de cisalhamento (cortante) em cada extremidade.

Por conveniência, os centros dos parafusos de porca da extremidade esquerda da viga são desenhados em uma escala maior na Figura 8-24(*c*). O ponto *O* representa o centróide do grupo, e supõe-se que, nesse exemplo, todos os parafusos de porca sejam do mesmo diâmetro. Observe que as forças ilustradas na Figura 8-24(*c*) são as *forças resultantes* atuando nos pinos, com uma força resultante e um momento igual e oposto às cargas de *reação* V_1 e M_1 atuando em *O*. A carga total recebida por cada parafuso será calculada em três passos. No primeiro passo, o cisalhamento V é dividido igualmente entre os parafusos, de modo que cada parafuso recebe $F' = V_1/n$, com n referindo-se ao número de parafusos de porca no grupo e a força F' sendo denominada *carga direta*, ou *cisalhamento primário.*

Podemos observar que uma distribuição igual de carga direta entre os parafusos de porca supõe um membro absolutamente rígido. O arranjo de tais parafusos ou a forma e o tamanho dos membros algumas vezes justificam o uso de uma outra hipótese quanto à divisão da carga. As cargas diretas F' são mostradas como vetores no diagrama de carregamento (Figura 8-24(*c*)).

A *carga de momento*, ou *cisalhamento secundário*, é a carga adicional em cada parafuso de porca, devido ao momento M_1. Se r_A, r_B, r_C, etc., são as distâncias radiais do centróide ao centro de cada parafuso de porca, o momento e a carga de momento estão relacionados como segue:

$$M_1 = F''_A r_A + F''_B r_B + F''_C r_C + \cdots \qquad (a)$$

em que F'' são as cargas de momento. A força recebida por cada parafuso de porca depende de sua distância radial do centróide; isto é, o parafuso de porca mais distante do centróide recebe a carga maior, ao passo que o parafuso mais próximo recebe a menor. Podemos, portanto, escrever

$$\frac{F''_A}{r_A} = \frac{F''_B}{r_B} = \frac{F''_C}{r_C} \qquad (b)$$

em que, uma vez mais, os diâmetros dos parafusos de porca são considerados iguais. Do contrário, substitui-se F'' na Equação (b) com as tensões de cisalhamento $\tau'' = 4F''/\pi d^2$ para cada parafuso. Solucionando as Equações (a) e (b) simultaneamente, obtemos

$$F''_n = \frac{M_1 r_n}{r_A^2 + r_B^2 + r_C^2 + \cdots} \qquad (8\text{-}50)$$

em que o subscrito n refere-se a um parafuso de porca particular cuja carga está por ser encontrada. Essas cargas de momento são também mostradas como vetores no diagrama de carregamento.

No terceiro passo, as cargas direta e de momento são adicionadas vetorialmente, para obter a carga resultante em cada parafuso de porca. Visto que todos os parafusos ou rebites são geralmente do mesmo tamanho, apenas o parafuso com a carga máxima necessita ser considerado. Quando tal carga é encontrada, a resistência pode ser determinada utilizando-se os vários métodos já descritos.

EXEMPLO 8-6

Exibida na Figura 8-25 está uma barra de aço retangular de 15 mm por 200 mm, sustentada em balanço por um canal de aço de 250 mm usando dois pinos, localizados em E e F, e quatro parafusos de porca, localizados em A, B, C e D.

(a) Na hipótese de uma carga externa permanente de 16 kN, encontre as cargas de cisalhamento nos *pinos*, caso a ação de engastamento falhe.

(b) Experimente aumentar a área do pino F para obter tensões iguais de cisalhamento.

Solução

(a) O ponto O, o centróide das áreas seccionais transversais dos pinos, é encontrado por simetria. Se um diagrama de corpo livre da viga fosse considerado, a reação de cisalhamento V passaria pelo centróide O e a reação de momento ocorreria ao redor dele. As reações são $V = 16$ kN, e o momento é $M = 16(425) = 6800$ N · m. A força primária de cisalhamento F' em cada pino é igual a $V/2 = 16/2 = 8$ kN. As forças secundárias de cisalhamento F'' são também iguais (e opostas), de modo que, a partir da Equação (8-50),

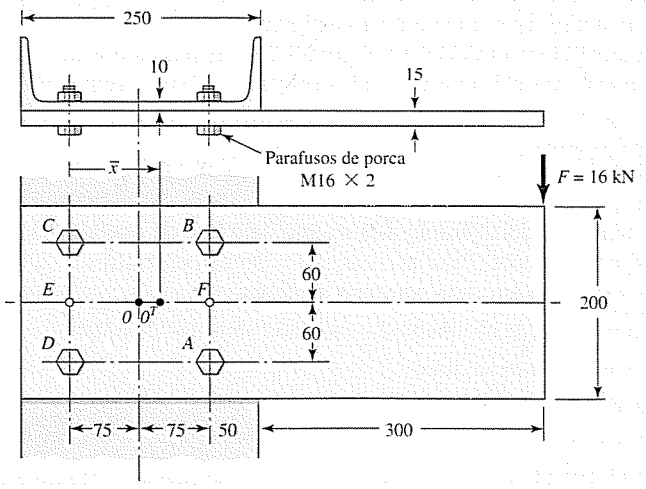


Figura 8-25 Dimensões em milímetros. O' e x̄ são usados na parte (b) do Exemplo 8-6.

$$F'' = \frac{Mr}{2r^2} = \frac{M}{2r} = \frac{6800}{2(75)} = 45{,}33 \text{ kN}$$

fazendo as resultantes (em cada pino) $F_E = 45{,}33 - 8 = 37{,}33$ kN (para cima) e $F_F = 45{,}33 + 8 = 53{,}33$ kN (para baixo).

(*b*) Visto que as forças de pino diferem, o projetista pode desejar trabalhar o mesmo material de pino e considerar aumentar o tamanho de A_F para $A_F = A_E 53{,}33/37{,}33 = 1{,}43A_E$. É instrutivo seguir essa possibilidade, uma vez que representa um exemplo de corpos livres ensinando-nos o que precisamos saber. A partir da Equação (8-49), a distância de E ao centróide $\bar{x}$ é

$$\bar{x} = \frac{A_E(0) + A_F(150)}{A_E + A_F} = \frac{0 + 1{,}43(150)A_E}{A_E + 1{,}43A_E} = \frac{1{,}43(150)}{1 + 1{,}43} = 88{,}3 \text{ mm}$$

A nova reação de momento ao redor do novo ponto de pivô O' é $M = 16(61{,}7 + 350) = 6587$ N · m, e a reação de cisalhamento é ainda de 16 kN. As reações totais em E e F podem ser encontradas tomando-se os momentos em relação a O' e somando-se as forças verticalmente. As equações são

$$88{,}3F_E + 61{,}7F_F = 6587$$

$$-F_E + F_F = 16$$

e, a partir daí, a solução simultânea para F_E e F_F produz

$$F_E = 37{,}33 \text{ kN}$$

$$F_F = 53{,}33 \text{ kN}$$

As reações não mudaram. (Por quê?) As tensões de cisalhamento nas secções transversais do pino são

$$\tau_E = \frac{F_E}{A_E} = \frac{37{,}3}{A_E}$$

$$\tau_F = \frac{F_F}{A_F} = \frac{F_F}{1{,}43A_E} = \frac{53{,}33}{1{,}43A_E} = \frac{37{,}3}{A_E}$$

As tensões são iguais, e a meta foi alcançada.

No Exemplo 8-6, o papel dos quatros parafusos de porca é manter a junção unida. Uma pré-carga de 0,6 da carga de prova aproxima-se do limite inferior; cerca de 0,75 dessa carga de prova seria melhor. Os parafusos de porca não experimentam carga alguma de cisalhamento, e os pinos a carregam.

Se os pinos forem omitidos na Figura 8-25 e as hastes dos quatro parafusos de porca forem encaixadas apertadamente nos orifícios alargados (escareados), poderemos proceder como no Exemplo 8-7.

EXEMPLO 8-7

A situação é similar à do Exemplo 8-6, exceto pelo fato de que não há pinos e os parafusos de porca são encaixados apertadamente. Para uma carga $F = 16$ kN, encontre

(*a*) A carga resultante em cada parafuso de porca.

(*b*) A tensão máxima de cisalhamento em cada parafuso de porca.

(*c*) A tensão de suporte máxima.

(*d*) A tensão de flexão crítica na barra.

Solução

(*a*) O ponto O, o centróide do grupo de parafusos de porca na Figura 8-25, é encontrado por simetria. Se o diagrama de corpo livre da viga fosse construído, a reação de cisalhamento V passaria por O e as reações de momento M ocorreriam ao seu redor. Essas reações são

$$V = 16\text{ kN} \qquad M = 16(425) = 6800\text{ N} \cdot \text{m}$$

Na Figura 8-26, o grupo de parafusos foi desenhado em uma escala maior e as reações são mostradas. A distância do centróide até o centro de cada parafuso é

$$r = \sqrt{(60)^2 + (75)^2} = 96{,}0\text{ mm}$$

A carga de cisalhamento primária por parafuso é

$$F' = \frac{V}{n} = \frac{16}{4} = 4\text{ kN}$$

Visto que as forças de cisalhamento secundárias são iguais, a Equação (8-50) torna-se

$$F'' = \frac{Mr}{4r^2} = \frac{M}{4r} = \frac{6800}{4(96{,}0)} = 17{,}7\text{ kN}$$

As forças de cisalhamento primária e secundária são traçadas em escala na Figura 8-26, e as resultantes são obtidas empregando-se a regra do paralelogramo. As magnitudes são encontradas, por medida (ou análise), como

Resposta $$F_A = F_B = 21{,}0\text{ kN}$$

Resposta $$F_C = F_D = 14{,}8\text{ kN}$$

(*b*) Os parafusos *A* e *B* são cruciais porque carregam a carga de cisalhamento maior. Esse cisalhamento atua na porção rosqueada do parafuso de porca ou na porção não-rosqueada? O comprimento de tal parafuso será de 25 mm mais a altura da porca, mais cerca de 2 mm para uma arruela. A Tabela A-31 fornece a altura da porca como de 14,8 mm. Incluindo duas roscas além da porca, isso totaliza um comprimento de 43,8 mm, de modo que um parafuso com comprimento de 46 mm será necessário. A partir da Equação (8-14), computamos o comprimento de rosca como $L_T = 38$ mm. Assim, a porção não-rosqueada do parafuso tem 46 – 38 = 8 mm de comprimento. Esse comprimento é inferior aos 15 mm para a placa na Figura 8-25, e, dessa forma, o parafuso tenderá a cisalhar de um lado a outro de seu diâmetro menor. Portanto, a área de tensão de cisalhamento é $A_s = 144\text{ mm}^2$ e, conseqüentemente, a tensão de cisalhamento é

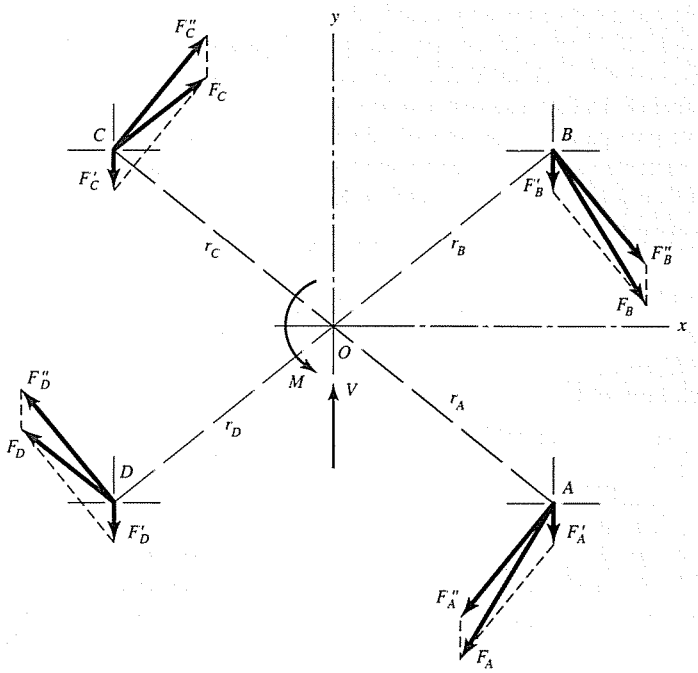


Figura 8-26

Resposta
$$\tau = \frac{F}{A_s} = -\frac{21{,}0(10)^3}{144} = 146 \text{ MPa}$$

(*c*) O canal é mais fino que a barra, de modo que a tensão de apoio maior deve-se à pressão do parafuso contra a alma do canal. A área de apoio é $A_b = t_d = 10(16) = 160 \text{ mm}^2$. Logo, a tensão de apoio é

Resposta
$$\sigma = -\frac{F}{A_b} = -\frac{21{,}0(10)^3}{160} = -131 \text{ MPa}$$

(*d*) A tensão de flexão crucial na barra supõe-se que deva ocorrer em uma secção paralela ao eixo *y* e por meio dos parafusos *A* e *B*. Nessa secção, o momento flexor é

$$M = 16(300 + 50) = 5600 \text{ N} \cdot \text{m}$$

O segundo momento de área através dessa secção é obtido pelo uso da fórmula de transferência, como segue:

$$= I_{\text{barra}} - 2(I_{\text{orifício}} + \bar{d}^2 A)$$
$$= \frac{15(200)^3}{12} - 2\left[\frac{15(16)^3}{12} + (60)^2(15)(16)\right] = 8{,}26(10)^6 \text{ mm}^4$$

Então,

Resposta
$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{5600(100)}{8{,}26(10)^6}(10)^3 = 67{,}8 \text{ MPa}$$

8-13 Parafusos de Retenção

Diferentemente dos parafusos de porca e dos de calota, que, para desenvolver uma força de engastamento, dependem da tração, para o mesmo propósito os parafusos de retenção dependem da compressão. A resistência ao movimento axial do colar ou do cubo relativa ao eixo é denominada *capacidade de sustentação*. Essa capacidade, que é realmente uma resistência de força, deve-se à resistência friccional das porções contactantes do colar e do eixo tanto quanto de qualquer leve penetração do parafuso de retenção nesse eixo.

A Figura 8-27 apresenta os tipos de pontas disponíveis com os parafusos de retenção de encaixe (soquete). Estes também são manufaturados com fendas de chave de fenda e com cabeças quadradas.

A Tabela 8-18 lista valores do torque de assentamento (instalação) e a capacidade de sustentação correspondente para parafusos de retenção de séries em polegadas. Os valores listados aplicam-se tanto à capacidade de sustentação axial, para resistência a esforço axial, quanto à capacidade de sustentação tangencial, para resistência à torção. Os fatores típicos de segurança vão de 1,5 a 2,0 para cargas estáticas e de 4 a 8 para várias cargas dinâmicas.

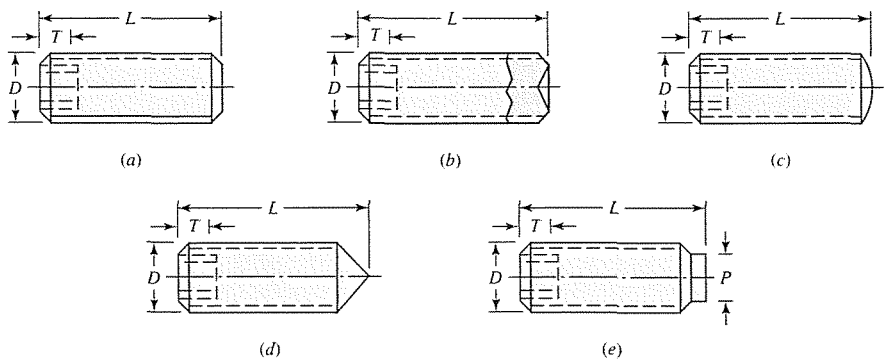


Figura 8-27 Parafusos de retenção de encaixe (soquete): (*a*) ponta plana; (*b*) ponta de taça; (*c*) ponta oval; (*d*) ponta de cone; (*e*) ponta de meio grampo.

Tabela 8-18 Capacidade de sustentação típica (força) para parafusos de retenção de encaixe (soquete)*

Tamanho, in	Torque de assentamento lbf · in	Capacidade de sustentação, lbf
#0	1,0	50
#1	1,8	65
#2	1,8	85
#3	5	120
#4	5	160
#5	10	200
#6	10	250
#8	20	385
#10	36	540
$\frac{1}{4}$	87	1000
$\frac{5}{16}$	165	1500
$\frac{3}{8}$	290	2000
$\frac{7}{16}$	430	2500
$\frac{1}{2}$	620	3000
$\frac{9}{16}$	620	3500
$\frac{5}{8}$	1325	4000
$\frac{3}{4}$	2400	5000
$\frac{7}{8}$	5200	6000
1	7200	7000

Fonte: Unbrako Division, SPS Technologies, Jenkintown, Pa.

* Baseado em parafuso de aço liga contra eixo de aço, roscas finas ou comuns da classe 3A em orifícios da classe 2B e parafusos de retenção de encaixe de ponta de taça.

Parafusos de retenção devem ter um comprimento de cerca de metade do diâmetro do eixo. Observe que essa prática também provê uma regra bruta para a espessura radial de um colar ou cubo.

8-14 Chavetas e Pinos

Chavetas e pinos são usados em eixos para segurar elementos rotantes, tais como engrenagens, polias ou outras rodas. As chavetas são utilizadas para habilitar a transmissão de torque do eixo ao elemento por este suportado. Os pinos são empregados para posicionamento axial e para a transferência de torque ou empuxo (força axial), ou para ambos.

A Figura 8-28 mostra várias chavetas e pinos. Pinos são úteis quando o carregamento principal é cisalhamento e quando torção e empuxo estão presentes. Pinos cônicos (afunilados) são dimensionados de acordo com o diâmetro na extremidade maior. Alguns dos tamanhos mais úteis destes estão listados na Tabela 8-19. O diâmetro na extremidade menor é

$$d = D - 0{,}0208L \tag{8-51}$$

em que d = diâmetro na extremidade menor, in
D = diâmetro na extremidade maior, in
L = comprimento, in

Para aplicações menos importantes, um pino de cavilha ou de guia pode ser usado. Muitos desses pinos podem ser encontrados nos catálogos de fabricantes.[10]

[10] Ver também Joseph E. Shigley, "Unthreaded Fasteners", Cap. 22, em Joseph Shigley e Charles R. Mischke (eds), *Standard Handbook of Machine Design*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1996.

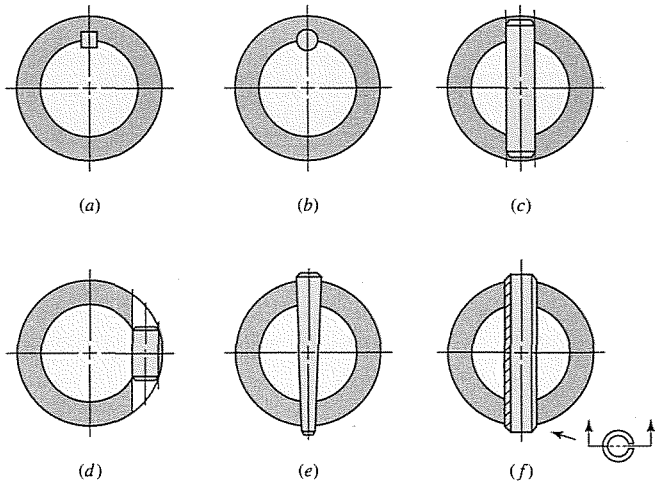


Figura 8-28 (*a*) Chaveta quadrada; (*b*) chaveta redonda; (*c* e *d*) pinos redondos; (*e*) pino cônico; (*f*) pino de mola tubular partido. Os pinos nas partes (*e*) e (*f*) são mostrados mais compridos que o necessário, para ilustrar o chanfro nas extremidades, mas seus comprimentos devem ser mantidos menores que os diâmetros de cubo, a fim de prevenir ferimentos decorrentes das projeções de peças rotantes.

Tabela 8-19 Dimensões na extremidade maior de alguns pinos cônicos normalizados – série em polegadas

	Comercial		Precisão	
Tamanho	Máximo	Mínimo	Máximo	Mínimo
4/0	0,1103	0,1083	0,1100	0,1090
2/0	0,1423	0,1403	0,1420	0,1410
0	0,1573	0,1553	0,1570	0,1560
2	0,1943	0,1923	0,1940	0,1930
4	0,2513	0,2493	0,2510	0,2500
6	0,3423	0,3403	0,3420	0,3410
8	0,4933	0,4913	0,4930	0,4920

A chaveta quadrada, mostrada na Figura 8-28(*a*), também se encontra disponível em tamanhos retangulares. Tamanhos padronizados dessas chavetas, junto com o intervalo de diâmetros aplicáveis de eixo, estão listados na Tabela 8-20. O comprimento da chaveta é baseado no comprimento do cubo e na carga de torção a ser transferida.

A chaveta cabeça de quilha, na Figura 8-29, é afunilada de tal forma que, quando firmemente guiada, atua para prevenir movimento axial relativo. Isso também provê a vantagem de que a posição do cubo pode ser ajustada para a melhor localização axial. A cabeça torna a remoção possível sem o acesso à outra extremidade, mas a projeção pode ser arriscada.

Também ilustrado na Figura 8-29(*a*) está o rasgo de chaveta na forma de esqui de trenó. Esse rasgo apresenta menor concentração de tensão do que um rasgo de chaveta de extremidade fresada.

A chaveta Woodruff, mostrada na Figura 8-29(*b*), é de utilidade geral, especialmente quando uma roda está para ser posicionada contra um ressalto (ou colarinho) de eixo, visto que o rasgo de chaveta não necessita ser usinado na região de concentração de tensão do ressalto. O uso da chaveta Woodruff também apresenta melhor concentricidade após montagem da roda e do eixo. Isso é especialmente importante a altas velocidades, como, por exemplo, com uma roda de turbina e eixo. Dimensões para alguns tamanhos de chavetas padronizadas Woodruff podem ser encontrados na Tabela 8-21, e a Tabela 8-22 apresenta os diâmetros de eixo aos quais as diferentes larguras de assento de chaveta são adequadas.

Tabela 8-20 Dimensões em polegadas para algumas aplicações de chavetas normalizadas quadradas e retangulares

Diâmetro de eixo		Tamanho de chaveta		
Acima	Até (inclusive)	w	h	Profundidade de rasgo de chaveta
$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{3}{64}$
$\frac{7}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{3}{64}$
		$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
$\frac{9}{16}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
		$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{32}$
$\frac{7}{8}$	$1\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{32}$
		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
$1\frac{1}{4}$	$1\frac{3}{8}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
		$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{32}$
$1\frac{3}{8}$	$1\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
		$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
$1\frac{3}{4}$	$2\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$2\frac{1}{4}$	$2\frac{3}{4}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{7}{32}$
		$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{16}$
$2\frac{3}{4}$	$3\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
		$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$

Fonte: Joseph E. Shigley, "Unthreaded Fasteners", Cap. 22, em Joseph E. Shigley e Charles R. Mischke (eds.), *Standard Handbook of Machine Design*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1996.

Os valores dos fatores de concentração de tensão para rasgos de chaveta dependem do raio do filete no fundo e das extremidades do rasgo de chaveta, segundo Peterson.[11] Para filetes cortados por cortadores padronizados de máquinas de fresa, os diagramas de Peterson fornecem $K_t = 2{,}14$ para flexão e $K_{ts} = 2{,}62$ para torção. Esses valores são para assentos de chaveta de extremidade fresada, os quais permitem posicionamento longitudinal de chaveta definitivo. Em flexão, o assento em forma de esqui de trenó terá menos concentração de tensão. Os valores de K_t para rasgo de chaveta de esqui de trenó são baseados nos valores totais de I e J para grupo de eixos; isto é, os momentos de segundo (de inércia) não são reduzidos pelas dimensões da fenda. Outros resultados relatados são 1,79 para um rasgo de chaveta de extremidade fresada e 1,38 para o tipo de esqui de trenó.

O emprego de ajustes de contração elimina o uso de chavetas para transmitir torque. Esses ajustes foram discutidos na Seção 2-6, e os dados correspondentes estão listados nas Tabelas A-11 a A-14. Peterson relata $K_f = 2{,}0$ para flexão em cada extremidade de um colar ajustado à pressão. Ensaios parecem indicar que a pressão de interface tem pouco efeito sobre K_t. Contudo, a corrosão de roçamento introduz uma complicação.

Um anel de retenção é freqüentemente usado em vez de um ressalto de eixo, ou de uma manga, para posicionar axialmente uma componente em um eixo ou em um orifício de alojamento. Como mostrado na Figura 8-30, uma ranhura é cortada no eixo ou orifício para receber o retentor de mola. O projeto cônico de ambos os anéis interno e externo assegura pressão uniforme contra o fundo dessa ranhura. Para tamanhos, dimensões e classificações, os catálogos de fabricantes devem ser consultados.

[11] R. E. Peterson, *Stress Concentration Factors*, Wiley, New York, 1974, p. 245, 266, 267.

Tabela 8-21 Dimensões de chavetas Woodruff – série em polegadas

Tamanho de chaveta		Altura	Excentricidade	Profundidade de assento de chaveta	
W	*D*	*b*	*e*	Eixo	Cubo
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	0,109	$\frac{1}{64}$	0,0728	0,0372
$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{8}$	0,172	$\frac{1}{64}$	0,1358	0,0372
$\frac{3}{32}$	$\frac{3}{8}$	0,172	$\frac{1}{64}$	0,1202	0,0529
$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{2}$	0,203	$\frac{3}{64}$	0,1511	0,0529
$\frac{3}{32}$	$\frac{5}{8}$	0,250	$\frac{1}{16}$	0,1981	0,0529
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	0,203	$\frac{3}{64}$	0,1355	0,0685
$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	0,250	$\frac{1}{16}$	0,1825	0,0685
$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	0,313	$\frac{1}{16}$	0,2455	0,0685
$\frac{5}{32}$	$\frac{5}{8}$	0,250	$\frac{1}{16}$	0,1669	0,0841
$\frac{5}{32}$	$\frac{3}{4}$	0,313	$\frac{1}{16}$	0,2299	0,0841
$\frac{5}{32}$	$\frac{7}{8}$	0,375	$\frac{1}{16}$	0,2919	0,0841
$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{4}$	0,313	$\frac{1}{16}$	0,2143	0,0997
$\frac{3}{16}$	$\frac{7}{8}$	0,375	$\frac{1}{16}$	0,2763	0,0997
$\frac{3}{16}$	1	0,438	$\frac{1}{16}$	0,3393	0,0997
$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{8}$	0,375	$\frac{1}{16}$	0,2450	0,1310
$\frac{1}{4}$	1	0,438	$\frac{1}{16}$	0,3080	0,1310
$\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{4}$	0,547	$\frac{5}{64}$	0,4170	0,1310
$\frac{5}{16}$	1	0,438	$\frac{1}{16}$	0,2768	0,1622
$\frac{5}{16}$	$1\frac{1}{4}$	0,547	$\frac{5}{64}$	0,3858	0,1622
$\frac{5}{16}$	$1\frac{1}{2}$	0,641	$\frac{7}{64}$	0,4798	0,1622
$\frac{3}{8}$	$1\frac{1}{4}$	0,547	$\frac{5}{64}$	0,3545	0,1935
$\frac{3}{8}$	$1\frac{1}{2}$	0,641	$\frac{7}{64}$	0,4485	0,1935

Tabela 8-22 Tamanhos de chavetas Woodruff apropriados para vários diâmetros de eixo

Largura de assento de chaveta	Diâmetro de eixo, in	
	De	Até (inclusive)
$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{32}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{8}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$1\frac{1}{2}$
$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{2}$	$1\frac{5}{8}$
$\frac{3}{16}$	$\frac{9}{16}$	2
$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{16}$	$2\frac{1}{4}$
$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{4}$	$2\frac{3}{8}$
$\frac{3}{8}$	1	$2\frac{5}{8}$

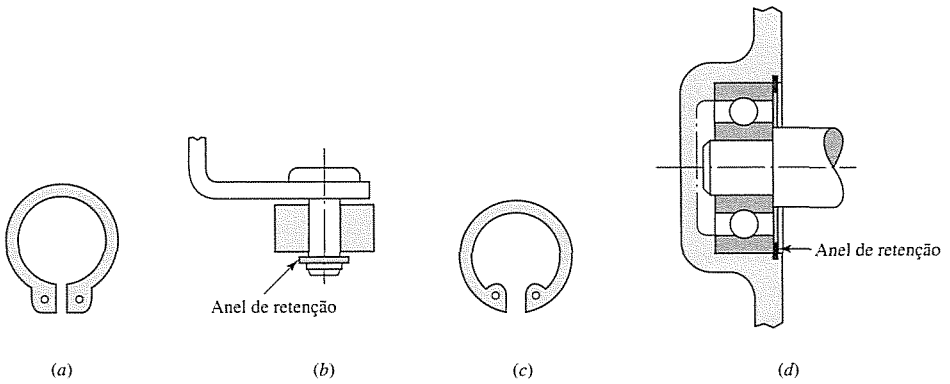


Figura 8-30 Usos típicos para anéis de retenção. (*a*) Anel externo e (*b*) sua aplicação; (*c*) anel interno e (*d*) sua aplicação.

EXEMPLO 8-8

Um eixo de aço UNS G10350, tratado termicamente para uma resistência ao escoamento mínima de 75 kpsi, tem um diâmetro de $1\frac{7}{16}$ *in. O eixo roda a 600 rpm e transmite 40 hp por uma engrenagem. Selecione uma chaveta apropriada para essa engrenagem.*

Solução

Uma chaveta quadrada de $\frac{3}{8}$ in é selecionada, com aço UNS G10200 repuxado a frio sendo usado. O projeto será baseado em resistência ao escoamento de 65 kpsi. Um fator de segurança de 2,80 será empregado na ausência de informação exata acerca da natureza da carga.

O torque é obtido da equação de potência

$$T = \frac{63\,025H}{n} = \frac{(63\,025)(40)}{600} = 4200 \text{ lbf} \cdot \text{in}$$

A partir da Figura 8-31, a força F na superfície do eixo é

$$F = \frac{T}{r} = \frac{4200}{1{,}4375/2} = 5850 \text{ lbf}$$

Pela teoria da energia de distorção, a resistência ao cisalhamento é

$$S_{sy} = 0{,}577S_y = (0{,}577)(65) = 37{,}5 \text{ kpsi}$$

A falha por cisalhamento através da área ab criará uma tensão de $\tau = F/tl$. Substituindo a resistência dividida pelo fator de segurança por τ, obtemos

$$\frac{S_{sy}}{n} = \frac{F}{tl} \quad \text{ou} \quad \frac{37{,}5(10)^3}{2{,}80} = \frac{5850}{0{,}375l}$$

ou $l = 1{,}16$ in. Para resistir ao esmagamento, a área de uma metade da face da chaveta é usada:

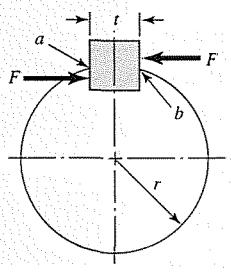


Figura 8-31

$$\frac{S_y}{n} = \frac{F}{tl/2} \quad \text{ou} \quad \frac{65(10)^3}{2{,}80} = \frac{5850}{0{,}375l/2}$$

e $l = 1{,}34$ in. O comprimento do cubo de uma engrenagem é geralmente maior que o diâmetro do eixo, para estabilidade. Se a chaveta, neste exemplo, fosse feita igual em comprimento ao cubo, conseqüentemente teria ampla resistência, visto que provavelmente seria $1\frac{7}{16}$ in ou mais comprida.

Pinos Soltos

Em algumas aplicações, um pino não tem ajuste apertado em seus orifícios, mas está folgado o suficiente para permitir movimento. Um exemplo disso é um pino de charneira para carros de ferrovia ou engates de locomotiva, como visto na Figura 8-32. Tal pino está frouxo o suficiente para permitir a rotação desimpedida da charneira, mesmo na presença de sujeira e ferrugem. O Problema 4-27 apresentou um exercício sobre as tensões de cisalhamento e flexão presentes em um pino (em forma de U) de montagem folgada, sugerindo dois métodos de análise. Empregando um modelo similar, o comprimento efetivo do vão de viga, a partir da Figura 8-32, é

$$l = \frac{2{,}25}{2} + 2{,}25 + 3{,}75 + 2{,}25 + \frac{2{,}25}{2} = 10{,}5 \text{ in}$$

A distância desde a reação de topo até o carregamento de flexão concentrado de topo é $(a + b)/2 = 2{,}25$ in. O maior momento flexor na viga é estimado como

$$M_{\max} = \frac{F}{2}(2.25) = 1{,}125F$$

A tensão de flexão associada σ e a tensão de von Mises σ'_b são

$$\sigma'_b = \sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{32M}{\pi d^3} = \frac{32(1{,}125F)}{\pi(1{,}625^3)} = 2{,}67F$$

A tensão de cisalhamento decorrente de cisalhamento duplo nos planos de separação de cisalhamento (nas superfícies de topo e fundo da charneira) é

$$\tau_{\max} = \frac{4V}{3A} = \frac{4}{3}\frac{V}{\pi d^2/4} = \frac{4}{3}\frac{F/2}{\pi(1{,}625^2)/4} = 0{,}321F$$

A tensão associada de von Mises é $\sigma'_s = \sqrt{3}\tau_{\max} = 0{,}556F$. A razão é

$$\frac{\sigma'_b}{\sigma'_s} = \frac{2{,}67}{0{,}556} = 4{,}8$$

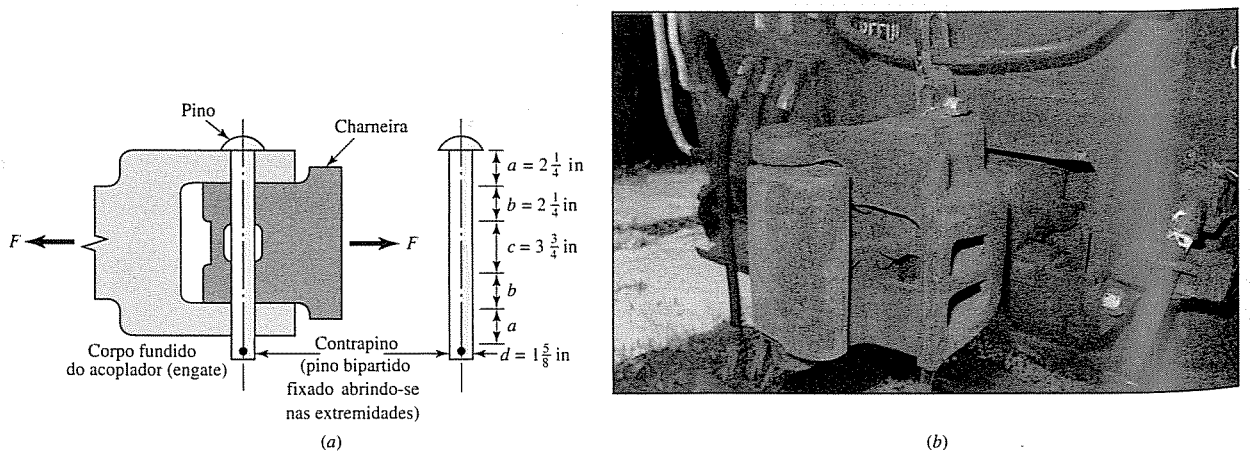


Figura 8-32 Engate de carro de frete (carga) da *National AAR E* e alguns detalhes geométricos.

Vagões de carga, incluindo sistemas de engate, são projetados para tolerar uma carga F grande. A história da força batente F não é conhecida, mas se o pino falhar em fadiga de flexão, em vez de em fadiga de cisalhamento, a localização e o caráter da falha revelarão onde a tensão é maior. Nesse expediente, o pino falhou em flexão, em uma secção cerca de $3\frac{1}{2}$ in abaixo de sua cabeça.[12] Claramente, esse não é um plano de separação de cisalhamento. Nossa análise precedente indica uma tensão de von Mises 4,8 vezes maior decorrente da flexão, e não do cisalhamento. Sempre investigue a flexão com pinos soltos. Além disso, um parafuso de porca em uma junção de cisalhamento é solto em seu orifício de modo a possibilitar fácil montagem da junção. Se for permitido aos parafusos de porca suportar a carga de cisalhamento em seus corpos, eles estarão em situação similar à do pino de charneira. Os parafusos de porca são poupados de "ver" um tal carregamento por fricção em decorrência do engastamento provido pelo aperto inicial, ou provendo-se pinos apertados para suportar a carga de cisalhamento, tendo em vista proteger a junção caso a fricção falhe ao suportar a carga.

8-15 Considerações Estocásticas

Os dados disponíveis para analisar o desempenho estatístico de junções parafusadas são tão poucos e encontram-se tão dispersos que uma análise confiável é difícil de ser feita. Os métodos das Partes 1 e 2 deste livro podem ser empregados para realizar a análise quando dados estiverem disponíveis.

Uma das variáveis aleatórias necessárias é a resistência à tração. As normas especificam somente o valor mínimo. A Figura 8-17 ilustra dados para uma série de ensaios que podem ser empregados como um guia. Para tais ensaios, a probabilidade de que $\mathbf{S}_{ut}$ iguale-se ou exceda às especificações mínimas funciona em 99,2% dos casos.

Uma outra variável aleatória que poderia ser desejada é a resistência de prova $\mathbf{S}_p$. Os dados das Tabelas 8-13 e 8-14 oferecem de fato alguma ajuda na variável de pré-carga $\mathbf{F}_i$. Os coeficientes de variação acabam sendo $C_{Fi} = 0{,}143$ para parafusos de porca não-lubrificados e 0,084 para parafusos de porca lubrificados.

A linha de Goodman modificado será de pouco valor ao analisarmos o desempenho estatístico de junções parafusadas, pois sempre está no lado conservador dos pontos de falha. Portanto, uma teoria não-linear, tal como a teoria parabólica de Gerber, faz-se necessária. A Equação (8-43) revela que a determinação da variante de resistência média $\mathbf{S}_a$ é muito complexa para a teoria de Gerber. Uma solução computacional pode ser o caminho a seguir.

O exemplo seguinte ilustra o emprego de estatística para uma investigação simples de pré-carga.

EXEMPLO 8-9

Um parafuso de porca de $\frac{3}{8}$ in-24 UNF, grau 5 da SAE, é lubrificado e então apertado a uma especificação de chave de torque de 450 lbf · in. Isso corresponde a uma pré-carga de 90% da resistência de prova. [Ver Equação (8-30).] Os dados no rodapé da Tabela 8-14 mostram que o coeficiente de variação dessa pré-carga é $C_{Fi} = 2{,}88/34{,}18 = 0{,}0843$. Supondo distribuições normais e $C_{Sp} = 0{,}08$:

(*a*) Encontre a média e o desvio-padrão da tração do parafuso de porca.

(*b*) Qual é a probabilidade de que a resistência à prova seja excedida?

Solução

A partir da Tabela 8-2, $A_t = 0{,}087\,8$ in^2; a partir da Tabela 8-15, $K = 0{,}18$; e, a partir da Tabela 8-9, a resistência mínima à prova, com base em uma confiabilidade de 99%, é $(S_p)_{0{,}99} = 85$ kpsi.

(*a*) A partir da Equação (8-27),

$$\bar{F}_i = \frac{\bar{T}}{Kd} = \frac{450}{0{,}18\,(0{,}375)} = 6667 \text{ lbf}$$

e

$$\hat{\sigma}_{Fi} = C_{Fi} F_i = 0{,}084(6667) = 560 \text{ lbf}$$

[12] A parte inferior do pino caiu no leito da ferrovia, a parte superior rebotou, o engate arrancou e o trem partiu; os freios de emergência automaticamente se acionaram, e os funcionários da ferrovia colocaram um novo pino. As duas partes do antigo pino foram encontradas cerca de 4,5 m uma da outra. Elas não haviam sido encontradas antes porque o incidente ocorrera à noite e ambas estavam embaixo do trem, na parte de trás.

Resposta Logo, $\mathbf{F}_i = \mathbf{N}(6667, 560)$ lbf. A tensão correspondente é

$$\boldsymbol{\sigma}_i = \frac{\mathbf{F}_i}{A_t} = \frac{\mathbf{N}(6{,}667,\ 0{,}560)}{0{,}0878} = \mathbf{N}(75{,}9,\ 6{,}38)\ \text{kpsi}$$

Para determinar a probabilidade de que a resistência à prova seja excedida, necessitamos interferir em σ_i com $\mathbf{S}_p$. A média é determinada, a partir da Equação (2-16), como

$$\bar{S}_p = \frac{(S_p)_{0,99}}{1 + z_{0,99}C_{Sp}} = \frac{85}{1 + (-2{,}326)(0{,}08)} = 104{,}4\ \text{kpsi}$$

O desvio-padrão é $\hat{\sigma}_{Sp} = C_{Sp}\bar{S}_p = 0{,}08(104{,}4) = 8{,}35$ kpsi. A partir da Equação (6-54),

$$z = -\frac{\bar{S}_p - \bar{\sigma}_i}{\left(\hat{\sigma}_{Sp}^2 + \hat{\sigma}_{\sigma i}^2\right)^{1/2}} = -\frac{104{,}4 - 75{,}9}{(8{,}35^2 + 6{,}38^2)^{1/2}} = -2{,}71$$

Resposta A partir da Tabela A-10, $\Phi = 0{,}00336$. Logo, a probabilidade de que um único parafuso de porca esteja pré-carregado acima da resistência de prova é de 0,34%.

PROBLEMAS

ANÁLISE **8-1** Um parafuso de potência tem 25 mm de diâmetro e um passo de rosca de 5 mm.

(*a*) Encontre a profundidade e a largura de rosca, os diâmetros médio e de raiz, bem como o avanço, sabendo que roscas quadradas são usadas.

(*b*) Repita para roscas Acme.

ANÁLISE **8-2** Utilizando a informação de rodapé da Tabela 8-1, mostre que a área de tensão de tração é

$$A_t = \frac{\pi}{4}(d - 0{,}938\ 194p)^2$$

ANÁLISE **8-3** Mostre que, para fricção zero de colar, a eficiência de um parafuso de rosca quadrada é dada pela equação

$$e = \tan\lambda \frac{1 - f\tan\lambda}{\tan\lambda + f}$$

Trace uma curva da eficiência para ângulos de avanço de até 45°. Use $f = 0{,}08$.

ANÁLISE **8-4** Um parafuso de potência de 25 mm de rosqueado único tem diâmetro de 25 mm, com um passo de 5 mm. Uma carga vertical nesse parafuso alcança um máximo de 6 kN. Os coeficientes de fricção são 0,05 para o colar e 0,08 para as roscas. O diâmetro friccional do colar é de 40 mm. Encontre a eficiência global e o torque para "elevar" e "baixar" a carga.

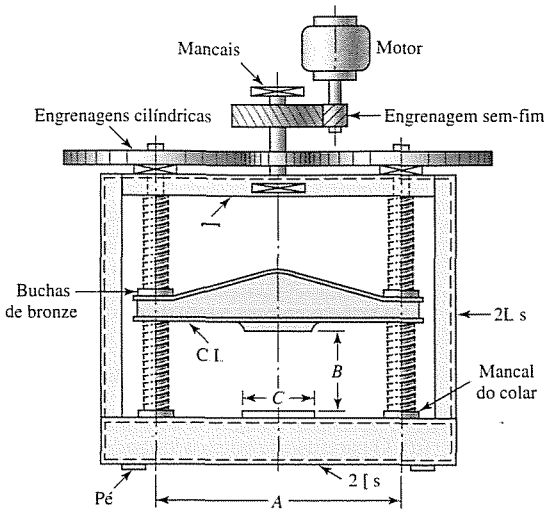
ANÁLISE **8-5** A máquina mostrada na figura pode ser usada para um ensaio de tração, mas não para um de compressão. Por quê? Podem ambos os parafusos ter a mesma mão?

ANÁLISE **8-6** A prensa mostrada no Problema 8-5 apresenta uma carga nominal de 5000 lbf. Os parafusos gêmeos têm roscas Acme, um diâmetro de 3 in e um passo de $\frac{1}{2}$ in. Os coeficientes de fricção são 0,05 para as roscas e 0,06 para os mancais de colar. Os diâmetros de colar são de 5 in. As engrenagens têm uma eficiência de 95% e uma razão de velocidade de 75:1. Uma embreagem de escorregamento, no eixo do motor, impede a sobrecarga. A velocidade do motor à carga total é de 1720 rpm.

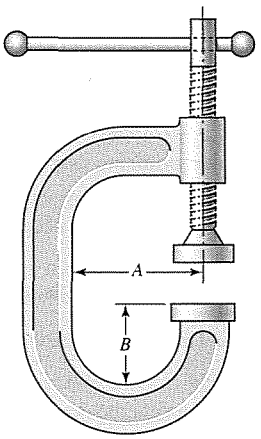
(*a*) Quando o motor for ligado, quão rapidamente a cabeça de prensa se moverá?

(*b*) Qual deve ser a potência nominal do motor?

ANÁLISE **8-7** Uma prensa de parafuso similar à mostrada na figura tem uma manivela (barra circular de extremidades esféricas) com diâmetro de $\frac{3}{16}$ in feita de aço AISI 1006 repuxado a frio. O comprimento total é de 3 in. O parafuso é de $\frac{7}{16}$ in-14UNC e apresenta comprimento total de $5\frac{3}{4}$ in. A distância A é de 2 in. A prensa acomodará peças de até $4\frac{3}{16}$ in de altura.



Problema 8-5



Problema 8-7

(*a*) Que torque de parafuso fará a manivela fletir permanentemente?

(*b*) Que força de prensa a resposta para (*a*) causará se a fricção de colar for insignificante e se a fricção de rosca for de 0,075?

(*c*) Que força de prensa fará o parafuso flambar?

(*d*) Existem outras tensões ou possíveis falhas a serem verificadas?

ANÁLISE **8–8** A prensa em C mostrada na figura do Problema 8-7 utiliza uma rosca Acme de $\frac{5}{8}$ in-6. Os coeficientes friccionais são 0,15 para as roscas e o colar. O colar, que neste caso é o suporte giratório do golpeador de bigorna, tem um diâmetro de fricção de $\frac{7}{16}$ in. Os cálculos devem ser baseados na força máxima de 6 lbf aplicada à manivela, a um raio de $2\frac{3}{4}$ in da linha de centro do parafuso. Encontre a força de retenção.

ANÁLISE **8–9** Encontre a potência requerida para acionar um parafuso de potência de 40 mm tendo roscas quadradas duplas com um passo de 6 mm. A porca deve se mover a uma velocidade de 48 mm/s, bem como mover uma carga $F = 10$ kN. Os coeficientes friccionais são 0,10 para as roscas e 0,15 para o colar. O diâmetro friccional desse útltimo é de 60 mm.

8–10 Um parafuso de potência de uma única rosca quadrada apresenta uma potência de entrada de 3 kW a uma velocidade de 1 r/s. O parafuso tem um diâmetro de 36 mm e um passo de 6 mm. Os coeficientes friccionais são 0,14 para as roscas e 0,09 para o colar, com um raio de fricção desse último de 45 mm. Encontre a carga resistente axial F e a eficiência combinada do parafuso e do colar.

ANÁLISE **8–11** Uma junção parafusada com porca deve ter um agarramento consistindo em duas placas de aço de $\frac{1}{2}$ in e uma arruela plana de $\frac{1}{2}$ in, pelo padrão americano, para caber sob a cabeça do parafuso de porca de cabeça hexagonal de $\frac{1}{2}$ in-13 × 1,75 in UNC.

(*a*) Qual é o comprimento da rosca L_T para esse parafuso de porca de diâmetro de séries em polegada?

(*b*) Qual é o comprimento do agarramento L_G?

(*c*) Qual é a altura H da porca?

(*d*) O parafuso de porca é longo o suficiente? Se não o for, arredonde-o para o próximo maior comprimento preferível (Tabela A-17).

(*e*) Qual é o comprimento da haste e das porções rosqueadas do parafuso de porca dentro do agarramento? Esses comprimentos são necessários a fim de estimar a razão de mola k_b do parafuso de porca.

ANÁLISE **8-12** Uma junção parafusada com porca deve ter um agarramento consistindo em duas placas de aço de 14 mm e uma arruela plana métrica de 14R para caber sob a cabeça do parafuso de porca de cabeça hexagonal de M14 × 2, com comprimento de 50 mm.

(*a*) Qual é o comprimento de rosca L_T para esse parafuso de porca de série de passo grosseiro com diâmetro métrico?

(*b*) Qual é o comprimento do agarramento L_G?

(*c*) Qual é a altura H da porca?

(*d*) O parafuso de porca é longo o suficiente? Se não o for, arredonde-o para o próximo maior comprimento preferível (Tabela A-17).

(*e*) Qual é o comprimento da haste e das porções rosqueadas do parafuso de porca dentro do agarramento? Esses comprimentos são necessários a fim de estimar a razão de mola k_b do parafuso de porca.

ANÁLISE **8-13** Um disco vazio de 0,875 in de espessura deve ser fixado a uma bobina cujo flange tem 1 in de espessura, mediante a utilização de oito parafusos de calota com cabeça hexagonal de $\frac{1}{2}$ in-13 × 1,75 in.

(*a*) Qual é o comprimento das roscas L_T para esse parafuso de calota?

(*b*) Qual é o comprimento efetivo do agarramento L'_G?

(*c*) O comprimento desse parafuso de calota é suficiente? Se não for, arredonde-o.

(*d*) Encontre o comprimento de haste l_d e o comprimento rosqueado útil l_t dentro do agarramento. Esses comprimentos são necessários a fim de estimar a razão de mola k_b do fixador.

ANÁLISE **8-14** Um disco vazio de 20 mm de espessura deve ser fixado a uma bobina cujo flange tem 25 mm de espessura, mediante a utilização de oito parafusos de calota métricos com cabeça hexagonal M12 × 40.

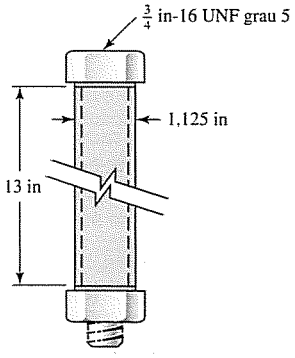
(*a*) Qual é o comprimento das roscas L_T para esse fixador?

(*b*) Qual é o comprimento efetivo do agarramento L'_G?

(*c*) O comprimento desse fixador é suficiente? Se não for, arredonde-o para o próximo comprimento preferível.

(*d*) Encontre o comprimento de haste l_d e o comprimento rosqueado útil no agarramento l_t. Esses comprimentos são necessários a fim de estimar a razão de mola k_b do fixador.

ANÁLISE **8-15** Um parafuso de porca de $\frac{3}{4}$ in-16, série UNF de grau 5 da SAE, tem um tubo de $\frac{3}{4}$ in de diâmetro interno e 13 in de comprimento, engastado entre as faces de arruela do parafuso e da porca mediante o giro da porca até o ajuste confortável e a adição de um terço de uma volta. O diâmetro externo (OD) do tubo é o diâmetro de face de arruela $d_w = 1{,}5d = 1{,}5(0{,}75) = 1{,}125$ in = OD.



Problema 8-15

(*a*) Qual é a razão de mola do parafuso de porca e do tubo, se este é feito de aço? Qual é a constante C da junção?

(*b*) Quando o terço de volta da porca é aplicado, qual é a tensão inicial F_i no parafuso de porca?

(*c*) Qual será a tensão do parafuso de porca na abertura, se tensão adicional for aplicada ao parafuso externo à junção?

ANÁLISE **8-16** A partir da experiência com o Problema 8-15, generalize sua solução para desenvolver uma equação de volta de porca

$$N_t = \frac{\theta}{360^\circ} = \left(\frac{k_b + k_m}{k_b k_m}\right) F_i N$$

em que Nt = giro da porca a partir do ajuste confortável (razoável)

θ = torção da porca em graus

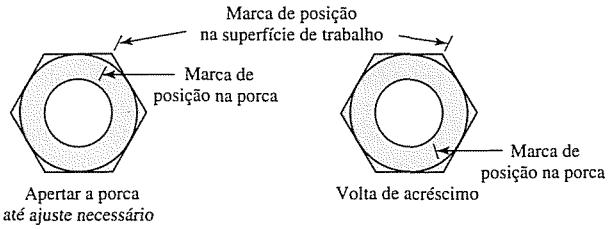
N = número de roscas/in ($1/p$, sendo p o passo)

F_i = pré-carga inicial

k_b, k_m = razões de mola de parafusos de porca e membros, respectivamente

Utilize essa equação para encontrar a relação entre torque e torção, estabelecendo T e o giro de porca N_t. ("Aperto de ajuste confortável ou razoável" significa que a junção foi apertada talvez à metade da pré-carga desejada, de modo a nivelar asperezas nas faces de arruela e membros. Assim, a porca é afrouxada e reapertada mediante aperto manual, depois girada o número de graus indicado pela equação. Se apropriadamente feito, o resultado compete com o torque de chave de encaixe – soquete.)

ANÁLISE **8-17** A RB&W[13] recomenda o giro de porca desde o ajuste confortável (razoável) até a pré-carga, como segue: 1/3 de volta, para que o parafuso de porca agarre de 1 a 4 diâmetros; 1/2de volta, para que agarre de 4 a 8 diâmetros; e 2/3 de volta, para que agarre de 8 a 12 diâmetros. Essas recomendações são para a fabricação de estruturas de aço (junções permanentes), produzindo pré-cargas de 100% da resistência de prova e além. Os fabricantes de maquinarias com carregamento de fadiga e possível desmontagem da junção toleram um número muito menor de voltas de porca. A recomendação da RB&W entra na zona de deformação plástica não-linear.



Problema 8-17
Método do giro da porca.

(*a*) Para o Exemplo 8-4, utilize a Equação (8-27), com $K = 0{,}2$, para estimar o torque necessário para estabelecer a pré-carga desejada. Então, utilizando os resultados do Problema 8-16, determine a volta da porca em graus. Como esse resultado se compara às recomendações da RB&W?

(*b*) Repita para o Exemplo 8-5.

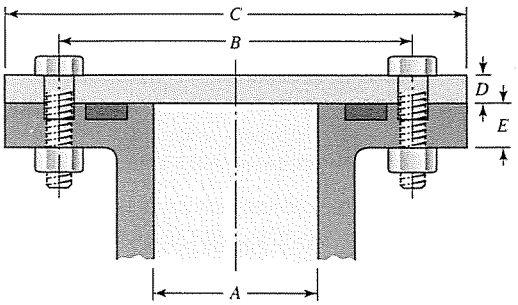
ANÁLISE **8-18** Considere a Equação (8-22) e expresse $k_m/(Ed)$ como uma função de l/d; a seguir, compare-a com a Equação (8-23) para $d/l = 0{,}5$.

ANÁLISE **8-19** Uma junção apresenta a mesma geometria que a do Exemplo 8-4, mas o membro inferior é aço. Utilize a Equação (8-23) para encontrar a razão de mola dos membros no agarramento. *Sugestão:* A Equação (8-23) aplica-se à rigidez de duas secções de uma junção de um único material. Se cada secção tiver a mesma espessura, qual então será a rigidez de uma das secções?

AVALIAÇÃO DE ADEQUAÇÃO **8-20** A figura ilustra a conexão de uma cabeça de cilindro a um vaso de pressão usando 10 parafusos de porca e uma vedação (lacre) de gaxeta confinada. O diâmetro efetivo de vedação é de 150 mm. Outras dimensões são as seguintes: $A = 100$, $B = 200$, $C = 300$, $D = 20$ e $E = 20$, todas em milímetros. O cilindro é usado para armazenar gás a uma pressão estática de 6 MPa. Parafusos de porca da classe ISO 8.8, com um diâmetro de 12 mm, foram selecionados. Isso permite um espaçamento aceitável dos parafusos. Que fator de carga n resulta dessa seleção?

8-21 O computador pode ser muito útil ao engenheiro. No que diz respeito à análise, ele pode eliminar o labor implicado na relização de cálculos e melhorar a precisão. Em síntese, a boa programação é uma questão de organizar as decisões que devem ser tomadas, solicitando-as ao mesmo tempo em que se mostram informações suficientes, aceitando-as e realizando a trituração de números. Em qualquer um dos casos, não se po-

[13] Russel, Burdsall & Ward, Inc., Metal Forming Specialists, Mentor, Ohio.



Problema 8-20
A cabeça do cilindro é de aço; o cilindro é de ferro fundido de grau 30.

ANÁLISE

de programar o que não se entende. A compreensão advém da experiência com problemas executados manualmente. É útil programar o protocolo da Tabela 8-7, haja vista ser muito fácil cometer um erro na escrita à mão. Considerando os fixadores, reconheça duas situações: (1) o fixador foi escolhido, seu diâmetro e comprimento são conhecidos e o projetista necessita conhecer todas as dimensões pertinentes, incluindo o agarramento efetivo de uma junção de parafuso de calota e se o comprimento é adequado; e (2) o diâmetro do fixador, a porca e as arruelas são escolhidos, e o projetista tem de tomar a decisão de comprimento, após o que a documentação das dimensões pertinentes é apropriada. Codifique o protocolo da Tabela 8-7, tendo em mente que você pode desejar embutir algo dele em um programa maior.

ANÁLISE **8–22** A figura do Problema 8-20 ilustra a conexão de uma cabeça de cilindro a um vaso de pressão usando 10 parafusos de porca e um lacre (vedação) de gaxeta confinada. O diâmetro efetivo de vedação é de 150 mm. Outras dimensões são as seguintes: $A = 100$, $B = 200$, $C = 300$, $D = 20$ e $E = 25$, todas em milímetros. O cilindro é utilizado para armazenar gás a uma pressão estática de 6 MPa. Parafusos ISO classe 8.8, com diâmetro de 12 mm, foram selecionados. Isso provê um espaçamento aceitável de parafusos. Que fator de carga n resulta dessa seleção?

ANÁLISE **8–23** Desejamos alterar a figura para o Problema 8-22 diminuindo o diâmetro interno do lacre para o diâmetro $A = 100$ mm. Isso cria um diâmetro efetivo de vedação de 120 mm. Então, usando parafusos de calota em vez de parafusos de porca, o diâmetro do círculo B de parafusos de porca pode ser reduzido, bem como o diâmetro externo C. Se o mesmo espaçamento de parafuso de porcas e a mesma distância de borda forem empregados, então oito parafusos de calota de 12 mm poderão ser usados em um círculo de parafuso de porca com $B = 160$ mm e um diâmetro externo de 260 mm – uma economia substancial. Com essas dimensões e todos os outros dados iguais aos do Problema 8-22, encontre o fator de carga.

ANÁLISE **8–24** Na figura para o Problema 8-20, os parafusos de porca têm um diâmetro de $\frac{1}{2}$ in e a placa de cobertura é de aço, com $D = \frac{1}{2}$ in. O cilindro é de aço fundido, com $E = \frac{5}{8}$ in e um módulo de elasticidade de 18 Mpsi. A arruela de $\frac{1}{2}$ in da SAE a ser usada sob a porca tem um diâmetro externo de 1,062 in e 0,095 in de espessura. Encontre as rigidezes do parafuso de porca e dos membros, bem como a constante de junção C.

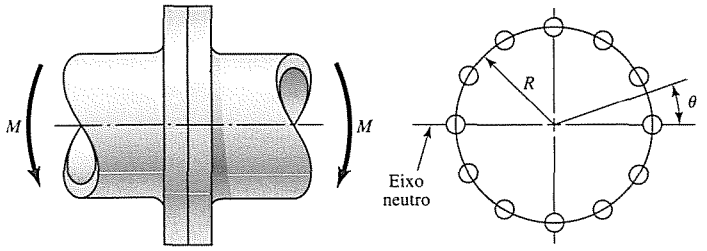
8–25 O mesmo que o Problema 8-24, exceto que parafusos de calota de $\frac{1}{2}$ in são usados com arruelas. (Ver Figura 8-21.)

ANÁLISE **8–26** Além dos dados do Problema 8-24, as dimensões do cilindro são $A = 3{,}5$ in e um diâmetro efetivo de lacre de 4,25 in. A pressão estática interna é de 1500 psi. O diâmetro externo da cabeça é $C = 8$ in. O diâmetro do círculo de parafusos de porca é de 6 in, de modo que um espaçamento de parafusos no intervalo de 3 a 5 diâmetros de parafusos requereria de 8 a 13 parafusos de porca. Selecione 10 parafusos de porca grau 5 da SAE e encontre o fator de carga resultante n.

ANÁLISE **8–27** Um parafuso de calota de $\frac{3}{8}$ in da classe 5 e uma arruela de aço são usados para segurar uma cobertura a uma armação de ferro fundido de uma máquina tendo um orifício rosqueado cego (sem saída). A arruela tem espessura de 0,065 in. A armação apresenta um módulo de elasticidade de 14 Mpsi e tem $\frac{1}{4}$ in de espessura. O parafuso tem 1 in de comprimento. O material na armação também tem um módulo de elasticidade de 14 Mpsi. Encontre as rigidezes k_b e k_m do parafuso de porca e dos membros.

ANÁLISE **8–28** Parafusos de porca distribuídos ao redor de um círculo de parafusos são freqüentemente requisitados para resistir a um momento flexor externo, como mostra a figura. O momento externo é de 12 kip · in, e o círculo de parafusos tem um diâmetro de 8 in. O eixo neutro para flexão é um diâmetro do círculo de parafusos. O que precisa ser determinado é a carga externa mais severa recebida por um parafuso de porca na montagem.

(*a*) Veja o efeito dos parafusos de porca colocando uma carga em linha ao redor do círculo de parafuso cuja intensidade F'_b, em libras por polegada, varie linearmente com a distância do eixo neutro, conforme a relação $F'_b = F'_{b,\max} R \operatorname{sen}\theta$. A carga em qualquer parafuso particular pode ser vista como o efeito de carga em linha sobre um arco associado ao parafuso. Por exemplo, existem 12 parafusos de porca mos-



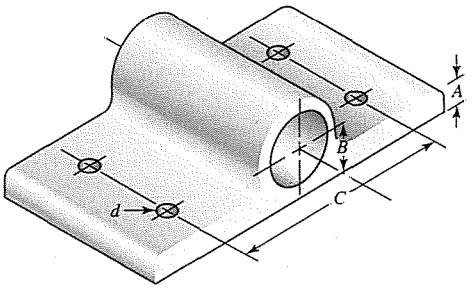
Problema 8-28
Conexão parafusada com porca sujeita a flexão.

trados na figura. Assim, cada carga de parafuso deve estar distribuída sobre um arco de 30° do círculo de parafuso. Sob essas condições, qual é a maior carga de parafuso?

(*b*) Veja a maior carga como a intensidade $F'_{b,max}$ multiplicada pelo comprimento do arco associado a cada parafuso e encontre a maior carga de parafuso.

(*c*) Expresse a carga em qualquer parafuso como $F = F_{max}\,\text{sen}\theta$, some os momentos decorrentes de todos os parafusos e estime a maior carga de parafuso. Compare os resultados dessas três abordagens para decidir como atacar tais problemas no futuro.

ANÁLISE **8-29** A figura mostra um bloco de mancal de ferro fundido que deve ser parafusado com porca em uma viga de teto de aço e suportar uma carga gravitacional. Os parafusos de porca usados são M20 ISO 8.8 de roscas grossas e com arruelas de aço de 3,4 mm de espessura sob a cabeça e a porca. Os flanges da viga têm 20 mm de espessura, e a dimensão *A*, mostrada na figura, é de 20 mm. O módulo de elasticidade do mancal é de 135 GPa.

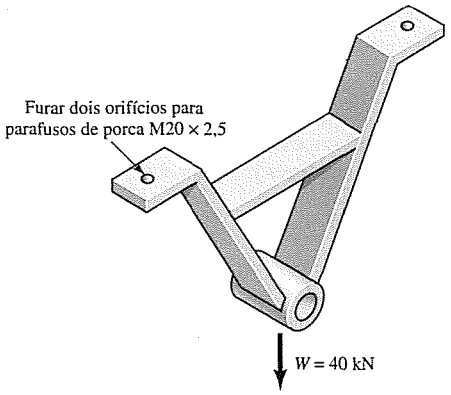


Problema 8-29

(*a*) Encontre o torque de chave de encaixe requerido se os fixadores são lubrificados durante a montagem e se a junção deve ser permanente.

(*b*) Determine o fator de carga para o projeto se a carga de gravidade é de 15 kN.

ANÁLISE **8-30** A armação *A* de aço com a cabeça para baixo, mostrada na figura, deve ser parafusada com porca em vigas de aço, no teto de uma sala de máquina, mediante a utilização de parafusos de grau 8.8 ISO. Essa armação deve suportar uma carga radial de 40 kN, como ilustrado. O agarramento total do parafuso é de 48 mm, o que inclui a espessura da viga de aço, o pé da armação *A* e as arruelas de aço usadas. Os parafusos têm tamanho M20 × 2,5.



Problema 8-30

(*a*) Que torque de aperto deve ser usado se a conexão for permanente e os fixadores, lubrificados?

(*b*) Que porção da carga externa é absorvida pelos parafusos de porca? E pelos membros?

ANÁLISE **8-31** Se a pressão no Problema 8-20 for cíclica entre 0 e 6 MPa, determine o fator de segurança à fadiga utilizando

(*a*) O critério de Goodman.

(*b*) O critério de Gerber.

(*c*) O critério ASME-elíptico.

ANÁLISE **8-32** Na figura do Problema 8-20, considere $A = 0{,}9$ m, $B = 1$ m, $C = 1{,}10$ m, $D = 20$ mm e $E = 25$ mm. O cilindro é feito de ferro fundido ASTM nº 35 ($E = 96$ GPa) e a cabeça, de aço baixo carbono. Existem 36 parafusos de porca M10 × 1,5 ISO 10.9, apertados a 75% da carga de prova. Durante o uso, a pressão do cilindro flutua entre 0 e 550 kPa. Empregando a relação de Gerber, encontre o fator de segurança protegendo contra uma falha de fadiga de um parafuso mediante

(*a*) O critério de Goodman.

(*b*) O critério de Gerber.

(*c*) O critério ASME-elíptico.

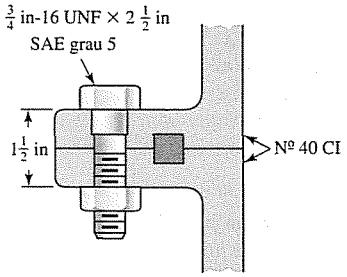
ANÁLISE **8-33** Um eixo de aço AISI 1144 laminado a quente, com 1 in de diâmetro, é conformado a quente em um olhal similar àquele mostrado na figura para o Problema 4-73, com um olho de diâmetro interno de 2 in. As roscas são de 1 in-12 NF, estampadas e cortadas.

(*a*) Para uma carga aplicada repetidamente, colinear ao eixo de rosca, mediante o critério de Gerber, a falha de fadiga é mais provável na rosca ou no olho?

(*b*) O que pode ser feito para enrijecer o parafuso na posição mais fraca?

(*c*) Se o fator de segurança protegendo contra uma falha de fadiga for $n_f = 2$, que carga aplicada repetidamente pode ser aplicada ao olho?

ANÁLISE **8-34** A secção da junção selada mostrada na figura é carregada por uma força repetida $P = 6$ kip. Os membros têm $E = 16$ Mpsi. Todos os parafusos de porca foram cuidadosamente pré-carregados a $F_i = 25$ kip cada.



Problema 8-34

(*a*) Se arruelas de aço endurecido, com 0,134 in de espessura, tiverem de ser usadas sob a cabeça e a porca, que comprimento de parafusos de porca deve ser utilizado?

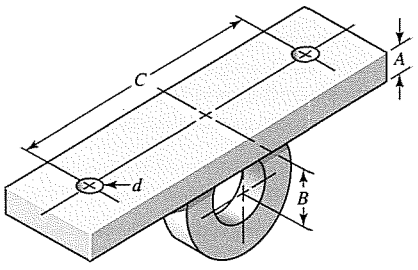
(*b*) Encontre k_b, k_m e C.

(*c*) Empregando o critério de Goodman, encontre o fator de segurança protegendo contra uma falha por fadiga.

(*d*) Empregando o critério de Gerber, encontre o fator de segurança protegendo contra uma falha por fadiga.

(*e*) Encontre o fator de segurança protegendo contra carregamento acima da carga de prova.

ANÁLISE **8-35** Suponha que o suporte de aço soldado mostrado na figura seja parafusado com porcas debaixo de uma viga de teto de aço estrutural, de modo a suportar uma carga vertical flutuante a ele imposta por um pino e uma conexão. Os parafusos são de $\frac{1}{2}$ in, de rosca grossa, SAE grau 5, apertados à pré-carga recomendada. As rigidezes já foram computadas e são $k_b = 4{,}94$ Mlb/in e $k_m = 15{,}97$ Mlb/in.



Problema 8-35

(*a*) Supondo que os parafusos, em vez da solda, governem a resistência deste projeto, determine a carga repetida segura P que pode ser imposta a essa montagem empregando o critério de Gerber e um fator de projeto de fadiga de 2.

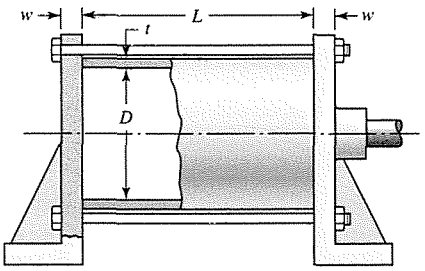
(*b*) Repita empregando o critério de Gerber.

(*c*) Compute os fatores de carga com base na carga encontrada em (*b*).

ANÁLISE **8-36** Empregando o critério de fadiga de Gerber e um fator de projeto de fadiga de 2, determine a carga externa repetida P que um parafuso de porca de rosca grossa de grau 5 da SAE, com $1\frac{1}{4}$ in, pode agüentar, em comparação com aquela para um parafuso de rosca fina. As constantes de junção são $C = 0{,}30$ para parafusos de porca de rosca grossa e 0,32 para os de rosca fina.

ANÁLISE **8-37** Um parafuso de porca M30 × 3,5 ISO 8.8 é usado em uma junção, à pré-carga recomendada, e essa junção está sujeita a uma carga repetida de fadiga de tração de $P = 80$ kN por parafuso. A constante de junção é $C = 0{,}33$. Encontre os fatores de carga e o fator de segurança protegendo contra uma falha de fadiga baseando-se no critério de fadiga de Gerber.

ANÁLISE **8-38** A figura mostra um atuador linear de pressão fluídica (cilindro hidráulico) no qual $D = 4$ in, $t = \frac{3}{8}$ in, $L = 12$ in e $w = \frac{3}{4}$ in. Ambos os suportes, bem como o cilindro, são de aço. O atuador foi projetado para uma pressão de trabalho de 2000 psi. Seis parafusos de porca de rosca grossa de grau 5 da SAE, com $\frac{3}{8}$ in, são usados e apertados a 75% da carga de prova.



Problema 8-38

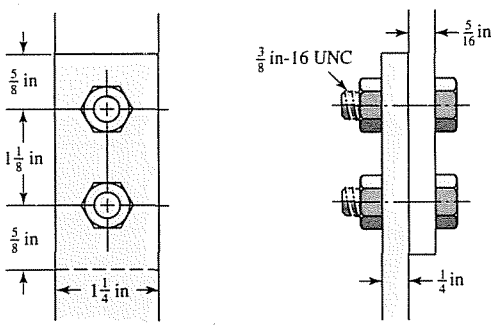
(*a*) Encontre as rigidezes dos parafusos de porca e dos membros, assumindo que o cilindro completo está comprimido uniformemente e que os suportes de extremidade são perfeitamente rígidos.

(*b*) Empregando o critério de fadiga de Gerber, encontre o fator de segurança protegendo contra uma falha de fadiga.

(*c*) Repita (*b*) empregando o critério de fadiga de Gerber.

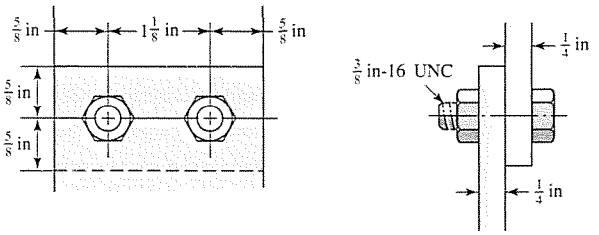
(*d*) Que pressão seria requerida para causar a separação total da junção?

ANÁLISE **8-39** A figura mostra uma junção de sobreposição parafusada que utiliza parafusos de porca de grau 8 da SAE. Os membros são feitos de aço AISI 1040 repuxado a frio. Encontre uma carga de cisalhamento de tração segura F que possa ser aplicada a essa conexão se os seguintes fatores de segurança forem especificados: cisalhamento de parafusos de porca 3, suporte em parafusos 2, suporte em membros 2,5 e tensão de membros 3.



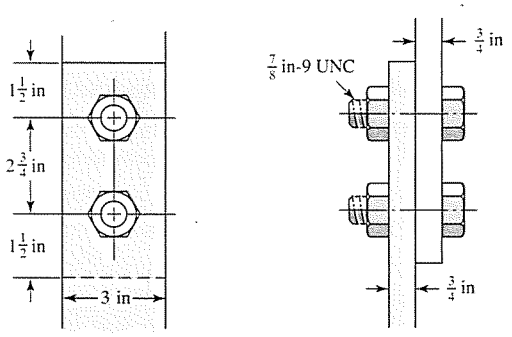
Problema 8-39

ANÁLISE **8-40** A conexão parafusada de porca mostrada na figura utiliza parafusos de grau 5 da SAE. Os membros são de aço AISI 1018 laminado a quente. A carga de cisalhamento de tração $F = 4000$ lbf é aplicada à conexão. Encontre o fator de segurança para todos os possíveis modos de falha.



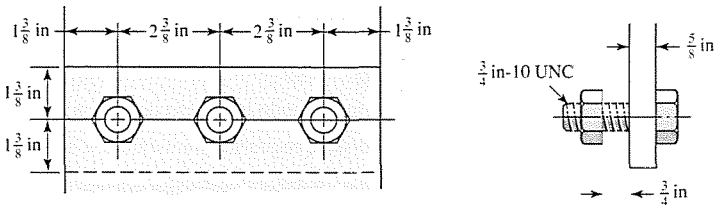
Problema 8-40

ANÁLISE **8-41** Uma junção sobreposta parafusada, utilizando parafusos de porca de grau 5 da SAE e membros feitos de aço SAE 1040 repuxado a frio, é mostrada na figura. Encontre a carga de cisalhamento de tração F que possa ser aplicada a essa conexão se os seguintes fatores de segurança forem especificados: cisalhamento de parafusos 1,8, suporte em parafusos 2,2, suporte em membros 2,4 e tensão de membros 2,6.



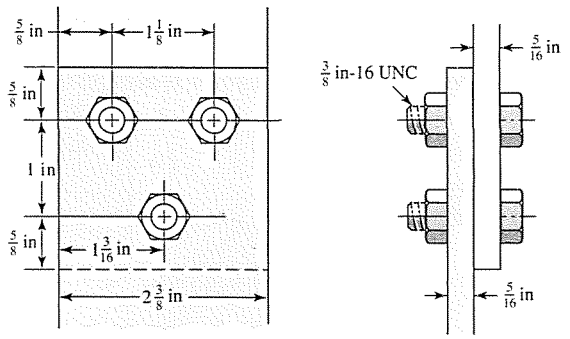
Problema 8-41

ANÁLISE **8-42** A conexão parafusada mostrada na figura está sujeita a uma carga de cisalhamento de tração de 20 kip. Os parafusos de porca são de grau 5 da SAE, e o material é aço AISI 1015 repuxado a frio. Encontre o fator de segurança da conexão para todos os possíveis modos de falha.



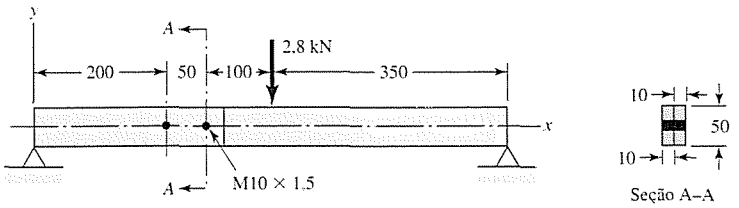
Problema 8-42

ANÁLISE **8-43** A figura mostra uma conexão que emprega três parafusos de porca de grau 5 da SAE. A carga de cisalhamento de tração na junção é de 5400 lbf. Os membros são barras de aço AISI 1020 repuxado a frio. Encontre o fator de segurança para cada modo possível de falha.



Problema 8-43

ANÁLISE **8-44** Uma viga é feita aparafusando-se juntas duas barras de aço AISI 1018 repuxado a frio, como uma junção sobreposta, tal como mostra a figura. Os parafusos de porca usados são ISO 5.8. Ignorando qualquer torção, determine o fator de segurança da conexão.



Problema 8-44
Dimensões em milímetros.

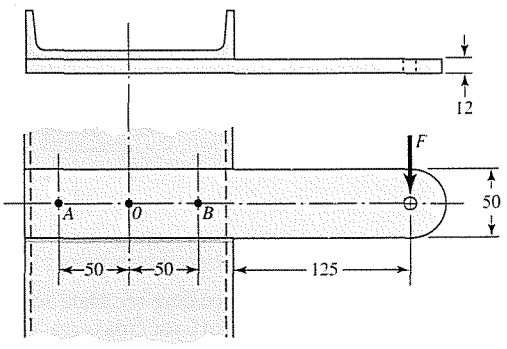
ANÁLISE **8-45** A prática padronizada de projeto, como exibido nas soluções para os Problemas 8-39 a 8-43, consiste em supor que os parafusos de porca, ou rebites, partilhem o cisalhamento igualmente. Para muitas situações, tal suposição pode levar a um projeto inseguro. Considere o suporte da conexão do Problema 8-35, por exemplo. Suponha que esse suporte seja parafusado em uma *coluna* de flange largo, com a linha de centro passando através de dois parafusos de porca na direção vertical. Uma carga vertical através do orifício do pino conector, à distância B do flange da coluna, colocaria uma carga de cisalhamento nos parafusos, bem como uma carga de tração. Essa última aparece porque o suporte tende a se abrir ao redor do canto inferior, muito semelhante a um martelo de unha (forma de pé-de-cabra), exercendo uma grande carga de tração no parafuso superior. Além disso, é quase certo que tanto o espaçamento dos orifícios de parafuso como seus diâmetros sejam ligeiramente diferentes, no flange da coluna, daqueles que estão no suporte da conexão. Assim, a menos que ocorra escoamento, somente um dos parafusos receberá a carga de cisalhamento. O projetista não tem como saber qual dos parafusos será.

Neste problema, o suporte apresenta comprimento de 8 in, $A = \frac{1}{2}$ in, $B = 3$ in, $C = 6$ in e o flange da coluna tem espessura de $\frac{1}{2}$ in. Os parafusos de porca são $\frac{1}{2}$ in UNC SAE 5. Arruelas de aço com espessura de 0,095 in são usadas sob as porcas. Estas são apertadas até 75% da carga de prova. A carga vertical do pino conector é de 3000 lbf. Se o parafuso superior receber toda a carga de cisalhamento, bem como a carga de tração, quão estreitamente a tensão de parafuso se aproximará da resistência de prova?

ANÁLISE **8-46** O mancal do Problema 8-29 está parafusado em uma superfície vertical e suporta um eixo horizontal. Os parafusos de porca usados têm roscas grossas e são M20 ISO 5.8. A constante da junção é $C = 0{,}30$ e as dimensões, $A = 20$ mm, $B = 50$ mm e $C = 160$ mm. A base do mancal tem 240 mm de comprimento. A carga de mancal é de 12 kN. Se os parafusos forem apertados até 75% da carga de prova, as tensões de parafuso excederão à resistência de prova? Utilize um carregamento de pior caso, como discutido no Problema 8-45.

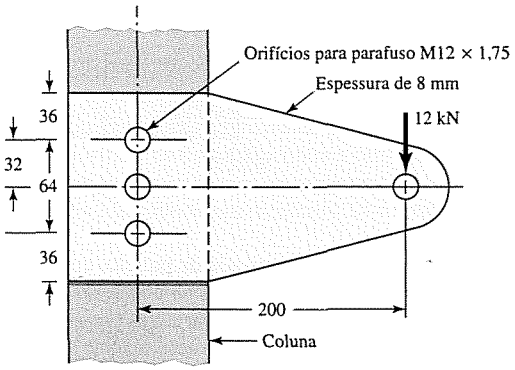
ANÁLISE **8-47** Um colar de eixo do tipo engastado de anel bipartido, tal como descrito no Problema 6-29, deve resistir a uma carga axial de 1000 lbf. Utilizando um fator de projeto de $n = 3$ e um coeficiente de fricção de 0,12, especifique um parafuso de calota de grau 5 da SAE usando roscas finas. Que torque de torção deve ser empregado se um parafuso lubrificado for utilizado?

ANÁLISE **8-48** Um canal vertical (perfil U) de 152 × 76 (ver Tabela A-7) tem uma viga em balanço nele parafusada, como mostrado. O canal é de aço AISI 1006 laminado a quente. A barra é de aço AISI 1015 laminado a quente. Os parafusos de porca são M12 × 1,75 ISO 5.8. Para um fator de projeto de 2,8, encontre a força segura F que pode ser aplicada à viga em balanço.



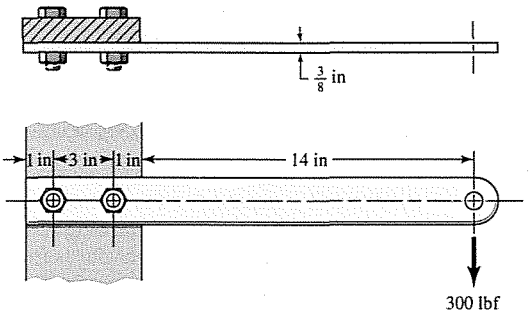
Problema 8-48
Dimensões em milímetros.

ANÁLISE **8–49** Encontre a carga de cisalhamento total em cada um dos três parafusos de porca para a conexão mostrada na figura e compute a tensão de cisalhamento significativa de parafuso e a tensão de apoio. Encontre o segundo momento de área da placa de 8 mm em uma secção através dos orifícios dos três parafusos, bem como a tensão de flexão máxima na placa.



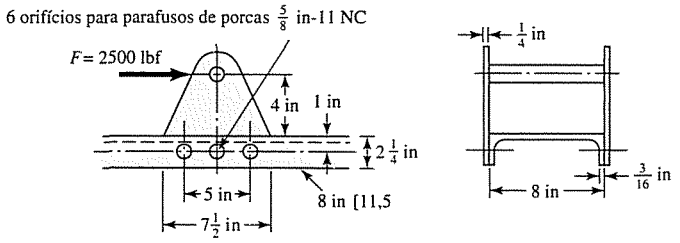
Problema 8-49
Dimensões em milímetros.

ANÁLISE **8–50** Uma barra de aço AISI 1018 repuxado a frio, com $\frac{3}{8} \times 2$ in, está em balanço para suportar uma carga estática de 300 lbf, como ilustrado. A barra está presa ao suporte por meio de dois parafusos de porca de $\frac{1}{2}$ in-13 UNC SAE 5. Encontre o fator de segurança para os seguintes modos de falha: cisalhamento de parafuso, apoio no parafuso, apoio no membro e resistência de membro.



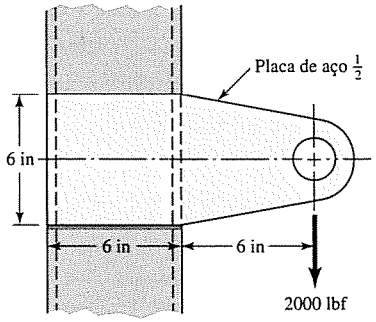
Problema 8-50
Dimensões em milímetros.

ANÁLISE **8–51** A figura mostra um encaixe soldado que foi projetado por tentativas para ser parafusado em um canal (perfil U), a fim de transferir a carga de 2500 lbf ao mesmo. Esse canal é feito de aço de baixo carbono, laminado a quente, tendo uma resistência ao escoamento mínima de 46 kpsi; as duas placas de encaixe são de estoque, laminadas a quente, tendo um S_y mínimo de 45,5 kpsi. O encaixe deve ser parafusado usando-se seis parafusos de porca padronizada de grau 2 da SAE. Verifique a resistência do projeto computando o fator de segurança para todos os possíveis modos de falha.



Problema 8-51
Dimensões em polegadas.

PROJETO **8–52** Uma viga em balanço deve ser atada ao lado plano de um canal (perfil U) de 6 in e 13,0 lbf/in usado como coluna. Deve também levar uma carga, tal como mostrado na figura. Para um projetista, a escolha de um arranjo de parafusos de porca costuma ser uma decisão *a priori*. Tais decisões são tomadas a partir de uma reunião de conhecimento acerca da efetividade de vários padrões.



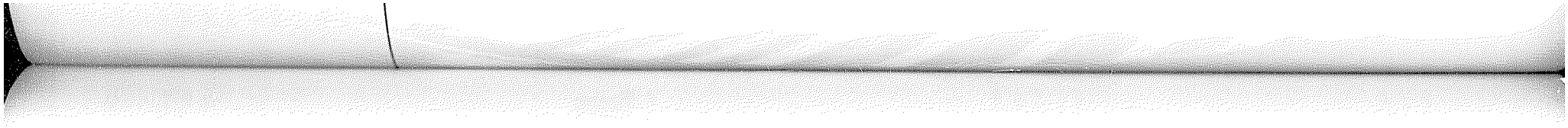
Problema 8-52

(*a*) Se dois fixadores forem usados, a disposição deveria ser arranjada vertical, horizontal ou diagonalmente? Como você decidiria?

(*b*) Se três fixadores forem usados, uma disposição linear ou triangular deveria ser utilizada? Para uma disposição triangular, qual deveria ser a orientação do triângulo? Como você decidiria?

8-53 A partir de sua experiência com o Problema 8-52, especifique um padrão de parafusos de porca para o mesmo, bem como dimensões de parafusos.

8-54 Determinar a rigidez de junção de junções assimétricas de dois ou mais materiais diferentes utilizando um tronco (frusto) de um cone vazado pode consumir bastante tempo e propender a erros. Desenvolva um programa de computador visando a determinar k_m para uma junção composta de dois materiais diferentes com espessuras diferentes. Teste o programa determinando k_m para problemas como o Exemplo 8-5 e os Problemas 8-19, 8-20, 8-22, 8-24 e 8-27.



CAPÍTULO 9

Soldagem, União e Projeto de Junções Permanentes

9-1 Símbolos de Soldagem 448
9-2 Soldas de Topo e Filete 450
9-3 Tensões em Junções Soldadas sob Torção 453
9-4 Tensões em Junções Soldadas sob Flexão 458
9-5 Resistência de Junções Soldadas 460
9-6 Carregamento Estático 463
9-7 Carregamento de Fadiga 466
9-8 Soldagem de Resistência 468
9-9 Junções Rebitadas e Parafusadas com Porcas Carregadas em Cisalhamento 469
9-10 União por Adesivos 473

A forma pode perseguir a função mais rapidamente por meio de processos de união como soldagem, brasagem, fusão, cementação e colagem – hoje empregados extensivamente em manufatura. Sempre que peças têm de ser montadas ou fabricadas, há em geral um bom motivo para considerar um desses processos no trabalho de projeto preliminar. Particularmente quando as secções a serem unidas são finas, um desses métodos pode levar a economias significativas. A eliminação de fixadores individuais, com seus furos e custos de montagem, é um fator importante. Da mesma forma, alguns dos métodos permitem rápida montagem em máquina, o que aumenta sua atratividade.

Junções rebitadas permanentes eram comuns entre os meios de união de perfis laminados de aço, quando a meta era formar uma junção permanente. A fascinação infantil de ver um rebite incandescente lançado com tenazes por entre as estruturas de um edifício, para ser infalivelmente apanhado com uma caçamba cônica e martelado pneumaticamente em sua forma final, persiste mesmo nos dias de hoje. Dois desenvolvimentos relegaram a rebitagem a um menor patamar. O primeiro foi o desenvolvimento de parafusos de porca de aço de alta resistência, cuja pré-carga podia ser controlada. O segundo foi a melhoria da soldagem, competindo tanto em custo como em formas possíveis.

9-1 Símbolos de Soldagem

Uma solda é fabricada ao se soldarem juntas várias formas metálicas, cortadas em configurações particulares. Durante a soldagem, todas as partes são mantidas juntas de forma segura, freqüentemente por um grampo ou uma guia. As soldas devem ser precisamente especificadas nos desenhos de trabalho, o que é feito utilizando-se o símbolo de soldagem, mostrado na Figura 9-1, tal como padronizado pela *American Welding Society* (AWS). A seta desse símbolo aponta para a junção a ser soldada. O corpo dele contém tantos elementos quanto se supõe que sejam necessários, a saber:

- Linha de referência
- Seta
- Símbolos básicos de soldagem, como os da Figura 9-2
- Dimensões e outros dados
- Símbolos suplementares
- Símbolos de acabamento

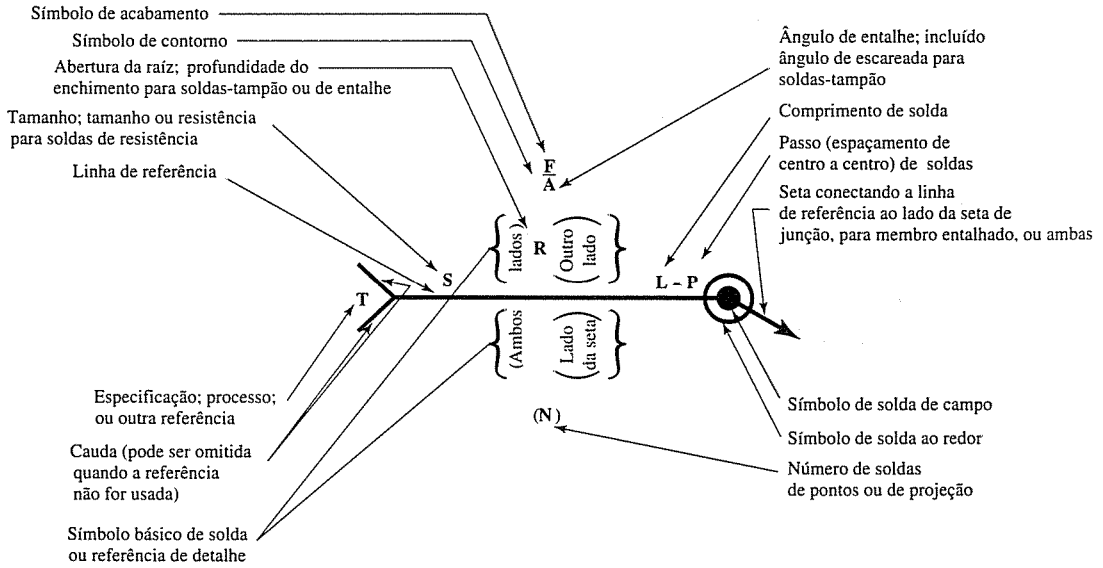


Figura 9-1 O símbolo de soldagem do padrão AWS mostrando a localização de seus elementos.

Tipo de solda							
Conta cordão	Filete	Tampão ou entalhe	Sulco				
			Quadrado	V	Bisel	U	J

Figura 9-2 Símbolos de solda a arco e gás.

- Cauda
- Especificação ou processo

O *lado da seta* de uma junção é a linha, o lado, a área ou o membro próximo para o qual essa seta aponta. O lado oposto ao lado da seta é o *outro lado.*

As Figuras 9-3 a 9-6 ilustram os tipos de soldas usados mais freqüentemente por projetistas. Para elementos gerais de máquina, a maioria delas são soldas de filete, embora as de topo sejam bastante usadas em projeto de vasos de pressão. Naturalmente, as peças a serem unidas devem ser arranjadas de tal forma que haja folga suficiente para a operação de soldagem. Se junções incomuns forem requeridas em virtude de folga insuficiente ou da forma da secção, o projeto poderá vir a ser pobre, de modo que o projetista terá de começá-lo outra vez e empenhar-se para sintetizar uma outra solução.

Visto que calor é empregado na operação de soldagem, há mudanças metalúrgicas no metal original nas adjacências da solda. Ademais, tensões residuais podem ser introduzidas por causa da fixação ou sustentação, ou, às vezes, devido à ordem de soldagem. Normalmente, essas tensões residuais não são intensas o bastante para causar preocupação; em alguns casos, um tratamento térmico leve, depois da soldagem, foi considerado útil para aliviá-las. Quando as peças a serem soldadas são espessas, um pré-aquecimento também será benéfico. Se a confiabilidade da componente tiver de ser muito alta, um programa de ensaio deverá ser estabelecido para que se aprenda que mudanças ou adições são necessárias para assegurar a melhor qualidade.

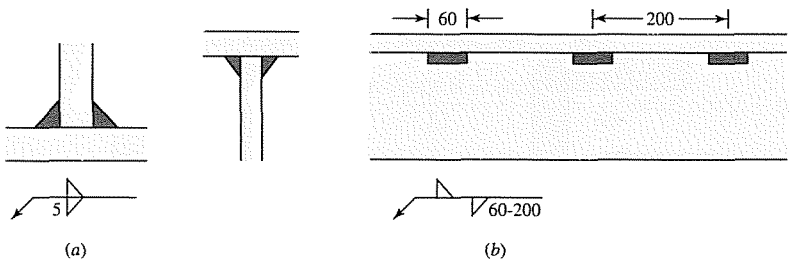


Figura 9-3 Soldas de filete. (*a*) O número indica o tamanho da perna; a seta deve apontar somente para uma solda quando ambos os lados são iguais. (*b*) O símbolo indica que as soldas são intermitentes, com 60 mm de longitude alternando-se a 200 mm entre os centros.

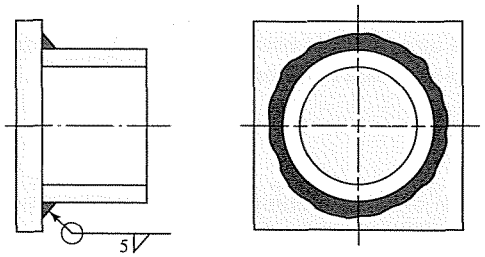


Figura 9-4 O círculo no símbolo de solda indica que a soldagem deve ser ao redor de tudo.

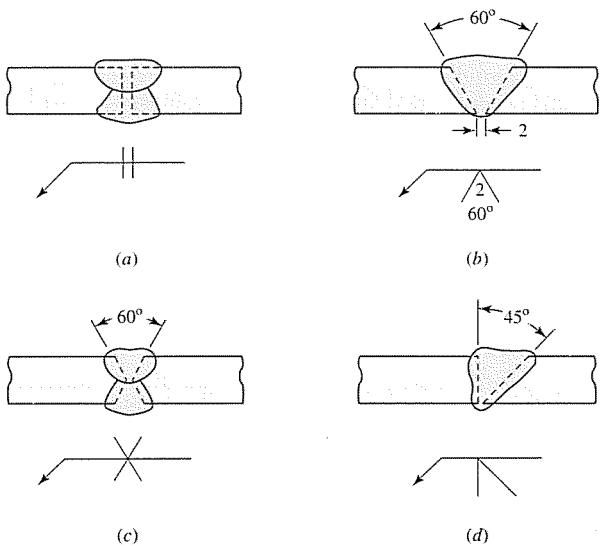


Figura 9-5 Solda de sulco ou topo: (*a*) solda de topo quadrada em ambos os lados; (*b*) V simples com bisel de 60° e abertura de raiz de 2 mm; (*c*) duplo V; (*d*) bisel simples.

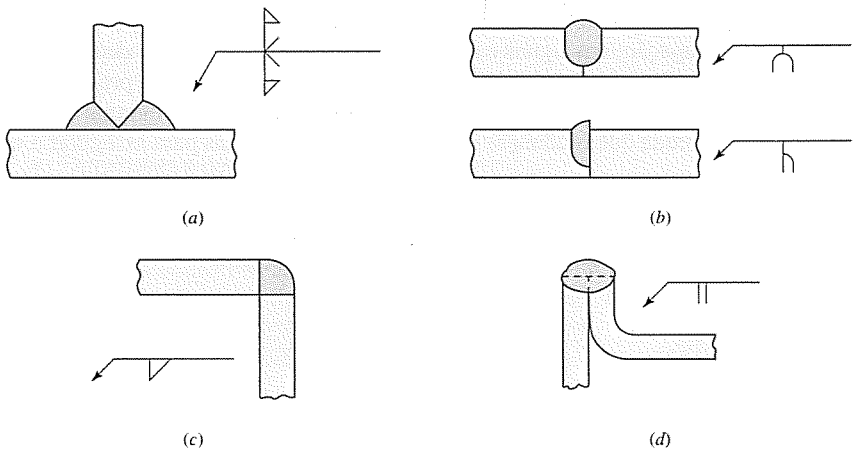


Figura 9-6 Soldas especiais de sulco: (*a*) junção T para placas espessas; (*b*) soldas U e J para placas espessas; (*c*) solda de canto (pode ser também uma solda de cordão no interior para maior resistência, mas não deve ser usada para cargas pesadas); (*d*) solda de borda para chapas de metal e cargas leves.

9-2 Soldas de Topo e Filete

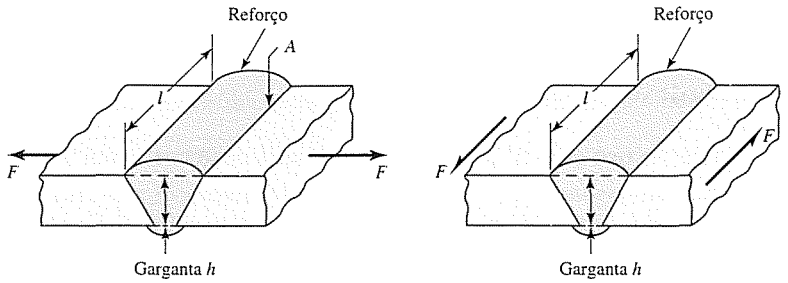
A Figura 9-7(*a*) mostra uma solda de entalhe em V simples carregada por uma força de tração F. Seja para o carregamento de tração ou para o de compressão, a tensão normal média é

$$\sigma = \frac{F}{hl} \tag{9-1}$$

em que h é a garganta de solda e l, o comprimento de solda, como mostrado na figura. Observe que o valor de h não inclui o reforço. Este pode ser desejável, mas varia um pouco e produz concentração de tensão no ponto A da figura. Se cargas de fadiga existirem, é bom esmerilhar ou retirar esse reforço.

A tensão média em uma solda de topo decorrente de carregamento de cisalhamento é

$$\tau = \frac{F}{hl} \tag{9-2}$$



(*a*) Carregamento de tração (*b*) Carregamento de cisalhamento

Figura 9-7 Uma junta de topo típica.

A Figura 9-8 ilustra uma solda de filete transversal típica. Na Figura 9-9 uma porção da junção soldada foi isolada da Figura 9-8 como um corpo livre. No ângulo θ, as forças em cada solda consistem numa força normal F_n e numa força de cisalhamento F_s. Somando as forças nas direções x e y, obtemos

$$F_s = F \operatorname{sen}\theta \tag{a}$$

$$F_n = F \cos\theta \tag{b}$$

O uso da lei dos senos para o triângulo da Figura 9-9 produz

$$\frac{t}{\operatorname{sen} 45^\circ} = \frac{h}{\operatorname{sen}(90^\circ - \theta + 45^\circ)} = \frac{h}{\operatorname{sen}(135^\circ - \theta)} = \frac{\sqrt{2}h}{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}$$

Solucionando para o comprimento de garganta t, obtemos

$$t = \frac{h}{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta} \tag{c}$$

As tensões nominais a um ângulo θ na solda, τ e σ, são

$$\tau = \frac{F_s}{A} = \frac{F \operatorname{sen}\theta(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)}{hl} = \frac{F}{hl}(\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \operatorname{sen}^2\theta \tag{d}$$

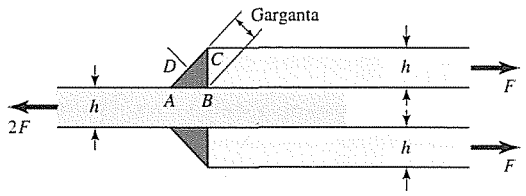


Figura 9-8 Uma solda transversal de filete.

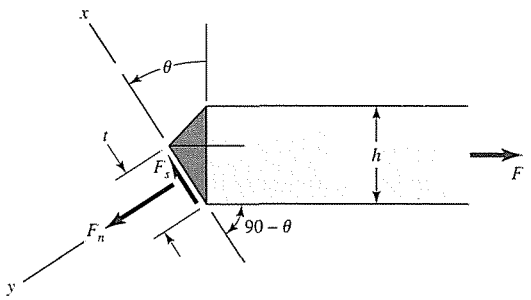


Figura 9-9 Corpo livre da Figura 9-8.

$$\sigma = \frac{F_n}{A} = \frac{F\cos\theta(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)}{hl} = \frac{F}{hl}(\cos^2\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta) \quad (e)$$

A tensão de von Mises σ' a um ângulo θ é

$$\sigma' = (\sigma^2 + 3\tau^2)^{1/2} = \frac{F}{hl}[(\cos^2\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta)^2 + 3(\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta)^2]^{1/} \quad (f)$$

A tensão maior de von Mises ocorre em $\theta = 62{,}5°$, com um valor de $\sigma' = 2{,}16F(hl)$. Os valores correspondentes de τ e σ são $t = 1{,}196F/(hl)$ e $\sigma = 0{,}623F/(hl)$.

A tensão de cisalhamento máxima pode ser encontrada diferenciando-se a Equação (*d*) relativamente a θ e igualando-a a zero. O ponto estacionário ocorre em $\theta = 67{,}5°$, com um correspondente $\tau_{max} = 1{,}20$ $F/(hl)$ e $\sigma = 0{,}5F(hl)$.

Existem alguns resultados analíticos e experimentais que são úteis ao avaliarmos as Equações (*d*) até (*f*) e suas conseqüências. Um modelo da solda de filete transversal da Figura 9-8 é facilmente construído para propósitos fotoelásticos e tem a vantagem de uma condição de carregamento balanceado. Norris construiu um tal modelo e relatou a distribuição de tensão ao longo dos lados *AB* e *BC* da solda.[1] Um gráfico aproximado dos resultados que ele obteve é mostrado tal como na Figura 9-10(*a*). Observe que a concentração de tensão existe em *A* e *B* na perna horizontal e em *B* na perna vertical. Norris declarou que não poderia determinar as tensões em *A* e *B* com certeza alguma.

Salakian[2] apresenta dados para a distribuição de tensão através da garganta de uma solda de filete (Figura 9-10(*b*)). Esse gráfico é de particular interesse, pois acabamos de aprender que as tensões de garganta são aquelas utilizadas em projeto. Novamente, a figura mostra a concentração de tensão no ponto *B*. Observe que a Figura 9-10(*a*) aplica-se ao metal de solda ou ao metal original e que a Figura 9-10(*b*) aplica-se somente ao metal de solda.

As Equações (*a*) até (*f*) e suas conseqüências parecem familiares, de modo que podemos nos sentir confortáveis com elas. O resultado líquido de análise fotoelástica e de elemento finito da geometria de solda de filete transversal assemelha-se mais àquele mostrado na Figura 9-10 do que àqueles fornecidos pela mecânica de materiais e métodos de elasticidade. O conceito aqui mais importante é o de que não temos *nenhuma abordagem que preveja as tensões existentes*. A geometria do filete é grosseira para os padrões de usinagem e, mesmo que fosse ideal, a macrogeometria é muito abrupta e complexa para os nossos métodos. Existem também tensões de flexão sutis devidas a excentricidades. Mesmo assim, na ausência de análise robusta, as soldagens devem ser especificadas e as junções resultantes devem estar seguras. A abordagem tem sido a de empregar um modelo simples *e conservador* – verificado como tal por ensaio –, e

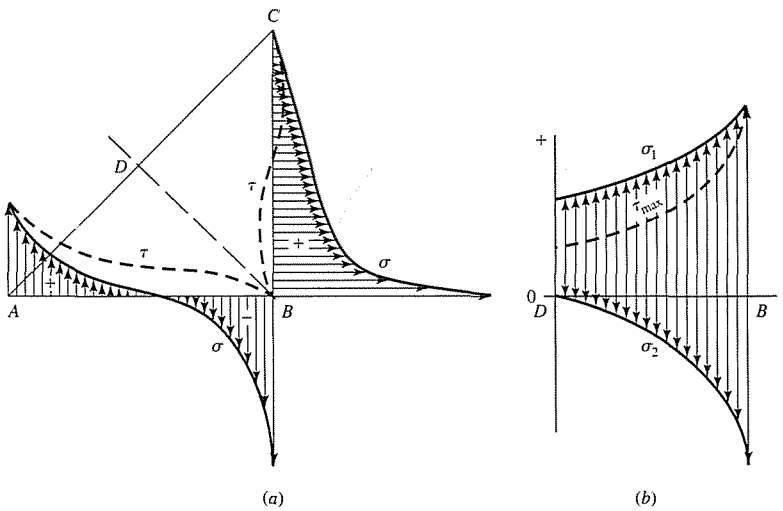


Figura 9-10 Distribuição de tensão em soldas de filete: *(a)* distribuição de tensão nas pernas, como reportada por Norris; *(b)* distribuição de tensões principais e tensão de cisalhamento máxima, como reportada por Salakian.

[1] C. H. Norris, "Photoelastic Investigation of Stress Distribution in Transverse Fillet Welds", *Welding J.*, vol. 24, 1945, p. 557s.

[2] A. G. Salakian e G. E. Claussen, "Stress Distribution in Fillet Welds: A Review of the Literature", *Welding J.*, vol. 16, May 1937, p. 1-24.

- Considerar o carregamento externo transportado por forças de cisalhamento na área da garganta da solda. Ignorando a tensão normal na garganta, as tensões de cisalhamento são infladas suficientemente para converter o modelo em conservador.
- Usar a energia de distorção para as tensões significativas.
- Circunscrever casos típicos por código.

Para esse modelo, a base para a análise de solda ou projeto emprega

$$\tau = \frac{F}{0{,}707hl} = \frac{1{,}414F}{hl} \tag{9-3}$$

a qual assume que a força completa F é levada em conta por meio de uma tensão de cisalhamento na área de garganta mínima. Observe que isso infla a máxima tensão de cisalhamento estimada por um fator de 1,414/1,207 = 1,17. Ademais, considere as soldas de filetes paralelos mostrada na Figura 9-11, na qual, assim como na Figura 9-8, cada solda transmite uma força F. Contudo, no caso da Figura 9-11, a tensão de cisalhamento máxima ocorre na área de garganta mínima e corresponde à Equação (9-3).

Sob circunstâncias de carregamento combinado,

- Examinamos as tensões de cisalhamento primárias decorrentes de forças externas.
- Examinamos as tensões de cisalhamento secundárias decorrentes de momentos de flexão e torção.
- Estimamos a(s) resistência(s) do(s) metal(is) original(is).
- Estimamos a resistência do metal de solda depositado.
- Estimamos a(s) carga(s) permitida(s) para o(s) metal(is) original(is).
- Estimamos a carga permissível para o metal de solda depositado.

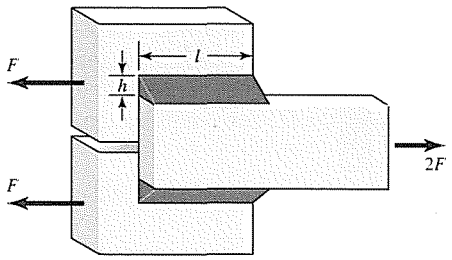


Figura 9-11 Soldas de filete paralelas.

9-3 Tensões em Junções Soldadas sob Torção

A Figura 9-12 ilustra uma viga em balanço de comprimento l soldada a uma coluna por duas soldas de filete. A reação no suporte de uma viga em balanço sempre consiste em uma força de cisalhamento V e um momento M. A força de cisalhamento produz uma *tensão de cisalhamento* nas soldas de magnitude

$$\tau' = \frac{V}{A} \tag{9-4}$$

em que A é a área de garganta de toda a solda.

O momento no apoio produz uma *tensão secundária* ou *torção* das soldas, e essa tensão é dada pela equação

$$\tau'' = \frac{Mr}{J} \tag{9-5}$$

em que r é a distância do centróide do grupo de soldas ao ponto na solda de interesse e J é o segundo momento polar de área do grupo de solda ao redor do centróide do grupo. Quando os tamanhos de soldas são conhecidos, essas equações podem ser solucionadas e os resultados combinados para obter a tensão de cisalhamento máxima. Note que r é geralmente a distância mais longe do centróide do grupo de solda.

A Figura 9-13 mostra duas soldas em um grupo. Os retângulos representam as áreas de garganta das soldas. A solda 1 tem uma largura de garganta $b_1 = 0{,}707h_1$, e a solda 2 tem uma largura de garganta $d_2 = 0{,}707h_2$. Note que h_1 e h_2 são os tamanhos de solda respectivos. A área de garganta de ambas as soldas juntas é

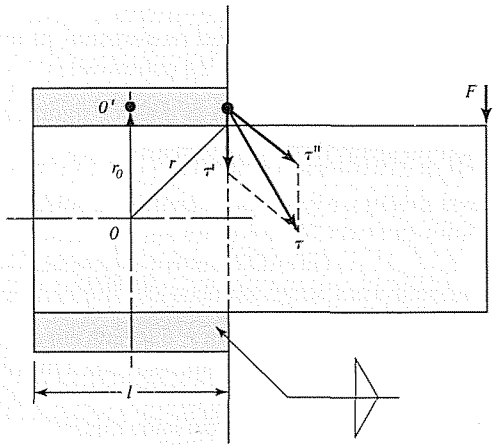


Figura 9-12 Esta é uma conexão de momento; tal conexão produz torção nas soldas.

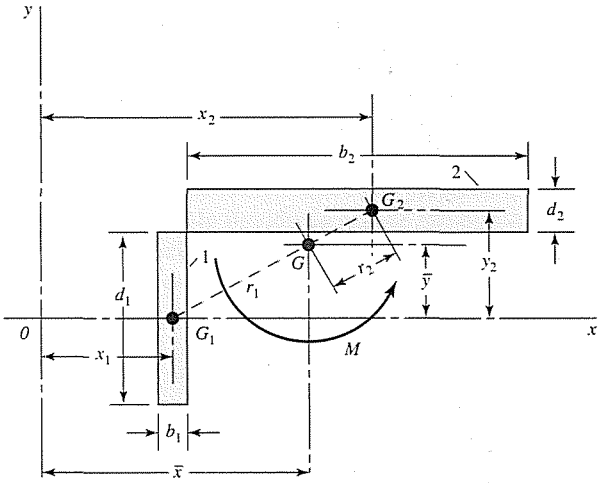


Figura 9-13

$$A = A_1 + A_2 = b_1 d_1 + b_2 d_2 \tag{a}$$

Esta é a área que deve ser usada na Equação (9-4).

O eixo x na Figura 9-13 passa pelo centróide G_1 da solda 1. O segundo momento de área ao redor desse eixo é

$$I_x = \frac{b_1 d_1^3}{12}$$

Similarmente, o segundo momento de área ao redor de um eixo passando por G_1 paralelo ao eixo y é

$$I_y = \frac{d_1 b_1^3}{12}$$

Assim, o segundo momento polar de área da solda 1 ao redor de seu próprio centróide é

$$J_{G1} = I_x + I_y = \frac{b_1 d_1^3}{12} + \frac{d_1 b_1^3}{12} \tag{b}$$

De uma maneira similar, o segundo momento polar de área da solda 2 com relação ao seu centróide é

$$J_{G2} = \frac{b_2 d_2^3}{12} + \frac{d_2 b_2^3}{12} \tag{c}$$

O centróide G do grupo de solda está localizado em

$$\bar{x} = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2}{A} \qquad \bar{y} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A}$$

Usando a Figura 9-13 outra vez, vemos que as distâncias r_1 e r_2 de G_1 e G_2 para G, respectivamente, são

$$r_1 = [(\bar{x} - x_1)^2 + \bar{y}^2]^{1/2} \qquad r_2 = [(y_2 - \bar{y})^2 + (x_2 - \bar{x})^2]^{1/2}$$

Agora, usando o teorema de eixos paralelos, encontramos o segundo momento polar de área do grupo de solda sendo

$$J = \left(J_{G1} + A_1 r_1^2\right) + \left(J_{G2} + A_2 r_2^2\right) \tag{d}$$

Esta é a quantidade a ser usada na Equação (9-5). A distância r deve ser medida de G e o momento M, computado ao redor de G.

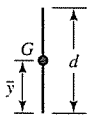
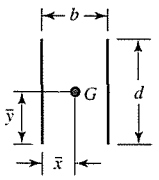
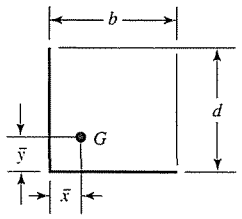
O procedimento inverso é aquele no qual a tensão de cisalhamento permissível é dada e desejamos encontrar o tamanho de solda. O procedimento usual é estimar um tamanho de solda provável e então usar iteração.

Observe nas Equações (b) e (c) as quantidades b_1^3 e d_2^3, respectivamente, que são o cubo das larguras de solda. Essas quantidades são pequenas e podem ser desconsideradas. Isso nos deixa os termos $b_1 d_1^3/12$ e $d_2 b_2^3/12$, que fazem J_{G1} e J_{G2} lineares na largura da solda. Deixar as larguras de solda b_1 e d_2 iguais à unidade leva-nos à idéia de tratar cada filete de solda como uma linha. O segundo momento de área resultante é então um *segundo momento polar unitário de área.* A vantagem do tratamento do tamanho de solda como uma linha é que o valor de J_u é o mesmo independentemente do tamanho da solda. Visto que a largura de garganta de uma solda de filete é $0{,}707h$, a relação entre J e o valor unitário é

$$J = 0{,}707 h J_u \tag{9-6}$$

na qual J_u é encontrado por métodos convencionais para uma área com largura unitária. A fórmula de transferência para J_u deve ser empregada quando as soldas ocorrem em grupos, como na Figura 9-12. A Tabela 9-1 lista as áreas de garganta e os segundos momentos polares de área para as soldas de filete mais comuns encontradas. O exemplo que segue é típico dos cálculos normalmente feitos.

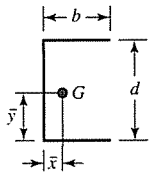
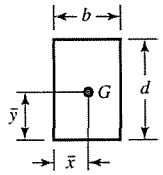
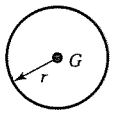
Tabela 9-1 Propriedades torcionais de soldas de filete*

Solda	Área de garganta	Localização de G	Segundo momento polar de área unitário
	$A = 0{,}707hd$	$\bar{x} = 0$ $\bar{y} = d/2$	$J_u = d^3/12$
	$A = 1{,}414hd$	$\bar{x} = b/2$ $\bar{y} = d/2$	$J_u = \dfrac{d(3b^2 + d^2)}{6}$
	$A = 0{,}707h(2b + d)$	$\bar{x} = \dfrac{b^2}{2(b+d)}$ $\bar{y} = \dfrac{d^2}{2(b+d)}$	$J_u = \dfrac{(b+d)^4 - 6b^2d^2}{12(b+d)}$

* G é o centróide do grupo de solda; h é o tamanho de solda; plano do binário de torque no plano do papel; todas as soldas são de largura unitária.

(continua...)

Tabela 9-1 Propriedades torcionais de soldas de filete* (continuação)

Solda	Área de garganta	Localização de G	Segundo momento polar de área unitário
	$A = 0{,}707h(2b+d)$	$\bar{x} = \frac{b^2}{2b+d}$ $\bar{y} = d/2$	$J_u = \frac{8b^3+6bd^2+d^3}{12} - \frac{b^4}{2b+d}$
	$A = 1{,}414h(b+d)$	$\bar{x} = b/2$ $\bar{y} = d/2$	$J_u = \frac{(b+d)^3}{6}$
	$A = 1{,}414\pi hr$		$J_u = 2\pi r^3$

* G é o centróide do grupo de solda; h é o tamanho de solda; plano do binário de torque no plano do papel; todas as soldas são de largura unitária.

EXEMPLO 9-1

Uma carga de 50 kN é transferida de um encaixe soldado a um canal de aço de 200 mm, como ilustrado na Figura 9-14. Estime a tensão máxima na solda.

Solução[3]

(*a*) Rotule as extremidades e os cantos de cada solda por letra. Às vezes é desejável rotular cada solda de um conjunto por número. Veja a Figura 9-15.

(*b*) Estime a tensão de cisalhamento primária τ'. Como mostrado na Figura 9-14, cada placa está soldada ao canal por meio de três soldas de filete de 6 mm. A Figura 9-15 mostra que dividimos a carga pela metade e estamos considerando somente uma única placa. Do caso 4 da Tabela 9-1, encontramos a área de garganta como

$$A = 0{,}707(6)[2(56) + 190] = 1280 \text{ mm}^2$$

Então, a tensão de cisalhamento primária é

$$\tau' = \frac{V}{A} = \frac{25(10)^3}{1280} = 19{,}5 \text{ MPa}$$

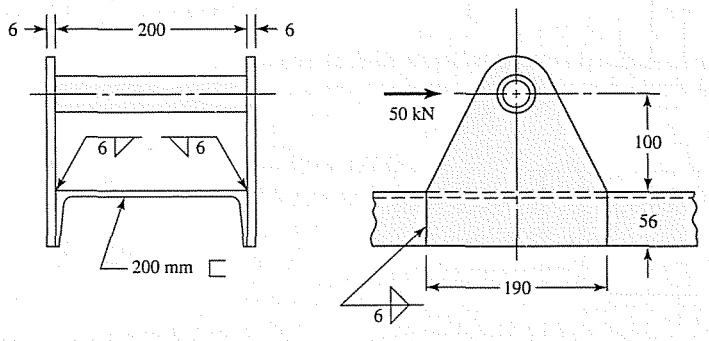


Figura 9-14 Dimensões em milímetros.

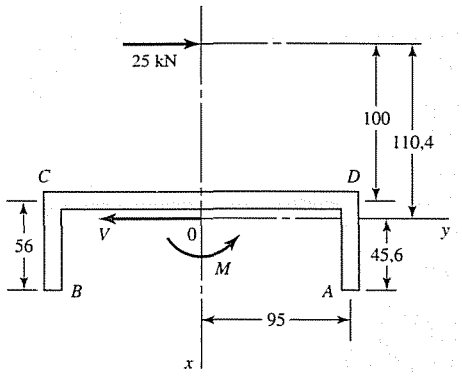


Figura 9-15 Diagrama mostrando a geometria de solda; todas as dimensões em milímetros. Note que V e M representam cargas aplicadas pelas soldas *à placa*.

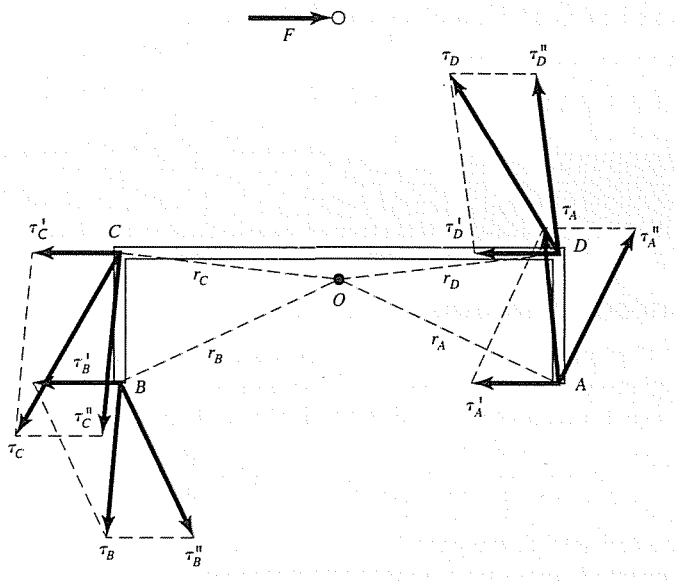


Figura 9-16 Diagrama de corpo livre de uma das placas laterais.

(*c*) Desenhe a tensão τ', em escala, e cada canto marcado com letra ou extremidade. Veja a Figura 9-16.

(*d*) Localize o centróide do padrão soldado. Usando o caso 4 da Tabela 9-1, encontramos

$$\bar{x} = \frac{(56)^2}{2(56) + 190} = 10{,}4 \text{ mm}$$

Isso está mostrado como o ponto O nas Figuras 9-15 e 9-16.

(*e*) Encontre as distâncias r_i (ver Figura 9-16):

$$r_A = r_B = [(190/2)^2 + (56 - 10{,}4)^2]^{1/2} = 105 \text{ mm}$$

$$r_C = r_D = [(190/2)^2 + (10{,}4)^2]^{1/2} = 95{,}6 \text{ mm}$$

Essas distâncias também podem ser representadas em escala no desenho.

(*f*) Encontre J. Usando o caso 4 da Tabela 9-1 outra vez, obtemos

$$J = 0{,}707(6)\left[\frac{8(56)^3 + 6(56)(190)^2 + (190)^3}{12} - \frac{(56)^4}{2(56) + 190}\right]$$

$$= 7{,}07(10)^6 \text{ mm}^4$$

(*g*) Encontre M:

$$M = Fl = 25(100 + 10{,}4) = 2760 \text{ N} \cdot \text{m}$$

(*h*) Estime as tensões de cisalhamento secundárias τ'' em cada extremidade marcada com letra ou canto:

$$\tau''_A = \tau''_B = \frac{Mr}{J} = \frac{2760(10)^3(105)}{7{,}07(10)^6} = 41{,}0 \text{ MPa}$$

$$\tau''_C = \tau''_D = \frac{2760(10)^3(95{,}6)}{7{,}07(10)^6} = 37{,}3 \text{ MPa}$$

(*i*) Desenhe a tensão τ'', em escala, em cada canto ou extremidade. Veja a Figura 9-16. Note que este é um diagrama de corpo livre de uma das placas laterais, e por isso as tensões τ' e τ'' representam o que o canal está fazendo às placas (através das soldas) para agüentar a placa em equilíbrio.

(*j*) Em cada letra, combine as duas componentes de tensão como vetores. Isso dá

$$\tau_A = \tau_B = 37 \text{ MPa}$$

$$\tau_C = \tau_D = 44 \text{ MPa}$$

(*k*) Identifique o ponto de maior tensão:

Resposta

$$\tau_{\max} = \tau_C = \tau_D = 44 \text{ MPa}$$

9-4 Tensões em Junções Soldadas sob Flexão

A Figura 9-17(*a*) mostra uma viga em balanço soldada a um suporte por soldas de filete em cima e em baixo. Um diagrama de corpo livre dessa viga mostraria uma reação de força cortante V e um momento de reação M. A força de cisalhamento produz um cisalhamento primário nas soldas de magnitude

$$\tau' = \frac{V}{A} \tag{a}$$

em que A é a área total de garganta.

O momento M induz uma componente de tensão de cisalhamento de garganta de $0{,}707\tau$ nas soldas.[4] Tratando ambas as soldas da Figura 9-17(*b*) como linhas, encontramos o segundo momento unitário de área como

$$I_u = \frac{bd^2}{2} \tag{b}$$

O segundo momento de área I, baseado na área de garganta de solda, é

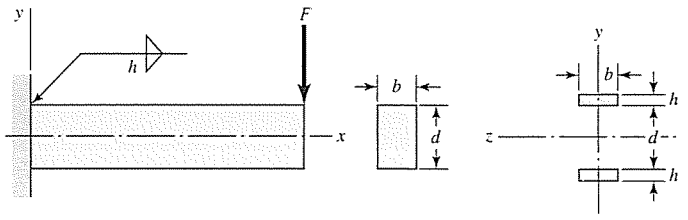
$$I = 0{,}707h I_u = 0{,}707h\frac{bd^2}{2} \tag{c}$$

A tensão nominal de garganta é encontrada agora como sendo

$$\tau = \frac{Mc}{I} = \frac{Md/2}{0{,}707hbd^2/2} = \frac{1{,}414M}{bdh} \tag{d}$$

O modelo dá o coeficiente de 1,414, em contraste com as predições da Seção 9-2 de 1,197 de energia de distorção, ou 1,207 do cisalhamento máximo. O conservadorismo do 1,414 do modelo não é que ele é

[4] De acordo com o modelo descrito precedendo a Equação (9-3), o momento é levado pelas componentes de tensão de cisalhamento $0{,}707\tau$ paralelas ao eixo x da Figura 9-17. As componentes y cancelam-se.



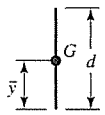
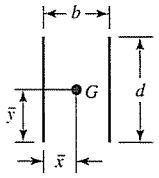
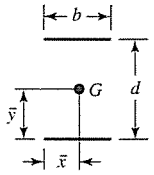
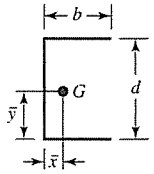
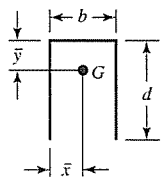
(*a*) (*b*) Padrão de solda

Figura 9-17 Uma viga em balanço de secção transversal retangular soldada a um suporte nas bordas em cima e em baixo.

simplesmente maior que 1,196 ou 1,207, mas os ensaios realizados para validar o modelo mostram que ele é grande o suficiente.

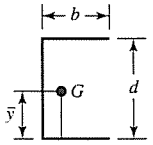
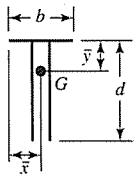
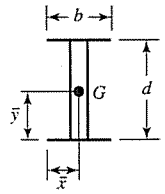
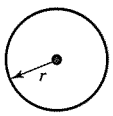
O segundo momento de área na Equação (*d*) é baseado na distância *d* entre as duas soldas. Se esse momento for determinado tratando ambas as soldas como tendo impressões retangulares, a distância entre os centróides de garganta de solda será aproximadamente $(d + h)$. Isso produziria um segundo momento de área ligeiramente maior, e resultaria em um nível menor de tensão. Esse método de tratar soldas como uma linha não interfere no conservadorismo do modelo. Também faz a Tabela 9-2 possível com todas conveniências que advêm.

Tabela 9-2 Propriedades de flexão de soldas de filete*

Solda	Área de garganta	Localização de G	Segundo momento de área unitário
	$A = 0{,}707hd$	$\bar{x} = 0$ $\bar{y} = d/2$	$I_u = \frac{d^3}{12}$
	$A = 1{,}414hd$	$\bar{x} = b/2$ $\bar{y} = d/2$	$I_u = \frac{d^3}{6}$
	$A = 1{,}414hb$	$\bar{x} = b/2$ $\bar{y} = d/2$	$I_u = \frac{bd^2}{2}$
	$A = 0{,}707h(2b + d)$	$\bar{x} = \frac{b^2}{2b+d}$ $\bar{y} = d/2$	$I_u = \frac{d^2}{12}(6b + d)$
	$A = 0{,}707h(b + 2d)$	$\bar{x} = b/2$ $\bar{y} = \frac{d^2}{b+2d}$	$I_u = \frac{2d^3}{3} - 2d^2\bar{y} + (b + 2d)\bar{y}^2$

(continua...)

Tabela 9-2 Propriedades de flexão de soldas de filete* *(continuação)*

Solda	Área de garganta	Localização de G	Segundo momento de área unitário
	$A = 0{,}707h(2b+d)$	$\bar{x} = \dfrac{b^2}{2b+d}$ $\bar{y} = d/2$	$I_u = \dfrac{d^2}{12}(6b+d)$
	$A = 0{,}707h(b+2d)$	$\bar{x} = b/2$ $\bar{y} = \dfrac{d^2}{b+2d}$	$I_u = \dfrac{2d^3}{3} - 2d^2\bar{y} + (b+2d)\bar{y}^2$
	$A = 1{,}414h(b+d)$	$\bar{x} = b/2$ $\bar{y} = d/2$	$I_u = \dfrac{d^2}{6}(3b+d)$
	$A = 1{,}414\pi hr$		$I_u = \pi r^3$

* I_u, segundo momento unitário de área, é tomado ao redor de um eixo horizontal passando por G, o centróide do grupo de solda; h é o tamanho de solda; plano do binário de flexão normal ao plano do papel e paralelo ao eixo y; todas as soldas são do mesmo tamanho.

9-5 Resistência de Junções Soldadas

A compatibilidade entre as propriedades do eletrodo e aquelas do metal original geralmente não é tão importante quanto a velocidade, a qualidade do operador e a aparência da junção total. As propriedades dos eletrodos variam consideravelmente, embora a Tabela 9-3 liste as propriedades mínimas para algumas classes de eletrodos.

É preferível, em projeto de componentes soldadas, selecionar um aço que resultará em uma solda rápida e econômica, mesmo que isso possa requerer um sacrifício de outras qualidades, como a usinabilidade. Sob condições apropriadas, todos os aços podem ser soldados, mas resultados melhores serão obtidos se aços com especificação UNS entre G10140 e G10230 forem escolhidos. Todos esses aços têm resistência à tração na condição de laminado a quente no intervalo de 60 a 70 kpsi.

O projetista pode escolher fatores de segurança ou tensões permissíveis de trabalho com maior confiança se estiver ciente dos valores daqueles usados por outros. Uma das melhores normas a usar é o código para materiais de construção do American Institute of Steel Construction (AISC).[5] As tensões permissíveis agora são baseadas na resistência ao escoamento do material em vez da resistência última, e o código permite o uso de uma variedade de aços estruturais ASTM com resistências ao escoamento que variam de 33 a 50 kpsi. Dado que o carregamento é o mesmo, o código permite a mesma tensão no metal de solda que no metal original. Para esses aços ASTM, $S_y = 0{,}5S_u$. A Tabela 9-4 lista as fórmulas especificadas pelo código para cálculos dessas tensões permissíveis para várias condições de carregamento. Os fatores de segurança implicados por esse código são facilmente calculados. Para tração, $n = 1/0{,}60 = 1{,}67$. Para cisalhamento, $n = 0{,}577/0{,}40 = 1{,}44$, usando a teoria da energia de distorção como o critério de falha.

[5] Para uma cópia, escreva para a AISC, 400 N. Michigan Ave, Chicago, IL 60611, ou contate pela Internet, em www.aisc.org.

Tabela 9-3 Propriedades mínimas metal-solda

Número de eletrodo AWS*	Resistência à tração	Resistência ao escoamento	Elongação percentual
E60xx	62 (427)	50 (345)	17-25
E70xx	70 (482)	57 (393)	22
E80xx	80 (551)	67 (462)	19
E90xx	90 (620)	77 (531)	14-17
E100xx	100 (689)	87 (600)	13-16
E120xx	120 (827)	107 (737)	14

* Sistema de numeração de especificação do código da American Welding Society (AWS). O sistema utiliza um E prefixado a um sistema de numeração de 4 a 5 dígitos, no qual os dois ou três primeiros dígitos designam a resistência à tração aproximada. O último dígito inclui variáveis na técnica de soldagem, como o suprimento de corrente. Os dígitos próximos ao último indicam a posição de soldagem, como, por exemplo, plana ou vertical, ou de sobrecabeça. O conjunto completo de especificações pode ser obtido da AWS por meio de requisição.

Tabela 9-4 Tensões permitidas pela norma AISC para metal de solda

Tipo de carregamento	Tipo de solda	Tensão permissível	n^*
Tração	Topo	$0{,}60S_y$	1,67
Suporte	Topo	$0{,}90S_y$	1,11
Flexão	Topo	$0{,}60\text{-}0{,}66S_y$	1,52-1,67
Compressão simples	Topo	$0{,}60S_y$	1,67
Cisalhamento	Topo ou filete	$0{,}30S_{ut}^{\dagger}$	

* O fator de segurança n tem sido computado usando-se a teoria da energia de distorção.
† A tensão de cisalhamento no metal de base não excederá a $0{,}40S_y$ do metal de base.

É importante observar que o material do eletrodo geralmente é o mais forte presente. Se uma barra de aço AISI 1010 for soldada a uma de aço 1018, o metal de solda é realmente uma mistura do material de eletrodo e dos aços 1010 e 1018. Ademais, uma barra repuxada a frio soldada tem suas propriedades de repuxe a frio substituídas pelas propriedades de laminado a quente nas adjacências da solda. Por fim, relembrando que o metal de solda freqüentemente é o mais forte, você deve verificar as tensões nos metais originais.

O código AISC, bem como o AWS, para pontes inclui tensões permissíveis quando carregamento de fadiga estiver presente. O projetista não terá dificuldade em usar esses códigos, porém a natureza empírica deles tende a obscurecer o fato de que foram estabelecidos pelo mesmo conhecimento de falha de fadiga já discutido no Capítulo 7. Por certo, para as estruturas cobertas por esses códigos, as tensões reais *não podem* exceder às tensões permissíveis; do contrário, o projetista será legalmente responsável. Mas, em geral, qualquer código tende a ocultar a margem real de segurança envolvida.

Os fatores de concentração de tensão de fadiga listados na Tabela 9-5 são sugeridos para uso. Eles devem ser utilizados tanto para o metal original como para o de solda. A Tabela 9-6 provê informação da carga permanente e dos tamanhos mínimos de filete.

Tabela 9-5 Fatores de concentração de tensão de fadiga, K_{fs}

Tipo de solda	K_{fs}
Solda de topo reforçada	1,2
Ponta de solda de filete transversal	1,5
Extremidade de solda paralela	2,7
Junção de topo-T com cantos aguçados	2,0

Tabela 9-6 Cargas permanentes permitidas e tamanhos mínimos de solda de filete

Plano A: Carga permitida de vários tamanhos de soldas de filete

Nível de resistência do metal de solda

	60*	70*	80	90*	100	110*	120
Tensão de cisalhamento permitida na garganta, ksi (1000 psi) de solda de filete ou solda de entalhe de penetração parcial							
$\tau =$	18,0	21,0	24,0	27,0	30,0	33,0	36,0
Força unitária permitida em solda de filete, kip/in linear							
†$f =$	12,73h	14,85h	16,97h	19,09h	21,21h	23,33h	25,45h

Tamanho de perna, h, in	Força unitária permitida para vários tamanhos de soldas de filete kip/in linear						
1	12,73	14,85	16,97	19,09	21,21	23,33	25,45
7/8	11,14	12,99	14,85	16,70	18,57	20,41	22,27
3/4	9,55	11,14	12,73	14,32	15,92	17,50	19,09
5/8	7,96	9,28	10,61	11,93	13,27	14,58	15,91
1/2	6,37	7,42	8,48	9,54	10,61	11,67	12,73
7/16	5,57	6,50	7,42	8,35	9,28	10,21	11,14
3/8	4,77	5,57	6,36	7,16	7,95	8,75	9,54
5/16	3,98	4,64	5,30	5,97	6,63	7,29	7,95
1/4	3,18	3,71	4,24	4,77	5,30	5,83	6,36
3/16	2,39	2,78	3,18	3,58	3,98	4,38	4,77
1/8	1,59	1,86	2,12	2,39	2,65	2,92	3,18
1/16	0,795	0,930	1,06	1,19	1,33	1,46	1,59

* Soldas de filete realmente ensaiadas pelo Comitê de Trabalho Conjunto AISC-AWS.
† $f = 0{,}707h\tau_{all}$.

Plano B: Tamanho mínimo de solda de filete

Espessura do material da parte unida mais espessa, in		Tamanho de solda, in
*Até $\frac{1}{4}$ incl.		$\frac{1}{8}$
Acima de $\frac{1}{4}$	Até $\frac{1}{2}$	$\frac{3}{16}$
Acima de $\frac{1}{2}$	Até $\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
†Acima de $\frac{3}{4}$	Até $1\frac{1}{2}$	$\frac{5}{16}$
Acima de $1\frac{1}{2}$	Até $2\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$
Acima de $2\frac{1}{4}$	Até 6	$\frac{1}{2}$
Acima de 6		$\frac{5}{8}$

Não exceder à espessura da parte mais fina.

* O tamanho mínimo para aplicação em pontes não desce abaixo de $\frac{3}{16}$ in.

† Para um tamanho mínimo de solda de filete, o plano não vai acima de $\frac{5}{16}$ in de solda de filete para cada $\frac{3}{4}$ in de material.

Fonte: De Omer W. Blodgett (ed.), *Stress Allowables Affect Weldment Design*, D412, The James F. Lincoln Arc Welding Foundation, Cleveland, May 1991, p. 3. *Reimpressa com permissão da Lincoln Electric Company.*

9-6 Carregamento Estático

Alguns exemplos de junções carregadas estaticamente são úteis na comparação e no contraste de métodos convencionais de análise com a metodologia de códigos de soldagem.

EXEMPLO 9-2

Uma barra de 1015 de secção transversal retangular de $\frac{1}{2}$ in por 2 in suporta uma carga estática de 16,5 kip. Ela é soldada a uma chapa de reforço com uma solda de filete de $\frac{3}{8}$ in com comprimento de 2 in, em ambos os lados, com um eletrodo E70XX, como representado na Figura 9-18. Use o método do código de soldagem.

(*a*) É satisfatória a resistência do metal de solda?

(*b*) É satisfatória a resistência da fixação?

Solução

(*a*) A partir da Tabela 9-6, a força admissível por unidade de comprimento para um eletrodo de metal E70 de $\frac{3}{8}$ in é 5,57 kip/in de soldadura; assim

$$F = 5{,}57l = 5{,}57(4) = 22{,}28 \text{ kip}$$

Sendo 22,28 > 16,5 kip, a resistência do metal de solda é satisfatória.

(*b*) Verifique o cisalhamento na fixação adjacente às soldas. A partir das Tabelas 9-4 e A-20, da qual S_y = 27,5 kpsi, a tensão de cisalhamento permissível na fixação é

$$\tau_{\text{all}} = 0{,}4S_y = 0{,}4(27{,}5) = 11 \text{ kpsi}$$

A tensão de cisalhamento τ na base de metal adjacente à solda é

$$\tau = \frac{F}{2hl} = \frac{16{,}5}{2(0{,}375)2} = 11 \text{ kpsi}$$

Sendo $\tau_{\text{all}} \geq \tau$, a fixação é satisfatória próximo às contas de solda. A tensão de tração na perna da fixação σ é

$$\sigma = \frac{F}{tl} = \frac{16{,}5}{(1/2)2} = 16{,}5 \text{ kpsi}$$

A tensão de tração admissível σ_{all}, da Tabela 9-4, é $0{,}6S_y$ e, preservando o nível de segurança do código de soldagem,

$$\sigma_{\text{all}} = 0{,}6S_y = 0{,}6(27{,}5) = 16{,}5 \text{ kpsi}$$

Sendo $\sigma_{\text{all}} \geq \sigma$, a tensão de tração de perna é satisfatória.

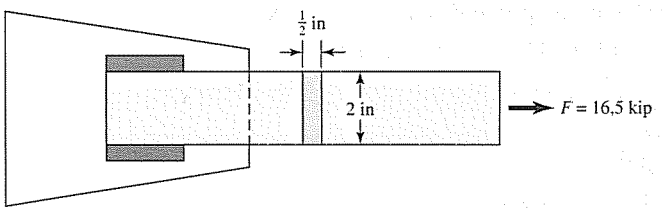


Figura 9-18

EXEMPLO 9-3

Uma secção de aço estrutural A36 especialmente laminada para fixação tem uma secção transversal como mostrado na Figura 9-19, uma resistência ao escoamento de 36 kpsi e uma resistência à tração de 58

kpsi. Ela é estaticamente carregada pelo centróide da fixação com uma carga $F = 24$ kip. Linhas de solda não-simétricas podem compensar pela excentricidade, tanto que não existe momento a ser resistido pelas soldas. Especifique os comprimentos de linha de solda l_1 e l_2 para uma solda de filete de 5/16 in usando um eletrodo E70XX. Isso é parte de um problema de projeto no qual as variáveis de projeto incluem comprimentos de solda e tamanho de perna de filete.

Solução

A coordenada y do centróide da secção de fixação é

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i} = \frac{1(0{,}75)2 + 3(0{,}375)2}{0{,}75(2) + 0{,}375(2)} = 1{,}67 \text{ in}$$

Somando os momentos em torno do ponto B e igualando a zero resulta

$$\sum M_B = 0 = -F_1 b + F\bar{y} = -F_1(4) + 24(1{,}67)$$

e daí

$$F_1 = 10 \text{ kip}$$

Segue que

$$F_2 = 24 - 10{,}0 = 14{,}0 \text{ kip}$$

As áreas de garganta de solda têm de estar na razão 14/10 = 1,4, isto é, $l_2 = 1{,}4l_1$. As variáveis de projeto de comprimento de solda estão acopladas por essa relação; assim, l_1 é a variável de projeto de comprimento de solda. A outra variável de projeto é o tamanho de perna de solda h, que foi estabelecido no enunciado do problema. Da Tabela 9-4, a tensão de cisalhamento permissível na garganta τ_{all} é

$$\tau_{\text{all}} = 0{,}3(70) = 21 \text{ kpsi}$$

A tensão de cisalhamento τ na garganta de 45° é

$$\tau = \frac{F}{(0{,}707)h(l_1 + l_2)} = \frac{F}{(0{,}707)h(l_1 + 1{,}4l_1)}$$

$$= \frac{F}{(0{,}707)h(2{,}4l_1)} = \tau_{\text{all}} = 21 \text{ kpsi}$$

da qual o comprimento de solda l_1 é

$$l_1 = \frac{24}{21(0{,}707)0{,}3125(2{,}4)} = 2{,}16 \text{ in}$$

e

$$l_2 = 1{,}4l_1 = 1{,}4(2{,}16) = 3{,}02 \text{ in}$$

Esses são os comprimentos de contas de solda requeridos pela resistência de metal de solda. A tensão de cisalhamento permissível da fixação no metal de base, pela Tabela 9-4, é

$$\tau_{\text{all}} = 0{,}4S_y = 0{,}4(36) = 14{,}4 \text{ kpsi}$$

A tensão de cisalhamento τ no metal de base adjacente à solda é

$$\tau = \frac{F}{h(l_1 + l_2)} = \frac{F}{h(l_1 + 1{,}4l_1)} = \frac{F}{h(2{,}4l_1)} = \tau_{\text{all}} = 14{,}4 \text{ kpsi}$$

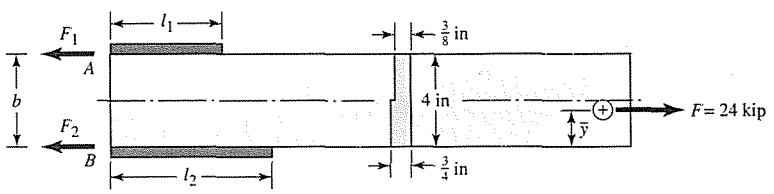


Figura 9-19

e daí

$$l_1 = \frac{F}{14{,}4h(2{,}4)} = \frac{24}{14{,}4(0{,}3125)2{,}4} = 2{,}22 \text{ in}$$

$$l_2 = 1{,}4l_1 = 1{,}4(2{,}22) = 3{,}11 \text{ in}$$

Esses são os comprimentos de contas de solda requeridos pela resistência do metal de base (fixação). O metal de base controla os comprimentos de solda. Para a tensão de tração admissível σ_{all} na perna da fixação, o valor permissível do AISC para membros de tração é $0{,}6S_y$; logo,

$$\sigma_{all} = 0{,}6S_y = 0{,}6(36) = 21{,}6 \text{ kpsi}$$

A tensão de tração nominal σ é *uniforme* ao longo da secção transversal da fixação por causa da aplicação da carga no centróide. A tensão σ é

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{24}{0{,}75(2) + 2(0{,}375)} = 10{,}7 \text{ kpsi}$$

Sendo $\sigma_{all} \geq \sigma$, a secção de perna é satisfatória. Com l_1 fixado a um valor nominal $2\frac{1}{4}$ in, l_2 deve ser 1,4(2,25) = 3,15 in.

Decisão

Fixar $l_1 = 2\frac{1}{4}$ in, $l_2 = 3\frac{1}{4}$ in. A pequena magnitude de desvio de $l_2/l_1 = 1{,}4$ não é séria. A junção é essencialmente livre de momento.

EXEMPLO 9-4

Realize uma avaliação de adequação da viga em balanço soldada e carregada estaticamente com 500 lbf, representada na Figura 9-20. A viga em balanço é feita de aço AISI 1018 laminado a quente e soldada com uma solda de filete de $\frac{3}{8}$ in, como mostrado na figura. Um eletrodo E6010 foi usado, e o fator de projeto foi 3,0.

(*a*) Use o método convencional para o metal de solda.

(*b*) Use o método convencional para o metal de fixação (viga em balanço).

(*c*) Use um código de soldagem para o metal de solda.

Solução

(*a*) A partir da Tabela 9-3, $S_y = 50$ kpsi, $S_{ut} = 62$ kpsi. A partir da Tabela 9-2, segunda configuração, $b = 0{,}375$ in, $d = 2$ in, assim

$$A = 1{,}414hd = 1{,}414(0{,}375)2 = 1{,}06 \text{ in}^2$$

$$I_u = d^3/6 = 2^3/6 = 1{,}33 \text{ in}^3$$

$$I = 0{,}707hI_u = 0{,}707(0{,}375)1{,}33 = 0{,}353 \text{ in}^4$$

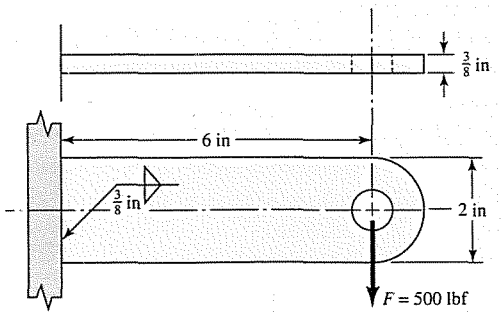


Figura 9-20

Cisalhamento primário:

$$\tau' = \frac{F}{A} = \frac{500(10^{-3})}{1{,}06} = 0{,}472 \text{ kpsi}$$

Cisalhamento secundário:

$$\tau'' = \frac{Mr}{I} = \frac{500(10^{-3})(6)(1)}{0{,}353} = 8{,}50 \text{ kpsi}$$

A magnitude do cisalhamento τ é a combinação de Pitágoras

$$\tau = (\tau'^2 + \tau''^2)^{1/2} = (0{,}472^2 + 8{,}50^2)^{1/2} = 8{,}51 \text{ kpsi}$$

O fator de segurança baseado em uma resistência mínima e no critério da energia de distorção é

Resposta
$$n = \frac{S_{sy}}{\tau} = \frac{0{,}577(50)}{8{,}51} = 3{,}39$$

Visto que $n \geq n_d$, isto é, $3{,}39 \geq 3{,}0$, a junção é insatisfatória no que se relaciona à resistência de fixação.

(*b*) Da Tabela A-20, as resistências mínimas são $S_{ut} = 58$ kpsi e $S_y = 32$ kpsi. Então,

$$\sigma = \frac{M}{I/c} = \frac{M}{bd^2/6} = \frac{500(10^{-3})6}{0{,}375(2^2)/6} = 12 \text{ kpsi}$$

Resposta
$$n = \frac{S_y}{\sigma} = \frac{32}{12} = 2{,}67$$

Uma vez que $n < n_d$, isto é, $2{,}67 < 3{,}0$, a junta é insatisfatória com relação à resistência da fixação.

(*c*) A partir de (*a*), $\tau = 8{,}51$ kpsi. Para um eletrodo E6010, a Tabela 9-6 dá a tensão de cisalhamento permissível τ_{all} como 18 kpsi. Sendo $\tau < \tau_{all}$, a solda é satisfatória. Visto que o código já tem um fator de projeto de $0{,}577(50)/18 = 1{,}6$ incluído na igualdade, o fator de segurança correspondente a (*a*) é

Resposta
$$n = 1{,}6\frac{18}{8{,}51} = 3{,}38$$

que é consistente.

9-7 Carregamento de Fadiga

Os métodos convencionais serão supridos aqui. Em fadiga, o critério de Gerber é o melhor; contudo, você verá que o critério de Goodman é de uso comum. Lembre-se de que os fatores de concentração de tensão em fadiga são dados na Tabela 9-5. Para códigos de soldagem, veja as tensões permissíveis de fadiga no manual AISC.

Alguns exemplos de carregamento de fadiga de junções soldadas serão apresentados a seguir.

EXEMPLO 9-5

A tira de aço 1018 da Figura 9-21 tem uma carga completamente reversível de 1000 lbf aplicada. Determine o fator de segurança da soldagem para vida infinita.

Solução

A partir da Tabela A-20 para o metal de fixação 1018, as resistências são $S_{ut} = 58$ kpsi e $S_y = 32$ kpsi. Para o eletrodo E6010, $S_{ut} = 62$ kpsi e $S_y = 50$ kpsi. O fator de concentração de tensão de fadiga da Tabela 9-5 é $K_{fs} = 2{,}7$. Da Tabela 7-4, $k_a = 39{,}9(58)^{-0.995} = 0{,}702$. A área de cisalhamento é

$$A = 2(0{,}707)0{,}375(2) = 1{,}061 \text{ in}^2$$

Para uma tensão de cisalhamento uniforme na garganta, $k_b = 1$.

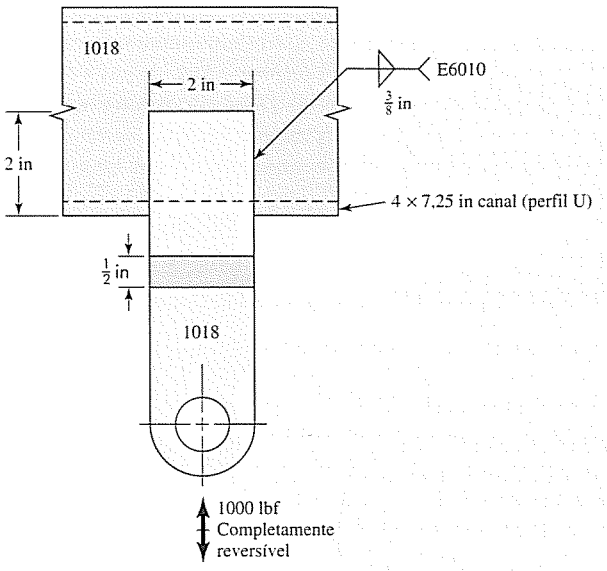


Figura 9-21

A partir da Equação (7-25) para torção (cisalhamento),

$$k_c = 0{,}59 \qquad k_d = k_e = k_f = 1$$

Das Equações (7-8) e (7-17),

$$S_{se} = 0{,}702(1)0{,}59(1)(1)(1)0{,}504(58) = 12{,}1 \text{ kpsi}$$

$$K_{fs} = 2{,}7 \qquad F_a = 1000 \text{ lbf} \qquad F_m = 0$$

Somente cisalhamento primário está presente:

$$\tau'_a = \frac{K_{fs} F_a}{A} = \frac{2{,}7(1000)}{1{,}061} = 2545 \text{ psi} \qquad \tau'_m = 0 \text{ psi}$$

Na ausência de uma componente média, o fator de fadiga de segurança n_f é dado por

Resposta

$$n_f = \frac{S_{se}}{\tau'_a} = \frac{12\ 100}{2545} = 4{,}75$$

EXEMPLO 9-6

A tira de aço 1018 da Figura 9-22 tem uma carga aplicada repetidamente de 2000 lbf ($F_a = F_m = 1000$ lbf). Determine o fator de segurança a falha por fadiga da soldagem.

Solução

A partir da Tabela 7-4, $k_a = 39{,}9(58)^{-0{,}995} = 0{,}702$

$$A = 2(0{,}707)0{,}375(2) = 1{,}061 \text{ in}^2$$

Para tensão de cisalhamento uniforme na garganta, $k_b = 1$.
Da Equação (7-25), $k_c = 0{,}59$. Das Equações (7-8) e (7-17),

$$S_{se} = 0{,}702(1)0{,}59(1)(1)(1)0{,}504(58) = 12{,}1 \text{ kpsi}$$

Da Tabela 9-5, $K_{fs} = 2$. Somente cisalhamento primário está presente:

$$\tau'_a = \tau'_m = \frac{K_{fs} F_a}{A} = \frac{2(1000)}{1{,}061} = 1885 \text{ psi}$$

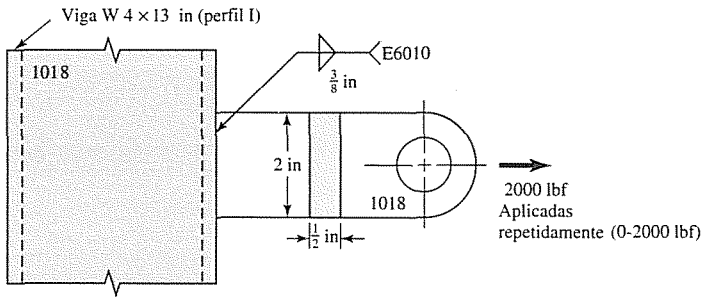


Figura 9-22

A partir da Equação (7-56), $S_{su} \doteq 0{,}67S_{ut}$. Isso, juntamente com o critério de falha por fadiga de Gerber para tensões de cisalhamento, da Tabela 7-10, resulta em

$$n_f = \frac{1}{2}\left(\frac{0{,}67S_{ut}}{\tau_m}\right)^2 \frac{\tau_a}{S_{se}}\left[-1+\sqrt{1+\left(\frac{2\tau_m S_{se}}{0{,}67S_{ut}\tau_a}\right)^2}\right]$$

Resposta

$$n_f = \frac{1}{2}\left[\frac{0{,}67(58)}{1{,}885}\right]^2 \frac{1{,}885}{12{,}1}\left\{-1+\sqrt{1+\left[\frac{2(1{,}885)12{,}1}{0{,}67(58)1{,}885}\right]^2}\right\} = 5{,}9$$

9-8 Soldagem de Resistência

O aquecimento e a conseqüente soldagem que ocorre quando uma corrente elétrica passa por várias peças que estão prensadas em conjunto são chamados de *soldagem de resistência*. *Soldagem de ponto* e *soldagem de costura* são as formas de soldagem de resistência mais comumente usadas. As vantagens da soldagem de resistência sobre outras formas são a velocidade, a regulagem precisa de tempo e calor, a uniformidade da solda e as propriedades mecânicas que resultam. Além disso, o processo é fácil de automatizar, e não são necessários metal de enchimento nem fluxos.

Os processos de soldagem de ponto e de costura estão ilustrados esquematicamente na Figura 9-23. A soldagem de costura é realmente uma série de soldas de ponto superpostas, visto que a corrente é aplicada em pulsos à medida que a peça se move entre os eletrodos girantes.

Falhas numa solda de resistência podem ocorrer seja por cisalhamento da solda, seja por rasgamento do metal em torno desta. Devido à possibilidade de rasgamento, é boa prática evitar o carregamento de uma

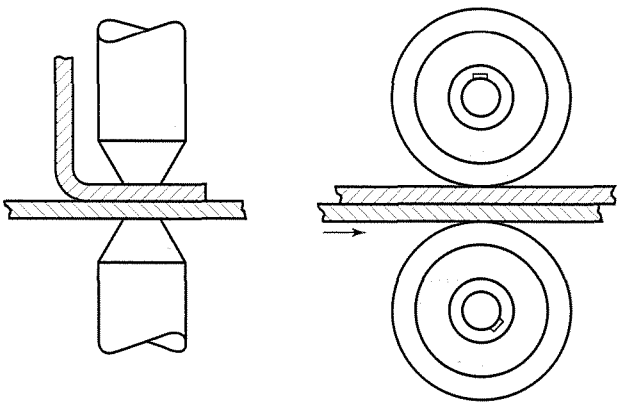


Figura 9-23 (*a*) Soldagem de ponto; (*b*) soldagem de costura.

junção soldada de resistência à tração. Assim, para a maioria dos casos, projete de modo que o ponto ou costura esteja carregado em cisalhamento puro. A tensão de cisalhamento é então simplesmente a carga dividida pela área do ponto. Visto que a chapa mais fina do par sendo soldado pode rasgar, a resistência das soldas de ponto é freqüentemente especificada declarando-se a carga por ponto baseada na espessura da chapa mais fina. Tais resistências são melhor obtidas por experimento.

Fatores de segurança maiores devem ser usados quando peças são fixadas por soldagem de ponto em vez de por parafusos de porca ou rebites, para considerar mudanças metalúrgicas nos materiais a causa da soldagem.

9-9 Junções Rebitadas e Parafusadas com Porcas Carregadas em Cisalhamento[6]

Junções rebitadas e parafusadas com porcas carregadas em cisalhamento são tratadas da mesma forma em projeto e análise.

Na Figura 9-24(*a*) é mostrada uma conexão rebitada carregada em cisalhamento. Estudaremos agora os vários meios pelos quais essa conexão pode falhar.

A Figura 9-24(*b*) mostra uma falha por flexão de um rebite ou membros rebitados. O momento flexor é aproximadamente $M = Ft/2$, em que F é a força de cisalhamento e t, o agarramento do rebite, que é a espessura total das peças conectadas. A tensão de flexão nos membros ou no rebite é, desprezando a concentração de tensão,

$$\sigma = \frac{M}{I/c} \tag{9-7}$$

em que I/c é o módulo da secção para o membro mais fraco ou para o rebite ou rebites, dependendo de qual tensão deve ser encontrada. O cálculo da tensão de flexão dessa maneira é uma suposição, porque não sabe-

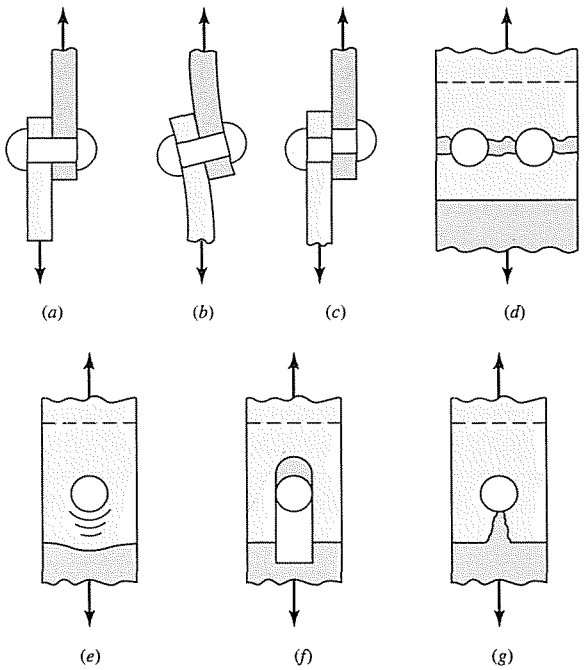


Figura 9-24 Modos de falha em carregamento de cisalhamento de uma conexão parafusada ou rebitada: (*a*) carregamento de cisalhamento; (*b*) flexão do rebite; (*c*) cisalhamento do rebite; (*d*) falha de tração dos membros; (*e*) apoio (compressão) do rebite sobre os membros ou compressão destes sobre o rebite; (*f*) rasgamento de cisalhamento; (*g*) rasgamento de tração.

[6] Projetos de conexões rebitadas e parafusadas com porca para caldeiras, pontes, edifícios e outras estruturas nas quais perigo à vida humana está envolvido devem ser estritamente regidos pelos códigos de construção. Ao projetar estruturas tais, o engenheiro deve referir-se ao *American Institute of Steel Construction Handbook*, às especificações da *American Railway Engineering Association*, ou ao *Boiler Construction Code* da *American Society of Mechanical Engineers*.

mos exatamente como a carga está distribuída para o rebite nem as deformações relativas deste e dos membros. Embora essa equação possa ser usada para determinar a tensão de flexão, é raramente usada em projeto; em vez disso, seu efeito é compensado por um aumento no fator de segurança.

Na Figura 9-24(*c*) a falha do rebite por cisalhamento puro é mostrada; a tensão no rebite é

$$\tau = \frac{F}{A} \tag{9-8}$$

em que A é a área da secção transversal de todos os rebites no grupo. Pode ser notado que é prática-padrão em projeto estrutural usar o diâmetro nominal do rebite em vez do diâmetro do furo, mesmo que um rebite cravado a quente se expanda e quase preencha completamente o furo.

A ruptura de um dos membros conectados ou chapas por tração pura está ilustrada na Figura 9-24(*d*). A tensão de tração é

$$\sigma = \frac{F}{A} \tag{9-9}$$

em que A é a área líquida da chapa, que é a área reduzida por uma quantidade igual à área de todos os furos de rebites. Para materiais frágeis e cargas estáticas e para materiais quer dúcteis ou frágeis carregados em fadiga, os efeitos de concentração de tensão devem ser incluídos. É verdade que o uso de um parafuso de porca com uma pré-carga inicial e, às vezes, um rebite deixará a área em torno do furo em compressão e, assim, tenderá a anular os efeitos de concentração de tensão, porém, a menos que passos definidos sejam tomados para assegurar que a pré-carga não diminua, fica-se no lado conservador ao se projetar como se o efeito de concentração de tensão estivesse presente. Os efeitos de concentração de tensão não são considerados em projeto estrutural, porque as cargas são estáticas e os materiais, dúcteis.

No cálculo da área para a Equação (9-9), o projetista deve, por certo, usar a combinação de furos de rebite ou parafuso que der a menor área.

A Figura 9-24(*e*) ilustra uma falha por esmagamento do rebite ou chapa. O cálculo dessa tensão, que é geralmente chamada de *tensão de compressão* (*de apoio*), é complicado pela distribuição da carga na superfície cilíndrica do rebite. Os valores exatos das forças atuando no rebite são desconhecidos, e assim se costuma assumir que as componentes dessas forças estejam uniformemente distribuídas sobre a área projetada de contato do rebite. Isso dá para a tensão

$$\sigma = -\frac{F}{A} \tag{9-10}$$

em que a área projetada para um único rebite é $A = td$. Aqui, t é a espessura da chapa mais fina e d, o diâmetro do rebite ou do parafuso de porca.

O cisalhamento de borda, ou rasgamento, da margem é mostrado na Figura 9-24(*f*) e (*g*), respectivamente. Na prática estrutural, essa falha é evitada espaçando-se os rebites pelo menos $1\frac{1}{2}$ diâmetro para longe da borda. Conexões parafusadas geralmente são espaçadas uma distância ainda maior que essa, para aparência satisfatória, e então esse tipo de falha pode ser desprezado na avaliação de adequação.

No projeto estrutural é comum selecionar de antemão o número de rebites e seus diâmetros e espaçamentos. A resistência é então determinada para cada método de falha. Se ela resultar insatisfatória, uma mudança é feita no diâmetro, no espaçamento ou na quantidade de rebites usados para aumentá-la. O modo de operação consiste em completar o conjunto de decisão e realizar uma avaliação de adequação; se o projeto for satisfatório, o próximo passo é estimar a figura de mérito e continuar a melhorá-la, se possível. Não é prática usual de ensino considerar os efeitos combinados dos vários métodos de falha.

Em junções não-permanentes usando parafusos de porca, depois da desmontagem, os fixadores são substituídos, mas os membros, e outros elementos, tais como placas de união ou de alça, são reutilizados. Eles são membros permanentes de uma junção não-permanente. O foco no Capítulo 8 estava nos elementos de união, não nos membros da junta. Neste capítulo, temos a oportunidade de examinar os membros permanentes da junção.

Em uma junção de rebite, todos os rebites compartilham a carga em cisalhamento, a compressão e o cisalhamento no rebite e a compressão no membro. Nas outras falhas, somente parte da junção participa. Em uma junção parafusada, o cisalhamento é suportado pela fricção de retenção, e não há compressão. Quando a pré-carga do parafuso de porca é perdida, um parafuso começa a carregar o cisalhamento e a compressão até que o escoamento vagarosamente traga outros fixadores a compartilhar o cisalhamento e a compressão. Por fim, todos participam, e essa é a base de análise da maioria das junções parafusadas caso a perda da pré-carga do parafuso seja total. A análise usual envolve

- Compressão no parafuso (todos os parafusos participam)
- Compressão nos membros (todos os furos participam)
- Cisalhamento de parafuso (todos os parafusos participam)
- Distinção entre cisalhamento de rosca e de haste
- Cisalhamento de borda e rasgamento do membro (parafusos de borda participam)
- Escoamento por tração do membro através dos furos de parafuso de porca
- Verificação da capacidade do membro.

EXEMPLO 9-7

Duas barras de aço 1018 laminadas a frio de 1 in por 4 in são unidas por meio de sobreposição de duas chapas de união de aço 1018 laminadas a frio de $\frac{1}{2}$in por 4 in, usando quatro parafusos de porca 16 UNF grau 5 de $\frac{3}{4}$ in, como representado na Figura 9-25. Para um fator de projeto de $n_d = 1{,}5$, estime a carga estática F que pode ser suportada se os parafusos perderem a pré-carga.

Solução

A partir da Tabela A-20, são encontradas as resistências mínimas de $S_y = 54$ kpsi e $S_{ut} = 64$ kpsi, para os membros, e, a partir da Tabela 8-9, as resistências mínimas de $S_p = 85$ kpsi e $S_{ut} = 120$ kpsi, para os parafusosde porca.

$F/2$ é transmitida por cada uma das placas de sobreposição, mas, visto que as áreas das placas de sobreposição são metade daquelas das barras de centro, as tensões associadas com as placas são as mesmas. Assim, para as tensões associadas com as placas, a força e as áreas usadas serão aquelas das placas de centro.

Com pressão nos parafusos, todos os parafusos carregados:

$$\sigma = \frac{F}{2td} = \frac{S_p}{n_d}$$

$$F = \frac{2tdS_p}{n_d} = \frac{2(1)\left(\frac{3}{4}\right)85}{1{,}5} = 85 \text{ kip}$$

Com pressão em membros, todos os parafusos ativos:

$$\sigma = \frac{F}{2td} = \frac{(S_y)_{\text{mem}}}{n_d}$$

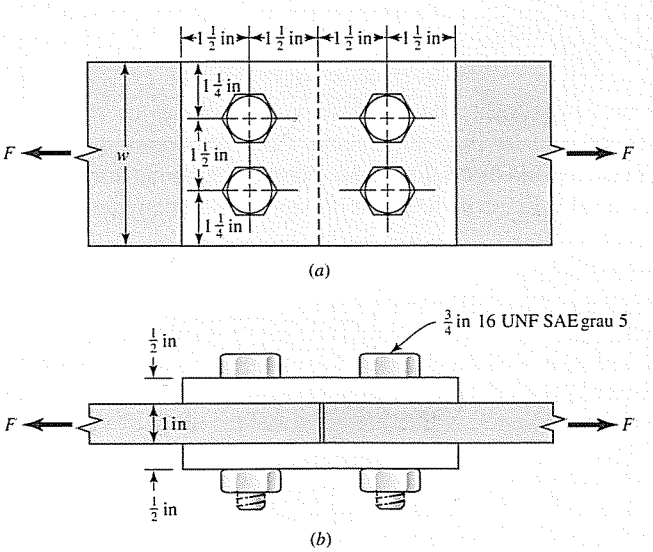


Figura 9-25

$$F = \frac{2td(S_y)_{\text{mem}}}{n_d} = \frac{2(1)\left(\frac{3}{4}\right)54}{1,5} = 54 \text{ kip}$$

Cisalhamento de parafuso, todos os parafusos ativos: Se as roscas de parafuso não se estendem até os planos de cisalhamento para as quatro hastes:

$$\tau = \frac{F}{4\pi d^2/4} = 0,577\frac{S_p}{n_d}$$

$$F = 0,577\pi d^2 \frac{S_p}{n_d} = 0,577\pi(0,75)^2 \frac{85}{1,5} = 57,8 \text{ kip}$$

Se as roscas de parafuso estendem-se até um plano de cisalhamento,

$$\tau = \frac{F}{4A_r} = 0,577\frac{S_p}{n_d}$$

$$F = \frac{0,577(4)A_r S_p}{n_d} = \frac{0,577(4)0,351(85)}{1,5} = 45,9 \text{ kip}$$

Cisalhamento de borda dos membros nos parafusos das duas margens: A partir da Figura 9-26,

$$\tau = \frac{F}{4at} = \frac{0,577(S_y)_{\text{mem}}}{n_d}$$

$$F = \frac{4at0,577(S_y)_{\text{mem}}}{n_d} = \frac{4(1,125)(1)0,577(54)}{1,5} = 93,5 \text{ kip}$$

Escoamento sob tração dos membros através dos furos de parafusos:

$$\sigma = \frac{F}{\left[4 - 2\left(\frac{3}{4}\right)\right]t} = \frac{(S_y)_{\text{mem}}}{n_d}$$

$$F = \frac{\left[4 - 2\left(\frac{3}{4}\right)\right]t(S_y)_{\text{mem}}}{n_d} = \frac{\left[4 - 2\left(\frac{3}{4}\right)\right](1)54}{1,5} = 90 \text{ kip}$$

Escoamento de membro:

$$F = \frac{wt(S_y)_{\text{mem}}}{n_d} = \frac{4(1)54}{1,5} = 144 \text{ kip}$$

Resposta

Com base no cisalhamento do parafuso, o valor-limite da força é 45,9 kip, supondo que as roscas estendam-se até o plano de cisalhamento. Contudo, seria um projeto pobre permitir que as roscas se estendessem até o plano de cisalhamento. Portanto, supondo um bom projeto com relação ao cisalhamento do parafuso, o valor-limite da força é 57,8 kip. Para os membros, a tensão de compressão limita a carga a 54 kip.

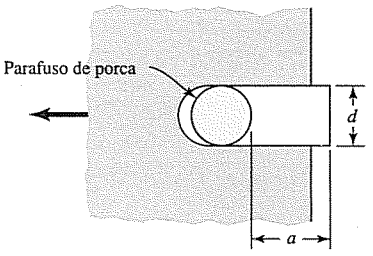


Figura 9-26 Cisalhamento de borda do membro.

9-10 União por Adesivos[7]

O uso de adesivos poliméricos para unir componentes para aplicações estruturais, semi-estruturais e não-estruturais tem aumentado muito nos últimos anos como resultado das vantagens únicas que os adesivos podem oferecer a certos processos de montagem e do desenvolvimento de novos adesivos com robustez melhorada e melhor aceitabilidade ambiental. A crescente complexidade das estruturas montadas modernas e os diversos tipos de materiais usados têm levado a muitas aplicações de união que não seriam possíveis com técnicas de união mais convencionais. Muitos adesivos também estão sendo usados em conjunção com ou para substituir fixadores mecânicos e soldas. O peso reduzido, a capacidade de vedação, o número de peças e o menor tempo de montagem, bem como as melhores resistências à corrosão e à fadiga, combinam-se para prover o engenheiro com oportunidades para montagem sob encomenda. Em 1998, por exemplo, a indústria de adesivos era de 20 bilhões de dólares, com 24 trilhões de libras de adesivos produzidos e vendidos. A Figura 9-27 ilustra os diversos pontos onde adesivos são usados em um automóvel moderno. De fato, a fabricação de muitos veículos modernos, de aparelhos e de estruturas é dependente de adesivos.

Em junções bem projetadas e com procedimentos de processamento apropriados, o uso de adesivos pode resultar em reduções significativas de peso. A eliminação de fixadores mecânicos, além de evitar o peso destes, pode também permitir o uso de materiais de bitola mais fina, porque as concentrações de tensão associadas com os furos são eliminadas. A capacidade dos adesivos poliméricos de dissipar energia pode significativamente reduzir o barulho, a vibração e a aspereza (NVH), um requisito no desempenho dos automóveis modernos. Adesivos também podem ser usados na montagem de materiais termossensíveis ou de componentes que podem ser danificadas pelos furos para fixadores mecânicos. Eles podem ser usados para unir materiais dissimilares ou matéria-prima de bitola fina, que não podem ser juntados por outros meios.

Tipos de Adesivos

Existem diversos tipos de adesivos para as mais diferentes aplicações. Eles podem ser classificados de várias maneiras, dependendo de suas composições químicas (p. ex., epóxidos, poliuretanos, poliamidas), suas formas (p. ex., pasta, líquido, filme, pelotas, fitas), seus tipos (p. ex., fundido a quente, fundido a quente reativo, termorrígido [termoestável], sensível a pressão, contato) ou suas capacidades de carregamento de carga (estrutural, semi-estrutural ou não-estrutural).

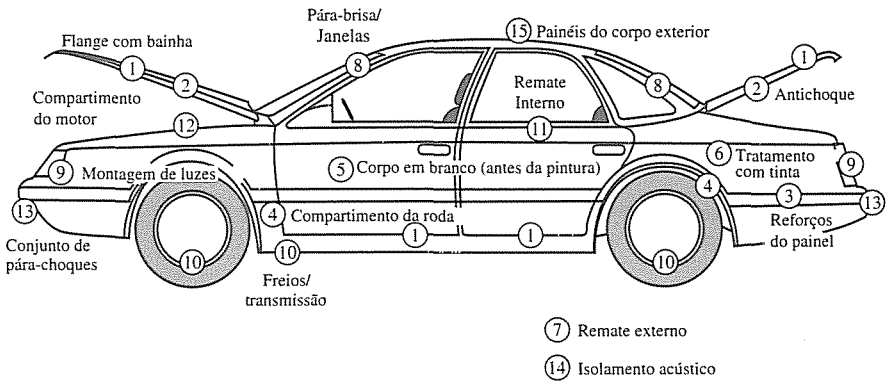


Figura 9-27 Diagrama de uma carroceria de automóvel mostrando pelo menos 15 locais onde adesivos e vedantes podem ser ou são usados. Uma observação deve ser feita quanto ao pára-brisa (8), que é considerado uma estrutura de suporte de carga em veículos modernos e é unida por meio de adesivos. Atenção também deve ser dada à união de flange dobrada (1), na qual adesivos são usados para unir e vedar. Adesivos são usados para unir superfícies de fricção em freios e embreagens (10). União de adesivos antivibração (2) ajuda a controlar a deformação de tampas de capô e de porta-malas sob cisalhamento de vento. Adesivos de vedação de rosca são usados em aplicações de motores (12). *(De A. V. Pocius,* Adhesion and Adhesive Technology, *2nd edition, Hanser Publishers, Munich, 2002. Reproduzida com autorização do editor.)*

[7] Para uma discussão mais extensa deste tópico, ver J. E. Shigley e C. R. Mischke, *Mechanical Engineering Design*, 6th edition, McGraw-Hill, New York, 2001, Sec. 9-11. Esta seção foi preparada com a assistência do Prof. David A. Dillard, Professor of Engineering Science and Mechanics e Director of the Center for Adhesive and Sealant Science, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, e com o incentivo e o suporte técnico da Bonding Systems Division of 3M, Saint Paul, Minnesota.

Adesivos estruturais são adesivos relativamente fortes que costumam ser usados bem abaixo de sua temperatura de transição vítrea; os exemplos mais comuns incluem os epóxidos e certos tipos de acrílico. Tais adesivos podem suportar tensões significativas e servem para aplicações estruturais. Para muitas aplicações de engenharia, aplicações semi-estruturais (onde a falha seria menos crítica) e não-estruturais (de painéis etc., para propósitos estéticos) são também de interesse significativo do engenheiro de projeto, provendo meios menos custosos, requeridos para montagem de produtos acabados. Estes incluem os *adesivos de contato*, nos quais uma solução ou emulsão contendo um adesivo elastomérico é aplicada a ambos os aderentes, o solvente é deixado evaporar, e então os aderentes são colocados em contato. Exemplos incluem cimento de borracha e adesivos usados para unir laminados em topos de balcão. *Adesivos sensíveis a pressão* são elastômeros de módulo muito baixo que se deformam facilmente sob pequenas pressões, o que lhes permite molhar as superfícies. Quando o substrato e os adesivos são postos em contato íntimo, forças de van der Waals são suficientes para manter o contato e prover uniões relativamente duráveis. Os adesivos sensíveis à pressão são normalmente comprados como fitas ou etiquetas para aplicações não-estruturais, embora existam sempre fitas de espumas dos dois lados que podem ser usadas em aplicações semi-estruturais. Como o nome implica, *derrete a quente*, torna-se líquido quando aquecido, molhando as superfícies e então esfriando em um polímero sólido. Esses materiais estão sendo usados cada vez mais em diversos tipos de aplicações de engenharia utilizando versões mais sofisticadas de injetores de cola de uso popular. *Adesivos anaeróbicos* são aqueles que se solidificam dentro de espaços apertados, privados de oxigênio; tais materiais têm sido amplamente utilizados em aplicações de engenharia mecânica para prender parafusos de porca ou mancais no lugar. A solidificação em outros adesivos pode ser induzida por exposição à luz ultravioleta ou a raios de elétrons, ou pode ser catalisada por certos materiais ubíquos a muitas superfícies, como água.

A Tabela 9-7 apresenta propriedades importantes de resistência de adesivos usados comumente.

Tabela 9-7 Desempenho mecânico de vários tipos de adesivos

Química do adesivo ou tipo	Temperatura ambiente Resistência ao cisalhamento sobreposto, MPa (psi)		Resistência ao descasque por unidade de largura, kN/m (lbf/in)	
Sensível a pressão	0,01-0,07	(2-10)	0,18-0,88	(1-5)
Base de amido	0,07-0,7	(10-100)	0,18-0,88	(1-5)
Celulósico	0,35-3,5	(50-500)	0,18-1,8	(1-10)
Base de borracha	0,35-3,5	(50-500)	1,8-7	(10-40)
Derretimento a quente, formulado	0,35-4,8	(50-700)	0,88-3,5	(5-20)
Derretimento a quente, sinteticamente projetado	0,7-6,9	(100-1000)	0,88-3,5	(5-20)
Emulsão de PVAc (cola branca)	1,4-6,9	(200-1000)	0,88-1,8	(5-10)
Cianocrilato	6,9-13,8	(1000-2000)	0,18-3,5	(1-20)
Base de proteína	6,9-13,8	(1000-2000)	0,18-1,8	(1-10)
Acrílico anaeróbico	6,9-13,8	(1000-2000)	0,18-1,8	(1-10)
Uretana	6,9-17,2	(1000-2500)	1,8-8,8	(10-50)
Acrílico de borracha modificada	13,8-24,1	(2000-3500)	1,8-8,8	(10-50)
Fenólico modificado	13,8-27,6	(2000-4000)	3,6-7	(20-40)
Epóxido não-modificado	10,3-27,6	(1500-4000)	0,35-1,8	(2-10)
Bis-maléico	13,8-27,6	(2000-4000)	0,18-3,5	(1-20)
Poliamida	13,8-27,6	(2000-4000)	0,18-0,88	(1-5)
Epóxido de borracha modificada	20,7-41,4	(3000-6000)	4,4-14	(25-80)

Fonte: De A. V. Pocius, *Adhesion and Adhesives Technology*, Hanser Publishers, Munich, 2002. Reimpressa com autorização.

Distribuições de Tensão

Uma boa prática de projeto normalmente requer que as junções de adesivo sejam feitas de uma tal maneira que o adesivo suporte a carga em cisalhamento em vez de tração. As uniões são tipicamente muito mais fortes quando carregadas em cisalhamento do que em tração por meio de uma placa de união. As junções de cisalhamento de sobreposição representam uma família importante de junções, quer para espécimes de ensaio para avaliar propriedades adesivas, quer para real incorporação em projetos práticos. Os tipos genéricos mais comuns de junções de sobreposição estão ilustrados na Figura 9-28.

A análise mais simples das junções de sobreposição sugere que a carga aplicada é uniformemente distribuída sobre a área de união. Resultados de testes de junção de sobreposição, tais como aqueles obtidos seguindo a ASTM D1002 para junções de sobreposição simples, reportam a "resistência aparente de cisalhamento" como a carga de rompimento dividida pela área de união. Embora essa simples análise possa ser adequada para aderentes rígidos unidos com um adesivo flexível sobre um comprimento de união relativamente curto, picos significativos na tensão de cisalhamento ocorrem exceto para os adesivos mais flexíveis. Em um esforço para apontar os problemas associados com tal prática, a ASTM D4896 delineou algumas das preocupações associadas a essa concepção simplística das tensões dentro de junções de superposição.

Em 1938, O. Volkersen apresentou uma análise da junção de sobreposição, conhecida como *modelo de cisalhamento defasado*. Ele provê introspecções valiosas a respeito das distribuições de tensão de cisalhamento em uma hoste de junções de superposição. A flexão induzida em uma junção de sobreposição simples devido à excentricidade complica significativamente a análise, por isso consideraremos uma junção simétrica de sobreposição dupla para ilustrar os princípios. A distribuição de tensão de cisalhamento é dada por

$$\tau(x) = \frac{P\omega}{4b\,\text{senh}(\omega l/2)}\cosh(\omega x) + \left[\frac{P\omega}{4b\cosh(\omega l/2)}\left(\frac{2E_o t_o - E_i t_i}{2E_o t_o + E_i t_i}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{(\alpha_i - \alpha_o)\,\Delta T\omega}{(1/E_o t_o + 2/E_i t_i)\cosh(\omega l/2)}\right]\text{senh}(\omega x) \qquad (9\text{-}11)$$

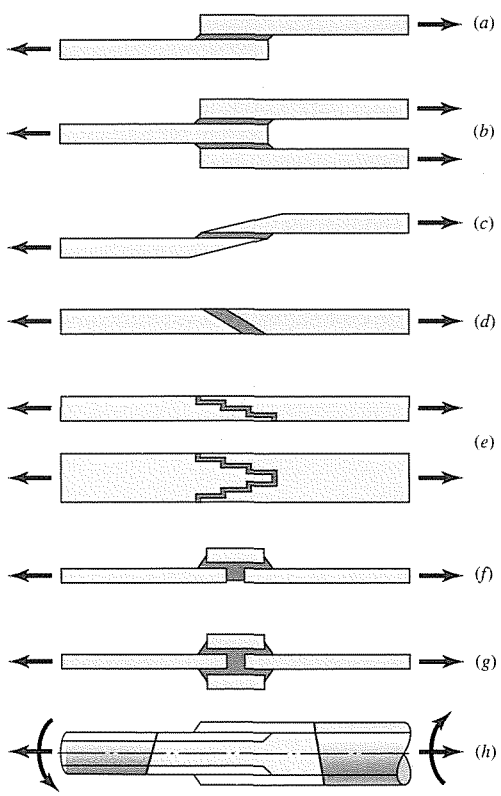


Figura 9-28 Tipos comuns de junções de sobreposição usadas em projeto mecânico: (*a*) sobreposição simples; (*b*) sobreposição dupla; (*c*) oblíqua; (*d*) biselada; (*e*) em degrau; (*f*) em tiras de topo; (*g*) em tiras duplas de topo; (*h*) sobreposição tubular. (*Adaptada de R. D. Adams, J. Comyn e W. C. Wake,* Structural Adhesive Joints in Engineering, *2nd ed., Chapman and Hall, New York, 1977.*)

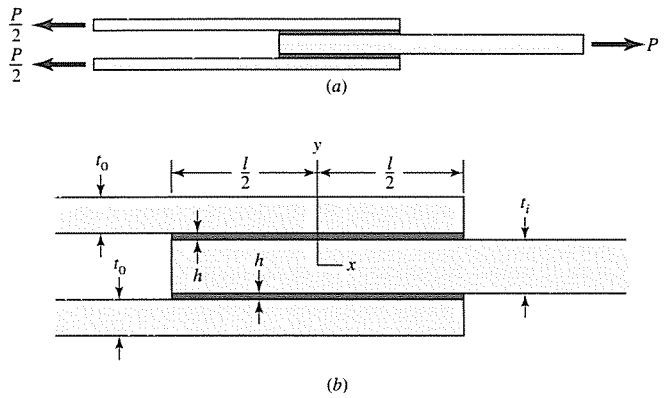


Figura 9-29 Junção de sobreposição dupla.

em que

$$\omega = \sqrt{\frac{G}{h}\left(\frac{1}{E_o t_o} + \frac{2}{E_i t_i}\right)}$$

e E_O, t_O, α_O e E_i, t_i, α_i são os módulos, espessuras e coeficientes de expansão térmica dos aderentes externo e interno, respectivamente; G, h, b e l são o módulo de cisalhamento, a espessura, a largura e o comprimento do adesivo, respectivamente; e ΔT é a mudança na temperatura da junção. Se o adesivo for solidificado a uma temperatura elevada, tal que a temperatura livre de tensão da junção difira da temperatura de serviço, a diferença na expansão térmica dos aderentes interno e externo induz um cisalhamento térmico através do adesivo.

Embora considerações de projeto para junções de sobreposição simples estejam além dos objetivos deste capítulo, deve-se notar que a excentricidade de carga é um aspecto importante no estado de tensão de junções de sobreposição simples. A flexão do aderente pode resultar em tensões de cisalhamento que podem alcançar o dobro daquelas dadas para a configuração de sobreposição dupla (para uma dada área total de união). Além disso, tensões de descasque podem ser bastante grandes e freqüentemente são responsáveis por falha na junção. Por fim, a flexão plástica dos aderentes pode levar a deformações elevadas, que adesivos menos dúcteis não podem agüentar, levando à falha de união também. As tensões de flexão nos aderentes na extremidade da sobreposição podem ser quatro vezes maiores que a tensão média dentro do aderente; assim, elas devem ser consideradas no projeto. A Figura 9-31 mostra as tensões de cisalhamento e de descasque presentes em uma junção típica de sobreposição simples que corresponde ao espécime de ensaio da ASTM D1002. Note que as tensões de cisalhamento são significativamente maiores que as preditas pela análise de Volkersen, resultado de deformações aumentadas do adesivo, associadas com flexão do aderente.

EXEMPLO 9-8

A junção de sobreposição dupla representada na Figura 9-29 consiste em aderentes externos de alumínio e aderente interno de aço. A montagem é curada a 250°F e é livre de tensão a 200°F. A união completa está sujeita a uma carga axial de 2000 lbf em uma temperatura de serviço de 70°F. A largura b é de 1 in e o comprimento de união l é de 1 in. Informação adicional está tabulada abaixo:

	G, psi	E, psi	α, in/(in · °F)	Espessura, in
Adesivo	$0{,}2(10^6)$		$55(10^{-6})$	0,020
Aderente externo		$10(10^6)$	$13{,}3(10^{-6})$	0,150
Aderente interno		$30(10^6)$	$6{,}0(10^{-6})$	0,100

Esboce um gráfico da tensão de cisalhamento como uma função do comprimento da união devido a (*a*) tensão térmica, (*b*) tensão induzida de carga e (*c*) a soma de tensões em *a* e *b*, e (*d*) encontre onde a tensão de cisalhamento maior é máxima.

Solução Na Equação (9-11) o parâmetro ω é dado por

$$\omega = \sqrt{\frac{G}{h}\left(\frac{1}{E_o t_o} + \frac{2}{E_i t_i}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{0{,}2(10^6)}{0{,}020}\left[\frac{1}{10(10^6)0{,}15} + \frac{2}{30(10^6)0{,}10}\right]} = 3{,}65 \text{ in}^{-1}$$

(*a*) Para a componente térmica $\alpha_i - \alpha_0 = 6(10^{-6}) - 13{,}3(10^{-6}) = -7{,}3(10^{-6})$, $\Delta T = 70\text{–}200 = -130°F$

$$\tau_{th}(x) = \frac{(\alpha_i - \alpha_o)\Delta T \omega \operatorname{senh}(\omega x)}{(1/E_o t_o + 2/E_i t_i)\cosh(\omega l/2)}$$

$$\tau_{th}(x) = \frac{-7{,}3(10^{-6})(-130)3{,}65 \operatorname{senh}(3{,}65x)}{\left[\frac{1}{10(10^6)0{,}150} + \frac{2}{30(10^6)0{,}100}\right]\cosh\left[\frac{3{,}65(1)}{2}\right]}$$

$$= 816{,}4 \operatorname{senh}(3{,}65x)$$

A tensão térmica é traçada na Figura (9-30) e tabulada em $x = -0{,}5$, 0 e 0,5 na tabela a seguir.

(*b*) A união está "balanceada" ($E_o t_o = E_i t_i/2$); assim, a tensão induzida de carga é dada por

$$\tau_P(x) = \frac{P\omega \cosh(\omega x)}{4b \operatorname{senh}(\omega l/2)} = \frac{2000(3{,}65)\cosh(3{,}65x)}{4(1)3{,}0208} = 604{,}1\cosh(3{,}65x) \qquad (1)$$

A tensão induzida pela carga é traçada na Figura (9-30) e tabulada em $x = -0{,}5$, 0 e 0,5 na tabela a seguir.

(*c*) Tabela de tensão total (em *psi*):

	$\tau(-0{,}5)$	$\tau(0)$	$\tau(0{,}5)$
Térmica apenas	-2466	0	2466
Induzida por carga apenas	1922	604	1922
Combinada	-544	604	4388

(*d*) A tensão de cisalhamento máxima predita pelo modelo de cisalhamento defasado ocorrerá sempre nas extremidades. Veja o gráfico na Figura 9-30. Visto que as tensões residuais estão sempre presentes, tensões significativas de cisalhamento podem já existir antes da aplicação da carga. As tensões maiores apresentadas pelo caso de carga combinada poderiam resultar em escoamento local de um adesivo dúctil ou falha de um mais frágil. O significado das tensões térmicas serve como uma cautela contra junções de aderentes dissimilares quando grandes mudanças de temperatura estão envolvidas.

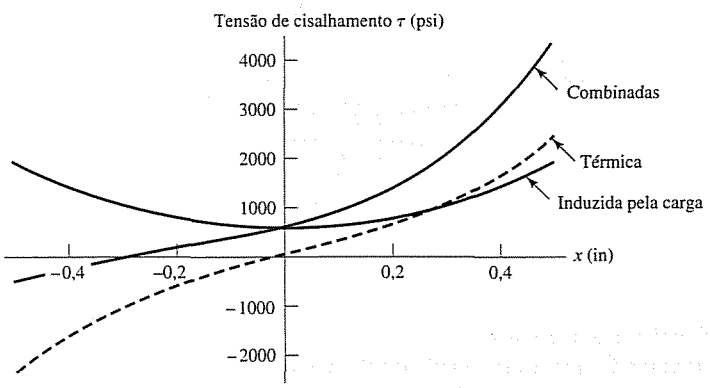


Figura 9-6 Gráfico para Ex. 9-8.

Projeto de Junção

Algumas diretrizes básicas que devem ser utilizadas no projeto de junção de adesivos incluem:

- Projete para colocar a linha de união em cisalhamento, para não descascar. Acautele-se de tensões de descasque focadas nas terminações de união. Quando necessário, reduza as tensões de descasque por meio de afunilamento das extremidades do aderente, aumentando a área de cola onde aquelas ocorrem, ou utilizando rebites nas terminações de união onde as tensões de descasque podem iniciar falhas.
- Onde possível, use adesivos com ductilidade adequada. A capacidade de escoamento de um adesivo reduz as concentrações de tensão associadas com as extremidades de junções e aumenta a tenacidade para resistir à propagação de descolamento.
- Reconheça as limitações ambientais dos adesivos e dos métodos de preparação de superfície. Exposição a água, solventes e outros diluentes pode significativamente degradar o desempenho do adesivo em algumas situações, por deslocamento deste da superfície ou degradação do polímero.

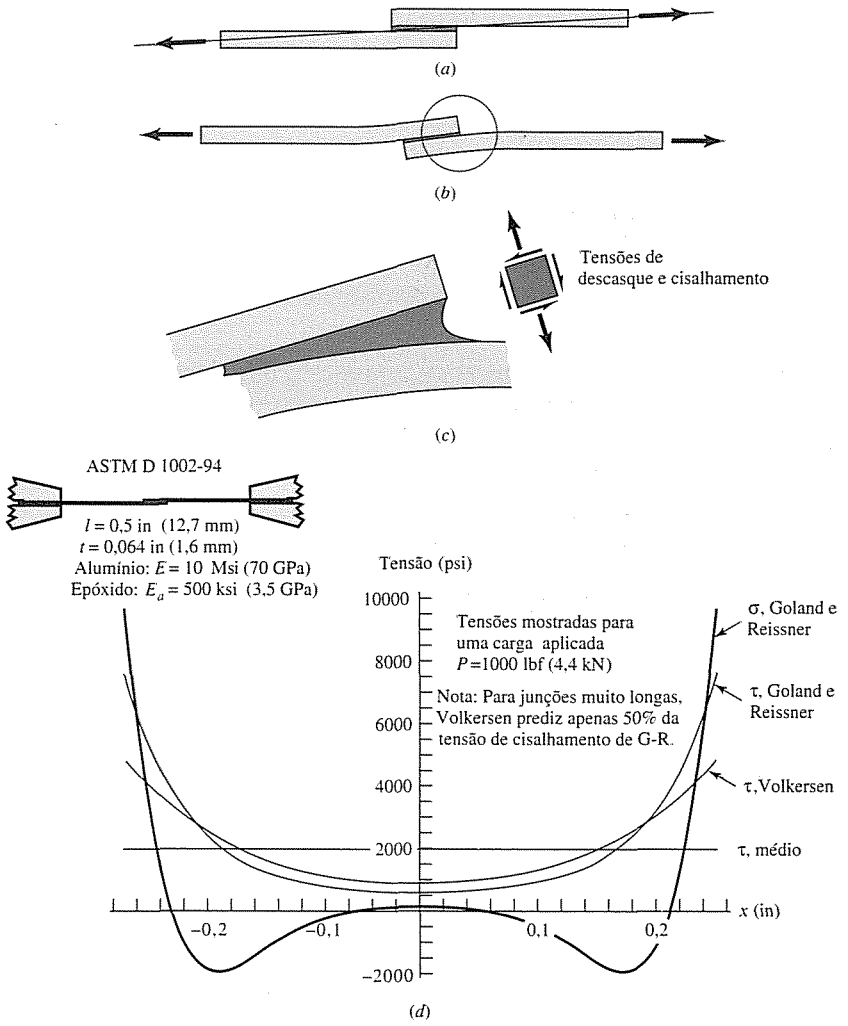
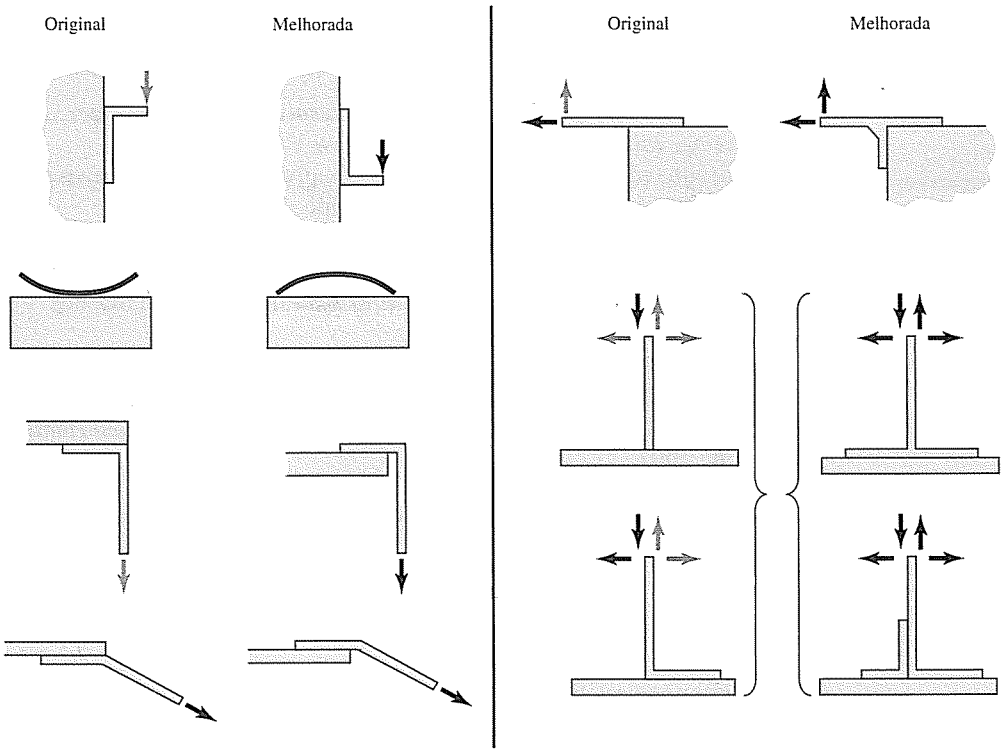


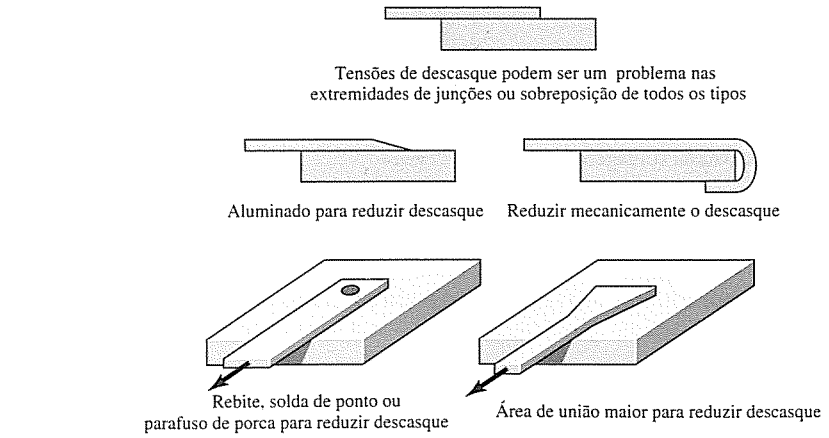
Figura 9-31 Tensões dentro de uma junção de sobreposição simples. (*a*) As forças de tração da junção de sobreposição têm uma linha de ação que não é inicialmente paralela aos lados do aderente. (*b*) À medida que a carga aumenta, os aderentes e a união flexionam-se. (*c*) Na localidade da extremidade de um aderente, tensões de cisalhamento e descasque aparecem, e as tensões de descasque freqüentemente induzem falha de junção. (*d*) As predições seminais de tensão de Reissner e Goland (*J. Appl. Mech*, vol. 77, 1944) são mostradas. Note que a máxima tensão de cisalhamento é mais elevada que aquela predita pelo modelo de cisalhamento de Volkersen devido à flexão do aderente.

Certos adesivos podem ser suscetíveis à trinca de tensão ambiental na presença de alguns solventes. A exposição à luz ultravioleta também pode degradar os adesivos.

- Projete de maneira a permitir ou facilitar inspeções das uniões, onde possível. Um rebite perdido ou parafuso de porca é freqüentemente fácil de detectar, mas descolamentos ou uniões insatisfatórias de adesivo não são prontamente aparentes.
- Permita área suficiente de cola, de modo que a junção possa tolerar algum descolamento antes que este se torne crítico. Isso aumenta a probabilidade de que o descolamento possa ser detectado. Ter algumas regiões da união global a níveis de tensão relativamente baixos pode melhorar de modo significativo a durabilidade e a confiabilidade.



(*a*)



(*b*)

Figura 9-32 Práticas de projeto que melhoram a união por adesivos. (*a*) Vetores de carga em cinza devem ser evitados porque a resistência resultante é pobre. (*b*) Meio de reduzir tensões de descasque em junções do tipo sobreposto.

- Onde possível, cole em múltiplas superfícies, para oferecer suporte a cargas em qualquer direção. Colar um acessório em uma única superfície pode colocar tensões de descasque na cola, ao passo que colar em vários planos adjacentes tende a permitir que cargas arbitrárias sejam transmitidas predominantemente em cisalhamento.
- Adesivos podem ser usados em conjunção com soldagem de ponto. O processo é conhecido como *colagem de solda*. A solda de ponto serve para fixar a cola até a solidificação.

A Figura 9-32 apresenta exemplos de melhorias na colagem de adesivos.

Referências

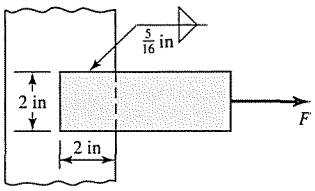
Muitas referências boas estão disponíveis para análise e projeto de uniões de adesivo, incluindo as seguintes:

G. P. Anderson, S. J. Bennett e K. L. DeVries, *Analysis and Testing of Adhesive Bonds,* Academic Press, New York, 1977.
R. D. Adams, J. Comyn e W. C. Wake, *Structural Adhesive Joints in Engineering,* 2nd ed., Chapman and Hall, New York, 1997.
H. F. Brinson (ed.), *Engineered Materials Handbook, vol. 3: Adhesives and Sealants,* ASM International, Metals Park, Ohio, 1990.
A. J. Kinloch, *Adhesion and Adhesives: Science and Technology,* Chapman and Hall, New York, 1987.
A. J. Kinloch (ed.), *Durability of Structural Adhesives,* Applied Science Publishers, New York, 1983.
W. A. Lees, *Adhesives in Engineering Design,* Springer-Verlag, New York, 1984.
F. L. Matthews, *Joining Fibre-Reinforced Plastics,* Elsevier, New York, 1986.
A. V. Pocius, *Adhesion and Adhesives Technology: An Introduction,* Hanser, New York, 1997.

A Internet também é uma boa fonte de informação. Por exemplo, tente este endereço na rede: www.3m.com/adhesives.

PROBLEMAS

ANÁLISE **9-1** A figura mostra uma barra de aço horizontal de $\frac{3}{8}$ in de espessura carregada em tração permanente e soldada a um suporte vertical. Encontre a carga F que causará uma tensão de cisalhamento de 20 kpsi nas gargantas das soldas.

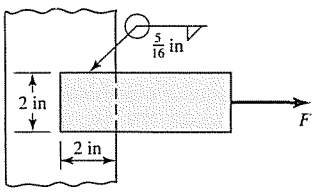


Problema 9-1

9-2 Para a soldagem do Problema 9-1, o eletrodo especificado é E7010. Para o metal do eletrodo, qual é a carga admissível na soldagem?

ANÁLISE **9-3** Os membros sendo unidos no Problema 9-1 são de aço 1018 laminado a frio para a barra e aço 1018 laminado a quente para o suporte vertical. Que carga sobre a soldagem é admissível para que o metal do membro seja incorporado às soldas?

ANÁLISE **9-4** Uma barra de aço de $\frac{5}{16}$ in de espessura é soldada a um suporte vertical como mostrado na figura. Qual é a tensão de cisalhamento na garganta das soldas se a força F for de 32 kip?

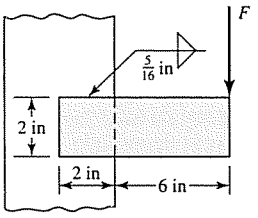


Problema 9-4

ANÁLISE **9-5** Uma barra de aço de $\frac{3}{4}$ in de espessura, para ser usada como viga, é soldada a um suporte vertical usando duas soldas de filete, como ilustrado.

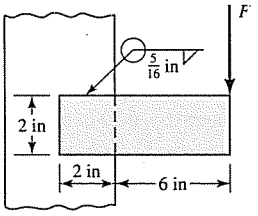
(*a*) Encontre a força de flexão F segura se a tensão permissível de cisalhamento nas soldas for de 20 kpsi.

(*b*) Na parte *a* você encontrou uma expressão simples para F em termos da tensão de cisalhamento admissível. Encontre a carga admissível se o eletrodo for E7010, a barra for aço 1020 laminado a quente, e o suporte for aço 1015 laminado a quente.



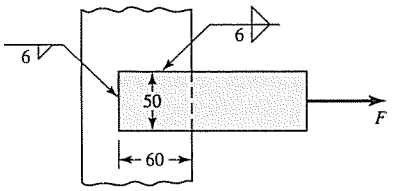
Problema 9-5

ANÁLISE **9-6** A figura mostra uma soldagem exatamente como a do Problema 9-5, exceto que existem quatro soldas em vez de duas. Mostre que a soldagem é duas vezes tão forte quanto a do Problema 9-5.



Problema 9-6

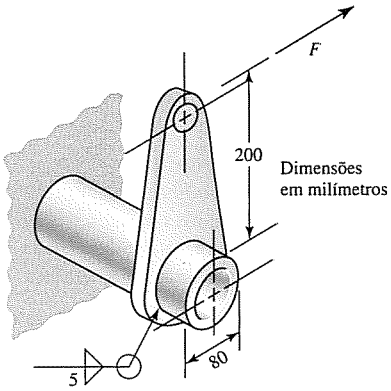
ANÁLISE **9-7** A soldagem mostrada na figura está sujeita a uma força alternante F. A barra de aço laminada a quente tem 10 mm de espessura e é de aço AISI 1010. O suporte vertical é igualmente de aço 1010. O eletrodo é 6010. Estime a carga de fadiga F que a barra carregará se três soldas de filete de 6 mm forem usadas.



Dimensões em milímetros

Problema 9-7

9-8 A tensão permissível de cisalhamento para a soldagem ilustrada é de 140 MPa. Estime a carga F que causará essa tensão na garganta da soldagem.



Problema 9-8

PROJETO **9-9** No projeto de soldagens em torção é útil ter uma percepção hierárquica da eficiência relativa dos padrões comuns. Por exemplo, os padrões de contas soldadas mostrados na Tabela 9-1 podem ser ordenados por desejabilidade. Suponha que o espaço disponível seja um quadrado $a \times a$. Use uma figura formal de mérito que seja diretamente proporcional a J e inversamente proporcional ao volume de metal soldado depositado:

$$\text{fom} = \frac{J}{\text{vol}} = \frac{0{,}707hJ_u}{(h^2/2)l} = 1{,}414\frac{J_u}{hl}$$

Uma figura tática de mérito poderia omitir a constante, isto é, $\text{fom}' = J_u/(hl)$. Ordene os seis padrões da Tabela 9-1 do mais ao menos eficiente.

PROJETO **9-10** O espaço disponível para um padrão de contas soldadas sujeito a flexão é $a \times a$. Coloque os padrões da Tabela 9-2 em ordem hierárquica de eficiência de colocação de metal de solda para resistir à flexão. Uma figura formal de mérito pode ser diretamente proporcional a I e inversamente proporcional ao volume de metal de solda depositado:

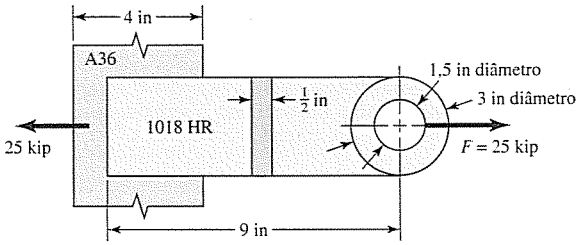
$$\text{fom} = \frac{I}{\text{vol}} = \frac{0{,}707hI_u}{(h^2/2)l} = 1{,}414\frac{I_u}{hl}$$

A figura tática de mérito pode omitir a constante 1,414, isto é, $\text{fom}' = I_u/(hl)$. Omita os padrões tencionados para vigas T e I. Ordene os sete padrões remanescentes.

PROJETO **9-11** Entre as possíveis formas dos problemas de soldagem, estão as seguintes:

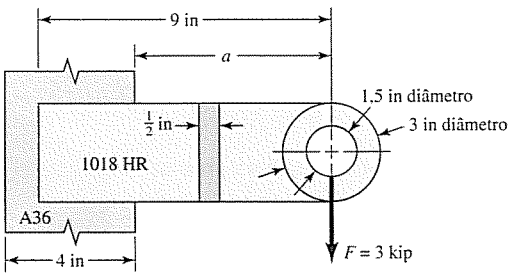
- A conexão e o(s) membro(s) existe(m) e somente as especificações de solda necessitam ser decididas.
- Os membros existem, mas tanto a conexão quanto a soldagem devem ser projetadas.
- A conexão, o(s) membro(s) e a soldagem devem ser projetados.

O que segue é uma tarefa de projeto da primeira categoria. A conexão mostrada na figura é feita de aço 1018 laminado a quente de $\frac{1}{2}$ in de espessura. A força estática é de 25 kip. O membro tem 4 in de largura, tal como aquele mostrado no Problema 9-4. Especifique a soldagem (dê o padrão, o número do eletrodo, o tipo de solda, o comprimento de solda e o tamanho de perna).



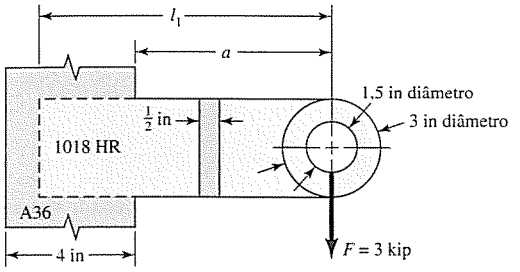
Problema 9-11

PROJETO **9-12** A conexão mostrada suporta uma carga de flexão de 3 kip. O vão a deve ser de 6 in. A carga é uma carga estática de 3000 lbf. Especifique a soldagem (dê o padrão, o número de eletrodo, o tipo de solda, o comprimento de solda e o tamanho de perna).



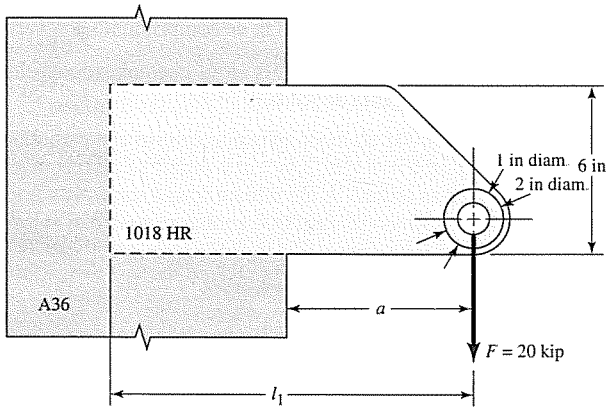
Problema 9-12

PROJETO **9-13** A conexão no Problema 9-12 não teve seu comprimento determinado. A força estática é de 3 kip; o vão a deve ser de 6 in. O membro tem 4 in de largura. Especifique a soldagem (dê o padrão, o número de eletrodo, o tipo de solda, o comprimento de conta e o tamanho de perna). Especifique o comprimento da conexão.



Problema 9-13

PROJETO **9-14** Uma coluna vertical de aço estrutural A36 (S_y = 36 kpsi, S_{ut} = 58-80 kpsi) tem 10 in de largura. Uma conexão foi projetada para o ponto mostrado na figura. Uma carga estática de 20 kip é aplicada, e o vão a de 6,25 in tem de ser igualado ou excedido. A conexão é de aço 1018 laminado a quente, a ser feita de placa de $\frac{1}{2}$ in com solda nas protuberâncias quando todas as dimensões forem conhecidas. Especifique a soldagem (dê o padrão, o número de eletrodo, o tipo de solda, o comprimento de conta de solda e o tamanho de perna). Especifique também o comprimento l_1 para a conexão.



Problema 9-14

ANÁLISE **9-15** Escreva um programa de computador para ajudá-lo em uma tarefa como a do Problema 9-14 com um padrão retangular de contas soldadas para uma junção de cisalhamento de torção. Ao fazê-lo, solicite a força F, o vão a e a maior tensão admissível de cisalhamento. Então, como parte de um ciclo iterativo, solicite as dimensões b e d do retângulo. Estas podem ser suas variáveis de projeto. Mostre todos os parâmetros após o tamanho de perna ter sido determinado por cômputo. Com efeito, esse parâmetro será sua avaliação de adequação quando você parar a iteração. Inclua a figura de mérito $J_u/(hl)$ in como saída. A fom e o tamanho de perna h com a largura disponível darão a você uma introspecção útil na natureza dessa classe de soldas. Use seu programa para verificar suas soluções para o Problema 9-14.

PROJETO **9-16** Soldas de filete em junções que resistem à flexão são interessantes porque podem ser mais simples que aquelas que resistem à torção. Do Problema 9-10, você aprendeu que seu objetivo é colocar o metal de solda tão afastado do centróide das contas de solda quanto possível, mas distribuído em uma orientação paralela ao eixo x. Ademais, a colocação no topo e no fundo da extremidade embutida de uma viga de balanço com secção transversal retangular resulta em contas de solda paralelas, cada elemento da qual na posição ideal. O objetivo deste problema é estudar a conta de solda completa e o padrão interrompido de conta soldada. Considere o caso da Figura 9-17 com F = 10 000 lbf, comprimento de viga a = 10 in, b = 8 in e d = 8 in. Para o segundo caso, para a solda interrompida, considere uma lacuna centrada de b_1 = 2 in existindo nas soldas de topo e fundo. Estude os dois casos com τ_{all} = 12,8 kpsi. O que você notou em relação a τ, σ e τ_{max}? Compare a fom.

ANÁLISE **9-17** Para uma pista retangular de contas soldadas resistindo à flexão, desenvolva as equações necessárias para tratar casos de soldas verticais, soldas horizontais e padrões de solda em torno de todo o contorno com profundidade d e largura b, e permitindo lacunas centrais em contas paralelas de comprimento b_1 e d_1. Faça isso por superposição de pistas paralelas e de pistas verticais removendo as lacunas. Então, coloque as duas juntas para um cordão retangular de solda com brechas centrais de comprimento b_1 e d_1. Mostre que os resultados são

$$A = 1{,}414(b - b_1 + d - d_1)h$$

$$I_u = \frac{(b - b_1)d^2}{2} + \frac{d^3 - d_1^3}{6}$$

$$I = 0{,}707hI_u$$

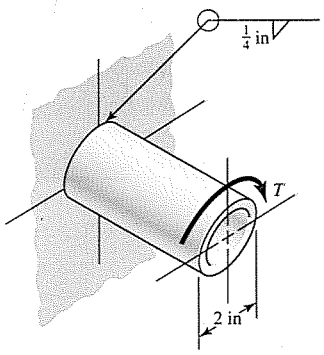
$$l = 2(b - b_1) + 2(d - d_1)$$

$$\text{fom} = \frac{I_u}{hl}$$

ANÁLISE **9-18** Escreva um programa de computador baseado no protocolo do Problema 9-17. Solicite a maior tensão admissível de cisalhamento, a força F e o vão a, bem como as dimensões b e d. Comece um ciclo iterativo solicitando b_1 e d_1. Qualquer destes ou ambos podem ser as suas variáveis de projeto. Programe para encontrar o tamanho de perna correspondendo a um nível de tensão de cisalhamento no máximo admissível em um canto. Mostre todos os parâmetros, incluindo a figura de mérito. Use o programa para verificar quaisquer problemas anteriores para os quais ele seja aplicável. Reitere com o programa em um modo "o que ocorre se" e aprenda sobre as tendências em seus parâmetros.

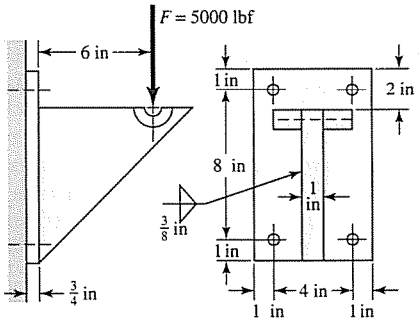
PROJETO **9-19** Quando comparamos dois padrões diferentes de soldagem, é útil observar a resistência à flexão ou à torção e o volume de metal de solda depositado. A medida de efetividade, definida como o segundo momento de área dividido pelo volume de metal soldado, é útil. Se uma secção de 6 in por 8 in de uma viga em balanço suporta uma carga estática de flexão de 10 kip a 10 in do plano de soldagem, com uma tensão admissível de cisalhamento de 12 800 psi atingida, compare as soldagens horizontais com as verticais. As contas horizontais devem ter 6 in de comprimento e as verticais, 8 in.

ANÁLISE **9-20** Um torque $T = 20(10^3)$ lbf · in é aplicado à soldagem mostrada. Estime a tensão máxima de cisalhamento na garganta de solda.



Problema 9-20

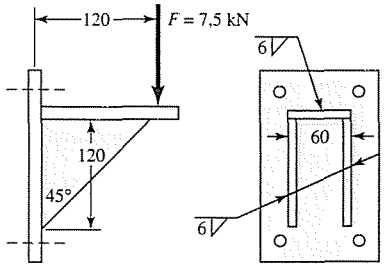
ANÁLISE **9-21** Encontre a tensão máxima de cisalhamento na garganta do metal de solda na figura.



Problema 9-21

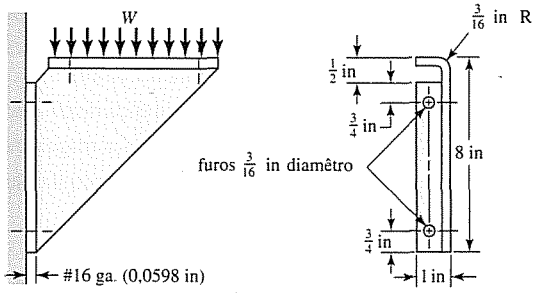
ANÁLISE **9-22** A figura mostra um pedestal de aço soldado carregado por uma força estática F. Estime o fator de segurança se a tensão admissível de cisalhamento na garganta de solda for de 120 MPa.

ANÁLISE **9-23** A figura mostra uma mão-francesa formada de chapa de aço. Foi proposta soldagem para prendê-la ao suporte, em vez de parafusos de máquina. Se a tensão combinada no metal de solda está limitada a 900 psi, estime a carga total W que o suporte agüentará. As dimensões de flange de topo são as mesmas que as de flange de montagem.

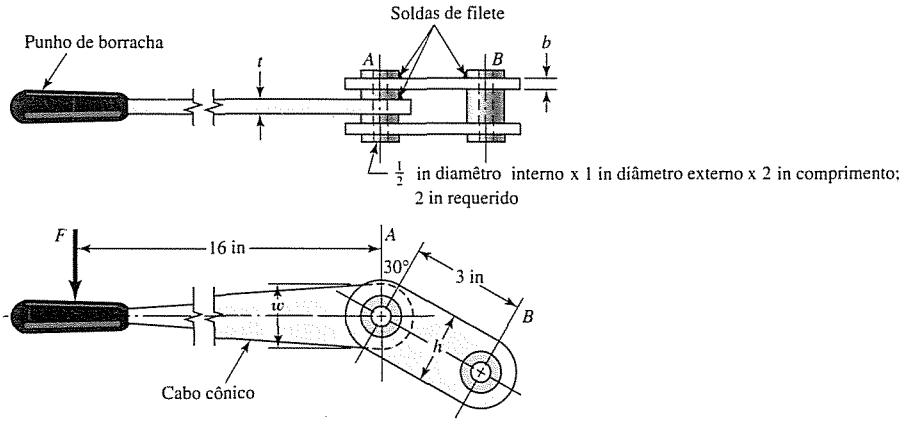


Problema 9-22

Problema 9-23
O suporte estrutural é de aço estrutural A26; a mão-francesa é de aço 1020, laminado a frio; o eletrodo de solda é 6010.

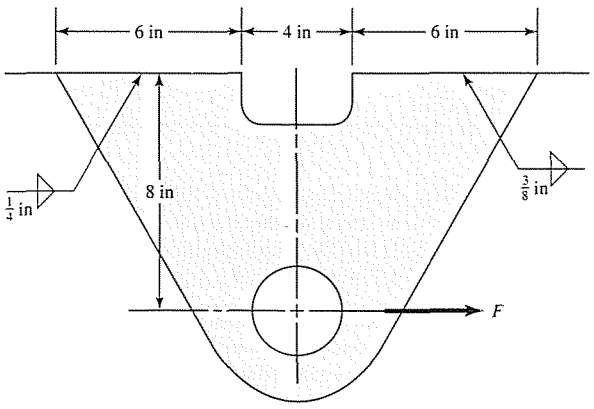


ANÁLISE **9-24** Sem suporte, um maquinista pode exercer somente cerca de 100 lbf em uma chave de catraca ou cabo de ferramenta. A alavanca mostrada na figura tem $t = \frac{1}{2}$ in e $w = 2$ in. Desejamos especificar o tamanho da solda afilada para segurar a alavanca à peça tubular em A. Ambas as peças são de aço, e a tensão de cisalhamento na garganta de solda não deve exceder a 3000 psi. Encontre o tamanho seguro de solda.



Problema 9-24

ANÁLISE **9-25** Estime a carga segura estática F para a soldagem mostrada na figura se um eletrodo E6010 for usado e o fator de projeto tiver de ser 2. Use análise convencional.



Problema 9-25

ANÁLISE **9-26** Suportes, tais como aquele mostrado, são usados em atracadouros de pequenas embarcações. As falhas neles são geralmente causadas por pressão de esmagamento do prendedor de amarre contra o lado do furo. Nosso propósito aqui é obter uma idéia das margens estática e dinâmica de segurança envolvidas. Usamos um suporte com espessura de 1/4 in feito de aço 1018 laminado a quente. Assumimos, então, que a ação de onda na embarcação criará uma força F não maior que 1200 lb.

(*a*) Identifique o momento M que produz uma tensão de cisalhamento na garganta resistindo à ação de flexão com uma "tração" em A e uma "compressão" em C.

(*b*) Encontre a componente de força F_y que produz uma tensão de cisalhamento na garganta resistindo a uma "tração" de lado a lado da solda.

(*c*) Encontre a componente de força F_x que produz um cisalhamento em linha de lado a lado da solda.

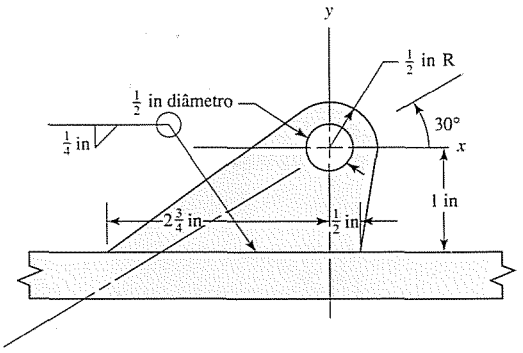
(*d*) Encontre A, I_u e I usando a Tabela 9-2, na peça.

(*e*) Encontre a tensão de cisalhamento τ_1 em A devida a F_y e M, a tensão de cisalhamento τ_2 devida a F_x e, então, combine-as para encontrar τ.

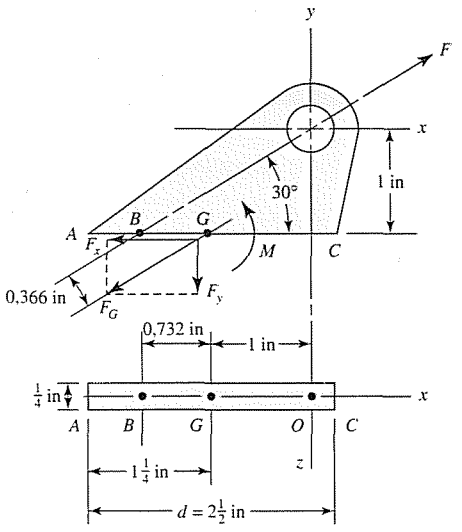
(*f*) Encontre o fator de segurança resguardando contra escoamento por cisalhamento na soldagem.

(*g*) Encontre o fator de segurança resguardando contra uma falha estática no metal original na soldagem.

(*h*) Encontre o fator de segurança resguardando contra uma falha de fadiga no metal de solda usando o critério de falha de Gerber.



(*a*)

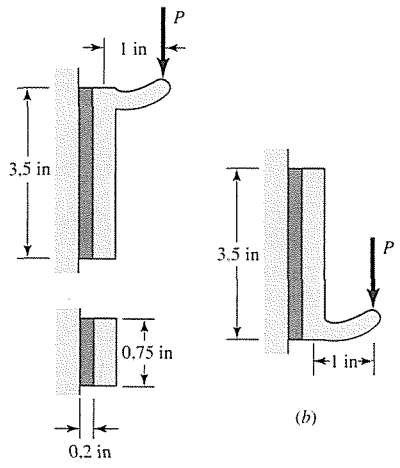


(*b*)

Problema 9-26
Pequeno suporte de atracadouro de embarcação.

ANÁLISE **9-27** Por razões de perspectiva, é sempre útil olhar em termos de escala. Duplique todas as dimensões no Problema 9-5 e encontre a carga admissível. Por qual fator ela foi aumentada? Primeiro, faça uma estimativa antes de fazer o cômputo. Você esperaria a mesma razão se a carga fosse variável?

ANÁLISE **9-28** As lojas de material de construção freqüentemente vendem ganchos plásticos que podem ser montados em paredes com fita de espuma adesiva barossensível (sensível à pressão). Dois projetos são mostrados nas partes (*a*) e (*b*) da figura. Indique qual você compraria e por quê.



Problema 9-28

ANÁLISE **9-29**

Para uma junção em balanço de sobreposição dupla solidificada à temperatura ambiente, a equação de Volkersen é simplificada a

$$\tau(x) = \frac{P\omega \cosh(\omega x)}{4b \operatorname{senh}(\omega l/2)} = A_1 \cosh(\omega x)$$

(*a*) Mostre que a tensão média $\bar{\tau}$ é $P/(2bl)$.

(*b*) Mostre que a maior tensão de cisalhamento é $P\omega/[4b\tanh(\omega l/20)]$.

(*c*) Defina o fator de aumento de tensão K, tal que

$$\tau(l/2) = K\bar{\tau}$$

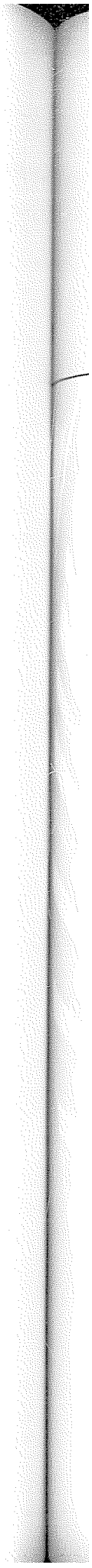
seguindo-se daí que

$$K = \frac{P\omega}{4b\tanh(\omega l/2)}\frac{2bl}{P} = \frac{\omega l/2}{\tanh(\omega l/2)} = \frac{\omega l}{2}\frac{\exp(\omega l/2) + \exp(-\omega l/2)}{\exp(\omega l/2) - \exp(-\omega l/2)}$$

9-30 Programe a solução da faixa de cisalhamento para o estado de tensão de cisalhamento em seu computador usando a Equação (9-12). Determine a tensão máxima de cisalhamento para cada um dos seguintes cenários:

Peça	E_o, psi	t_o, in	t_i, in	E_o, psi	E_i, psi	h, in
a	$0{,}2(10^6)$	0,125	0,250	$30(10^6)$	$30(10^6)$	0,005
b	$0{,}2(10^6)$	0,125	0,250	$30(10^6)$	$30(10^6)$	0,015
c	$0{,}2(10^6)$	0,125	0,125	$30(10^6)$	$30(10^6)$	0,005
d	$0{,}2(10^6)$	0,125	0,250	$30(10^6)$	$10(10^6)$	0,005

Providencie gráficos das distribuições verdadeiras de tensão preditas por essa análise. Você pode omitir as tensões térmicas dos cálculos, assumindo que a temperatura de serviço é similar à temperatura isenta de tensão. Se a tensão admissível de cisalhamento for 800 psi e a carga a ser carregada for de 300 lbf, estime os respectivos fatores de segurança para cada geometria. Faça $l = 1{,}25$ in e $b = 1$ in.



CAPÍTULO

10 Molas Mecânicas

10-1 Tensões em Molas Helicoidais 490
10-2 Efeito de Curvatura 491
10-3 Deflexão de Molas Helicoidais 492
10-4 Molas de Compressão 492
10-5 Estabilidade 493
10-6 Materiais de Mola 494
10-7 Projeto de Molas Helicoidais de Compressão para Serviço Estático 499
10-8 Freqüência Crítica de Molas Helicoidais 504
10-9 Carregamento de Fadiga de Molas Helicoidais de Compressão 506
10-10 Projeto de Molas Helicoidais de Compressão para Carregamento de Fadiga 509
10-11 Molas de Extensão 512
10-12 Molas de Torção de Espiras Helicoidais 519
10-13 Molas Belleville 526
10-14 Molas Diversas 526
10-15 Resumo 528

Quando um projetista deseja rigidez, deflexão insignificante é uma aproximação aceitável enquanto não comprometer a função. Flexibilidade é às vezes necessária e com freqüência provida por corpos metálicos com geometria habilmente controlada. Esses corpos podem exibir flexibilidade ao grau que o projetista busca. Tal flexibilidade pode ser linear ou não-linear ao relacionar a deflexão à carga. Esses dispositivos permitem aplicação controlada da força ou torque; o armazenamento e liberação de energia pode ser um outro propósito. A flexibilidade permite distorção temporária para acesso e a restauração imediata da função. Por causa do valor da maquinaria aos projetistas, as molas têm sido intensamente estudadas; além disso, elas são produzidas em massa (portanto, são de baixo custo), e configurações engenhosas têm sido encontradas para as mais diversas propriedades desejadas. Neste capítulo, discutiremos os tipos mais freqüentemente usados de molas, suas relações paramétricas necessárias e seus projetos.

Em geral, as molas podem ser classificadas como de fio (arame), planas ou de formato especial, existindo variações dentro dessas divisões. As molas de fio incluem as molas helicoidais de fio redondo e quadrado, feitas para resistir e defletir sob cargas de tração, compressão e torção. As molas planas incluem os tipos de viga em balanço e elípticos, as molas de potência do tipo enrolamento de motor ou do tipo relógio, e arruelas de mola plana, geralmente chamadas de molas Belleville.

10-1 Tensões em Molas Helicoidais

A Figura 10-1(*a*) mostra uma mola helicoidal de compressão de fio redondo carregada pela força axial F. Designamos D como o *diâmetro médio de espira* e d como o *diâmetro do fio*. Imagine agora que a mola seja cortada em algum ponto (Figura 10-1(*b*)), tenha uma porção removida e o efeito dessa porção removida seja substituído por reações internas resultantes. Então, como mostrado na figura, a partir do equilíbrio a porção cortada conteria uma força direta de cisalhamento F e uma torção $T = FD/2$.

Para visualizar a torção, desenhe uma mangueira de jardim enrolada. Agora puxe uma extremidade da mangueira em uma linha reta perpendicular ao plano da espira. À medida que cada volta da mangueira é puxada para fora do rolo, a mangueira torce-se ou gira ao redor de seu próprio eixo. A flexão de uma mola helicoidal cria uma torção no fio de uma maneira similar.

A tensão máxima no fio pode ser computada pela superposição da tensão de cisalhamento direto dada pela Equação (4-23) e da tensão de cisalhamento de torção dada pela Equação (4-37). O resultado é

$$\tau_{\max} = \frac{Tr}{J} + \frac{F}{A} \tag{a}$$

na fibra *interna* da mola. A substituição de $\tau_{\max} = \tau$, $T = FD/2$, $r = d/2$, $J = \pi d^4/32$ e $A = \pi d^2/4$ dá

$$\tau = \frac{8FD}{\pi d^3} + \frac{4F}{\pi d^2} \tag{10-1}$$

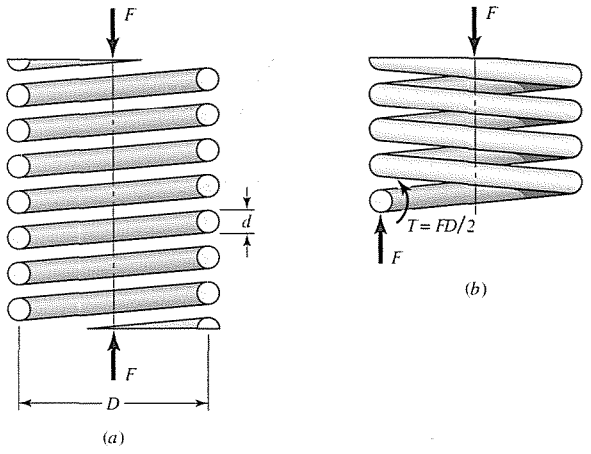


Figura 10-1 (*a*) Mola helicoidal carregada longitudinalmente; (*b*) diagrama de corpo livre mostrando que o fio está sujeito a um cisalhamento direto e a um cisalhamento de torção.

Agora definimos o *índice de mola*

$$C = \frac{D}{d} \tag{10-2}$$

que é uma medida de curvatura da espiral. Com essa relação, a Equação (10-1) pode ser rearranjada para dar

$$\tau = K_s \frac{8FD}{\pi d^3} \tag{10-3}$$

em que K_s é um *fator de correção de tensão de cisalhamento* e é definido pela equação

$$K_s = \frac{2C + 1}{2C} \tag{10-4}$$

Para a maioria das molas, C variará de cerca de 6 a 12. A Equação (10-3) é bastante geral e aplica-se a ambas as cargas estática e dinâmica.

O uso de fio quadrado ou retangular não é recomendado para molas a menos que limitações de espaço assim o exijam. Molas de formas especiais de fio não são feitas em grandes quantidades, ao contrário daquelas de fio redondo; elas não têm tido o benefício do desenvolvimento refinado e, portanto, podem não ser tão fortes quanto as molas feitas de fio redondo. Quando o espaço for muito limitado, o uso de molas aninhadas de fio redondo deve ser sempre considerado. Elas podem ter uma vantagem econômica sobre as molas de secção especial, bem como uma vantagem de resistência.

10-2 Efeito de Curvatura

A Equação (10-1) baseia-se em o fio ser reto. Contudo, a curvatura do fio aumenta a tensão no lado interno da mola, mas a diminui ligeiramente no lado externo. Essa tensão de curvatura é importante sobretudo em fadiga, pois as cargas são mais baixas e não há oportunidade para o escoamento localizado. Para carregamento estático, normalmente essas tensões podem ser ignoradas por causa do enrijecimento de deformação com a primeira aplicação de carga.

Infelizmente, é necessário encontrar o fator de curvatura de uma maneira indireta. A razão para isso é que as equações publicadas também incluem o efeito da tensão direta de cisalhamento. Suponha que K_s na Equação (10-3) seja substituído por um outro fator K, que corrige para curvatura e cisalhamento direto. Então, esse fator é dado por qualquer das equações

$$K_W = \frac{4C - 1}{4C - 4} + \frac{0{,}615}{C} \tag{10-5}$$

$$K_B = \frac{4C + 2}{4C - 3} \tag{10-6}$$

O primeiro deles é chamado *fator de Wahl* e o segundo, *fator de Bergsträsser*.[1]

Visto que os resultados dessas duas equações diferem por menos de 1%, a Equação (10-6) é preferível. O fator de correção de curvatura pode agora ser obtido cancelando-se completamente o efeito do cisalhamento direto. Assim, usando a Equação (10-6) com a (10-4), o fator de correção de curvatura é encontrado sendo

$$K_c = \frac{K_B}{K_s} = \frac{2C(4C + 2)}{(4C - 3)(2C + 1)} \tag{10-7}$$

Agora, K_s, K_B ou K_W e K_C são simplesmente fatores de correção de tensão aplicados multiplicativamente por Tr/J na localização crítica para estimar uma tensão particular. Não existe *nenhum* fator de concentração de tensão. Neste livro usaremos $\tau = K_B(8FD)/(\pi d^3)$ para predizer a maior tensão de cisalhamento.

[1] Cyril Samónov, "Some Aspects of Design of Helical Compression Springs", *Int. Symp. Design and Synthesis*, Tokyo, 1984.

10-3 Deflexão de Molas Helicoidais

As relações de deflexão-força são muito facilmente obtidas usando o teorema de Castigliano. A energia total de deformação para uma mola helicoidal é composta de uma componente de torção e uma componente de cisalhamento. Das Equações (5-16) e (5-17), a energia de deformação é

$$U = \frac{T^2 l}{2GJ} + \frac{F^2 l}{2AG} \tag{a}$$

Substituindo $T = FD/2$, $l = \pi DN$, $J = \pi d^4/32$ e $A = \pi d^2/4$, resulta em

$$U = \frac{4F^2 D^3 N}{d^4 G} + \frac{2F^2 DN}{d^2 G} \tag{b}$$

em que $N = N_a$ = número de espiras ativas. Então, usando o teorema de Castigliano, Equação (5-21), para encontrar a deflexão total y, encontramos

$$y = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{8FD^3 N}{d^4 G} + \frac{4FDN}{d^2 G} \tag{c}$$

Visto que $C = D/d$, a Equação (c) pode ser rearranjada para produzir

$$y = \frac{8FD^3 N}{d^4 G}\left(1 + \frac{1}{2C^2}\right) \doteq \frac{8FD^3 N}{d^4 G} \tag{10-8}$$

A razão de mola, também chamada de *proporção* da mola, é $k = F/y$ e, assim,

$$k \doteq \frac{d^4 G}{8D^3 N} \tag{10-9}$$

10-4 Molas de Compressão

Os quatro tipos de extremidades geralmente usados para molas de compressão estão ilustrados na Figura 10-2. Uma mola de *extremidades planas* tem um helicóide ininterrupto; as extremidades são as mesmas como se uma mola longa tivesse sido cortada em secções. Uma mola de extremidades planas que são *esquadradas* ou *fechadas* é obtida ao deformar-se as extremidades a um ângulo de hélice de grau zero. As molas devem ser sempre ambas esquadradas e esmerilhadas para aplicações importantes, porque uma melhor transferência de carga é obtida.

A Tabela 10-1 mostra como o tipo de extremidade usado afeta o número de espiras e o comprimento de mola.[2] Note que os dígitos 0, 1, 2 e 3 que aparecem na Tabela 10-1 costumam ser usados sem questionamento. *Alguns deles necessitam de uma análise mais detalhada porque podem ser não-inteiros.* Isso depende de como um fabricante de molas faz as extremidades. Forys[3] salientou que extremidades esquadradas e esmerilhadas dão um comprimento sólido L_s de

$$L_s = (N_t - a)d$$

em que a varia, com uma média de 0,75, assim a entrada dN_t na Tabela 10-1 pode ser exagerada. A maneira de verificar essas variações é tomar molas de um determinado fabricante, fechá-las compactamente e medir a altura indeflectível (compacta ou sólida). Uma outra maneira é olhar para a mola e contar os diâmetros de fio na pilha compacta.

Remoção de deformação (*assentamento*) ou *pré-ajuste* é um processo usado na manufatura de molas de compressão para induzir tensões residuais úteis. É feita fazendo a mola mais longa que o necessário e então comprimindo-a até sua altura sólida. Essa operação *ajusta* a mola ao comprimento livre final requerido e, visto que a resistência torcional ao escoamento tem sido excedida, induz tensões residuais opostas em direção àquelas induzidas em serviço. Molas a serem pré-ajustadas devem ser projetadas de modo que 10 a 30% do comprimento livre inicial sejam removidos durante a operação. Se a tensão na altura sólida for

[2] Para uma discussão minuciosa e desenvolvimento dessas relações, ver Cyril Samónov, "Computer-Aided Design of Helical Compression Springs", ASME paper No. 80-DET-69, 1980.

[3] Edward L. Forys, "Accurate Spring Heights", *Machine Design*, vol. 56, no. 2, 26 de janeiro de 1984.

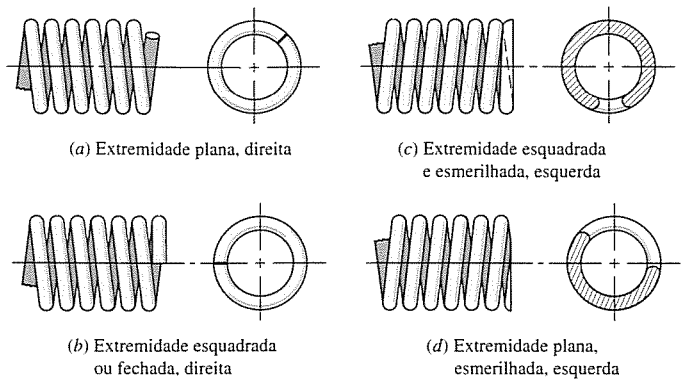


Figura 10-2 Tipos de extremidades para molas de compressão: (*a*) extremidades planas; (*b*) extremidades esquadradas; (*c*) extremidades esquadradas e esmerilhadas; (*d*) extremidades planas e esmerilhadas.

Tabela 10-1 Fórmulas para dimensões de mola de compressão (N_a = número de espiras ativas)

Termo	Tipos de Extremidades de Mola			
	Plana	Plana e esmerilhada	Esquadrada ou fechada	Esquadrada e esmerilhada
Espiras de extremidade, N_e	0	1	2	2
Espiras totais, N_t	N_a	N_a+1	N_a+2	N_a+2
Comprimento livre, L_0	$pN_a + d$	$p(N_a + 1)$	$pN_a + 3d$	$pN_a + 2d$
Comprimento indeflectível (sólido), L_s	$d(N_t + 1)$	dN_t	$d(N_t + 1)$	dN_t
Passo, p	$(L_0 - d)/N_a$	$L_0/(N_a + 1)$	$(L_0 - 3d)/N_a$	$(L_0 - 2d)/N_a$

Fonte: *Design Handbook*, 1987, p. 32. Cortesia da Associated Spring.

maior que 1,3 vez a resistência torcional ao escoamento, distorção pode ocorrer. Se essa tensão for muito menor que 1,1 vez, será difícil controlar o comprimento livre resultante.

Remoção de deformação aumenta a resistência da mola e, assim, é especialmente útil quando a mola é usada para propósitos de armazenagem de energia. Contudo, a remoção de deformação não deve ser usada quando as molas forem sujeitas a fadiga.

10-5 Estabilidade

No Capítulo 4, aprendemos que uma coluna flambará quando a carga se tornar muito grande. Similarmente, molas de espira de compressão podem flambar quando a deflexão se tornar muito grande. A deflexão crítica é dada pela equação

$$y_{\text{cr}} = L_0 C_1' \left[1 - \left(1 - \frac{C_2'}{\lambda_{\text{eff}}^2} \right)^{1/2} \right] \tag{10-10}$$

em que y_{cr} é a deflexão correspondente ao início de instabilidade. Samónov[4] afirma que essa equação é citada por Wahl[5] e verificada experimentalmente por Haringx.[6] A quantidade λ_{eff} na Equação (10-10) é a *razão efetiva de esbeltez* e é dada pela equação

$$\lambda_{\text{eff}} = \frac{\alpha L_0}{D} \tag{10-11}$$

[4] "Computer-Aided Design."
[5] A. M. Wahl, *Mechanical Springs*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1963.
[6] J. A. Haringx, "On Highly Compressible Helical Springs and Rubber Rods and Their Application for Vibration-Free Mountings", I e II, *Philips Res. Rep.*, vol. 3, dezembro de 1948, p. 401-449, e vol. 4, fevereiro de 1949, p. 49-80.

C_1' e C_2' são constantes elásticas e são definidas pelas equações

$$C_1' = \frac{E}{2(E - G)}$$

$$C_2' = \frac{2\pi^2(E - G)}{2G + E}$$

A Equação (10-11) contém a *constante α de condição de extremidade*. Esta depende de como as extremidades da mola estão apoiadas. A Tabela 10-2 dá valores de α para condições usuais de extremidade. Note quão proximamente estas assemelham-se às condições de extremidade para colunas.

Estabilidade absoluta ocorre quando, na Equação (10-10), o termo $C_2'/\lambda_{\text{eff}}^2$ é maior que a unidade. Isso significa que a condição para estabilidade absoluta é que

$$L_0 < \frac{\pi D}{\alpha}\left[\frac{2(E - G)}{2G + E}\right]^{1/2} \tag{10-12}$$

Para aços, isso vem a ser

$$L_0 < 2{,}63\frac{D}{\alpha} \tag{10-13}$$

Para extremidades esquadradas e esmerilhadas, $\alpha = 0{,}5$ e $L_0 \leq 5{,}26D$.

Tabela 10-2 Constantes de condição de extremidade α para molas helicoidais de compressão*

Condição de extremidade	Constante α
Mola suportada entre superfícies planas paralelas (extremidades fixas)	0,5
Uma extremidade suportada por superfície plana perpendicular ao eixo de mola (fixa); a outra extremidade pivotada (articulada)	0,707
Ambas as extremidades pivotadas (articuladas)	1
Uma extremidade engastada; a outra extremidade livre	2

* Extremidades apoiadas em superfícies planas devem ser esquadradas e esmerilhadas.

10-6 Materiais de Mola

As molas são manufaturadas por processos de trabalho a quente ou a frio, dependendo do tamanho do material, do índice de mola e das propriedades desejadas. Em geral, um fio pré-endurecido não deve ser usado caso $D/d < 4$ ou se $d > \frac{1}{4}$ in. O enrolamento da mola induz tensões residuais por flexão, mas estas são normais à direção das tensões de torção de trabalho em uma mola de espiras. Muito freqüentemente na manufatura de mola, elas são aliviadas, depois do enrolamento, por um tratamento térmico ameno.

Uma grande variedade de materiais de mola está disponível ao projetista, incluindo aços comuns de carbono, aços liga e aços resistentes à corrosão, bem como materiais não-ferrosos, como bronze-fósforo, latão de mola, cobre-berílio e várias ligas de níquel. Descrições dos aços mais comumente usados são encontradas na Tabela 10-3. Os aços UNS listados no Apêndice A devem ser usados ao se projetarem molas de espiras pesadas, trabalhadas a quente, bem como molas planas, molas de chapa e barras de torção.

Os materiais de mola podem ser comparados por um exame de suas resistências de tração; estas variam tanto com o tamanho do fio que não podem ser especificadas até que ele seja conhecido. O material e seu processamento também têm um efeito na resistência à tração. Resulta que o gráfico da resistência à tração *versus* o diâmetro de fio é quase uma linha reta para alguns materiais quando traçado em papel log-log. Escrever a equação dessa linha como

$$S_{ut} = \frac{A}{d^m} \tag{10-14}$$

fornece um bom meio de estimar as resistências mínimas à tração quando a intersecção A e a inclinação m da linha são conhecidas. Os valores dessas constantes têm sido calculados a partir de dados recentes e são

Tabela 10-3 Aços de mola de liga e alto carbono

Nome do material	Especificações similares	Descrição
Fio musical 0,80-0,95C	UNS G10850 AISI 1085 ASTM A228-51	Este é o melhor, o mais tenaz e o mais amplamente usado entre todos os materiais de mola para molas pequenas. Ele tem a maior resistência à tração e pode suportar tensões mais elevadas sob carregamento repetido que qualquer outro material de mola. Disponível em diâmetros 0,12 a 3 mm (0,005 a 0,125 in). Não deve ser usado acima de 120°C (250°F) ou a temperaturas abaixo de zero.
Fio revenido em óleo 0,60-0,70C	UNS G10650 AISI 1065 ASTM 229-41	Este aço de mola de propósito geral é usado para muitos tipos de molas de espira nos quais o custo do fio musical é proibitivo e em tamanhos maiores que os disponíveis em fio musical. Não recomendado para carregamento de choque e impacto. Disponível em diâmetros de 3 a 12 mm (0,125 a 0,5000 in), mas tamanhos maiores e menores podem ser obtidos. Não recomendado para uso acima de 180°C (350°F) ou em temperaturas abaixo de zero.
Fio repuxado duro 0,60-0,70C	UNS G10660 AISI 1065 ASTM A227-47	Este é o aço de mola mais barato de propósito geral e deve ser usado somente quando vida, acurácia e deflexão não são muito importantes. Disponível em diâmetros de 0,8 a 12 mm (0,031 a 0,500 in). Não recomendado para uso acima de 120°C (250°F) ou a temperaturas abaixo de zero.
Cromo-vanádio	UNS G61500 AISI 6150 ASTM 231-41	Este é o aço liga de mola mais popular para condições envolvendo tensões mais elevadas que pode ser usado com aços de alto-carbono e nas quais resistência à fadiga e resistência longa são necessárias. Também bom para cargas de choque e impacto. Amplamente usado para molas de válvulas de motor de aeronaves e para temperaturas até 220°C (425°F). Disponível em tamanhos recozidos ou pré-revenidos de 0,8 a 12 mm (0,031 a 0,500 in) de diâmetro.
Cromo-silício	UNS G92540 AISI 9254	Esta liga é um material excelente para molas altamente tensionadas que requerem vida longa e estão sujeitas a carregamento de choque. Durezas Rockwell de C50 a C53 são muito comuns, e o material pode ser usado a até 250°C (475°F). Disponível de 0,8 a 12 mm (0,031 a 0,500 in) de diâmetro.

Fonte: De Harold C. R. Carlson, "Selection and Application of Spring Materials", *Mechonical Engineering*, vol. 78, 1956, p. 331-334.

dados para resistências em unidades de kpsi e MPa na Tabela 10-4. Na Equação (10-14), quando d é medido em milímetros, então A fica em MPa · mm^m; quando medido em polegadas, A fica em kpsi · in^m.

Embora a resistência ao escoamento de torção seja necessária para projetar a mola e analisar o desempenho, os materiais de mola costumam ser ensaiados somente para resistência à tração – talvez porque seja um ensaio fácil e barato de fazer. Uma estimativa bem grosseira da resistência ao escoamento de torção pode ser obtida assumindo que a resistência ao escoamento de tração seja entre 60 a 90% da resistência à tração. Então, a teoria de energia de distorção pode ser empregada para obter a resistência ao escoamento de torção ($S_{ys} = 0{,}577S_y$). Essa abordagem resulta em um intervalo

$$0{,}35S_{ut} \leq S_{sy} \leq 0{,}52S_{ut} \tag{10-15}$$

para aços.

Tabela 10-4 Constantes A e m de $S_{ut} = A/d^m$ para estimativa da resistência mínima à tração de fios comuns de mola

Material	Número da ASTM	Expoente m	Diâmetro, in	A, kpsi · in^m	Diâmetro, mm	A, MPa · mm^m	Custo relativo do fio
Fio musical*	A228	0,145	0,004-0,256	201	0,10-6,5	2211	2,6
Fio OQ&T (temperado em banho de óleo e revenido)†	A229	0,187	0,020-0,500	147	0,5-12,7	1855	1,3
Fio repuxado duro‡	A227	0,190	0,028-0,500	140	0,7-12,7	1783	1,0
Fio de cromo-vanádio§	A232	0,168	0,032-0,437	169	0,8-11,1	2005	3,1
Fio de cromo-silício‖	A401	0,108	0,063-0,375	202	1,6-9,5	1974	4,0
Fio de aço inoxidável 302#	A313	0,146 0,263 0,478	0,013-0,10 0,10-0,20 0,20-0,40	169 128 90	0,3-2,5 2,5-5 5,10	1867 2065 2911	7,6-11
Fio de bronze-fósforo**	B159	0 0,028 0,064	0,004-0,022 0,022-0,075 0,075-0,30	145 121 110	0,1-0,6 0,6-2 2-7,5	1000 913 932	8,0

* Superfície suave, livre de defeitos e com acabamento brilhante e lustroso.
† Tem uma escama leve de termotratamento que deve ser removida antes de chapeamento (revestimento metálico).
‡ Superfície suave e brilhante sem marcas visíveis.
§ Fio revenido de qualidade aeronáutica, pode também ser obtido recozido.
‖ Revenido para Rockwell C49, mas pode ser obtido sem revenido.
Aço inoxidável do tipo 302.
** Revenido CA510.
Fonte: *Design Handbook*, 1987, p. 19. Cortesia da Associated Spring.

Para os fios listados na Tabela 10-5, a tensão máxima admissível de cisalhamento em uma mola pode ser vista na coluna 3. O fio musical e o fio de mola de aço duro repuxado têm uma extremidade inferior de intervalo $S_{sy} = 0{,}45S_{ut}$. O fio de mola de válvula, Cr-Va, Cr-Si, e outro (não mostrado) fio de carbono endurecido e revenido e fios de aço de baixa liga, como um grupo, têm $S_{sy} \geq 0{,}50S_{ut}$. Muitos materiais não-ferrosos (não mostrados), como um grupo, têm $S_{sy} \geq 0{,}35S_{ut}$. Em vista disso, Joerres[7] usa a tensão máxima admissível de torção para aplicação estática mostrada na Tabela 10-6. Para materiais específicos para os quais você tem informação de escoamento de torção, use essa tabela como um guia. Joerres provê informação de remoção de deformação na Tabela 10-6, em que $S_{sy} \geq 0{,}65S_{ut}$ aumenta a resistência por trabalho a frio, mas ao custo de uma operação adicional do fabricante de mola. Às vezes, a operação adicional pode ser feita pelo fabricante durante a montagem. Algumas correlações com molas de aço de carbono mostram que a resistência ao escoamento de tração do fio de mola em torção pode ser estimada começando com $0{,}75S_{ut}$. A correspondente estimativa da resistência ao escoamento em cisalhamento baseada na teoria de energia de distorção é $S_{sy} = 0{,}577(0{,}75)S_{ut} = 0{,}433S_{ut} \doteq 0{,}45S_{ut}$. Samónov discute o problema de tensão admissível e mostra que

$$S_{sy} = \tau_{\text{all}} = 0{,}56S_{ut} \tag{10-16}$$

para aços de mola de alta tração que é próximo ao valor dado por Joerres para aços de liga endurecidos. Ele aponta que esse valor da tensão admissível está especificado pelo Draft Standard 2089 da República Federal da Alemanha quando a Equação (10-3) é usada sem fator de aumento de tensão.

[7] Robert E. Joerres, "Springs", Cap. 24, em Joseph E. Shigley e Charles R. Mischke (eds.), *Standard Handbook of Machine Design*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1996.

Tabela 10-5 Propriedades mecânicas de alguns fios de mola

Material	Limite elástico, percentagem da S_{ut} Tração	Torção	Diâmetro d, in	E Mpsi	E GPa	G Mpsi	G GPa
Fio musical A228	65-75	45-60	< 0,032	29,5	203,4	12,0	82,7
			0,033-0,063	29,0	200	11,85	81,7
			0,064-0,125	28,5	196,5	11,75	81,0
			> 0,125	28,0	193	11,6	80,0
Mola endurecida A227	60-70	45-55	< 0,032	28,8	198,6	11,7	80,7
			0,033-0,063	28,7	197,9	11,6	80,0
			0,064-0,125	28,6	197,2	11,5	79,3
			> 0,125	28,5	196,5	11,4	78,6
Revenido a óleo A239	85-90	45-50		28,5	196,5	11,2	77,2
Mola de válvula A230	85-90	50-60		29,5	203,4	11,2	77,2
Cromo-vanádio A231	88-93	65-75		29,5	203,4	11,2	77,2
A232	88-93			29,5	203,4	11,2	77,2
Cromo-silício A401	85-93	65-75		29,5	203,4	11,2	77,2
Aço inoxidável							
A313*	65-75	45-55		28	193	10	69,0
17-7PH	75-80	55-60		29,5	208,4	11	75,8
414	65-70	42-55		29	200	11,2	77,2
420	65-75	45-55		29	200	11,2	77,2
431	72-76	50-55		30	206	11,5	79,3
Bronze-fósforo B159	75-80	45-50		15	103,4	6	41,4
Berílio-cobre B197	70	50		17	117,2	6,5	44,8
	75	50-55		19	131	7,3	50,3
Liga inconel X-750	65-70	40-45		31	213,7	11,2	77,2

* Também inclui 302, 304 e 316.
Nota: Ver Tabela 10-6 para valores de projeto de tensão admissível de torção.

Tabela 10-6 Tensões máximas admissíveis de torção para molas helicoidais de compressão em aplicações estáticas

Material	Percentagem Máxima de Resistência à Tração Antes de remoção de deformação (inclui K_w ou K_b)	Depois de remoção de deformação (inclui K_s)
Fio musical e aço carbono repuxado a frio	45	60-70
Aço carbono endurecido e revenido e aço de baixa liga	50	65-75
Aços austeníticos inoxidáveis	35	55-65
Ligas não-ferrosas	35	55-65

Fonte: Robert E. Joerres, "Springs", Cap. 24, em Joseph E. Shigley e Charles R. Mischke (eds.), *Standard Handbook of Machine Design*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1996.

EXEMPLO 10-1

Uma mola helicoidal de compressão é feita de fio musical nº 16. O diâmetro externo da mola é $\frac{7}{16}$ in. As extremidades são esquadradas e existem um total de $12\frac{1}{2}$ voltas.

(*a*) Estime a resistência ao escoamento de torção do fio.

(*b*) Estime a carga estática correspondente à resistência ao escoamento.

(*c*) Estime a escala da mola.

(*d*) Estime a deflexão que seria causada pela carga em (*b*).

(*e*) Estime o comprimento sólido da mola.

(*f*) Que comprimento a mola deve ter para assegurar que, quando estiver comprimida sólida e então solta, não haverá mudança permanente no comprimento livre?

(*g*) Dado o comprimento encontrado em (*f*), flambagem é uma possibilidade?

(*h*) Qual é o passo da espira de corpo?

Solução

(*a*) A partir da Tabela A-28, o diâmetro do fio é $d = 0{,}037$ in. A partir da Tabela 10-4, encontramos $A = 201$ kpsi $\cdot$ in^m e $m = 0{,}145$. Assim, da Equação (10-14),

$$S_{ut} = \frac{A}{d^m} = \frac{201}{0{,}037^{0{,}145}} = 324 \text{ kpsi}$$

Então, da Tabela 10-6,

Resposta
$$S_{sy} = 0{,}45 S_{ut} = 0{,}45(324) = 146 \text{ kpsi}$$

(*b*) O diâmetro médio da espira de mola é $D = \frac{7}{16} - 0{,}037 = 0{,}400$ in, e assim o índice de mola é $C = 0{,}400/0{,}037 = 10{,}8$. Então, da Equação (10-6),

$$K_B = \frac{4C + 2}{4C - 3} = \frac{4(10{,}8) + 2}{4(10{,}8) - 3} = 1{,}124$$

Agora rearranje a Equação (10-3) substituindo K_s e τ com K_B e S_{ys}, respectivamente, e resolva para F:

Resposta
$$F = \frac{\pi d^3 S_{sy}}{8 K_B D} = \frac{\pi(0{,}037^3)146(10^3)}{8(1{,}124)\,0{,}400} = 6{,}46 \text{ lbf}$$

(*c*) Da Tabela 10-1, $N_a = 12{,}5 - 2 = 10{,}5$ voltas. Na Tabela 10-5, $G = 11{,}85$ Mpsi, e a escala da mola é encontrada valendo, a partir da Equação (10-9),

Resposta
$$k = \frac{d^4 G}{8 D^3 N_a} = \frac{0{,}037^4\,(11{,}85)10^6}{8(0{,}400^3)10{,}5} = 4{,}13 \text{ lbf/in}$$

Resposta (*d*)
$$y = \frac{F}{k} = \frac{6{,}46}{4.13} = 1{,}56 \text{ in}$$

(*e*) Da Tabela 10-1,

Resposta
$$L_s = (N_t + 1)d = (10{,}5 + 1)0{,}037 = 0{,}426 \text{ in}$$

Resposta (*f*)
$$L_0 = y + L_s = 1{,}56 + 0{,}426 = 1{,}99 \text{ in.}$$

(*g*) Para evitar flambagem, a Equação (10-13) e a Tabela 10-2 dão

$$L_0 < 2{,}63\frac{D}{\alpha} = 2{,}63\frac{0{,}400}{0{,}5} = 2{,}10 \text{ in}$$

Matematicamente, um comprimento livre de 1,99 in é menor que 2,10 in, e flambagem é improvável. Contudo, a forma das extremidades controlará quão próximo α está de 0,5. Isso deve ser investigado e uma barra interna ou tubo externo ou orifício pode ser necessário.

Por fim, a partir da Tabela 10-1, o passo da espira de corpo é

Resposta

$$p = \frac{L_0 - 3d}{N_a} = \frac{1{,}99 - 3(0{,}037)}{10{,}5} = 0{,}179 \text{ in}$$

10-7 Projeto de Molas Helicoidais de Compressão para Serviço Estático

O intervalo preferível de índice de mola é $4 \le C \le 12$, com os índices mais baixos sendo mais difíceis de formar (por causa do perigo de trinca) e as molas com os índices mais altos tendendo a se emaranhar o suficiente para requerer empacotamento individual. Este pode ser o primeiro item da avaliação de adequação. O intervalo recomendado de voltas ativas é $3 \le N_a \le 15$. Para manter a linearidade quando uma mola está quase se fechando, é necessário evitar o encosto gradual das espiras (devido à imperfeição de passo). A característica da força-deformação de uma mola helicoidal de espira é idealmente linear. Na prática, é quase assim, mas não em cada extremidade da curva de força-deflexão. A força de mola não é reprodutível para deflexões muito pequenas e, próximo ao fechamento, o comportamento não-linear começa à medida que o número de voltas ativas diminui, visto que as espiras começam a se tocar. O projetista confina o ponto de operação de mola aos 75% centrais da curva entre nenhuma carga, $F = 0$, e fechamento $F = F_s$. Assim, a força operacional máxima deve ser limitada a $F_{\max} \le \frac{7}{8} F_s$. Definindo a extensão fracionária até o fechamento como sendo ξ, em que

$$F_s = (1 + \xi) F_{\max} \tag{10-17}$$

segue que

$$F_s = (1 + \xi) F_{\max} = (1 + \xi)\left(\frac{7}{8}\right) F_s$$

A partir da igualdade externa $\xi = 1/7 = 0{,}143 \doteq 0{,}15$. Assim, é recomendável que $\xi \ge 0{,}15$.

Além das relações e propriedades do material para molas, temos agora algumas condições recomendáveis de projeto a seguir, isto é:

$$4 \le C \le 12 \tag{10-18}$$

$$3 \le N_a \le 15 \tag{10-19}$$

$$\xi \ge 0{,}15 \tag{10-20}$$

$$n_s \ge 1{,}2 \tag{10-21}$$

Ao considerar projetar uma mola para produção em grandes quantidades, a figura de mérito pode ser o custo do fio a partir do qual a mola é enrolada. A fom seria proporcional ao custo relativo do material, à densidade em peso e ao volume:

$$\text{fom} = -(\text{custo relativo do material}) \frac{\gamma \pi^2 d^2 N_t D}{4} \tag{10-22}$$

Para comparações entre aços, o peso específico γ pode ser omitido.

O projeto de mola é um processo de extremidades abertas. Existem muitas decisões a serem feitas, muitos passos possíveis de solução, bem como soluções. No passado, cartas, nomogramas e "regras de cálculo de projeto de molas" eram usados por muitos para simplificar o problema de projeto de molas. Hoje, o computador habilita o projetista a criar programas em diversos formatos – programação direta, planilha de cálculo, MATLAB, etc. Programas comerciais também estão disponíveis.[8] Existem quase tantas formas de criar um programa de projeto de mola quanto o número de programadores. Aqui, sugeriremos uma abordagem possível de projeto.

Estratégia de Projeto

Faça suas decisões *a priori*, com fio de aço duro repuxado como a primeira escolha (o custo relativo do material é 1,0). Escolha um tamanho de fio d. Com todas as decisões feitas, gere uma coluna de parâmetros: d, D, C, OD (diâmetro externo) ou ID (diâmetro interno), N_a, L_s, L_0, $(L_0)_{cr}$, n_s e fom. Incrementando os tama-

[8] For exemple, see Advanced Spring Design, a program developed between the Spring Manufacturers Institute (SMI), www.smihq.org, and Universal Technical Systems, Inc. (UTS), www.uts.com.

nhos de fio disponíveis, podemos varrer a tabela de parâmetros e aplicar as recomendações de projeto por inspeção. Após os tamanhos de fio serem eliminados, escolha o projeto de mola com a mais alta figura de mérito. Isso produzirá um projeto ótimo mesmo com a presença de uma variável discreta de projeto d e a anexação das restrições de igualdade e desigualdade. O vetor da coluna de informação pode ser gerado usando o diagrama de fluxo mostrado na Figura 10-3. Ele é geral o suficiente para acomodar as situações de molas tipo enroladas e de deformação removida, operando sobre uma barra, ou em um furo livre de barra ou furo. Nas molas tipo enroladas, a equação de controle deve ser resolvida para o índice de mola como segue. A partir da Equação (10-3), com $\tau = S_{sy}/n_s$, $C = D/d$, K_B da Equação (10-6), e Equação (10-17),

$$\frac{S_{sy}}{n_s} = K_B \frac{8F_s D}{\pi d^3} = \frac{4C+2}{4C-3}\left[\frac{8(1+\xi)F_{\max} C}{\pi d^2}\right] \tag{a}$$

Seja

$$\alpha = \frac{S_{sy}}{n_s} \tag{b}$$

$$\beta = \frac{8(1+\xi)F_{\max}}{\pi d^2} \tag{c}$$

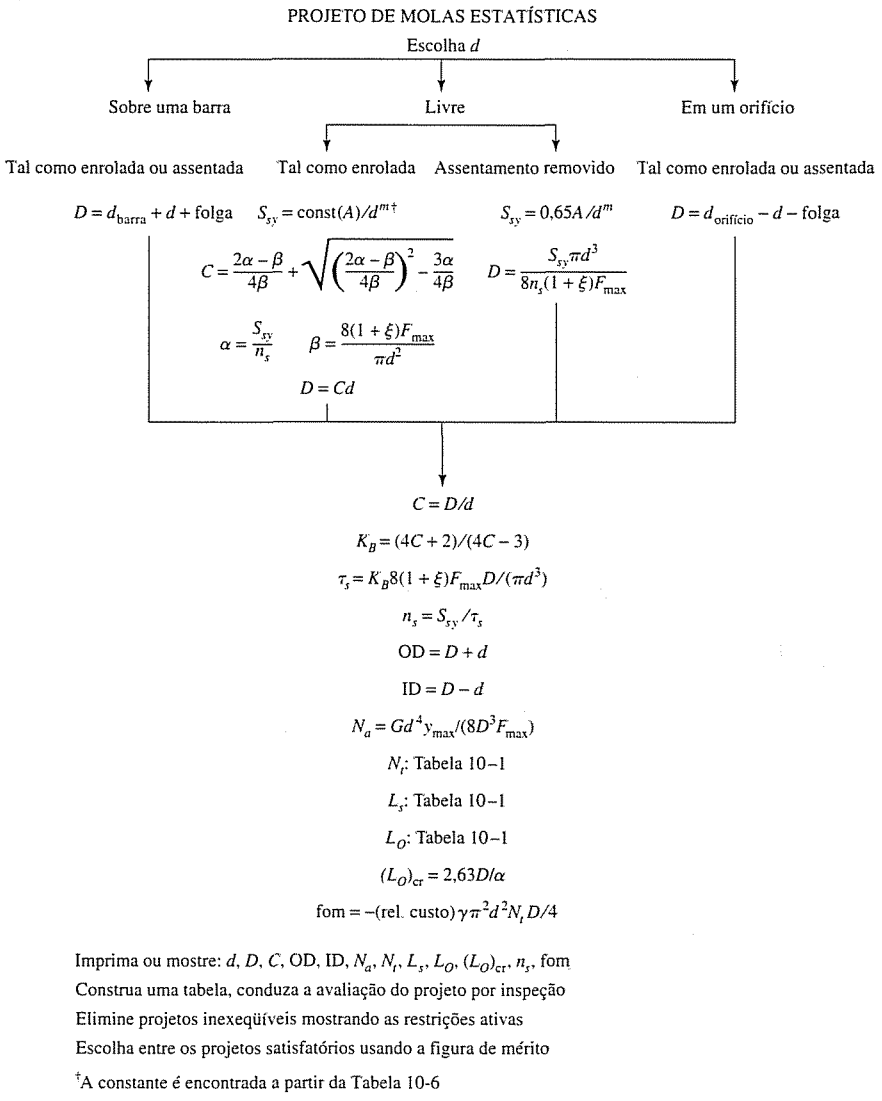


Figura 10-3 Diagrama de fluxo do projeto de mola de compressão de espiras helicoidais para carregamento estático.

EXEMPLO 10-2

Uma mola helicoidal de compressão de fio musical é necessária para suportar uma carga de 20 lbf após ser comprimida em 2 in. Devido a considerações de montagem, a altura sólida não pode exceder a 1 in e o comprimento livre não pode ter mais que 4 in. Projete a mola.

Solução

As decisões *a priori* são:

- Fio musical, A228; da Tabela 10-4, $A = 201\,000$ psi · in^m; $m = 0{,}145$; da Tabela 10-5, $E = 28{,}5$ Mpsi, $G = 11{,}75$ Mpsi (esperando que $d > 0{,}064$ in)
- Extremidades esquadradas e esmerilhadas
- Função: $F_{max} = 20$ lbf, $y_{max} = 2$ in
- Segurança: use fator de projeto na altura sólida de $(n_s)_d = 1{,}2$
- Linearidade robusta: $\xi = 0{,}15$
- Use mola tipo enrolada (mais barata), $S_{sy} = 0{,}45S_{ut}$ pela Tabela 10-6
- Variável de decisão: $d = 0{,}080$ in, bitola de fio musical nº 30, Tabela A-25. Usando a Figura 10-3 e a Tabela 10-6,

$$S_{sy} = 0{,}45\frac{201\,000}{0{,}080^{0{,}145}} = 130\,455 \text{ psi}$$

A partir da Figura 10-3 ou da Equação (10-23),

$$\alpha = \frac{S_{sy}}{n_s} = \frac{130\,455}{1{,}2} = 108\,713 \text{ psi}$$

$$\beta = \frac{8(1+\xi)F_{max}}{\pi d^2} = \frac{8(1+0{,}15)20}{\pi(0{,}080^2)} = 9151{,}4 \text{ psi}$$

$$C = \frac{2(108\,713) - 9151{,}4}{4(9151{,}4)} + \sqrt{\left[\frac{2(108\,713) - 9151{,}4}{4(9151{,}4)}\right]^2 - \frac{3(108\,713)}{4(9151{,}4)}} = 10{,}53$$

Continuando com a Figura 10-3:

$$D = Cd = 10{,}53(0{,}080) = 0{,}8424$$

$$K_B = \frac{4(10{,}53) + 2}{4(10{,}53) - 3} = 1{,}128$$

$$\tau_s = 1{,}128\frac{8(1+0{,}15)20(0{,}8424)}{\pi(0{,}080)^3} = 108\,700 \text{ psi}$$

$$n_s = \frac{130\,445}{108\,700} = 1{,}2$$

$$\text{OD} = 0{,}843 + 0{,}080 = 0{,}923 \text{ in}$$

$$N_a = \frac{0{,}080^4(11{,}75)10^6(2)}{8(0{,}843)^3 20} = 10{,}05 \text{ voltas}$$

$$N_t = 10{,}05 + 2 = 12{,}05 \text{ total voltas}$$

$$L_s = 0{,}080(12{,}05) = 0{,}964 \text{ in}$$

$$L_0 = 0{,}964 + (1 + 0{,}15)2 = 3{,}264 \text{ in}$$

$$(L)_{cr} = 2{,}63(0{,}843/0{,}5) = 4{,}43 \text{ in}$$

$$\text{fom} = -2{,}6\pi^2(0{,}080)^2 12{,}05(0{,}843)/4 = -0{,}417$$

Repita o procedimento acima para outros diâmetros de fio e forme uma tabela (facilmente realizável com um programa de planilha de cálculo):

d:	0,063	0,067	0,071	0,075	0,080	0,085	0,090	0,095
D	0,391	0,479	0,578	0,688	0,843	1,017	1,211	1,427
C	6,205	7,153	8,143	9,178	10,53	11,96	13,46	15,02
OD	0,454	0,546	0,649	0,763	0,923	1,102	1,301	1,522
N_a	39,1	26,9	19,3	14,2	10,1	7,3	5,4	4,1
L_s	2,587	1,936	1,513	1,219	0,964	0,790	0,668	0,581
L_0	4,887	4,236	3,813	3,519	3,264	3,090	2,968	2,881
$(L_0)_{cr}$	2,06	2,52	3,04	3,62	4,43	5,35	6,37	7,51
n_s	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2
fom	−0,409	−0,399	−0,398	−0,404	−0,417	−0,438	−0,467	−0,505

Agora examine a tabela e faça a avaliação de adequação. A restrição $3 \le N_a \le 15$ exclui diâmetros de fios menores que 0,080 in. A restrição do índice de mola $4 \le C \le 12$ exclui diâmetros maiores que 0,085 in. A restrição $L_s > 1$ exclui diâmetros menores que 0,080 in. A restrição $L_0 > 4$ exclui diâmetros menores que 0,071 in. O critério de flambagem exclui comprimentos livres maiores que $(L_0)_{cr}$, o que exclui diâmetros menores que 0,075 in. O fator de segurança n_s é exatamente 1,20 porque a matemática o obriga a isso. Tivesse a mola estado em um orifício ou sobre uma barra, o diâmetro de hélice seria escolhido sem referência a $(n_s)_d$. O resultado é que existem apenas duas molas no domínio exeqüível, uma com um diâmetro de fio de 0,080 in e a outra com um diâmetro de fio de 0,085. A figura de mérito decide e a decisão é com diâmetro de fio de 0,080 in.

Substituindo as Equações (b) e (c) em (a) e simplificando-as, produz-se uma equação quadrática em C. A maior das duas soluções produzirá o índice de mola.

$$C = \frac{2\alpha - \beta}{4\beta} + \sqrt{\left(\frac{2\alpha - \beta}{4\beta}\right)^2 - \frac{3\alpha}{4\beta}} \tag{10-23}$$

Ao projetarmos uma mola, a teremos feito de acordo com nossas especificações? Não necessariamente. Existem vendedores que estocam literalmente milhares de molas de compressão de fio musical. Folheando seus catálogos, freqüentemente encontraremos várias que são semelhantes. Deflexão e carga máximas são listadas na exibição das características. Verifique se permitem compactação sem dano. Em geral, permitem. A razões de mola podem ser apenas aproximadas. Pelo menos essa situação permite que uma pequena quantidade de molas possa ser encomendada "diretamente da prateleira" para ensaio. A decisão costuma depender da economia da encomenda especial *versus* a aceitabilidade de um pareamento próximo.

EXEMPLO 10-3

Indexação é usada em operações de máquina quando uma peça circular sendo manufaturada deve ser dividida em um certo número de segmentos. A Figura 10-4 mostra parte de um acessório de indexação usado para posicionar sucessivamente uma peça para a operação. Quando a maçaneta é girada, a parte 6, que segura a peça, é rodada em relação a um eixo vertical até a próxima posição, e é travada aí, soltando o pino de índice. Neste exemplo, desejamos projetar a mola para exercer uma força de aproximadamente 3 lbf e caber no espaço definido na legenda da figura.

Solução

Visto que o acessório não é um item de alta produção, uma mola de estoque será selecionada. Estas estão disponíveis em fio musical. Em um catálogo existem 76 molas de estoque disponíveis tendo um diâmetro externo de 0,480 in e projetadas para trabalhar em um orifício de $\frac{1}{2}$ in. Estas são feitas em sete tamanhos de fio diferentes, variando de 0,038 a 0,063 in, e em comprimentos livres de $\frac{1}{2}$ a $2\frac{1}{2}$ in, dependendo do tamanho do fio.

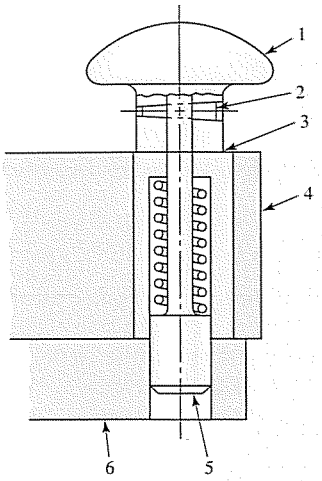


Figura 10-4 Parte 1, maçaneta de girar; parte 2, pino cônico de retenção; parte 3, bucha endurecida com ajuste de pressão; parte 4, corpo do acessório; parte 5, pino de indexação; parte 6, suporte da peça. O espaço da mola tem $\frac{5}{8}$ in de diâmetro externo (OD), $\frac{1}{4}$ in de diâmetro interno (ID) e $1\frac{3}{8}$ in de comprimento com o pino abaixado, como mostrado. A maçaneta deve ser girada $\frac{3}{4}$ in para permitir indexação.

Visto que a maçaneta deve ser girada $\frac{3}{4}$ in para indexação e que o espaço para a mola é de $1\frac{3}{8}$ in de comprimento quando o pino estiver baixado, o comprimento sólido não pode ter mais que $\frac{5}{8}$ in.

Vamos começar selecionando uma mola que tenha um diâmetro externo de 0,480 in, um tamanho de fio de 0,051 in, um comprimento livre de $1\frac{3}{4}$ in, $11\frac{1}{2}$ voltas completas e extremidades planas. Então, $m = 0{,}145$ e $A = 201$ kpsi · in^m para fio musical. Então

$$S_{sy} = 0{,}45\frac{A}{d^m} = 0{,}45\frac{201}{0{,}051^{0{,}145}} = 139{,}3 \text{ kpsi}$$

Com extremidades planas, a partir da Tabela 10-1, o número de voltas ativas é

$$N_a = N_t = 11{,}5 \text{ voltas}$$

O diâmetro médio de hélice é $D = \text{OD} - d = 0{,}480 - 0{,}051 = 0{,}429$ in. A partir da Equação (10-9), a razão de mola é, para $G = 11{,}85(10^6)$ psi da Tabela 10-5,

$$k = \frac{d^4G}{8D^3N_a} = \frac{0{,}051^4(11{,}85)10^6}{8(0{,}429)^3 11{,}5} = 11{,}0 \text{ lbf/in}$$

A partir da Tabela 10-1, a altura sólida L_s é

$$L_s = d(N_t + 1) = 0{,}051(11{,}5 + 1) = 0{,}638 \text{ in}$$

A força de mola quando o pino está abaixado, F_{min}, é

$$F_{\min} = ky_{\min} = 11{,}0(1{,}75 - 1{,}375) = 4{,}13 \text{ lbf}$$

Quando a mola está totalmente comprimida, a força de mola F_s é

$$F_s = ky_s = k(L_0 - L_s) = 11{,}0(1{,}75 - 0{,}638) = 12{,}2 \text{ lbf}$$

Visto que o índice de mola é $C = D/d = 0{,}429/0{,}051 = 8{,}41$,

$$K_B = \frac{4C + 2}{4C - 3} = \frac{4(8{,}41) + 2}{4(8{,}41) - 3} = 1{,}163$$

e para mola tipo enrolada, a tensão de cisalhamento quando totalmente comprimida é

$$\tau_s = K_B \frac{8F_s D}{\pi d^3} = 1{,}163 \frac{8(12{,}2)0{,}429}{\pi(0{,}051)^3} = 116\,850 \text{ psi}$$

O fator de segurança quando a mola está totalmente comprimida é

$$n_s = \frac{S_{sy}}{\tau_s} = \frac{139{,}3}{116{,}9} = 1{,}19$$

Visto que n_s é marginalmente adequado e L_s é maior que $\frac{5}{8}$ in, devemos investigar outras molas com um tamanho menor de fio. Depois de várias investigações, uma outra mola tem possibilidades. É o fio musical tipo enrolado, com $d = 0{,}045$ in, bitola 20 (ver Tabela A-25), diâmetro externo OD = 0,480 in, $N_t = 11{,}5$ voltas, $L_0 = 1{,}75$ in. S_{sy} é ainda 139,3 kpsi, e

$$D = \text{OD} - d = 0{,}480 - 0{,}045 = 0{,}435 \text{ in}$$

$$N_a = N_t = 11{,}5 \text{ voltas}$$

$$k = \frac{0{,}045^4(11{,}85)10^6}{8(0{,}435)^3 11{,}5} = 6{,}42 \text{ lbf/in}$$

$$L_s = d(N_a + 1) = 0{,}045(11{,}5 + 1) = 0{,}563 \text{ in}$$

$$F_{\min} = ky_{\min} = 6{,}42(1{,}75 - 1{,}375) = 2{,}41 \text{ lbf}$$

$$F_s = 6{,}42(1{,}75 - 0{,}563) = 7{,}62 \text{ lbf}$$

$$C = \frac{D}{d} = \frac{0{,}435}{0{,}045} = 9{,}67$$

$$K_B = \frac{4(9{,}67) + 2}{4(9{,}67) - 3} = 1{,}140$$

$$\tau_s = 1{,}140 \frac{8(7{,}62)0{,}435}{\pi(0{,}045)^3} = 105\,600 \text{ psi}$$

$$n_s = \frac{S_{sy}}{\tau_s} = \frac{139{,}3}{105{,}6} = 1{,}32$$

Agora $n_s > 1{,}2$; flambagem não é possível, visto que as espiras estão protegidas pela superfície do orifício, e o comprimento sólido é menor que $\frac{5}{8}$ in; assim, esta mola é selecionada. Usando uma mola de estoque, tiramos proveito da economia de escala

10-8 Freqüência Crítica de Molas Helicoidais

Se uma onda for criada por uma perturbação em uma extremidade de uma piscina, esta onda viajará o comprimento da piscina, será refletida de volta na outra extremidade, e continuará neste movimento de ida e volta até que seja finalmente amortecida. O mesmo efeito ocorre nas molas helicoidais, e é chamado *vaga (sobressalto ou emersão) de mola.* Se uma extremidade de uma mola de compressão estiver fixada a uma superfície plana e a outra extremidade for perturbada, uma onda de compressão é criada e transmitida em vai-vém de uma extremidade até a outra da mesma maneira que a onda da piscina.

Os fabricantes de mola têm feito filmes de movimento lento de vagas de molas de válvulas de automóvel. Essas imagens mostram um sobressalto (emersão) muito violento, com a mola realmente pulando do contato com as placas de extremidade. A Figura 10-5 é uma fotografia de uma falha causada por um sobressalto (vagueação) desse tipo.

Quando molas helicoidais são usadas em aplicações que requerem um movimento alternativo rápido, o projetista deve estar ciente de que as dimensões físicas da mola não são tais como para criar uma freqüência vibratória natural próxima à freqüência da força aplicada; se não, ressonância pode ocorrer, resultando em tensões prejudiciais, visto que o amortecimento interno dos materiais de mola é muito baixo.

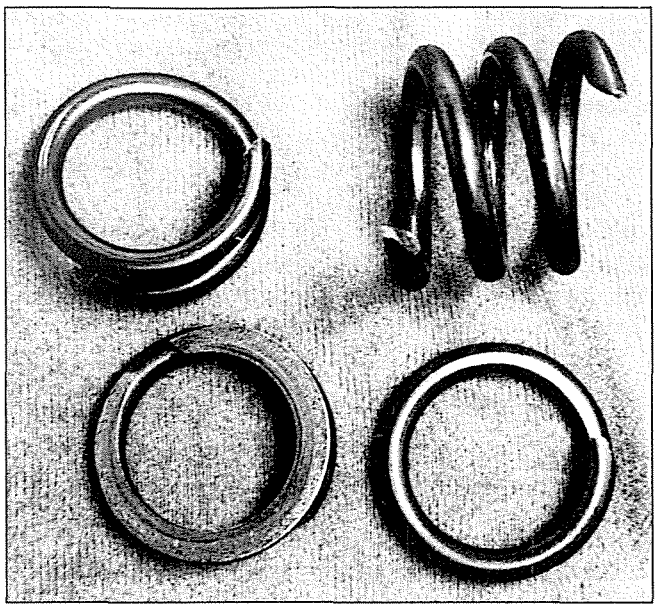


Figura 10-5 Falha de mola de válvula em um motor sobreacelerado. A fratura está ao longo da linha de 45° da tensão principal máxima associada com o carregamento de torção pura.

A equação regente para a vibração translacional de uma mola é a equação de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{W}{kgl^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{10-24}$$

em que k = razão de mola
g = aceleração devido à gravidade
l = comprimento de mola
W = peso da mola
x = coordenada ao longo do comprimento da mola
u = movimento de qualquer partícula à distância x

A solução para essa equação é harmônica e depende das propriedades físicas dadas, bem como das condições de extremidade da mola. As freqüências harmônicas, *naturais*, para uma mola colocada entre duas placas planas e paralelas, em radianos por segundo, são

$$\omega = m\pi\sqrt{\frac{kg}{W}} \qquad m = 1, 2, 3, \ldots$$

em que a freqüência fundamental é encontrada para $m = 1$, o segundo harmônico para $m = 2$, e assim por diante. Geralmente estamos interessados na freqüência em ciclos por segundo; visto que $\omega = 2\pi f$, temos, para a freqüência fundamental em hertz,

$$f = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{kg}{W}} \tag{10-25}$$

assumindo que as extremidades da mola estejam sempre em contato com as placas.

Wolford e Smith[9] mostram que a freqüência é

$$f = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{kg}{W}} \tag{10-26}$$

[9] J. C. Wolford e G. M. Smith, "Surge of Helical Springs", *Mech. Eng. News*, vol. 13, nº 1, fevereiro de 1976, p. 4-9.

em que a mola tem uma extremidade contra uma placa plana e a outra extremidade livre. Eles também apontam que a Equação (10-25) é aplicada quando uma extremidade está contra uma placa plana e a outra extremidade é guiada com um movimento de onda senoidal.

O peso da parte ativa de uma mola helicoidal é

$$W = AL\gamma = \frac{\pi d^2}{4}(\pi DN_a)(\gamma) = \frac{\pi^2 d^2 DN_a \gamma}{4} \tag{10-27}$$

em que γ é o peso específico.

A freqüência crítica fundamental deve ser maior que 15 a 20 vezes a freqüência da força ou movimento da mola a fim de evitar ressonância com os harmônicos. Se a freqüência não for alta o suficiente, a mola deve ser reprojetada para aumentar k ou decrescer W.

10-9 Carregamento de Fadiga de Molas Helicoidais de Compressão

Molas estão sempre sujeitas a carregamento de fadiga. Em muitos casos, o número de ciclos de vida requerido pode ser pequeno (por exemplo, vários milhares para uma mola de cadeado ou para uma mola de chave de arco elétrico). Mas a mola de válvula de um motor automotivo deve suster milhões de ciclos de operação sem falha; assim, ela deve ser projetada para vida infinita.

Para melhorar a resistência à fadiga das molas carregadas dinamicamente, jateamento de esferas pode ser usado. Ele pode aumentar a resistência à fadiga por torção em 20% ou mais. O tamanho das esferas é de cerca de $\frac{1}{64}$ in, assim o diâmetro do fio da espira de mola e o passo devem permitir a cobertura completa da superfície da mola.

Os melhores dados sobre os limites de resistência à torção de aços de mola são aqueles relatados por Zimmerli.[10] Ele descobriu o fato surpreendente de que o tamanho, o material e a resistência à tração não têm nenhum efeito nos limites de resistência (vida infinita somente) de aços de mola em tamanhos inferiores a $\frac{3}{8}$ in (10 mm). Já observamos que os limites de resistência tendem a se nivelar a altas resistências à tração (Figura 7-18), mas a razão disso não está clara. Zimmerli sugere que isso pode ser causado porque as superfícies originais seriam semelhantes ou porque o fluxo plástico durante o ensaio as faz iguais. Molas sem jateamento de esferas foram ensaiadas desde uma tensão mínima de torção de 20 kpsi até uma máxima de 90 kpsi, e molas que tiveram jateamento de esferas, no intervalo de 20 kpsi a 135 kpsi. As componentes correspondentes de resistência para vida infinita foram encontradas sendo

Sem jateamento de esferas:

$$S_{sa} = 35 \text{ kpsi (241 MPa)} \qquad S_{sm} = 55 \text{ kpsi (379 MPa)} \tag{10-28}$$

Com jateamento de esferas:

$$S_{sa} = 57{,}5 \text{ kpsi (398 MPa)} \qquad S_{sm} = 77{,}5 \text{ kpsi (534 MPa)} \tag{10-29}$$

Por exemplo, dada uma mola sem jateamento de esferas com $S_{su} = 211{,}5$ kpsi, a ordenada de intersecção, pela Equação (7-45), é

$$S_{se} = \frac{S_{sa}}{1 - \left(\dfrac{S_{sm}}{S_{su}}\right)^2} = \frac{35}{1 - \left(\dfrac{55}{211{,}5}\right)^2} = 37{,}5 \text{ kpsi}$$

Para o critério de falha de Goodman, a intersecção seria 47,3 kpsi. Cada tamanho possível de fio mudaria esses números, visto que S_{su} mudaria.

Um estudo extenso[11] da literatura disponível a respeito da fadiga por torção encontrou que, para espécimes cilíndricos, sem entalhe, polidos sujeitos à tensão de cisalhamento por torção, a tensão máxima alternante que pode ser imposta sem causar falha é *constante* e independente da tensão média no ciclo dado que o intervalo de tensão máxima não iguale ou exceda à resistência ao escoamento por torção do metal. Com entalhes e mudanças abruptas de secção, essa consistência não é encontrada. Molas são livres de entalhes e as superfícies são freqüentemente muito suaves. Esses pontos de falha são conhecidos como *critério de falha de Sines* de fadiga por torção.

[10] F. P. Zimmerli, "Human Failues in Spring Applications", *The Mainspring*, nº 17, Associated Spring Corporation, Bristol, Conn., agosto-setembro de 1957.

[11] Oscar J. Horger (ed.), *Metals Engineering: Design Handbook*, McGraw-Hill, New York, 1953, p. 84.

Na construção de certos critérios de falha no diagrama do projetista de fadiga de torção, o módulo torcional de ruptura S_{su} é necessário. Continuaremos a empregar a Equação (7-56), que é

$$S_{su} = 0{,}67S_{ut} \tag{10-30}$$

No caso de eixos e muitos outros membros de máquina, o carregamento de fadiga na forma de tensões completamente reversas é bastante ordinário. As molas helicoidais, por outro lado, nunca são usadas como molas de compressão e molas de extensão. De fato, elas são geralmente montadas com uma pré-carga, de modo que a carga de trabalho é adicional. Logo, o diagrama de tensão-tempo da Figura 7-23(*d*) expressa a condição usual para molas helicoidais. A pior condição, então, ocorre quando não existe pré-carga, isto é, quando $\tau_{\min} = 0$.

Agora, definimos

$$F_a = \frac{F_{\max} - F_{\min}}{2} \tag{10-31(a)}$$

$$F_m = \frac{F_{\max} + F_{\min}}{2} \tag{10-31(b)}$$

em que os subscritos têm o mesmo significado que aqueles da Figura 7-23(*d*) quando aplicados à força axial de mola F. Então, a amplitude da tensão de cisalhamento é

$$\tau_a = K_B \frac{8F_a D}{\pi d^3} \tag{10-32}$$

em que K_B é o fator de Bergsträsser, obtido a partir da Equação (10-6), e corrige tanto o efeito de cisalhamento direto como o de curvatura. Como notado na Seção 10-2, o fator de Wahl K_W pode ser usado em seu lugar, se desejado.

A tensão de cisalhamento medial é dada pela equação

$$\tau_m = K_B \frac{8F_m D}{\pi d^3} \tag{10-33}$$

EXEMPLO 10-4

Uma mola helicoidal de compressão tipo enrolada, feita de fio musical, tem um tamanho de fio de 0,092 in, um diâmetro externo de espira de $\frac{9}{16}$ in, um comprimento livre de $4\frac{3}{8}$ in, 21 espiras ativas e ambas as extremidades esquadradas e esmerilhadas. A mola é não-jateada. Ela deve ser montada com uma pré-carga de 5 lbf e, quando estiver em uso, deverá operar com uma carga máxima de 35 lbf.

(*a*) Estime o fator de segurança, resguardando contra falha de fadiga usando o critério de falha de fadiga torcional de Gerber com dados de Zimmerli.

(*b*) Repita a parte (*a*) usando o critério de fadiga torcional de Sines (componente de tensão permanente não tem efeito) com dados de Zimmerli.

(*c*) Repita usando o critério de falha torcional de Goodman com dados de Zimmerli.

(*d*) Estime a freqüência crítica da mola.

Solução

O diâmetro médio da espira é $D = 0{,}5625 - 0{,}092 = 0{,}4705$ in. O índice de mola é $C = D/d = 0{,}4705/\ 0{,}092 = 5{,}11$. Então

$$K_B = \frac{4C + 2}{4C - 3} = \frac{4(5{,}11) + 2}{4(5{,}11) - 3} = 1{,}287$$

Usando as Equações (10-31),

$$F_a = \frac{35 - 5}{2} = 15 \text{ lbf} \qquad F_m = \frac{35 + 5}{2} = 20 \text{ lbf}$$

A componente alternante de tensão de cisalhamento é encontrada da Equação (10-32) como

$$\tau_a = K_B \frac{8F_a D}{\pi d^3} = (1{,}287)\frac{8(15)0{,}4705}{\pi(0{,}092)^3}(10^{-3}) = 29{,}7 \text{ kpsi}$$

A Equação (10-33) dá a componente medial de tensão de cisalhamento

$$\tau_m = K_B \frac{8F_m D}{\pi d^3} = 1{,}287 \frac{8(20)0{,}4705}{\pi (0{,}092)^3}(10^{-3}) = 39{,}6 \text{ kpsi}$$

A partir da Tabela 10-4, encontramos $A = 201$ kpsi $\cdot$ in^m e $m = 0{,}145$. A resistência à tração é estimada a partir da Equação (10-14) como

$$S_{ut} = \frac{A}{d^m} = \frac{201}{0{,}092^{0{,}145}} = 284{,}1 \text{ kpsi}$$

Também a resistência ao cisalhamento é estimada a partir de

$$S_{su} = 0{,}67 S_{ut} = 0{,}67(284{,}1) = 190{,}3 \text{ kpsi}$$

A inclinação da linha de carga $r = \tau_a / \tau_m = 29{,}7/39{,}6 = 0{,}75$.

(*a*) A ordenada de intersecção de Gerber para dados de Zimmerli, Equação (10-28), é

$$S_{se} = \frac{S_{sa}}{1 - (S_{sm}/S_{su})^2} = \frac{35}{1 - (55/190{,}3)^2} = 38{,}2 \text{ kpsi}$$

A componente de amplitude de resistência S_{sa}, a partir da Tabela 7-10, é

$$S_{sa} = \frac{r^2 S_{su}^2}{2S_{se}} \left[-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2S_{se}}{r S_{su}} \right)^2} \right]$$

$$= \frac{0{,}75^2 190{,}3^2}{2(38{,}2)} \left\{ -1 + \sqrt{1 + \left[\frac{2(38{,}2)}{0{,}75(190{,}3)} \right]^2} \right\} = 35{,}8 \text{ kpsi}$$

e o fator de fadiga de segurança n_f é dado por

Resposta
$$n_f = \frac{S_{sa}}{\tau_a} = \frac{35{,}8}{29{,}7} = 1{,}21$$

(*b*) O critério de falha de Sines ignora S_{sm}, de modo que, para os dados de Zimmerli com $S_{sa} = 35$ kpsi,

Resposta
$$n_f = \frac{S_{sa}}{\tau_a} = \frac{35}{29{,}7} = 1{,}18$$

(*c*) A ordenada de intersecção S_{se} para o critério de falha de Goodman com dados de Zimmerli é

$$S_{se} = \frac{S_{sa}}{1 - (S_{sm}/S_{su})} = \frac{35}{1 - (55/190{,}3)} = 49{,}2 \text{ kpsi}$$

A componente de amplitude da resistência S_{sa} para o critério de Goodman, a partir da Tabela 7-8, é

$$S_{sa} = \frac{r S_{se} S_{su}}{r S_{su} + S_{se}} = \frac{0{,}75(49{,}2)190{,}3}{0{,}75(190{,}3) + 49{,}2} = 36{,}6 \text{ kpsi}$$

O fator de segurança de fadiga é dado por

Resposta
$$n_f = \frac{S_{sa}}{\tau_a} = \frac{36{,}6}{29{,}7} = 1{,}23$$

(*d*) Usando a Equação (10-9) e a Tabela 10-5, estimamos a razão de mola como

$$k = \frac{d^4 G}{8D^3 N_a} = \frac{0{,}092^4 [11{,}75(10^6)]}{8(0{,}4705)^3 21} = 48{,}1 \text{ lbf/in}$$

A partir da Equação (10-27), estimamos o peso de mola como

$$W = \frac{\pi^2(0{,}092^2)0{,}4705(21)0{,}284}{4} = 0{,}0586 \text{ lbf}$$

e da Equação (10-25), a freqüência da onda fundamental é

Resposta

$$f_n = \frac{1}{2}\left[\frac{48{,}1(386)}{0{,}0586}\right]^{1/2} = 281 \text{ Hz}$$

Se a freqüência operante ou excitante for muito maior que $281/20 = 14{,}1$ Hz, a mola poderá ter de ser reprojetada.

Usamos três abordagens para estimar o fator de segurança de fadiga no Exemplo 10-5. Os resultados, em ordem crescente, foram: 1,18 (Sines), 1,21 (Gerber) e 1,23 (Goodman). Embora os resultados sejam muito próximos uns dos outros, usando os dados de Zimmerli como o fizemos, o critério de Sines será sempre o mais conservador e o Goodman, o menos. Se realizássemos uma análise de fadiga usando propriedades de resistência como no Capítulo 7, resultados diferentes seriam obtidos, mas aqui o critério de Goodman seria mais conservador que o de Gerber. Esteja preparado para encontrar projetistas ou programas de projeto que utilizam qualquer dessas técnicas. Este é o porquê de cobri-las. Que critério está correto? Lembre-se, estamos realizando *estimativas*, mas somente ensaios revelarão a verdade – *estatisticamente.*

10-10 Projeto de Molas Helicoidais de Compressão para Carregamento de Fadiga

Comecemos com o enunciado de um problema. A fim de comparar uma mola estática com uma dinâmica, projetaremos a mola do Exemplo 10-2 para um serviço dinâmico.

EXEMPLO 10-5

Uma mola helicoidal de compressão de fio musical com vida infinita é necessária para resistir a uma carga dinâmica que varia de 5 a 20 lbf a 5 Hz, enquanto a deflexão de extremidade varia de $\frac{1}{2}$ a 2 in. Devido a considerações de montagem, a altura sólida não pode exceder a 1 in e o comprimento livre não pode ter mais que 4 in. O fabricante de mola tem os seguintes tamanhos em estoque: 0,069, 0,071, 0,080, 0,085, 0,090, 0,095, 0,105 e 0,112 in.

Solução

As decisões *a priori* são:

- Material e condição: para fio musical, $A = 201$ kpsi · in^m, $m = 0{,}145$, $G = 11{,}75(10^6)$ psi; o custo relativo é de 2,6
- Tratamento de superfície: sem jateamento
- Tratamento de extremidade: esquadrada e esmerilhada
- Linearidade robusta: $\xi = 0{,}15$
- Fixação: use a condição tipo enrolada
- Segurança contra fadiga: $n_f = 1{,}5$ usando o critério de falha de fadiga de Sines-Zimmerli
- Função: $F_{min} = 5$ lbf, $F_{max} = 20$ lbf, $y_{min} = 0{,}5$ in, $y_{max} = 2$ in; a mola opera livre (sem eixo-guia ou orifício)
- Variável de decisão: tamanho de fio d

A figura de mérito será o volume de fio para enrolar a mola, Equação (10-22). A estratégia de projeto será fixar o tamanho de fio d, construir uma tabela, inspecioná-la e escolher a mola satisfatória com a mais alta figura de mérito.

Solução Fixe $d = 0{,}112$ in. Então

$$F_a = \frac{20-5}{2} = 7{,}5 \text{ lbf} \qquad F_m = \frac{20+5}{2} = 12{,}5 \text{ lbf}$$

$$k = \frac{F_{\max}}{y_{\max}} = \frac{20}{2} = 10 \text{ lbf/in}$$

$$S_{ut} = \frac{201}{0{,}112^{0.145}} = 276{,}1 \text{ kpsi}$$

$$S_{su} = 0{,}67(276{,}1) = 185{,}0 \text{ kpsi}$$

$$S_{sy} = 0{,}45(276{,}1) = 124{,}2 \text{ kpsi}$$

A partir da Equação (10-28), com o critério de Sines, $S_{se} = S_{sa} = 35$ kpsi. A Equação (10-23) pode ser usada para determinar C com S_{se}, n_f e F_a no lugar de S_{sy}, n_s e $(1+\xi)F_{\max}$, respectivamente. Portanto,

$$\alpha = \frac{S_{se}}{n_f} = \frac{35\,000}{1{,}5} = 23\,333 \text{ psi}$$

$$\beta = \frac{8F_a}{\pi d^2} = \frac{8(7{,}5)}{\pi(0{,}112^2)} = 1522{,}5 \text{ psi}$$

$$C = \frac{2(23\,333) - 1522{,}5}{4(1522{,}5)} + \sqrt{\left[\frac{2(23\,333) - 1522{,}5}{4(1522{,}5)}\right]^2 - \frac{3(23\,333)}{4(1522{,}5)}} = 14{,}005$$

$$D = Cd = 14{,}005(0{,}112) = 1{,}569 \text{ in}$$

$$F_s = (1+\xi)F_{\max} = (1+0{,}15)20 = 23 \text{ lbf}$$

$$N_a = \frac{d^4 G}{8D^3 k} = \frac{0{,}112^4(11{,}75)(10^6)}{8(1{,}569)^3 10} = 5{,}98 \text{ voltas}$$

$$N_t = N_a + 2 = 5{,}98 + 2 = 7{,}98 \text{ voltas}$$

$$L_s = dN_t = 0{,}112(7{,}98) = 0{,}894 \text{ in}$$

$$L_0 = L_s + \frac{F_s}{k} = 0{,}894 + \frac{23}{10} = 3{,}194 \text{ in}$$

$$\text{ID} = 1{,}569 - 0{,}112 = 1{,}457 \text{ in}$$

$$\text{OD} = 1{,}569 + 0{,}112 = 1{,}681 \text{ in}$$

$$y_s = L_0 - L_s = 3{,}194 - 0{,}894 = 2{,}30 \text{ in}$$

$$(L_0)_{\text{cr}} < \frac{2{,}63D}{\alpha} = 2{,}63\frac{(1{,}569)}{0{,}5} = 8{,}253 \text{ in}$$

$$K_B = \frac{4(14{,}005) + 2}{4(14{,}005) - 3} = 1{,}094$$

$$W = \frac{\pi^2 d^2 D N_a \gamma}{4} = \frac{\pi^2 0{,}112^2 (1{,}569) 5{,}98 (0{,}284)}{4} = 0{,}0825 \text{ lbf}$$

$$f_n = 0{,}5\sqrt{\frac{386k}{W}} = 0{,}5\sqrt{\frac{386(10)}{0{,}0825}} = 108 \text{ Hz}$$

$$\tau_a = K_B \frac{8F_a D}{\pi d^3} = 1{,}094 \frac{8(7{,}5)1{,}569}{\pi 0{,}112^3} = 23\,334 \text{ psi}$$

$$\tau_m = \tau_a \frac{F_m}{F_a} = 23\,334 \frac{12{,}5}{7{,}5} = 38\,890 \text{ psi}$$

$$\tau_s = \tau_a \frac{F_s}{F_a} = 23\,334 \frac{23}{7{,}5} = 71\,560 \text{ psi}$$

$$n_f = \frac{S_{sa}}{\tau_a} = \frac{35\,000}{23\,334} = 1{,}5$$

$$n_s = \frac{S_{sy}}{\tau_s} = \frac{124\,200}{71\,560} = 1{,}74$$

$$\text{fom} = -(\text{custo relativo do material})\pi^2 d^2 N_t D/4$$

$$= -2{,}6\pi^2(0{,}112^2)(7{,}98)1{,}569/4 = -1{,}01$$

A inspeção dos resultados mostra que todas as condições são satisfeitas e o projeto é aceitável. Existem soluções melhores? Repita o processo usando os outros tamanhos de fio disponíveis e desenvolva a seguinte tabela:

d:	0,069	0,071	0,080	0,085	0,090	0,095	0,105	0,112
D	0,297	0,332	0,512	0,632	0,767	0,919	1,274	1,569
ID	0,228	0,261	0,432	0,547	0,677	0,824	1,169	1,457
OD	0,366	0,403	0,592	0,717	0,857	1,014	1,379	1,681
C	4,33	4,67	6,40	7,44	8,53	9,67	12,14	14,00
N_a	127,2	102,4	44,8	30,5	21,3	15,4	8,63	6,0
L_s	8,916	7,414	3,740	2,750	2,100	1,655	1,116	0,895
L_0	11,216	9,714	6,040	5,050	4,400	3,955	3,416	3,195
$(L_0)_{cr}$	1,562	1,744	2,964	3,325	4,036	4,833	6,703	8,250
n_f	1,50	1,50	1,50	1,50	1,50	1,50	1,50	1,50
n_s	1,86	1,85	1,82	1,81	1,79	1,78	1,75	1,74
f_n	87,5	89,7	96,9	99,7	101,9	103,8	106,6	108
fom	−1,17	−1,12	−0,983	−0,948	−0,930	−0,927	−0,958	−1,01

As desigualdades restritivas específicas do problema são

As restrições gerais são

$$3 \leq N_a \leq 15$$
$$4 \leq C \leq 16$$
$$(L_0)_{cr} > L_0$$

A restrição mais apertada é L_s, que limita o menor diâmetro de fio a 0,112 in.

10-11 Molas de Extensão

As molas de extensão diferem das de compressão na transmissão de carregamento de tração, no fato de requererem alguns meios para transferir a carga desde o suporte até o corpo da mola, e por terem o corpo comprimido com uma tração inicial. A transferência de carga pode ser feita com uma cunha roscada ou um gancho giratório; ambos acrescentam ao custo do produto acabado, e assim um dos métodos mostrados na Figura 10-6 é normalmente empregado.

As tensões no corpo da mola de extensão são tratadas da mesma maneira que nas molas de compressão. Ao projetar uma mola com uma extremidade de gancho, flexão e torção no gancho devem ser incluídas na análise. Na Figura 10-7(*a*) e (*b*), é mostrado um método comumente usado para projetar a extremidade. A tensão máxima de tração em A, devido ao carregamento axial e de flexão, é dada por

$$\sigma_A = F\left[(K)_A \frac{16D}{\pi d^3} + \frac{4}{\pi d^2}\right] \tag{10-34}$$

em que $(K)_A$ é um fator de correção de tensão de flexão para a curvatura, dado por

$$(K)_A = \frac{4C_1^2 - C_1 - 1}{4C_1(C_1 - 1)} \qquad C_1 = \frac{2r_1}{d} \tag{10-35}$$

A tensão máxima de torção no ponto B é dada por

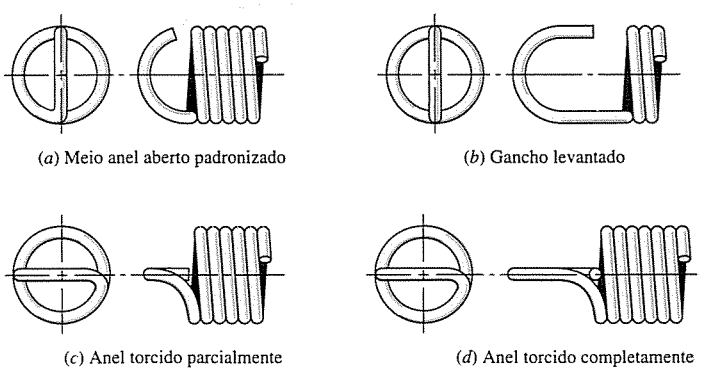
$$\tau_B = (K)_B \frac{8FD}{\pi d^3} \tag{10-36}$$

em que o fator de correção da tensão para curvatura, $(K)_B$, é

$$(K)_B = \frac{4C_2 - 1}{4C_2 - 4} \qquad C_2 = \frac{2r_2}{d} \tag{10-37}$$

A Figura 10-7(*c*) e (*d*) mostra um projeto melhorado devido a um diâmetro reduzido de espira.

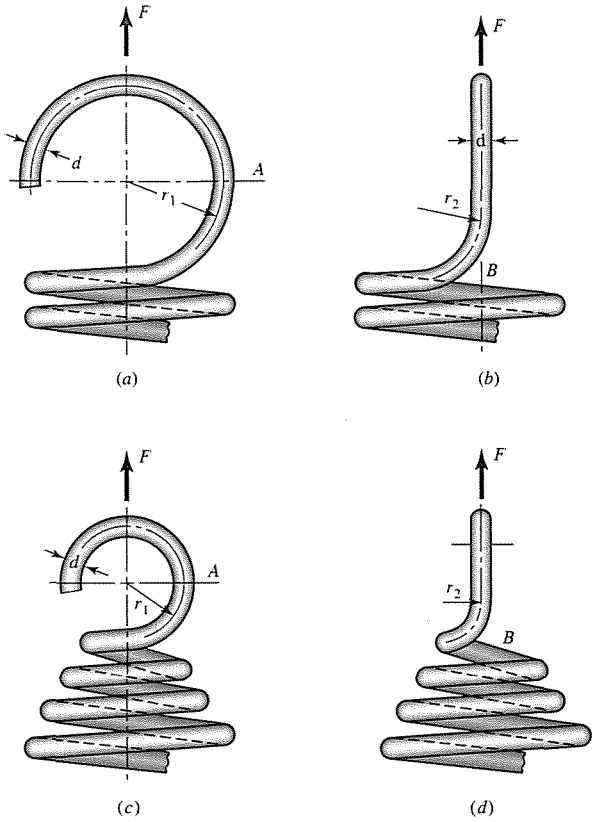
Quando molas de extensão são feitas com espiras em contato uma com a outra, são conhecidas como de *enrolamento fechado*. Os fabricantes de molas preferem alguma tração inicial nas molas de enrolamento



(*a*) Meio anel aberto padronizado (*b*) Gancho levantado

(*c*) Anel torcido parcialmente (*d*) Anel torcido completamente

Figura 10-6 Tipos de extremidades usadas em molas de extensão. (Cortesia da Associated Spring Corporation.)



Nota: O raio r_1 está no plano da espira de extremidade para a tensão de flexão de viga curva. O raio r_2 está a um ângulo reto com a espira de extremidade para tensão torcional de cisalhamento.

Figura 10-7 Extremidades para molas de extensão. *(a)* Projeto usual; a tensão em *A* é devida à combinação de força axial e momento flexor. *(b)* Vista lateral de *a*; a tensão é em sua maior parte torção em *B*. (*c*) Projeto melhorado; a tensão em *A* é devida à combinação de força axial e momento flexor. (*d*) Vista lateral de *c*; a tensão em *B* é em sua maior parte torção.

fechado a fim de manter o comprimento livre mais acuradamente. A correspondente curva de carga-deflexão é mostrada na Figura 10-8(a), na qual y é a extensão além do comprimento livre L_0 e F_i é a tração inicial na mola que deve ser excedida antes que a mola deflita. A relação carga-deflexão é, então,

$$F = F_i + ky \tag{10-38}$$

em que k é a razão de mola. O comprimento livre L_0 de uma mola, medido dentro das voltas de extremidade ou ganchos, como mostrado na Figura 10-8(b), pode ser expresso como

$$L_0 = 2(D - d) + (N_b + 1)d = (2C - 1 + N_b)d \tag{10-39}$$

em que D é o diâmetro médio de espira, N_b é o número de espiras de corpo e C é o índice de mola. Com os anéis ordinários (ou alças) de extremidades torcidas, como mostrado na Figura 10-8(b), para levar em conta a deflexão dos anéis na determinação da razão de mola k, o número equivalente de voltas ativas de espirais N_a para uso na Equação (10-9) é

$$N_a = N_b + \frac{G}{E} \tag{10-40}$$

em que G e E são os módulos de cisalhamento e tração da elasticidade, respectivamente (ver Problema 10-31).

A tração inicial em uma mola de extensão é criada no processo de enrolamento ao torcer o fio como se ele fosse enrolado em um mandril. Quando a mola está completa e removida do mandril, a tração inicial é bloqueada porque a mola não pode ficar nem um pouco menor. A quantidade de tração inicial que um fabri-

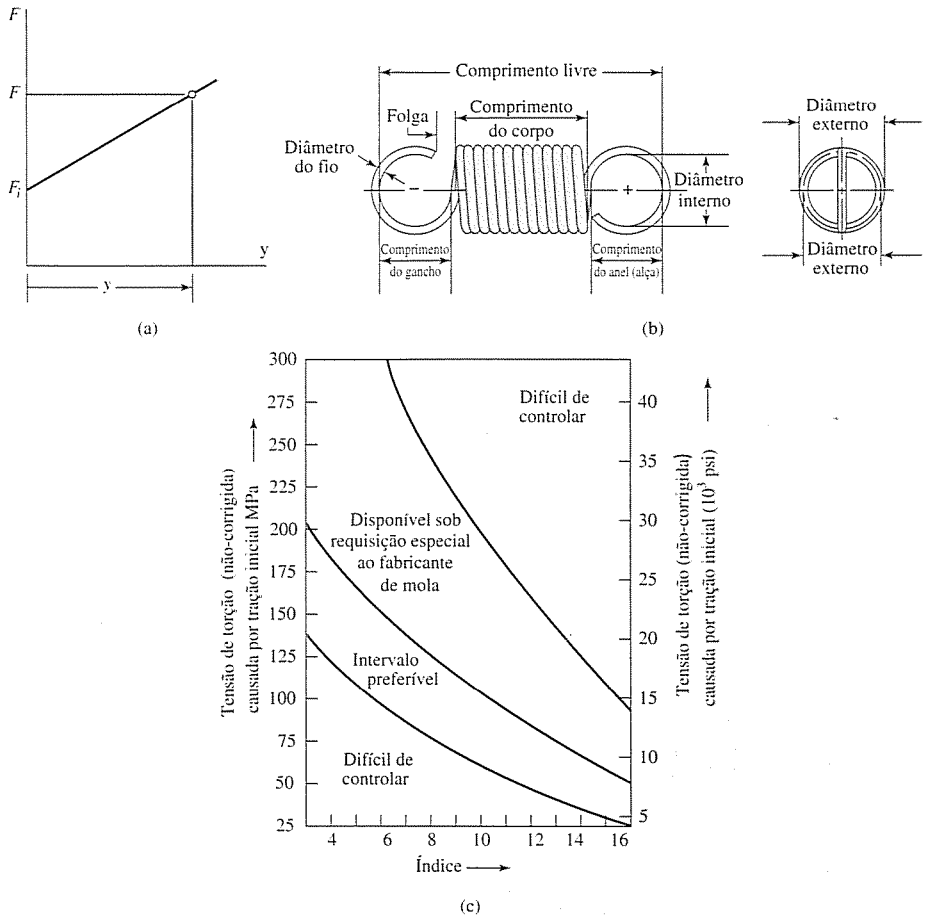


Figura 10-8 (*a*) Geometria da força F e local geométrico da extensão y de uma mola de extensão; (*b*) geometria da mola de extensão; (*c*) tensões de torção devidas à tração inicial como uma função do índice de mola C em molas helicoidais de extensão.

cante de mola pode rotineiramente incorporar é como mostrado na Figura 10-8(*c*). O intervalo preferível pode ser expresso em termos de tensão *de torção não-corrigida* τ_i como

$$\tau_i = \frac{33\ 500}{\exp(0{,}105C)} \pm 1000\left(4 - \frac{C-3}{6{,}5}\right) \text{ psi} \tag{10-41}$$

em que C é o índice de mola.

Normas para as tensões máximas admissíveis para aplicações estáticas de molas de extensão são dadas na Tabela 10-7.

Tabela 10-7 Tensões máximas admissíveis (K_w ou K_B corrigido) para molas helicoidais de extensão em aplicações estáticas

Materiais	Percentagem da Resistência de Tração		
	Em torção		Em flexão
	Corpo	Extremidade	Extremidade
Aços carbono patenteados, repuxados a frio ou endurecidos e revenidos, e aços de baixa liga	45-50	40	75
Aço austenítico inoxidável e ligas não-ferrosas	35	30	55

Esta informação está baseada nas seguintes condições: conjunto não removido e tratamento térmico de baixa temperatura aplicado. Para molas que requerem tração inicial elevada, use a mesma percentagem de resistência à tração que para a extremidade.
Fonte: Design Handbook, 1987, p. 52. Cortesia da Associated Spring.

EXEMPLO 10-6

Uma mola de extensão de fio duro repuxado tem um diâmetro de fio de 0,035 in, um diâmetro externo de espira de 0,248 in, raios de gancho $r_1 = 0{,}106$ in e $r_2 = 0{,}089$ in, e uma tração inicial de 1,19 lbf. O número de voltas de corpo é 12,17. A partir da informação dada:

(*a*) Determine os parâmetros físicos da mola.

(*b*) Verifique as condições iniciais de tensão de pré-carga.

(*c*) Encontre os fatores de segurança sob uma carga estática de 5,25 lbf.

Solução

(*a*) $$D = \text{OD} - d = 0{,}248 - 0{,}035 = 0{,}213 \text{ in}$$

$$C = \frac{D}{d} = \frac{0{,}213}{0{,}035} = 6{,}086$$

$$K_B = \frac{4C + 2}{4C - 3} = 1{,}234$$

Equação (10-40): $N_a = N_b + G/E = 12{,}17 + 11{,}5/28{,}7 = 12{,}57$ voltas

Equação (10-9): $k = \dfrac{d^4 G}{8D^3 N_a} = \dfrac{0{,}035^4 (11{,}5)10^6}{8(0{,}213^3)12{,}57} = 17{,}76$ lbf/in voltas

Equação (10-39): $L_0 = (2C - 1 + N_b)d = [2(6{,}086) - 1 + 12{,}17]\,0{,}035 = 0{,}817$ in

A deflexão sob a carga de serviço é

$$y_{\max} = \frac{F_{\max} - F_i}{k} = \frac{5{,}25 - 1{,}19}{17{,}76} = 0{,}229 \text{ in}$$

em que o comprimento da mola torna-se $L = L_0 + y = 0{,}817 + 0{,}229 = 1{,}046$ in.

(*b*) A tensão inicial não-corrigida é dada pela Equação (10-3) sem o fator de correção. Isto é

$$(\tau_i)_{\text{não-corrigida}} = \frac{8F_i D}{\pi d^3} = \frac{8(1{,}19)0{,}213(10^{-3})}{\pi(0{,}035^3)} = 15{,}1 \text{ kpsi}$$

O intervalo preferido é dado pela Equação (10-41) e, para este caso, é

$$(\tau_i)_{\text{pref}} = \frac{33\,500}{\exp(0{,}105C)} \pm 1000\left(4 - \frac{C-3}{6{,}5}\right)$$

$$= \frac{33\,500}{\exp[0{,}105(6{,}086)]} \pm 1000\left(4 - \frac{6{,}086-3}{6{,}5}\right)$$

$$= 17\,681 \pm 3525 = 21{,}2,\ 14{,}2 \text{ kpsi}$$

Resposta

Assim, a tração inicial de 15,1 kpsi está dentro do intervalo preferido.

(*c*) Para fio duro repuxado, a Tabela 10-4 dá $m = 0{,}190$ e $A = 140$ kpsi · in^m. A partir da Equação (10-14),

$$S_{ut} = \frac{A}{d^m} = \frac{140}{0{,}035^{0.190}} = 264{,}7 \text{ kpsi}$$

Para cisalhamento por torção no corpo principal da mola, a partir da Tabela 10-7,

$$S_{sy} = 0{,}45 S_{ut} = 0{,}45(264{,}7) = 119{,}1 \text{ kpsi}$$

A tensão de cisalhamento sob a carga de serviço é

$$\tau_{\max} = \frac{8K_B F_{\max} D}{\pi d^3} = \frac{8(1{,}234)5{,}25(0{,}213)}{\pi(0{,}035^3)}(10^{-3}) = 82{,}0 \text{ kpsi}$$

Logo, o fator de segurança é

Resposta

$$n = \frac{S_{sy}}{\tau_{\max}} = \frac{119{,}1}{82{,}0} = 1{,}45$$

Para a flexão do gancho de extremidade em A

$$C_1 = 2r_1/d = 2(0.106)/0.0.035 = 6.057$$

Da Equação (10-35),

$$(K)_A = \frac{4C_1^2 - C_1 - 1}{4C_1(C_1 - 1)} = \frac{4(6{,}057^2) - 6{,}057 - 1}{4(6{,}057)(6{,}057 - 1)} = 1{,}14$$

Da Equação (10-34),

$$\sigma_A = F_{\max}\left[(K)_A\frac{16D}{\pi d^3} + \frac{4}{\pi d^2}\right]$$

$$= 5{,}25\left[1{,}14\frac{16(0,213)}{\pi(0{,}035^3)} + \frac{4}{\pi(0{,}035^2)}\right](10^{-3}) = 156{,}9 \text{ kpsi}$$

A resistência ao escoamento, a partir da Tabela 10-7, é dada por

$$S_y = 0{,}75S_{ut} = 0{,}75(264{,}7) = 198{,}5 \text{ kpsi}$$

O fator de segurança para a flexão do gancho de extremidade em A é então

Resposta

$$n_A = \frac{S_y}{\sigma_A} = \frac{198{,}5}{156{,}9} = 1{,}27$$

Para o gancho de extremidade em torção em B, a partir da Equação (10-37),

$$C_2 = 2r_2/d = 2(0{,}089)/0{,}035 = 5{,}086$$

$$(K)_B = \frac{4C_2 - 1}{4C_2 - 4} = \frac{4(5{,}086) - 1}{4(5{,}086) - 4} = 1{,}18$$

e a tensão correspondente, dada pela Equação (10-36), é

$$\tau_B = (K)_B\frac{8F_{\max}D}{\pi d^3} = 1{,}18\frac{8(5{,}25)0{,}213}{\pi(0{,}035^3)}(10^{-3}) = 78{,}4 \text{ kpsi}$$

Usando a Tabela 10-7 para a resistência ao escoamento, o fator de segurança em B para torção do gancho de extremidade é

Resposta

$$n_B = \frac{(S_{sy})_B}{\tau_B} = \frac{0{,}4(264{,}7)}{78{,}4} = 1{,}35$$

O escoamento devido à flexão do gancho de extremidade ocorrerá primeiro.

A seguir, vamos considerar o problema de fadiga.

EXEMPLO 10-7

A mola de extensão de espira helicoidal do Exemplo 10-6 está sujeita a um carregamento dinâmico de 1,5 a 5 lbf. Estime os fatores de segurança usando o critério de falha de Gerber para (*a*) fadiga de espira, (*b*) escoamento de espira, (*c*) fadiga de flexão de gancho de extremidade no ponto A da Figura 10-7*(a)* e (*d*) fadiga de torção de gancho de extremidade no ponto B da Figura 10-7*(b)*.

Solução Certas quantidades são as mesmas do Exemplo 10-6: $d = 0{,}035$ in, $S_{ut} = 264{,}7$ kpsi, $D = 0{,}213$ in, $r_1 = 0{,}106$ in, $C = 6{,}086$, $K_B = 1{,}234$, $(K)_A = 1{,}14$, $(K)_B = 1{,}18$, $N_b = 12{,}17$ voltas, $L_0 = 0{,}817$ in, $k = 17{,}76$ lbf/in, $F_i = 1{,}19$ lbf e $(\tau_i)_{\text{não-corrigida}} = 15{,}1$ kpsi. Então

$$F_a = (F_{\max} - F_{\min})/2 = (5 - 1{,}5)/2 = 1{,}75 \text{ lbf}$$
$$F_m = (F_{\max} + F_{\min})/2 = (5 + 1{,}5)/2 = 3{,}25 \text{ lbf}$$

As resistências do Exemplo 10-6 incluem $S_{ut} = 264{,}7$ kpsi, $S_y = 198{,}5$ kpsi e $S_{sy} = 119{,}1$ kpsi. A resistência última ao cisalhamento é estimada a partir da Equação (10-30) como

$$S_{su} = 0{,}67 S_{ut} = 0{,}67(264{,}7) = 177{,}3 \text{ kpsi}$$

fadiga de espira de corpo:

$$\tau_a = \frac{8K_B F_a D}{\pi d^3} = \frac{8(1{,}234)1{,}75(0{,}213)}{\pi(0{,}035^3)}(10^{-3}) = 27{,}3 \text{ kpsi}$$

$$\tau_m = \frac{F_m}{F_a}\tau_a = \frac{3{,}25}{1{,}75}27{,}3 = 50{,}7 \text{ kpsi}$$

Usando os dados de Zimmerli da Equação (10-28), obtemos

$$S_{se} = \frac{S_{sa}}{1 - \left(\dfrac{S_{sm}}{S_{su}}\right)^2} = \frac{35}{1 - \left(\dfrac{55}{177{,}3}\right)^2} = 38{,}7 \text{ kpsi}$$

A partir da Tabela 7-10, o critério de fadiga de Gerber para cisalhamento é

Resposta
$$(n_f)_{\text{corpo}} = \frac{1}{2}\left(\frac{S_{su}}{\tau_m}\right)^2 \frac{\tau_a}{S_{se}}\left[-1 + \sqrt{1 + \left(2\frac{\tau_m}{S_{su}}\frac{S_{se}}{\tau_a}\right)^2}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{177{,}3}{50{,}7}\right)^2 \frac{27{,}3}{38{,}7}\left[-1 + \sqrt{1 + \left(2\frac{50{,}7}{177{,}3}\frac{38{,}7}{27{,}3}\right)^2}\right] = 1{,}24$$

(b) A linha de carga para o corpo de espira começa em $S_{sm} = \tau_i$ e tem uma inclinação $r = \tau_a/(\tau_m - \tau_i)$. Pode ser mostrado que a intersecção com a linha de escoamento é dada por $(S_{sa})_y = \frac{r}{r+1}(S_{sy} - \tau_i)$. Conseqüentemente, $\tau_i = (F_i/F_a)\tau_a = (1{,}19/1{,}75)27{,}3 = 18{,}6$ kpsi, $r = 27{,}3/(50{,}7 - 18{,}6) = 0{,}850$ e

$$(S_{sa})_y = \frac{0{,}850}{0{,}850 + 1}(119{,}1 - 18{,}6) = 46{,}2 \text{ kpsi}$$

Logo,

Resposta
$$(n_y)_{\text{corpo}} = \frac{(S_{sa})_y}{\tau_a} = \frac{46{,}2}{27{,}3} = 1{,}69$$

(c) Fadiga de flexão de gancho de extremidade: usando as Equações (10-34) e (10-35), obtemos

$$\sigma_a = F_a\left[(K)_A \frac{16D}{\pi d^3} + \frac{4}{\pi d^2}\right]$$

$$= 1{,}75\left[1{,}14\frac{16(0{,}213)}{\pi(0{,}035^3)} + \frac{4}{\pi(0{,}035^2)}\right](10^{-3}) = 52{,}3 \text{ kpsi}$$

$$\sigma_m = \frac{F_m}{F_a}\sigma_a = \frac{3{,}25}{1{,}75}52{,}3 = 97{,}1 \text{ kpsi}$$

Para estimar o limite de resistência à tração usando a teoria da energia de distorção

$$S_e = S_{se}/0{,}577 = 38{,}7/0{,}577 = 67{,}1 \text{ kpsi}$$

Usando o critério de Gerber para tração, obtemos

Resposta

$$(n_f)_A = \frac{1}{2}\left(\frac{S_{ut}}{\sigma_m}\right)^2\frac{\sigma_a}{S_e}\left[-1+\sqrt{1+\left(2\frac{\sigma_m}{S_{ut}}\frac{S_e}{\sigma_a}\right)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{264{,}7}{97{,}1}\right)^2\frac{52{,}3}{67{,}1}\left[-1+\sqrt{1+\left(2\frac{97{,}1}{264{,}7}\frac{67{,}1}{52{,}3}\right)^2}\right] = 1{,}08$$

Fadiga de torção de gancho de extremidade: a partir da Equação (10-36)

$$(\tau_a)_B = (K)_B\frac{8F_aD}{\pi d^3} = 1{,}18\frac{8(1{,}75)0{,}213}{\pi(0{,}035^3)}(10^{-3}) = 26{,}1 \text{ kpsi}$$

$$(\tau_m)_B = \frac{F_m}{F_a}(\tau_a)_B = \frac{3{,}25}{1{,}75}26{,}1 = 48{,}5 \text{ kpsi}$$

Então, usando o critério de Gerber, obtemos

Resposta

$$(n_f)_B = \frac{1}{2}\left(\frac{S_{su}}{\tau_m}\right)^2\frac{\tau_a}{S_{se}}\left[-1+\sqrt{1+\left(2\frac{\tau_m}{S_{su}}\frac{S_{se}}{\tau_a}\right)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{177{,}3}{48{,}5}\right)^2\frac{26{,}1}{38{,}7}\left[-1+\sqrt{1+\left(2\frac{48{,}5}{177{,}3}\frac{38{,}7}{26{,}1}\right)^2}\right] = 1{,}30$$

As análises dos Exemplos 10-6 e 10-7 mostram como as molas de extensão diferem das de compressão. Os ganchos de extremidade geralmente são a parte mais fraca, com a flexão normalmente governando. Devemos, também, reconhecer que uma falha de fadiga separa a mola de extensão sob carga. Fragmentos voando, perda de carga e paralisação de máquina são ameaças à segurança pessoal, bem como à função da máquina. Por essas razões, são usados fatores mais altos no projeto de molas de extensão do que no projeto de molas de compressão.

No Exemplo 10-7, estimamos o limite de resistência para o gancho em flexão usando os dados de Zimmerli, que são baseados na torção de molas de compressão e na teoria de distorção. Um método alternativo é usar a Tabela 10-8, que está baseada na razão de tensão de $R = \tau_{min}/\tau_{max} = 0$. Para esse caso, $\tau_a = \tau_m = \tau_{max}/2$. Rotule os valores de resistência da Tabela 10-8 como S_r para flexão ou S_{sr} para torção. Então, para torção, por exemplo, $S_{sa} = S_{sm} = S_{sr}/2$, e a ordenação de intersecção de Gerber, dada pela Equação (7-45), é

$$S_{se} = \frac{S_{sa}}{1-(S_{sm}/S_{su})^2} = \frac{S_{sr}/2}{1-\left(\frac{S_{sr}/2}{S_{su}}\right)^2} \tag{10-42}$$

Tabela 10-8 Tensões máximas admissíveis para molas helicoidais de extensão de aço inoxidável ASTM A228 e tipo 302 em aplicações cíclicas

Número de ciclos	Percentagem da Resistência à Tração		
	Em torção		Em flexão
	Corpo	Extremidade	Extremidade
10^5	36	34	51
10^6	33	30	47
10^7	30	28	45

Esta informação está baseada nas seguintes condições: nenhum jateamento de esferas, nenhuma emersão e circunstâncias ambientais com um tratamento térmico de baixa temperatura aplicado. Razão de tensão = 0.
Fonte: Design Handbook, 1987, p. 52. Cortesia da Associated Spring.

Assim, no Exemplo 10-7, uma estimativa para o limite de resistência à flexão, a partir da Tabela 10-8, seria

$$S_r = 0{,}45S_{ut} = 0{,}45(264{,}7) = 119{,}1 \text{ kpsi}$$

e, a partir da Equação (10-42),

$$S_e = \frac{S_r/2}{1 - [S_r/(2S_{ut})]^2} = \frac{119{,}1/2}{1 - \left(\dfrac{119{,}1/2}{264{,}7}\right)^2} = 62{,}7 \text{ kpsi}$$

Usar isso em vez de 67,1 kpsi no Exemplo 10-7 resulta em $(n_f)_A = 1{,}03$, uma redução de 5%.

10-12 Molas de Torção de Espiras Helicoidais

Quando uma mola de espira helicoidal está sujeita à torção de extremidade, ela é chamada de *mola de torção*. Esta é geralmente de enrolamento fechado, como em uma mola de extensão de espira helicoidal, mas com tração inicial desprezível. Existem os tipos de corpo único ou corpo duplo, como representado na Figura 10-9. Como se pode ver na figura, as molas de torção têm extremidades configuradas para aplicar torção ao corpo de espira de maneira conveniente, com gancho curto, saliência reta articulada, torção direta e extremidades especiais. As extremidades conectam a força a uma determinada distância do eixo de espira para aplicar um torque. A extremidade mais comumente encontrada (e menos custosa) é a reta de torção. Se a fricção entre espiras deve ser evitada, a mola pode ser enrolada com um passo que apenas separa as espiras de corpo. Molas de torção de espiras helicoidais são comumente usadas com uma barra ou eixo para suporte de reação quando as extremidades não puderem ser embutidas, para manter o alinhamento e prover resistência à flambagem, se necessário.

O fio em uma mola de torção está em flexão, em contraste com a torção encontrada nas molas de extensão e nas molas de compressão de espira helicoidal. As molas são projetadas para enrolarem mais firmemente em serviço. À medida que o torque aplicado aumenta, o diâmetro interno da espira decresce. Cuidado deve ser tomado para que as espiras não interfiram no pino, barra ou eixo. O modo de flexão na espira parece pedir por um fio de secção transversal quadrada ou retangular, mas o custo, o limite dos materiais e a disponibilidade desencorajam seu uso.

As molas de torção são comuns em prendedores de roupa, persianas e armadilhas para animais (p. ex., ratoeiras), para citar apenas alguns usos domésticos, mas também podem ser encontradas em mecanismos de contrapeso, catracas e vários outros componentes de máquina. Existem muitas molas de estoque que podem ser compradas prontas no varejo. Esses exemplos podem acrescentar economia de escala a pequenos projetos, evitando o custo de projetos sob encomenda e manufaturas de pequena produção.

Descrevendo a Localização da Extremidade

Ao especificar uma mola de torção, as extremidades devem ser localizadas relativamente uma à outra. As tolerâncias comerciais dessas posições relativas estão listadas na Tabela 10-9. O esquema mais simples para expressar a localização inicial sem carga de uma extremidade em relação à outra é em termos de um ângulo β definindo a volta parcial presente no corpo de espira como $N_p = \beta/360°$, como mostrado na Figura 10-10. Para propósitos de análise, a nomenclatura da Figura 10-10 pode ser usada. A comunicação com um fabricante de molas dá-se freqüentemente em termos do ângulo complementar (posterior) α.

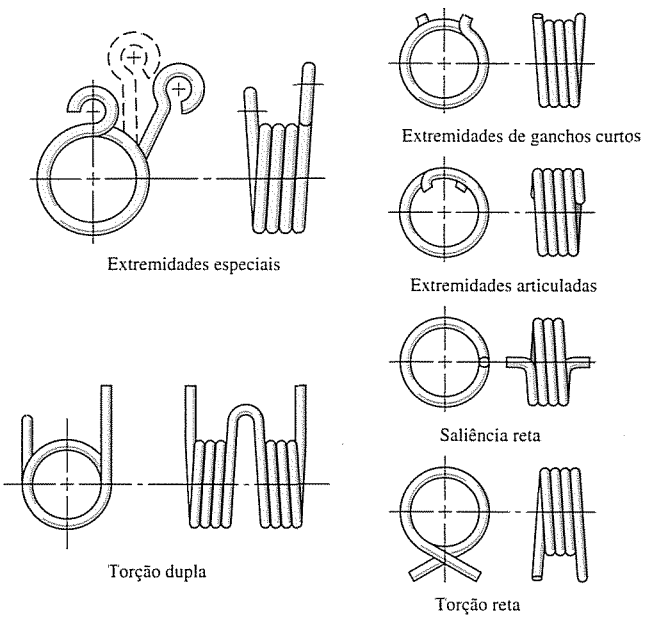


Figura 10-9 Molas de torção. (*cortesia da Associated Spring Corporation.*)

Tabela 10-9 Tolerâncias de posição de extremidade para molas de torção de espira helicoidal (para razões D/d até e incluindo 16)

Espiras totais	Tolerância: ± Graus*
Até 3	8
Mais de 3-10	10
Mais de 10-20	15
Mais de 20-30	20
Mais de 30	25

* Tolerâncias mais apertadas disponíveis por solicitação.
Fonte: Design Handbook, 1987, p. 52. Cortesia da Associated Spring.

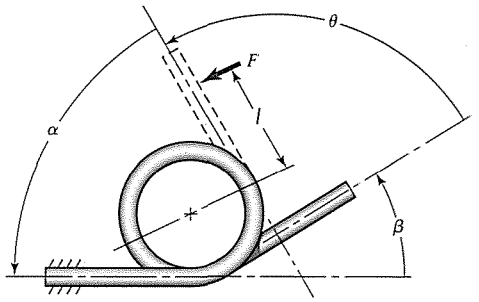


Figura 10-10 O ângulo de localização da extremidade livre é β. A coordenada rotacional θ é proporcional ao produto Fl. Seu ângulo complementar é α. Para todas as posições da extremidade móvel, $\theta + \alpha = \Sigma =$ constante.

O número de voltas de corpo N_b é o número de voltas no corpo livre de mola por contagem. A conta das voltas de corpo está relacionada com o ângulo de posição inicial β por

$$N_b = \text{inteiro} + \frac{\beta}{360^\circ} = \text{inteiro} + N_p$$

em que N_p é o número de voltas parciais. A equação acima significa que N_p adquire valores discretos, não inteiros, tais como 5,3, 6,3, 7,3, etc., com diferenças sucessivas de 1 como possibilidades ao projetar uma mola específica. Essa consideração será discutida mais adiante.

Tensão de Flexão

Uma mola de torção tem flexão induzida nas espiras, em vez de torção. Isso significa que as tensões residuais introduzidas durante o enrolamento estão na mesma direção, mas têm sinais opostos às tensões de trabalho que ocorrem durante o uso. O enrijecimento por deformação bloqueia as tensões residuais opostas às tensões de trabalho e *provê* que a carga esteja sempre aplicada no sentido do enrolamento. Molas de torção podem operar em tensões de flexão excedendo à resistência do escoamento do fio do qual foram enroladas.

A tensão de flexão pode ser obtida da teoria de viga curva, expressa na forma

$$\sigma = K\frac{Mc}{I}$$

em que K é um fator de correção de tensão. O valor de K depende da forma da secção transversal do fio e de se a tensão buscada é na fibra interna ou externa. Wahl analiticamente determinou os valores de K como sendo, para fio redondo,

$$K_i = \frac{4C^2 - C - 1}{4C(C-1)} \qquad K_o = \frac{4C^2 + C - 1}{4C(C+1)} \tag{10-43}$$

em que C é o índice de mola e os subscritos i e o referem-se às fibras interna e externa, respectivamente. Em vista do fato de que K_0 é sempre menor que a unidade, usaremos K_i para estimar as tensões. Quando o momento de flexão for $M = Fr$ e o módulo de secção, $I/c = d^3/32$, expressamos a equação de flexão como

$$\sigma = K_i\frac{32Fr}{\pi d^3} \tag{10-44}$$

que dá a tensão de flexão para uma mola de torção de fio redondo.

Deflexão e Razão de Mola

Para molas de torção, a deflexão angular pode ser expressa em radianos ou revoluções (voltas). Se um termo contém unidades de revolução, será expresso com um sinal de minuto. A razão de mola k' está expressa em unidades de torque/revoluções (lbf · in/rev ou N · mm/rev) e o momento é proporcional ao ângulo θ' expresso em voltas em vez de radianos. A razão de mola, se linear, pode ser expressa como

$$k' = \frac{M_1}{\theta_1'} = \frac{M_2}{\theta_2'} = \frac{M_2 - M_1}{\theta_2' - \theta_1'} \tag{10-45}$$

em que o momento M pode ser expresso como Fl ou Fr.

O ângulo subentendido pela deflexão da extremidade de uma viga em balanço, quando visto da extremidade engastada, é y/l rad. Da Tabela A-9-1,

$$\theta_e = \frac{y}{l} = \frac{Fl^2}{3EI} = \frac{Fl^2}{3E(\pi d^4/64)} = \frac{64Ml}{3\pi d^4 E} \tag{10-46}$$

Para uma mola de extremidade reta de torção, as correções de extremidade, tal como a Equação (10-46), devem ser adicionadas à deflexão de corpo e espira. A energia de deformação em flexão é, a partir da Equação (5-18),

$$U = \int \frac{M^2\,dx}{2EI}$$

Para uma mola de torção, $M = Fl = Fr$, e a integração deve ser realizada sobre o comprimento do fio de corpo-espira. A força F defletirá por uma distância $r\theta$, na qual θ é a deflexão angular do corpo de espira, em radianos. Aplicando o teorema de Castigliano, obtemos

$$r\theta = \frac{\partial U}{\partial F} = \int_0^{\pi DN_b} \frac{\partial}{\partial F}\left(\frac{F^2r^2\,dx}{2EI}\right) = \int_0^{\pi DN_b} \frac{Fr^2\,dx}{EI}$$

Substituindo $I = \pi d^4/64$ para fio redondo e resolvendo para θ, obtemos

$$\theta = \frac{64FrDN_b}{d^4E} = \frac{64MDN_b}{d^4E}$$

A deflexão angular total em radianos é obtida adicionando a Equação (10-46) a cada extremidade dos comprimentos l_1, l_2:

$$\theta_t = \frac{64MDN_b}{d^4E} + \frac{64Ml_1}{3\pi d^4E} + \frac{64Ml_2}{3\pi d^4E} = \frac{64MD}{d^4E}\left(N_b + \frac{l_1 + l_2}{3\pi D}\right) \tag{10-47}$$

O número equivalente de voltas ativas N_a é expressso como

$$N_a = N_b + \frac{l_1 + l_2}{3\pi D} \tag{10-48}$$

A razão de mola k, em torque por radianos, é

$$k = \frac{Fr}{\theta_t} = \frac{M}{\theta_t} = \frac{d^4E}{64DN_a} \tag{10-49}$$

A razão de mola pode também ser expressa como torque por volta. A expressão para esta é obtida multiplicando-se a Equação (10-49) por 2π rad/volta. Logo, a razão de mola k' (unidades de torque/volta) é

$$k' = \frac{2\pi d^4E}{64DN_a} = \frac{d^4E}{10{,}2DN_a} \tag{10-50}$$

Ensaios mostram que o efeito da fricção entre as espiras e a árvore é tal que a constante 10,2 deve ser aumentada a 10,8. A equação torna-se

$$k' = \frac{d^4E}{10{,}8DN_a} \tag{10-51}$$

(unidades de torque por volta). A Equação (10-51) apresenta resultados melhores. Também a Equação (10-47) transforma-se em

$$\theta_t' = \frac{10{,}8MD}{d^4E}\left(N_b + \frac{l_1 + l_2}{3\pi D}\right) \tag{10-52}$$

Molas de torção são freqüentemente usadas sobre barras redondas ou pinos. Quando uma carga é aplicada a uma mola de torção, esta se enrola, causando um descréscimo no diâmetro interno do corpo da espira. É necessário assegurar que o diâmetro interno da espira nunca se torne igual a ou menor que o diâmetro do pino, pois isso resultaria na perda de função da mola. O diâmetro de hélice da espira D' torna-se

$$D' = \frac{N_bD}{N_b + \theta_c'} \tag{10-53}$$

em que θ_c' é a deflexão angular do corpo da espira em número de voltas, dada por

$$\theta_c' = \frac{10{,}8MDN_b}{d^4E} \tag{10-54}$$

O novo diâmetro interno, $D_i' = D' - d$, provoca uma folga diametral Δ entre a espira de corpo e o pino de diâmetro D_p igual a

$$\Delta = D' - d - D_p = \frac{N_bD}{N_b + \theta_c'} - d - D_p \tag{10-55}$$

A Equação (10-55) resolvida para N_b é

$$N_b = \frac{\theta_c'(\Delta + d + D_p)}{D - \Delta - d - D_p} \tag{10-56}$$

que dá o número de voltas de corpo correspondendo a uma folga diametral específica da árvore. Esse ângulo pode não concordar com as necessárias voltas parciais remanescentes. Assim, a folga diametral pode ser excedida, mas não igualada.

Resistência Estática

As entradas da primeira coluna na Tabela 10-6 podem ser divididas por 0,577 (da teoria de energia de distorção), para dar

$$S_y = \begin{cases} 0{,}78S_{ut} & \text{fio musical e aços carbono repuxados a frio} \\ 0{,}87S_{ut} & \text{aços carbono OQ\&T (temperado em óleo e revenido) e baixa liga} \\ 0{,}61S_{ut} & \text{aço inoxidável austenítico e ligas não-ferrosas} \end{cases} \tag{10-57}$$

Resistência à Fadiga

Visto que o fio de mola está em flexão, a equação de Sines não é aplicável. O modelo de Sines é aplicado na presença de torção pura. Visto que os resultados de Zimmerli foram para molas de compressão (como em torção pura), usaremos os valores de tensão de flexão repetida ($R = 0$) providos pela Associated Spring na Tabela 10-10. Como na Equação (10-40), usaremos o critério de falha de fadiga de Gerber incorporando a resistência de fadiga S_r de $R = 0$ da Associated Spring:

$$S_e = \frac{S_r/2}{1 - \left(\dfrac{S_r/2}{S_{ut}}\right)^2} \tag{10-58}$$

O valor de S_r (e S_e) tem sido corrigido para o tamanho, para a condição de superfície e para o tipo de carregamento, mas não para a temperatura e para efeitos diversos. O critério de fadiga de Gerber agora está definido. A componente de amplitude da resistência é dada pela Tabela 7-10 como

$$S_a = \frac{r^2 S_{ut}^2}{2S_e}\left[-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2S_e}{rS_{ut}}\right)^2}\right] \tag{10-59}$$

em que a inclinação da linha de carga é $r = M_a/M_m$. A linha de carga é radial passando pela origem do diagrama de fadiga do projetista. O fator de segurança contra a falha de fadiga é

$$n_f = \frac{S_a}{\sigma_a} \tag{10-60}$$

Alternativamente, podemos encontrar n_f diretamente usando a Tabela 7-10:

$$n_f = \frac{1}{2}\frac{\sigma_a}{S_e}\left(\frac{S_{ut}}{\sigma_m}\right)^2\left[-1 + \sqrt{1 + \left(2\frac{\sigma_m}{S_{ut}}\frac{S_e}{\sigma_a}\right)^2}\right] \tag{10-61}$$

Tabela 10-10 Tensões de flexão máximas recomendadas (K_B corrigido) para molas helicoidais de torção em aplicações cíclicas como percentagem de S_{ut}

Vida de fadiga, ciclos	ASTM A228 e Aço Inoxidável Tipo 302		ASTM A230 e A232	
	Sem jateamento	Com jateamento*	Sem jateamento	Com jateamento*
10^5	53	62	55	64
10^6	50	60	53	62

Esta informação está baseada nas seguintes condições: sem vagueação, as molas estão na condição "de tensão aliviada".
* Nem sempre possível.
Fonte: Cortesia da Associated Spring.

EXEMPLO 10-8

Uma mola de estoque é mostrada na Figura 10-11. Ela é feita de fio musical com diâmetro de 0,072 in e tem $4\frac{1}{4}$ voltas de corpo com as extremidades retas de torção. Ela trabalha sobre um pino com diâmetro de 0,400 in. O diâmetro externo de espira é de $\frac{19}{32}$ in

(*a*) Encontre o torque operacional máximo e a rotação correspondente para carregamento estático.

(*b*) Estime o diâmetro interno de espira e a folga diametral do pino quando a mola estiver sujeita a torque em (*a*).

(*c*) Estime o fator de segurança de fadiga n_f se o momento aplicado variar entre $M_{\min} = 1$ a $M_{\max} = 5$ in · lbf.

Solução

(*a*) Para o fio musical da Tabela 10-4, encontramos que $A = 201$ kpsi · in^m e $m = 0{,}145$. Conseqüentemente,

$$S_{ut} = \frac{A}{d^m} = \frac{201}{(0{,}072)^{0{,}145}} = 294{,}4 \text{ kpsi}$$

Usando a Equação (10-57),

$$S_y = 0{,}78S_{ut} = 0{,}78(294{,}4) = 229{,}6 \text{ kpsi}$$

O diâmetro médio de espira é $D = 19/32 - 0{,}072 = 0{,}5218$ in. O índice de mola é $C = D/d = 0{,}5218/0{,}072 = 7{,}247$. O fator de correção da tensão de flexão K_i, da Equação (10-43), é

$$K_i = \frac{4(7{,}247)^2 - 7{,}247 - 1}{4(7{,}247)(7{,}247 - 1)} = 1{,}115$$

Agora, rearranje a Equação (10-44), substitua S_y por σ e solucione para o torque máximo Fr para obter

$$M_{\max} = (Fr)_{\max} = \frac{\pi d^3 S_y}{32K_i} = \frac{\pi(0{,}072)^3 229\,600}{32(1{,}115)} = 7{,}546 \text{ lbf} \cdot \text{in}$$

Note que nenhum fator de segurança tem sido usado. A seguir, a partir da Equação (10-54), o número de voltas do corpo de espira θ_c' é

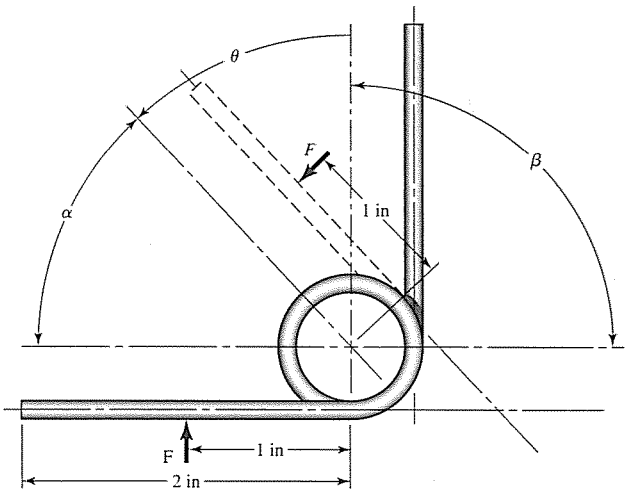


Figura 10-11 Os ângulos α, β e θ são medidos entre as linhas de centro de extremidade reta transladadas ao eixo de espira. O diâmetro externo da espira é de 19/32 in.

$$\theta'_c = \frac{10{,}8MDN_b}{d^4E} = \frac{10{,}8(7{,}546)0{,}5218(4{,}25)}{0{,}072^4(28{,}5)10^6} = 0{,}236 \text{ voltas}$$

Resposta
$$(\theta'_c)_{\text{grau}} = 0{,}236(360°) = 85{,}0$$

O número de voltas ativas N_a, a partir da Equação (10-48), é

$$N_a = N_b + \frac{l_1 + l_2}{3\pi D} = 4{,}25 + \frac{1+1}{3\pi(0{,}5218)} = 4{,}657 \text{ voltas}$$

A razão de mola da mola completa, a partir da Equação (10-51), é

$$k' = \frac{0{,}072^4(28{,}5)10^6}{10{,}8(0{,}5218)4{,}657} = 29{,}18 \text{ lbf} \cdot \text{in/turn}$$

O número de voltas da mola completa θ'_c é

$$\theta' = \frac{M}{k'} = \frac{7{,}546}{29{,}18} = 0{,}259 \text{ voltas}$$

Resposta
$$(\theta'_s)_{\text{grau}} = 0{,}259(360°) = 93{,}24$$

(*b*) Sem carga, o diâmetro médio de espira é 0,5218 in. A partir da Equação (10-53),

$$D' = \frac{N_b D}{N_b + \theta'_c} = \frac{4{,}25(0{,}5218)}{4{,}25 + 0{,}236} = 0{,}494 \text{ in}$$

A folga diametral entre o interior da espira de mola e o pino, com carga, é

Resposta
$$\Delta = D' - d - D_p = 0{,}494 - 0{,}072 - 0{,}400 = 0{,}022 \text{ in}$$

(*c*) Fadiga:

$$M_a = (M_{\max} - M_{\min})/2 = (5-1)/2 = 2 \text{ lbf} \cdot \text{in}$$

$$M_m = (M_{\max} + M_{\min})/2 = (5+1)/2 = 3 \text{ lbf} \cdot \text{in}$$

$$r = \frac{M_a}{M_m} = \frac{2}{3}$$

$$\sigma_a = K_i \frac{32M_a}{\pi d^3} = 1{,}115\frac{32(2)}{\pi 0{,}072^3} = 60\,857 \text{ psi}$$

$$\sigma_m = \frac{M_m}{M_a}\sigma_a = \frac{3}{2}(60\,857) = 91\,286 \text{ psi}$$

A partir da Tabela 10-10, $S_r = 0{,}50S_{ut} = 0{,}50(294{,}4) = 147{,}2$ kpsi. Então,

$$S_e = \frac{147{,}2/2}{1 - \left(\dfrac{147{,}2/2}{294{,}4}\right)^2} = 78{,}51 \text{ kpsi}$$

A componente de amplitude da resistência S_a, da Equação (10-59), é

$$S_a = \frac{(2/3)^2 294{,}4^2}{2(78{,}51)}\left[-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2}{2/3}\frac{78{,}51}{294{,}4}\right)^2}\right] = 68{,}85 \text{ kpsi}$$

O fator de segurança de fadiga é

Resposta

$$n_f = \frac{S_a}{\sigma_a} = \frac{68{,}85}{60{,}86} = 1{,}13$$

10-13 Molas Belleville

O suplemento da Figura 10-12 mostra uma mola de disco cônico, comumente chamada de *mola Belleville*. Embora o tratamento matemático esteja além dos objetivos deste livro, você deve pelo menos se familiarizar com as características notáveis dessas molas.

Além da vantagem óbvia que é o pouco espaço requerido por uma mola Belleville, a variação na razão *h/t* produzirá diversos tipos de curva de carga-deflexão, como ilustrado na Figura 10-12. Por exemplo, usando uma razão *h/t* de 2,83 ou mais, obteremos uma curva S que deve ser útil para mecanismos de atuação de pressão. Uma redução da razão a um valor entre 1,41 e 2,1 faz com que a porção central da curva torne-se horizontal, o que significa que a carga é constante sobre um intervalo considerável de deflexão.

Uma carga mais elevada para uma dada deflexão pode ser obtida por alojamento, isto é, por empilhamento de molas em paralelo. Por outro lado, o empilhamento em série provê uma deflexão maior para a mesma carga, mas nesse caso existe perigo de instabilidade.

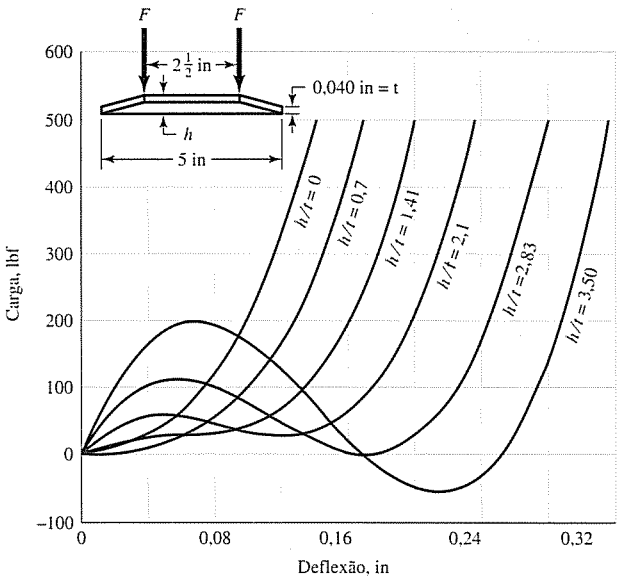


Figura 10-12 Curvas de carga-deflexão para molas Belleville. (*Cortesia da Associated Spring.*)

10-14 Molas Diversas

A mola de extensão mostrada na Figura 10-13 é feita de tira de aço ligeiramente curvada, não plana, tal que a força requerida para desenrolá-la permanece constante; assim, ela é chamada de *mola de força constante*. Isso é equivalente a uma razão de mola nula. Tais molas podem também ser manufaturadas com uma razão de mola ou positiva ou negativa.

Uma *mola de voluta*, mostrada na Figura 10-14(*a*), é uma tira larga e fina, ou "plana", de material enrolado na parte plana, de modo que as espiras cabem uma dentro da outra. Visto que espiras não se empilham, a altura sólida da mola é a largura da tira. Uma escala de mola variável, em uma mola de voluta de compressão, é obtida permitindo às espiras contatarem o apoio. Assim, à medida que a deflexão aumenta, o número de espiras ativas decresce. A mola de voluta tem uma outra vantagem importante que não pode ser obtida com molas de fio redondo: se as espiras forem enroladas de modo a contatarem ou escorregarem uma na outra durante ação, a fricção de escorregamento servirá para amortecer as vibrações ou outras perturbações transientes não desejadas.

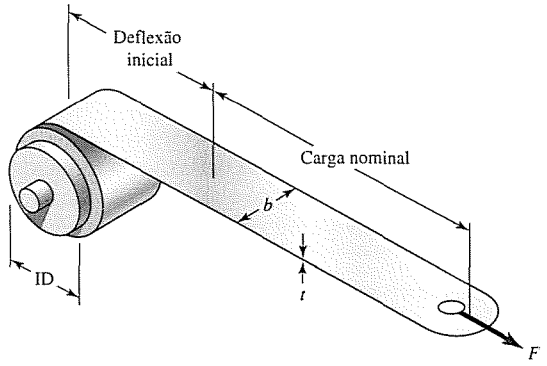


Figura 10-13 Mola de força constante. (*Cortesia da Vulcan Spring & Mfg. Co., Tellford, PA. www.vulcanspring.com.*)

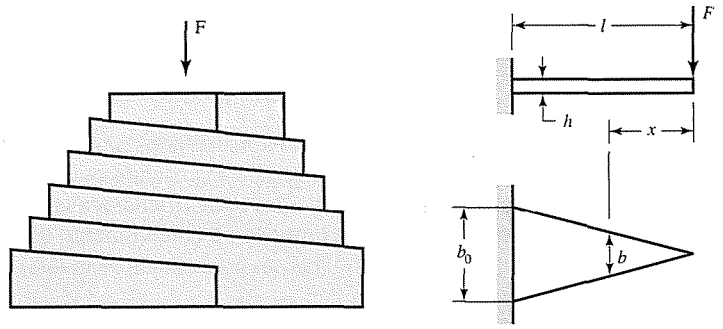


Figura 10-14 (*a*) Uma mola de voluta; (*b*) uma mola triangular plana.

Uma *mola cônica*, como o nome implica, é uma mola de espira enrolada na forma de um cone (ver Problema 10-22). A maioria das molas cônicas são molas de compressão e são enroladas com fio redondo. Mas uma mola de voluta é uma mola cônica também. Provavelmente, a principal vantagem desse tipo de mola é que ela pode ser enrolada de maneira que a altura sólida seja somente um único diâmetro de fio.

Matéria-prima plana é usada para uma grande variedade de molas, tais como molas de relógio, molas de potência, molas de torção, molas de viga em balanço e molas de cabelo; com freqüência, é especialmente moldada para criar certas ações de mola em prendedores de detonador, molas de relé, arruelas de mola, anéis de pressão e retentores.

Ao projetar muitas molas a partir de matéria-prima plana ou material de tira, costuma ser econômico e útil proporcionar o material de maneira a obter uma tensão constante através do material de mola. Uma mola de viga em balanço de secção uniforme tem uma tensão

$$\sigma = \frac{M}{I/c} = \frac{Fx}{I/c} \qquad (a)$$

que é proporcional à distância x se I/c for uma constante. Mas não há razão pela qual I/c necessite ser constante. Por exemplo, pode-se projetar uma mola tal como a mostrada na Figura 10-14(*b*), na qual a espessura h é constante, mas a largura b pode variar. Sendo, para uma secção retangular, $I/c = bh^2/6$, temos, a partir da Equação (*a*),

$$\frac{bh^2}{6} = \frac{Fx}{\sigma}$$

ou

$$b = \frac{6Fx}{h^2\sigma} \qquad (b)$$

Visto que b está linearmente relacionado a x, a largura b_o na base da mola é

$$b_o = \frac{6Fl}{h^2\sigma} \tag{10-62}$$

Boas aproximações para as deflexões podem ser encontradas facilmente usando-se o teorema de Castigliano. Para demonstrar isso, suponha que a deflexão da mola plana triangular seja primariamente devida à flexão e que possamos desprezar a força de cisalhamento transversal.[12] O momento flexor como uma função de x é $M = -Fx$, e a largura da viga em x pode ser expressa como $b = b_o x/l$. Assim, a deflexão de F é dada pela Equação (5-26) como

$$y = \int_0^l \frac{M(\partial M/\partial F)}{EI}\,dx = \frac{1}{E}\int_0^l \frac{-Fx(-x)}{\frac{1}{12}(b_o x/l)h^3}\,dx$$
$$= \frac{12Fl}{b_o h^3 E}\int_0^l x\,dx = \frac{6Fl^3}{b_o h^3 E} \tag{10-63}$$

Assim, a constante de mola $k = F/y$ é estimada como

$$k = \frac{b_o h^3 E}{6l^3} \tag{10-64}$$

Os métodos de análise de tensão e deflexão apresentados nas seções prévias deste capítulo serviram para ilustrar que molas podem ser analisadas e projetadas usando os fundamentos discutidos nos capítulos anteriores. Isso também é verdade para a maioria das molas mencionadas nesta seção, e você a partir de agora não deverá mais encontrar dificuldades na leitura e no entendimento da literatura sobre tais molas.

10-15 Resumo

Neste capítulo, consideramos as molas de espiras helicoidais em um considerável nível de detalhamento para mostrar a importância do ponto de vista na abordagem de problemas de engenharia e sua análise e projeto. Para molas de compressão suportando cargas estáticas e de fadiga, o processo completo de projeto foi apresentado. Isso não foi feito para molas de extensão e de torção, visto que o processo é o mesmo, embora as condições regentes não o sejam. As condições regentes, contudo, foram fornecidas e a extensão ao processo de projeto, a partir do que foi dado para a mola de compressão, deve estar clara. Diversos problemas serão fornecidos a seguir, e espera-se que o leitor desenvolva problemas adicionais similares.

As considerações estocásticas estão notavelmente faltando neste capítulo. A complexidade e as nuanças da abordagem exclusivamente determinística são suficientes para lidar com uma primeira apresentação do projeto de mola. Os fabricantes de molas oferecem uma vasta série de informações concernentes às tolerâncias de molas.[13] Isso, junto com o material dos Capítulos 2, 6 e 7, deve fornecer ao leitor amplas habilidades para avançar e incorporar análises estatísticas em suas avaliações de projeto.

À medida que os problemas sobre molas tornarem-se computacionalmente mais envolventes, calculadoras programáveis e computadores devem ser utilizados. A programação de planilhas é bastante popular para cálculos repetitivos. Como mencionado anteriormente, programas comerciais estão disponíveis. Com eles, soluções inversas podem ser realizadas; isto é, quando os critérios objetivos finais são dados, o programa determina os valores iniciais.

PROBLEMAS

ANÁLISE **10-1** Faça um desenho de duas vistas ou um bom esboço à mão livre de uma mola helicoidal de compressão fechada a sua altura consolidada, indeflectível (sólida) e com um diâmetro de fio de $\frac{1}{2}$ in, um diâmetro externo de 4 in e uma espira ativa. A mola deve ter extremidades planas. Faça um outro desenho da mesma mola com extremidades planas e esmerilhadas.

ANÁLISE **10-2** É instrutivo examinar a questão das unidades do parâmetro A da Equação (10-14). Mostre que, para as unidades usuais nos Estados Unidos, as unidades de A_{uscu} são kpsi · in^m e, para as unidades do sistema interna-

[12] Note que, devido ao cisalhamento, a largura da viga não pode ser zero em $x = 0$. Assim, já existe alguma simplificação no modelo de projeto. Tudo isso pode ser levado em conta em um modelo mais sofisticado.

[13] Ver, por exemplo, Associated Spring-Barnes Group, *Design Handbook*, Bristol, Conn., 1987.

cional (SI), MPa · mm^m para A_{SI}, o que faz as dimensões tanto de A_{uscu} como de A_{SI} diferentes para cada material ao qual a Equação (10-14) se aplica. Também mostre que a conversão de A_{uscu} a A_{SI} é dada por

$$A_{SI} = 6{,}895(25{,}40)^m A_{uscu}$$

ANÁLISE **10-3** Uma mola helicoidal de compressão é enrolada usando um fio musical com diâmetro de 0,105 in. A mola tem um diâmetro externo de 1,225 in com extremidades planas esmerilhadas, e 12 espiras ao todo.

(*a*) Qual deve ser o comprimento livre para assegurar que, quando a mola for comprimida à forma sólida, a tensão de torção não exceda à resistência de escoamento, isto é, que seja sólida e segura?

(*b*) Qual força é necessária para comprimir essa mola até o fechamento?

(*c*) Estime a razão de mola.

(*d*) Existe alguma possibilidade de que a mola possa flambar em serviço?

ANÁLISE **10-4** A mola do Problema 10-3 deve ser usada com uma carga estática de 30 lbf. Faça uma avaliação de adequação, representada pelas Equações (10-13) e (10-18) até (10-21), caso a mola seja fechada à altura sólida.

ANÁLISE **10-5** Uma mola helicoidal de compressão é feita de fio de aço de mola duro repuxado, com 2 mm de diâmetro e um diâmetro externo de 22 mm. As extremidades são planas e esmerilhadas, e existem $8\frac{1}{2}$ espiras totais.

(*a*) A mola é enrolada para um comprimento livre, que é o maior possível com propriedades de segurança e solidez. Encontre esse comprimento livre.

(*b*) Qual é o passo dessa mola?

(*c*) Que força é necessária para comprimir a mola a seu comprimento sólido?

(*d*) Estime a razão de mola.

(*e*) A mola flambará em serviço?

ANÁLISE **10-6** A mola do Problema 10-5 deve ser usada com uma carga estática de 75 N. Faça uma avaliação de adequação, representada pelas Equações (10-13) e (10-18) até (10-21), caso a mola seja fechada à altura sólida.

ANÁLISE **10-7 a 10-17** Estão listadas a seguir seis molas descritas em unidades usuais (inglesas) e cinco molas descritas em unidades SI. Investigue essas molas helicoidais de compressão de extremidades esquadradas e esmerilhadas para ver se são seguras e sólidas. Se não, qual é o maior comprimento livre para o qual elas podem ser enroladas usando $n_s = 1{,}2$?

Número do problema	d, in	Diâmetro externo, in	L_0, in	N_t	Material
10-7	0,006	0,036	0,63	40	Fio musical A228
10-8	0,012	0,120	0,81	15,1	Bronze-fósforo B159
10-9	0,040	0,240	0,75	10,4	Aço inoxidável A313
10-10	0,135	2,0	2,94	5,25	Aço duro-repuxado A227
10-11	0,144	1,0	3,75	13,0	Aço OQ&T A229*
10-12	0,192	3,0	9,0	8,0	Cromo-vanádio A232

Número do problema	d, mm	Diâmetro externo, mm	L_0, mm	N_t	Material
10-13	0,2	0,91	15,9	40	Aço inoxidável A313
10-14	1,0	6,10	19,1	10,4	Fio musical A228
10-15	3,4	50,8	74,6	5,25	Aço de mola A229 OQ&T
10-16	3,7	25,4	95,3	13,0	Bronze-fósforo B159
10-17	4,3	76,2	228,6	8,0	Cromo-vanádio A232

* N. de T.: OQ&T = tratado térmico: têmpera em óleo e revenido.

PROJETO **10-18** Uma mola helicoidal de compressão de fio musical de serviço estático é necessária para suportar uma carga de 20 lbf após ser comprimida 2 in. A altura sólida da mola não pode exceder a $1\frac{1}{2}$ in. O comprimento livre não deve exceder a 4 in. O fator de segurança estático deve igualar ou exceder a 1,2. Para linearidade robusta, use uma sobrevolta fracional para fechamento ξ de 0,15. Existem duas molas a serem projetadas.

(*a*) A mola deve operar sobre um eixo de $\frac{3}{4}$ in. Uma tolerância diametral de folga de 0,050 in deve ser adequada para evitar interferência entre o eixo e a mola devido às espiras fora de circularidade. Projete a mola.

(*b*) A mola deve operar em um furo de 1 in de diâmetro. Uma tolerância diametral de folga de 0,050 in deve ser adequada para evitar interferência entre a mola e o furo devido à dilatação do diâmetro da mola à medida que é comprimida e às espiras fora de circularidade. Projete a mola.

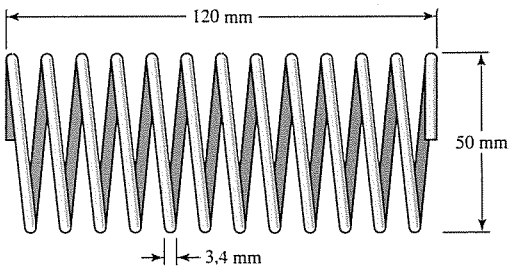
ANÁLISE **10-19** Nem todas as molas são feitas de maneira convencional Considere a mola especial de aço na ilustração.

(*a*) Encontre o passo, a altura sólida e o número de voltas ativas.

(*b*) Encontre a razão de mola. Suponha que o material é aço A227 HD (duro-repuxado).

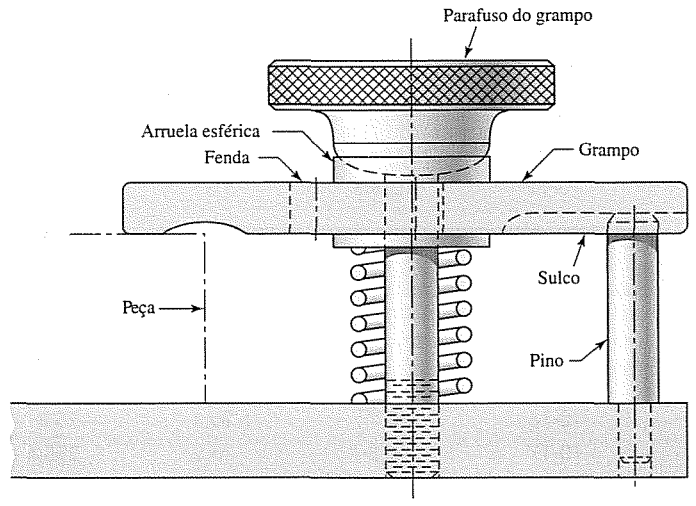
(*c*) Encontre a força F_s requerida para fechar a mola à solidez.

(*d*) Encontre a tensão de cisalhamento na mola devida à força F_s.



Problema 10-19

PROJETO **10-20** Um artefato apreensório para uma peça com espessura de $1\frac{1}{2}$ in nas posições de aperto deve ser projetado. O detalhe de um dos grampos é mostrado na figura. Uma mola é requerida para impelir o grampo para cima enquanto se remove ou se insere uma peça. Uma força de grampeamento de 10 lbf é satisfatória. A placa de base tem $\frac{5}{8}$ in de espessura. O parafuso do grampo tem uma rosca de $\frac{7}{16}$ in 20 UNF. É útil ter um comprimento livre L_0 pequeno o suficiente para que o parafuso do grampo possa comprimir a mola na remontagem do artefato durante inspeção e serviço, digamos, $L_0 \leq 1{,}5 + \frac{3}{8}$ in. A mola não pode fechar à solidez a um comprimento maior que $1\frac{1}{4}$ in. O fator de segurança, quando comprimida à solidez, deve ser $n_s \geq 1{,}2$ e, em carga de serviço, $n_l \geq 1{,}5$. Projete uma mola conveniente de compressão de espira helicoidal para esse artefato.



Problema 10-20
Artefato de aperto.

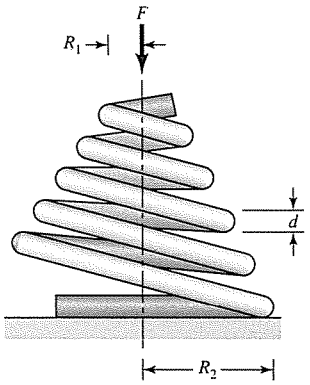
PROJETO **10-21** Seu instrutor lhe proverá com um catálogo do supridor de molas pré-fabricadas, ou com páginas reproduzidas dele. Conclua a tarefa do Problema 10-20 selecionando uma mola disponível de estoque. (Isto é, projete por *seleção*.)

ANÁLISE **10-22** A figura mostra uma mola cônica de compressão de espira helicoidal na qual R_1 e R_2 são os respectivos raios de espiral inicial e final, d é o diâmetro do fio e N_a é número total de espiras ativas. A secção transversal do fio primordialmente transmite um momento de torção, que muda com o raio de espira. Seja o raio de espira dado por

$$R = R_1 + \frac{R_2 - R_1}{2\pi N_a}\theta$$

em que θ está em radianos. Use o método de Castigliano para estimar a razão de mola como

$$k = \frac{d^4 G}{16 N_a (R_2 + R_1)\left(R_2^2 + R_1^2\right)}$$



Problema 10-22
(De Richard G. Budynas, *Advanced Strength and Applied Stress Analysis, 2nd Ed.*, McGraw-Hill, New York, 1999. Copyright © 1999 The McGraw-Hill Companies.)

PROJETO **10-23** Uma mola de compressão de espira helicoidal é necessária para maquinaria de processamento de alimento. A carga varia de um mínimo de 4 lbf a um máximo de 18 lbf. O comprimento de mola varia de um mínimo de 1 in a um máximo de 2,5 in. O diâmetro externo da mola não pode exceder a $2\frac{1}{2}$ in. O fabricante de mola tem matrizes convenientes disponíveis para repuxar fios com diâmetro de 0,080, 0,0915, 0,1055 e 0,1205 in. Usando um fator de projeto de fadiga n_f de 1,5, e o critério de falha de fadiga de Gerber-Zimmerli, projete uma mola apropriada.

PROJETO **10-24** Resolva o Problema 10-23 usando o critério de falha de fadiga de Goodman-Zimmerli.

PROJETO **10-25** Resolva o Problema 10-23 usando o critério de falha de fadiga de Sines-Zimmerli.

PROJETO **10-26** Projete a mola do Exemplo 10-5 usando o critério de falha de fadiga de Gerber.

PROJETO **10-27** Resolva o Problema 10-26 usando o critério de falha de fadiga de Goodman-Zimmerli.

PROJETO **10-28** Uma mola de extensão de aço de mola duro-repuxado deve ser projetada para suportar uma carga estática de 18 lbf com uma extensão de $\frac{1}{2}$ in usando um fator de projeto de $n_y = 1{,}5$ in em flexão. Use ganchos de extremidade de espira completa com o mais amplo raio de flexão de $r = D/2$ e $r_2 = 2d$. O comprimento livre deve ser menor que 3 in, e as voltas de corpo devem ser menores que 30. Voltas de corpo inteiras e pela metade permitem que os ganchos de extremidade sejam colocados no mesmo plano. Isso acrescenta um custo extra e é feito somente quando necessário.

ANÁLISE **10-29** A mola de extensão mostrada na figura tem extremidades de anel completamente torcidas. O material é um fio AISI 1065 OQ&T (temperado em óleo e revenido). A mola tem 84 espiras e é enrolada fechada com uma pré-carga de 16 lbf.

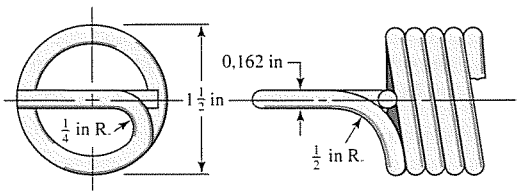
(*a*) Encontre o comprimento fechado da mola.

(*b*) Encontre a tensão de torção na mola correspondente à pré-carga.

(*c*) Estime a razão de mola.

(*d*) Que carga causaria deformação permanente?

(*e*) Qual é a deflexão de mola correspondente à carga encontrada em (*d*)?



Problema 10-29

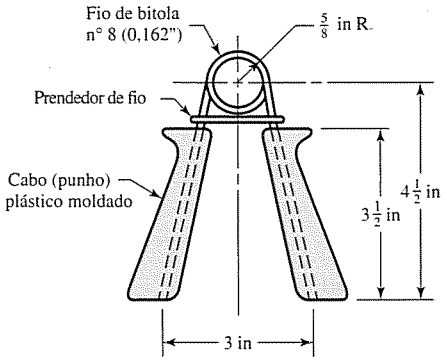
PROJETO **10-30** Projete uma mola de extensão de espira helicoidal de vida infinita com anéis completos de extremidade e grandes raios de flexão de anel para uma carga mínima de 9 lbf e uma carga máxima de 18 lbf, com um estiramento acompanhante de $\frac{1}{4}$ in. A mola é para equipamento de serviço de alimento e deve ser de aço inoxidável. O diâmetro externo da espira não pode exceder a 1 in, e o comprimento livre não pode exceder a $2\frac{1}{2}$ in. Usando um fator de projeto de fadiga de $n_f = 2$, complete o projeto.

ANÁLISE **10-31** Prove a Equação (10-40). *Sugestão:* Usando o teorema de Castigliano, determine a deflexão devida à flexão de um só gancho de extremidade, como se este estivesse fixo à extremidade, conectando-o ao corpo da mola. Considere o diâmetro de fio d pequeno quando comparado com o raio médio do gancho, $R = D/2$. Adicione as deflexões dos ganchos de extremidade à deflexão do corpo principal para determinar a constante final de mola, e então a iguale à Equação (10-9).

ANÁLISE **10-32** A figura mostra um exercitador de mão. Ele é formado enrolando um fio de aço A227 duro repuxado a frio em torno de um mandril para obter $2\frac{1}{2}$ voltas quando o cabo estiver na posição fechada. Depois de enrolado, o fio é cortado para deixar as duas pernas como punhos. Os punhos plásticos são então moldados, o cabo é espremido e um prendedor de fio é colocado ao redor das pernas para obter a "tração" inicial e espaçar os punhos para a melhor posição inicial de agarramento. O prendedor é formado como um 8 para preveni-lo de sair fora. Quando o punho estiver na posição fechada, a tensão na mola não deve exceder à tensão permissível.

(*a*) Determine a configuração da mola antes que o cabo (punho) seja montado.

(*b*) Encontre a força necessária para fechar o punho.

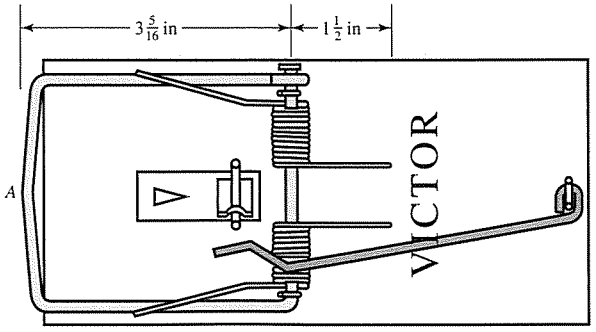


Problema 10-32

ANÁLISE **10-33** A ratoeira mostrada na figura usa duas molas de torção de desenho oposto. O fio tem um diâmetro de 0,081 in, e o diâmetro externo da mola na posição mostrada é de $\frac{1}{2}$ in. Cada mola tem 11 voltas. O uso de uma balança de peixe revelou que uma força de cerca de 8 lbf é necessária para armar a ratoeira.

(*a*) Encontre a configuração provável da mola antes de montá-la.

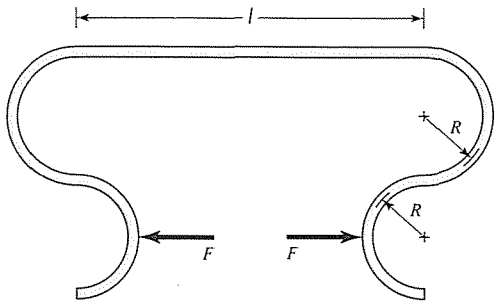
(*b*) Encontre a tensão máxima na mola quando a ratoeira estiver armada.



Problema 10-33

ANÁLISE

10-34 Molas de configurações de fio podem ser feitas de diversas formas. O prendedor mostrado opera aplicando-se uma força F. O diâmetro do fio é d, o comprimento da secção reta é l, e o módulo de Young é E. Considere os efeitos de flexão somente, com $d << R$, e use o teorema de Castigliano para determinar a constante de mola, k.



Problema 10-34

10-35 Usando a experiência obtida com o Problema 10-23, escreva um programa de computador capaz de ajudar no projeto de molas de compressão de espira helicoidal.

10-36 Usando a experiência obtida com o Problema 10-30, escreva um programa de computador capaz de ajudar no projeto de mola de extensão de espira helicoidal.

CAPÍTULO

11 Mancais de Contato Rolante

11-1 Tipos de Mancais 536
11-2 Vida do Mancal 538
11-3 Carga e Vida do Mancal na Confiabilidade Especificada 539
11-4 Sobrevivência do Mancal: Confiabilidade *versus* Vida 541
11-5 Relacionando Carga, Vida e Confiabilidade 542
11-6 Carregamento Combinado Radial e Axial 544
11-7 Carregamento Variável 548
11-8 Seleção de Mancais de Esferas e Rolos Cilíndricos 552
11-9 Seleção de Mancais de Rolos Cônicos 554
11-10 Avaliação do Projeto para Mancais Selecionados de Contato Rolante 565
11-11 Lubrificação 569
11-12 Montagem e Recinto 569

Os termos *mancal de contato de rolamento ou rolante*, *mancal antifricção* e *mancal de rolamento* são todos usados para descrever a classe de mancal em que a carga principal é transferida por meio de elementos em contato rolante, em vez de contato de escorregamento. Em um mancal de rolamento, a fricção inicial é cerca de duas vezes a fricção de funcionamento, ainda que seja insignificante em comparação com a fricção inicial de um mancal deslizante. Carga, velocidade e viscosidade de operação do lubrificante afetam as características friccionais de um mancal de rolamento. É provavelmente um erro descrever esse último como "antifricção", mas o termo costuma ser empregado com freqüência nas indústrias.

Do ponto de vista de um projetista mecânico, o estudo dos mancais antifricção difere em vários aspectos quando comparado com o estudo de outros tópicos, pois os mancais que eles especificam já foram projetados. O especialista em projeto de mancal antifricção é confrontado com o problema de projetar um grupo de elementos que compõem um mancal de rolamento; tais elementos devem ser projetados para caber no espaço cujas dimensões são especificadas, para receber uma carga com certas características e, finalmente, para ter uma vida satisfatória quando operados sob condições específicas. Os especialistas em mancais devem, conseqüentemente, levar em conta assuntos como carregamento de fadiga, fricção, calor, resistência à corrosão, problemas cinemáticos, propriedades do material, lubrificação, tolerâncias de usinagem, montagem, uso e custo. A partir de uma consideração de todos esses fatores, eles chegam a um acordo que, em seu julgamento, representa uma boa solução para o problema tal como enunciado.

Iniciaremos com uma visão geral dos tipos de mancais; dessa forma, veremos que a vida do mancal não pode ser descrita de forma determinística. Introduziremos a invariante – a distribuição estatística de vida, fortemente weibulliana. Existem algumas equações determinísticas úteis que remetem carga *versus* vida à confiabilidade constante, e introduziremos a classificação de catálogo da vida nominal.

A relação confiabilidade-vida envolve a estatística weibulliana. A relação entre carga-vida-confiabilidade, por sua vez, combina relações estatísticas e determinísticas, fornecendo ao projetista uma maneira de mover-se da carga e da vida desejadas para a classificação de catálogo em *uma* equação.

Os mancais de rolamento resistem ao empuxo, e uma unidade de empuxo produz danos por revolução diferentes dos de uma unidade de carga radial; assim, devemos encontrar a carga radial pura equivalente que produz o mesmo tipo de danos que a radial existente e a carga de impulso. A seguir, o carregamento variável, em forma de degrau e contínuo, será abordado, e a carga radial pura equivalente que produz o mesmo dano será quantificada. O carregamento oscilatório será também mencionado.

Com essa preparação, teremos as ferramentas para considerar a seleção de mancais de esferas e de rolos cilíndricos. A questão do desalinhamento será abordada quantitativamente.

Os mancais de rolos cônicos apresentam algumas complicações, e nossa experiência até aqui contribuirá para entendê-las.

Tendo as ferramentas para encontrar as classificações próprias de catálogo, procederemos às decisões (seleções), realizaremos uma avaliação de projeto e quantificaremos a confiabilidade dos mancais. Lubrificação e montagem concluirão nossa introdução. Os manuais de venda devem ser consultados para detalhes específicos relacionados a cada tipo de mancal.

11-1 Tipos de Mancais

Os mancais são fabricados para receber cargas radiais puras, cargas de empuxo puras ou uma combinação desses dois gêneros de cargas. A nomenclatura de um mancal de esferas está ilustrada na Figura 11-1, que também mostra as quatro peças essenciais de um mancal, a saber: o anel externo, o anel interno, as esferas ou elementos de rolamento e o separador. Em mancais baratos, esse último é às vezes omitido; no entanto, ele desempenha uma função importante de separação dos elementos, de modo a evitar o roçamento.

Nesta seção, incluiremos uma seleção dos diversos tipos de mancais padronizados que são manufaturados. A maioria dos fabricantes provê manuais de engenharia e brochuras contendo descrições dos vários tipos disponíveis. Aqui, porém, apresentaremos apenas um pequeno esboço de alguns dos tipos mais comuns de mancais. Portanto, você deverá incluir uma pesquisa sobre a literatura de fabricantes de mancais em seus estudos relativos a esta seção.

Alguns dos vários tipos de mancais padronizados manufaturados são exibidos na Figura 11-2. O mancal de sulco profundo de fila única receberá carga radial, bem como alguma carga axial. As esferas são inseridas nos sulcos movendo-se o anel interno para uma posição excêntrica. Após o carregamento, elas são separadas e o separador é então inserido. O uso de um entalhe de enchimento (Figura 11-2(*b*)) nos anéis interno e externo permite que um maior número de esferas seja inserido, aumentando, assim, a capacidade de carga. A capacidade axial é decrescida, contudo, devido ao choque das esferas contra a beira do entalhe quando as cargas axiais estão presentes. O mancal de contato angular (Figura 11-2(*c*)) provê uma maior capacidade axial.

Todos esses mancais podem ser obtidos com blindagem em um ou em ambos os lados. As blindagens não constituem um fechamento completo, mas oferecem uma medida de proteção contra a sujeira. Alguns

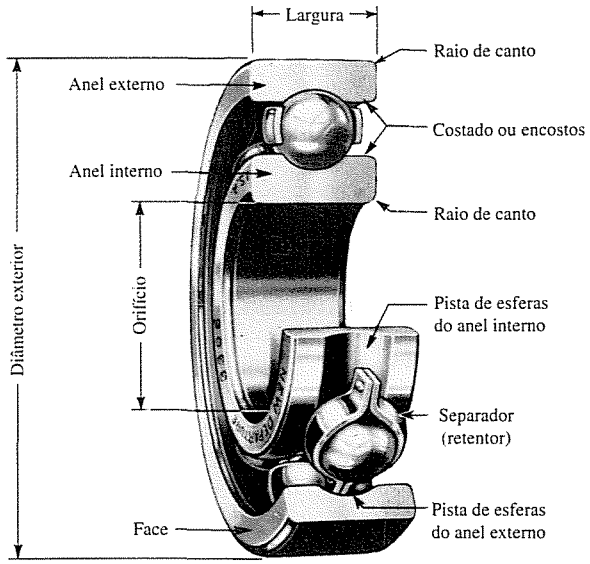


Figura 11-1 Nomenclatura de um mancal de esferas. (*General Motors Corp. Reproduzida com autorização, GM Media Archives.*)

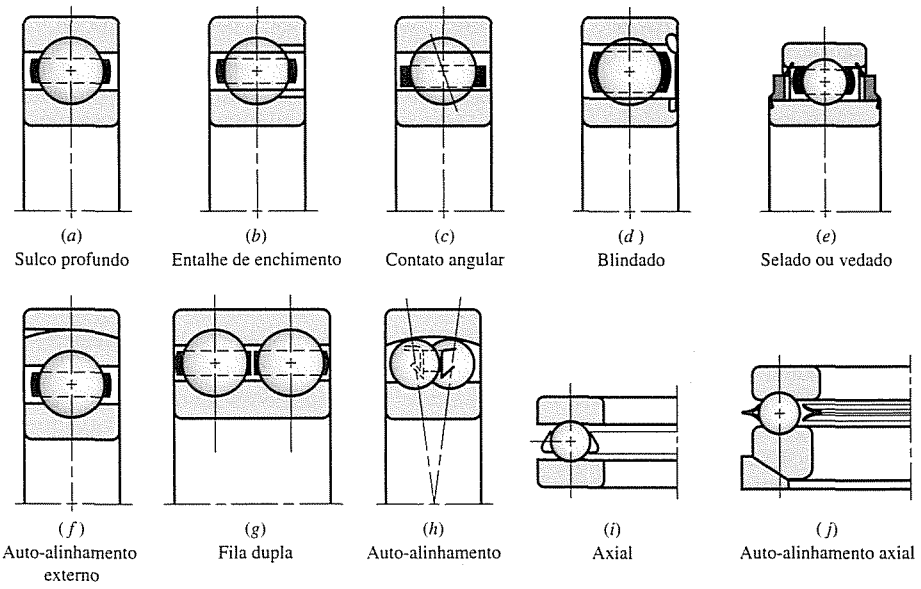


Figura 11-2 Vários tipos de mancais de esfera.

mancais são manufaturados com vedação em um ou em ambos os lados. Quando a vedação é realizada nos dois lados, os mancais são lubrificados na fábrica. Embora um mancal selado deva supostamente ser lubrificado para toda a vida, um método de relubrificação é às vezes fornecido.

Os mancais de fila única podem agüentar um pequeno desalinhamento de deflexão de eixo, mas onde isso for maior, mancais de auto-alinhamento poderão ser usados. Os mancais de fila dupla são produzidos em diversos tipos e tamanhos, para carregar cargas radiais mais pesadas e cargas axiais. Às vezes, os mancais de duas filas separadas são utilizados juntos por essa mesma razão, apesar do fato de que um mancal de fila dupla geralmente requererá menos peças e ocupará menos espaço. Os mancais axiais de esfera de uma pista (Figura 11-2(*i*)) são produzidos em diversos tipos e tamanhos.

Um pouco da grande variedade de mancais de rolos padronizados disponíveis é apresentado na Figura 11-3. Os mancais de rolos retos (Figura 11-3(*a*)) carregarão maior carga que os mancais de esferas do mesmo tamanho, devido à maior área de contato. Contudo, eles têm a desvantagem de requerer geometria quase perfeita das pistas e dos rolos. Um pequeno desalinhamento fará com que esses últimos entortem e fiquem fora de linha. Por tal razão, o retentor deve ser pesado. Os mancais de rolos retos não receberão, por certo, cargas axiais.

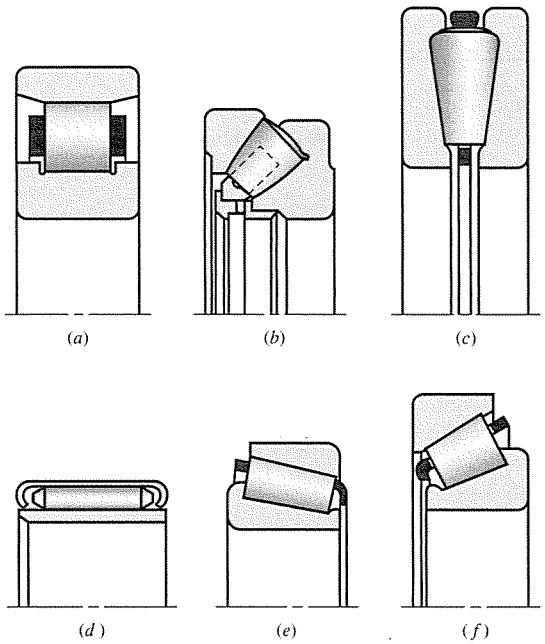


Figura 11-3 Tipos de mancais de rolos: (*a*) rolo reto; (*b*) rolo esférico, axial; (*c*) rolo cônico, axial; (*d*) agulha; (*e*) rolo cônico; (*f*) rolo cônico de ângulo íngreme. *(Cortesia da Timken Company.)*

Os rolos helicoidais são feitos enrolando-se material retangular em rolos, após o que são endurecidos e retificados. Em razão da flexibilidade inerente, eles tolerarão um desalinhamento considerável. Se necessário, o eixo e a carcaça poderão ser usados para pistas, em vez de pistas separadas interna e externa – algo especialmente importante se o espaço radial for limitado.

O mancal axial de rolos esféricos (Figura 11-3(*b*)) é útil onde cargas pesadas e desalinhamentos ocorrem. Os elementos esféricos têm a vantagem de ampliar suas áreas de contato à medida que a carga é aumentada.

Os mancais de agulha (Figura 11-3(*d*)) são muito úteis onde o espaço radial é limitado. Eles apresentam uma alta capacidade de carga quando separadores são utilizados, mas podem ser obtidos sem estes. São fornecidos com e sem pistas.

Os mancais de rolos cônicos (Figura 11-3(*e*),(*f*)) combinam as vantagens dos mancais de esferas e de rolos retos, visto que podem agüentar igualmente cargas radiais e axiais, ou qualquer combinação delas, e, além disso, apresentam a alta capacidade de carregamento de carga dos mancais de rolos retos. O mancal de rolo cônico é projetado para que todos os elementos na superfície do rolo e nas pistas interceptem-se em um ponto comum no eixo do mancal.

Os mancais aqui descritos representam apenas uma pequena amostra dos muitos disponíveis para escolha. Muitos mancais de uso especial são manufaturados, e também produzidos para classes particulares de maquinaria. Alguns exemplos típicos são:

- Mancais de instrumentos, os quais são de alta precisão e estão disponíveis em aço inoxidável e materiais de alta temperatura.
- Mancais sem precisão, geralmente feitos sem qualquer separador e, às vezes, tendo pistas divididas ou pistas estampadas de chapa de metal.
- Mancais de bucha de esferas, os quais permitem rotação, deslizamento ou ambos.
- Mancais com rolos flexíveis.

11-2 Vida do Mancal

Quando a esfera ou o rolo de mancais de contato rolante rola, as tensões de contato ocorrem no anel interno, o elemento rolante, e no anel externo. Em razão de a curvatura dos elementos contatantes ser, na direção axial, diferente daquela na direção radial, as equações para essas tensões são mais complicadas do que nas equações de Hertz ou de Smith-Liu apresentadas no Capítulo 4. Se um mancal estiver limpo e lubrificado apropriadamente, se for montado e vedado contra a entrada de poeira e sujeira, se for mantido em tal condi-

ção e se for operado a temperaturas razoáveis, então a fadiga do metal será a única causa de falha. Visto que a fadiga de metal implica muitos milhões de aplicações de tensão efetivamente suportados, necessitamos de uma medida quantitativa de vida. Medidas comuns de vida são as seguintes:

- Número de revoluções do anel interno (anel externo estacionário), até a primeira evidência tangível de fadiga.
- Número de horas de uso a uma velocidade angular padronizada, até a primeira evidência tangível de fadiga.

O termo comumente usado é *vida de mancal*, que é aplicado a qualquer das medidas supramencionadas. É importante perceber que, como em toda fadiga, a vida como antes definida é uma variável estocástica e, assim, apresenta tanto uma distribuição como parâmetros estatísticos associados. A medida de vida de um mancal individual é definida como o número total de revoluções (ou de horas a uma velocidade constante) de operação do mancal, até que o critério de falha seja desenvolvido. Sob condições ideais, a falha de fadiga consiste em lascagem das superfícies de carregamento de carga. A norma da American Bearing Manufacturers Association (ABMA) afirma que o critério de falha é a primeira evidência de fadiga. O critério de fadiga empregado pelos laboratórios da Timken Company são a lascagem ou a formação de cavidades (crateramento) de uma área de 0,01 in^2. A Timken também observa que a vida útil do mancal pode se estender consideravelmente além desse ponto, o que constitui uma definição operacional de falha de fadiga em mancais de rolamento.

Vida nominal é um termo sancionado pela ABMA e utilizado pela maioria dos fabricantes. A vida nominal de um grupo de mancais de esferas ou de rolos nominalmente idênticos é definida como o número de revoluções (ou de horas a uma velocidade constante) que atingirão, ou que excederão a, 90% de um grupo de mancais, antes que o critério de falha se manifeste. Os termos *vida mínima*, *vida* L_{10} e *vida* B_{10} são também utilizados como sinônimos para vida nominal. Essa última é a posição do 10° percentil da distribuição de revoluções até a falha do grupo de mancais.

Vida mediana é a vida do 50° percentil de um grupo de mancais. O termo *vida média* tem sido empregado como um sinônimo da vida mediana, contribuindo para a confusão. Quando muitos grupos de mancais são testados, a vida mediana é de quatro a cinco vezes a vida L_{10}.

11-3 Carga e Vida do Mancal na Confiabilidade Especificada

Quando grupos nominalmente idênticos são testados pelo critério de vida-falha sob cargas diferentes, os dados são traçados em um gráfico como o da Figura 11-4, que utiliza uma transformação *log-log*. Para estabelecer um único ponto, a carga F_1 e a vida nominal de grupo um $(L_{10})_1$ são as coordenadas logaritmicamente transformadas. A confiabilidade associada a esse ponto, e a todos os outros pontos, é de 0,90. Assim, obtemos uma rápida noção da função carga-vida na confiabilidade de 0,90. Usando uma equação de regressão da forma

$$FL^{1/a} = \text{constante} \tag{11-1}$$

o resultado de muitos ensaios para vários tipos de mancais resulta em

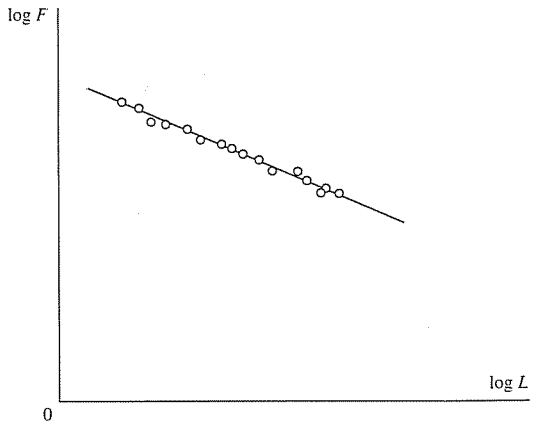


Figura 11-4 Curva típica *log-log* da carga-vida de mancal.

- $a = 3$ para mancais de esfera
- $a = 10/3$ para mancais de rolos (rolo cilíndrico e cônico)

Um fabricante de mancal pode escolher um valor quantificado de ciclos de 10^6 revoluções – ou, no caso da Timken Company, de $90(10^6)$ revoluções – ou, se não, como declarado em seu catálogo para corresponder a uma capacidade básica de carga para cada mancal manufaturado, como as vidas nominais deles. Chamaremos isso de *capacidade (valor) de carga de catálogo* e a apresentaremos algebricamente como C_{10} para denotá-la como a vida nominal do 10° percentil para um determinado mancal no catálogo. A partir da Equação (11-1), podemos escrever

$$F_1 L_1^{1/a} = F_2 L_2^{1/a} \tag{11-2}$$

e associar a carga F_1 a C_{10}, a medida de vida L_1 a L_{10} e escrever

$$C_{10} L_{10}^{1/a} = F L^{1/a}$$

em que as unidades de L são revoluções.

Ademais, podemos escrever

$$C_{10}(L_R n_R 60)^{1/a} = F_D(L_D n_D 60)^{1/a}$$

capacidade de catálogo, lbf ou kN

vida nominal em horas

velocidade nominal, rpm

velocidade desejada, rpm

vida desejada, horas

carga radial, lbf ou kN

Solucionando para C_{10}, obtemos

$$C_{10} = F_D \left(\frac{L_D n_D 60}{L_R n_R 60} \right)^{1/a} \tag{11-3}$$

EXEMPLO 11-1

Considere a SKF, que classifica seus mancais para um milhão de revoluções, de modo que a vida L_{10} seja $60L_R n_R = 10^6$ revoluções. O produto $L_R n_R 60$ produz um número familiar. A Timken, por exemplo, usa $90(10^6)$ revoluções. Se você quiser uma vida de 5000 h a 1725 rpm, com uma carga de 400 lbf com uma confiabilidade de 90%, que valor de catálogo buscaria em um catálogo da SKF?

Solução

A partir da Equação (11-3),

$$C_{10} = F_D \left(\frac{L_D n_D 60}{L_R n_R 60} \right)^{1/a} = 400 \left[\frac{5000(1725)60}{10^6} \right]^{1/3} = 3211 \text{ lbf} = 14{,}3 \text{ kN}$$

Se um fabricante de mancais os classifica a 500 h a $33\frac{1}{3}$ rpm, com uma confiabilidade de 0,90, então $L_R n_R 60 = 500(33\frac{1}{3})\,60 = 10^6$ revoluções. A tendência é substituir 10^6 por $L_R n_R 60$ na Equação (11-3). Embora seja verdade que em tal equação os termos 60, como mostrado, cancelam-se algebricamente, são eles dignos de ser mantidos, uma vez que, em algum ponto na sua seqüência de digitação em sua calculadora manual, o número mágico do fabricante (10^6, ou outro) aparecerá para lembrá-lo de qual é a base nominal e de quais os catálogos de fabricante a que você está limitado. Por certo, se você avaliar a quantidade do colchete na Equação (11-3) alternando entradas entre o numerador e o denominador, o número mágico não aparecerá e você terá perdido a oportunidade de verificação.

11-4 Sobrevivência do Mancal: Confiabilidade *versus* Vida

Sob carga constante, a distribuição da medida de vida é enviesada para a direita, como representado na Figura 11-5. As candidatas a um ajuste de curva distribucional incluem a *lognormal* e a Weibull. A Weibull é de longe a mais popular, muito devido à sua habilidade em se ajustar a quantidades variantes de obliqüidade (enviesamento). Se a medida de vida for expressa adimensionalmente como $x = L/L_{10}$, então a confiabilidade poderá ser expressa como [relembre a Equação (2-24)]

$$R = \exp\left[-\left(\frac{x - x_0}{\theta - x_0}\right)^b\right] \tag{11-4}$$

em que R = confiabilidade
x = variante adimensional de medida de vida
x_0 = valor garantido, ou "mínimo", do variante
θ = parâmetro característico correspondente ao valor de percentil de 63,2121 do variante
b = parâmetro de forma que controla a obliqüidade

Em razão de haver três parâmetros distribucionais – x_o, θ e b –, a Weibull apresenta uma habilidade consistente de conformar-se a uma série de dados. Além disso, na Equação (11-4) uma expressão explícita para a função cumulativa da distribuição é possível:

$$F = 1 - R = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x - x_0}{\theta - x_0}\right)^b\right] \tag{11-5}$$

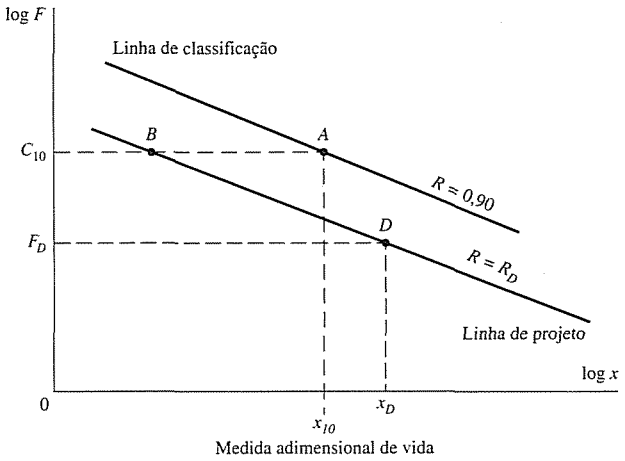


Figura 11-5 Contornos de confiabilidade constante. O ponto *A* representa a classificação de catálogo C_{10} em $x = L/L_{10} = 1$. O ponto *B* está no local geométrico de confiabilidade almejada R_D, com uma carga de C_{10}. O ponto *D* é um ponto, no contorno de confiabilidade desejada, exibindo a vida de projeto $x_D = L_D/L_{10}$ na carga de projeto F_D.

EXEMPLO 11-2

Construa as propriedades distribucionais de um mancal de esfera de sulco profundo de 02 a 30 mm, se os parâmetros de Weibull forem $x_0 = 0{,}02$, $(\theta - x_0) = 4{,}439$ e $b = 1{,}483$. Encontre as vidas média, mediana e do 10° percentil, o desvio-padrão e o coeficiente de variação.

Solução A partir da Equação (2-28), a vida média adimensional μ_x é

Resposta
$$\mu_x = x_0 + (\theta - x_0)\Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right) = 0{,}02 + 4{,}439\Gamma\left(1 + \frac{1}{1{,}483}\right) = 4{,}033$$

A vida mediana adimensional é, a partir da Equação (2-26), na qual $R = 0{,}5$,

Resposta

$$x_{0,50} = x_0 + (\theta - x_0)\left(\ln\frac{1}{R}\right)^{1/b} = 0{,}02 + 4{,}439\left(\ln\frac{1}{0{,}5}\right)^{1/1{,}483}$$
$$= 3{,}487$$

O valor do 10° percentil da vida adimensional x é

Resposta

$$x_{0,10} = 0{,}02 + 4{,}439\left(\ln\frac{1}{0{,}90}\right)^{1/1{,}483} \doteq 1 \qquad \text{(como deveria ser)}$$

O desvio-padrão da vida adimensional é fornecido pela Equação (2-29):

Resposta

$$\hat{\sigma}_x = (\theta - x_0)\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{b}\right) - \Gamma^2\left(1+\frac{1}{b}\right)\right]^{1/2}$$
$$= 4{,}439\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{1{,}483}\right) - \Gamma^2\left(1+\frac{1}{1{,}483}\right)\right]^{1/2} = 2{,}753$$

O coeficiente de variação da vida adimensional é

Resposta

$$C_x = \frac{\hat{\sigma}_x}{\mu_x} = \frac{2{,}753}{4{,}033} = 0{,}683$$

11-5 Relacionando Carga, Vida e Confiabilidade

Eis o problema do projetista. A carga desejada não é nem a carga de ensaio, nem o registro de catálogo do fabricante. A velocidade desejada é diferente da velocidade de teste do vendedor, e a expectativa de confiabilidade é muito maior que a de 0,90 que acompanha o registro de catálogo. A Figura 11-5 ilustra a situação. A informação de catálogo é traçada como o ponto A, cujas coordenadas são (os *logs* de) C_{10} e $x_{10} = L_{10}/L_{10} = 1$, um ponto no contorno de confiabilidade de 0,90. O ponto de projeto é em D, com as coordenadas (os *logs* de) F_D e x_D, um ponto que está no contorno de confiabilidade de $R = R_D$. O projetista deve mover-se do ponto D ao ponto A via ponto B, como segue. Ao longo de um contorno de confiabilidade constante (BD), aplica-se a Equação (11-2):

$$F_B x_B^{1/a} = F_D x_D^{1/a}$$

a partir do que

$$F_B = F_D\left(\frac{x_D}{x_B}\right)^{1/a} \qquad (a)$$

Ao longo de uma linha de carga constante (AB), aplica-se a Equação (11-4):

$$R_D = \exp\left[-\left(\frac{x_B - x_0}{\theta - x_0}\right)^b\right]$$

Solucionando para x_B, obtemos

$$x_B = x_0 + (\theta - x_0)\left(\ln\frac{1}{R_D}\right)^{1/b}$$

Agora, substitua isso na Equação (a), de modo a obter

$$F_B = F_D\left(\frac{x_D}{x_B}\right)^{1/a} = F_D\left[\frac{x_D}{x_0 + (\theta - x_0)(\ln 1/R_D)^{1/b}}\right]^{1/a}$$

Contudo, $F_B = C_{10}$; logo,

$$C_{10} = F_D \left[\frac{x_D}{x_0 + (\theta - x_0)(\ln 1/R_D)^{1/b}} \right]^{1/a} \tag{11-6}$$

Devido à grande utilidade da Equação (11-6), nossa atenção aos toques nas teclas e às suas seqüências em uma calculadora manual pode se desviar; como resultado, o erro mais comum é teclarmos o logaritmo errado. Porém, podemos tornar essa equação mais à prova de erros. Observe que

$$\ln \frac{1}{R_D} = \ln \frac{1}{1 - p_f} = \ln(1 + p_f + \cdots) \doteq p_f = 1 - R_D$$

em que p_f é a probabilidade para falha. A Equação (11-6) pode ser escrita como

$$C_{10} \doteq F_D \left[\frac{x_D}{x_0 + (\theta - x_0)(1 - R_D)^{1/b}} \right]^{1/a} \qquad R \geq 0{,}90 \tag{11-7}$$

As cargas são freqüentemente inconstantes; dessa forma, a carga desejada é multiplicada por um fator de aplicação a_f. A carga constante $a_f F_D$ provoca o mesmo dano que a carga variável F_D em superfícies rolantes. Esse ponto será elaborado mais adiante.

EXEMPLO 11-3

A carga de projeto em um mancal de esfera é de 413 lbf, e um fator de aplicação de 1,2 é apropriado. A velocidade do eixo deve ser de 300 rpm e a vida, de 30 kh, com uma confiabilidade de 0,99. Qual é o registro de catálogo de C_{10} a ser buscado (ou excedido) quando se procura por um mancal de sulco profundo em um catálogo de fabricante fundamentado na base de 10^6 revoluções para vida nominal? Os parâmetros de Weibull são $x_0 = 0{,}02$, $(\theta - x_0) = 4{,}439$ e $b = 1{,}483$.

Solução

$$x_D = \frac{L}{L_{10}} = \frac{60 L_D n_D}{60 L_R n_R} = \frac{60(30\,000)300}{10^6} = 540$$

A vida de projeto é 540 vezes a vida L_{10}. Para um mancal de esfera, $a = 3$. Logo, a partir da Equação (11-7),

Resposta

$$C_{10} = (1{,}2)(413) \left[\frac{540}{0{,}02 + 4{,}439(1 - 0{,}99)^{1/1{,}483}} \right]^{1/3} = 6696 \text{ lbf}$$

Aprendemos a identificar a classificação de carga básica de catálogo que corresponde a uma carga radial constante F_D, a uma vida desejada L_D e a uma velocidade n_D.

Os eixos geralmente têm dois mancais. Com freqüência, esses mancais são diferentes. Se a confiabilidade do mancal do eixo com seu par de mancais deve ser R, então R está relacionado às confiabilidades individuais de mancal R_A e R_B por

$$R = R_A R_B$$

Primeiro, observamos que, se o produto $R_A R_B$ iguala-se a R, então, em geral, R_A e R_B são ambos maiores que R. Visto que a falha de qualquer um ou de ambos os mancais resulta em paralisação do eixo, então A ou B, ou ambos, podem criar uma falha. Segundo, ao se dimensionarem mancais, pode-se começar fazendo R_A e R_B iguais à raiz quadrada da meta de confiabilidade, $\sqrt{R}$. No Exemplo 11-3, se o mancal fosse um de um par, a meta de confiabilidade seria $\sqrt{0{,}99}$, ou 0,995. Os mancais selecionados são discretos quanto às suas propriedades de confiabilidade em nosso problema; dessa forma, o procedimento de seleção "arredonda para cima" e a confiabilidade global excede à meta R. Terceiro, é possível, se $R_A > \sqrt{R}$, arredondar para baixo em B e, não obstante, ter o produto $R_A R_B$ ainda excedendo à meta R.

11-6 Carregamento Combinado Radial e Axial

Um mancal de esferas é capaz de resistir ao carregamento radial e a um carregamento axial. Ademais, estes podem ser combinados. Considere que F_a e F_r sejam a carga de empuxo axial e a carga radial, respectivamente, e que F_e seja a *carga radial equivalente* que produz o mesmo dano que as cargas radial e axial combinadas. Um fator de rotação V é definido tal que $V = 1$ quando o anel interno gira, e $V = 1{,}2$ quando o anel externo gira. Dois grupos adimensionais podem agora ser formados: F_e/VF_r e F_a/VF_r. Quando esses dois grupos adimensionais são traçados na Figura 11-6, os dados caem em uma curva suave, bem aproximada por dois segmentos de linha reta. A abscissa e é definida pela intersecção das duas linhas. As equações para as duas linhas mostradas nessa figura são

$$\frac{F_e}{VF_r} = 1 \quad \text{quando} \quad \frac{F_a}{VF_r} \leq e \tag{11-8a}$$

$$\frac{F_e}{VF_r} = X + Y\frac{F_a}{VF_r} \quad \text{quando} \quad \frac{F_a}{VF_r} > e \tag{11-8b}$$

em que, como mostrado, X é a intersecção no eixo das ordenadas e Y é a inclinação da linha para $F_a/VF_r > e$. É comum expressar as Equações (11-8a) e (11-8b) como uma única equação,

$$F_e = X_i VF_r + Y_i F_a \tag{11-9}$$

em que $i = 1$ quando $F_a/VF_r \leq e$, e $i = 2$ quando $F_a/VF_r > e$. A Tabela 11-1 lista os valores de X_1, Y_1, X_2 e Y_2 como uma função de e, que, por sua vez, é uma função de F_a/C_0, sendo C_0 a classificação de catálogo da carga estática do mancal.

Nessas equações, o fator de rotação V deve ser corrigido para as condições do anel rotante. O fator de 1,2 para a rotação do anel externo é simplesmente um reconhecimento de que a vida de fadiga é reduzida sob essas condições. Mancais auto-alinhantes são uma exceção: eles têm $V = 1$ para a rotação de qualquer anel.

Os fatores X e Y nas Equações (11-8a) e (11-8b) dependem da geometria do mancal, incluindo o número de esferas e o diâmetro destas. As recomendações da ABMA são baseadas na razão da componente axial F_a pelo *valor de carga estática básica* C_0 e um valor variável de referência e. O valor de carga estática básica C_0 é tabulado, junto com o valor de carga dinâmica básico C_{10}, em muitas das publicações de fabricantes de mancais (ver Tabela 11-2, por exemplo).

Tendo em vista que os mancais de rolos retos ou cilíndricos não admitirão carga axial alguma, ou muito pouca, o fator Y será sempre zero.

A ABMA estabeleceu dimensões padronizadas de contorno para mancais, as quais definem o orifício do mancal, o diâmetro externo, a largura e os tamanhos de filete no eixo e os encostos de compartimento. O

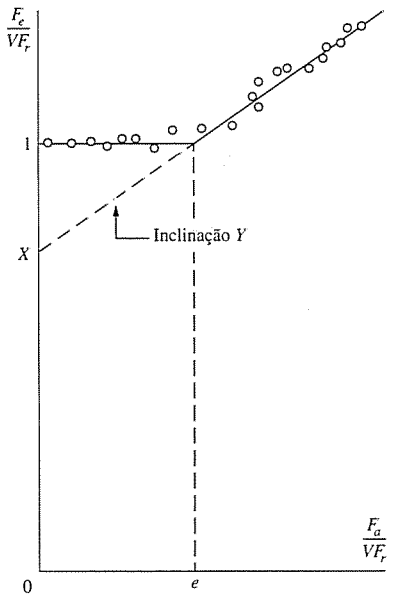


Figura 11-6 A relação do grupo adimensional $F_e / (VF_r)$ e $F_a / (VF_r)$ e os segmentos de linha reta representando os dados.

Tabela 11-1 Fatores de carga radial equivalentes para mancais de esferas

		$F_a/(VF_r) \le e$		$F_a/(VF_r) > e$	
F_a/C_0	e	X_1	Y_1	X_2	Y_2
0,014*	0,19	1,00	0	0,56	2,30
0,021	0,21	1,00	0	0,56	2,15
0,028	0,22	1,00	0	0,56	1,99
0,042	0,24	1,00	0	0,56	1,85
0,056	0,26	1,00	0	0,56	1,71
0,070	0,27	1,00	0	0,56	1,63
0,084	0,28	1,00	0	0,56	1,55
0,110	0,30	1,00	0	0,56	1,45
0,17	0,34	1,00	0	0,56	1,31
0,28	0,38	1,00	0	0,56	1,15
0,42	0,42	1,00	0	0,56	1,04
0,56	0,44	1,00	0	0,56	1,00

* Use 0,014 se $F_a / C_0 < 0{,}014$.

plano básico cobre todos os mancais de esferas e rolos retos em tamanhos métricos; ele é bastante flexível na medida em que, para um dado orifício, existem diversas larguras e diâmetros externos. Além disso, os diâmetros externos selecionados são tais que, para um diâmetro externo em particular, pode-se geralmente encontrar uma grande variedade de mancais com diferentes orifícios e larguras.

Esse plano básico da ABMA é ilustrado na Figura 11-7. Os mancais são identificados por um número de dois dígitos denominado *código de dimensão de série.* O primeiro número no código é o da série de *larguras*: 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6. O segundo número é o da *série de diâmetros* (externos): 8, 9, 0, 1, 2, 3 e 4. A Figura 11-7 mostra a variedade de mancais que podem ser obtidos com um orifício em particular. Visto que o código de dimensão de série não revela as dimensões diretamente, é necessário recorrer a tabulações. A série 02 é aqui utilizada como um exemplo do que está disponível. Veja a Tabela 11-2.

Os diâmetros de compartimento e encosto listados nas tabelas devem ser usados, sempre que possível, para assegurar apoio adequado ao mancal e para resistir às cargas axiais máximas (Figura 11-8). A Tabela 11-3 lista as dimensões e as capacidades de carga (cargas nominais) de alguns mancais de rolos retos.

Para auxiliar o projetista na seleção de mancais, a maioria dos manuais de fabricantes contém dados acerca da vida do mancal para muitas classes de maquinaria, bem como informação sobre os fatores de aplicação de carga. Tais informações são acumuladas de maneira árdua, isto é, por experiência, e o projetista principiante deve utilizá-las até que adquira experiência própria suficiente para saber quando desvios são possíveis. A Tabela 11-4 apresenta recomendações sobre a vida do mancal para algumas classes de maquinaria. Os fatores de aplicação de carga na Tabela 11-5 servem ao mesmo propósito que os fatores de segurança; utilize-os para aumentar a carga equivalente antes de selecionar um mancal.

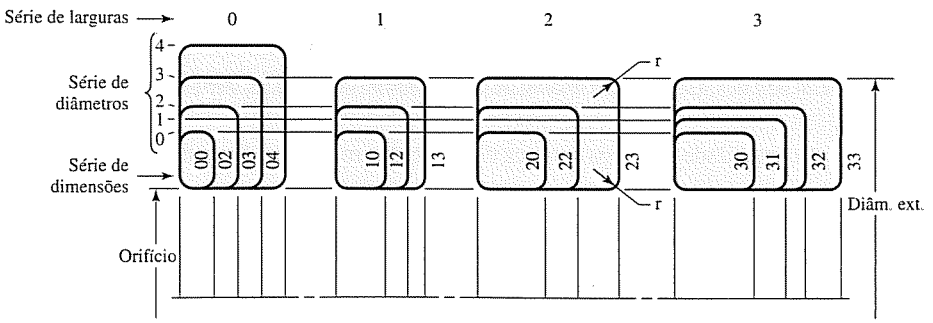


Figura 11-7 O plano básico da ABMA para dimensões de contorno. Estas se aplicam a mancais de esferas, mancais de rolos retos e mancais de rolos esféricos, mas não a mancais de esferas de série em polegadas nem a mancais de rolos cônicos. O contorno do canto não é especificado; pode ser arredondado ou chanfrado, mas deve ser pequeno o suficiente para deixar passar o raio do filete especificado nas normas.

Tabela 11-2 Dimensões e capacidades de carga para mancais de sulco profundo de série 02 de fila única e mancais de esferas de contato angular

Orifício, mm	OD*, mm	Largura, mm	Raio de filete, mm	Diâmetro de encosto, mm		Capacidades de carga, kN			
						Sulco profundo		Contato angular	
				d_S	d_H	C_{10}	C_0	C_{10}	C_0
10	30	9	0,6	12,5	27	5,07	2,24	4,94	2,12
12	32	10	0,6	14,5	28	6,89	3,10	7,02	3,05
15	35	11	0,6	17,5	31	7,80	3,55	8,06	3,65
17	40	12	0,6	19,5	34	9,56	4,50	9,95	4,75
20	47	14	1,0	25	41	12,7	6,20	13,3	6,55
25	52	15	1,0	30	47	14,0	6,95	14,8	7,65
30	62	16	1,0	35	55	19,5	10,0	20,3	11,0
35	72	17	1,0	41	65	25,5	13,7	27,0	15,0
40	80	18	1,0	46	72	30,7	16,6	31,9	18,6
45	85	19	1,0	52	77	33,2	18,6	35,8	21,2
50	90	20	1,0	56	82	35,1	19,6	37,7	22,8
55	100	21	1,5	63	90	43,6	25,0	46,2	28,5
60	110	22	1,5	70	99	47,5	28,0	55,9	35,5
65	120	23	1,5	74	109	55,9	34,0	63,7	41,5
70	125	24	1,5	79	114	61,8	37,5	68,9	45,5
75	130	25	1,5	86	119	66,3	40,5	71,5	49,0
80	140	26	2,0	93	127	70,2	45,0	80,6	55,0
85	150	28	2,0	99	136	83,2	53,0	90,4	63,0
90	160	30	2,0	104	146	95,6	62,0	106	73,5
95	170	32	2,0	110	156	108	69,5	121	85,0

*OD = diâmetro externo.

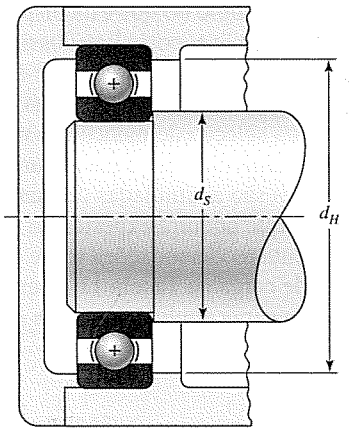


Figura 11-8 O diâmetro do eixo d_S e o diâmetro de encosto de compartimento d_H devem ser adequados para assegurar um bom suporte de mancal.

A capacidade de carga estática é fornecida em tabelas de catálogo de mancal; ela advém das equações

$$C_0 = Mn_b d_b^2 \qquad \text{(mancais de esferas)}$$

e

$$C_0 = Mn_r l_c d \qquad \text{(mancais de rolos)}$$

em que C_0 = capacidade de carga estática do mancal, lbf (kN)
n_b = número de esferas
n_r = número de rolos
d_b = diâmetro de esferas, in (mm)

Tabela 11-3 Dimensões e capacidades básicas de carga para mancais de rolos cilíndricos

Série 02					Série 03			
Orifício,	OD*,	Largura,	Capacidade de carga, kN		OD*,	Largura,	Capacidade de carga, kN	
mm	mm	mm	C_{10}	C_0	mm	mm	C_{10}	C_0
25	52	15	16,8	8,8	62	17	28,6	15,0
30	62	16	22,4	12,0	72	19	36,9	20,0
35	72	17	31,9	17,6	80	21	44,6	27,1
40	80	18	41,8	24,0	90	23	56,1	32,5
45	85	19	44,0	25,5	100	25	72,1	45,4
50	90	20	45,7	27,5	110	27	88,0	52,0
55	100	21	56,1	34,0	120	29	102	67,2
60	110	22	64,4	43,1	130	31	123	76,5
65	120	23	76,5	51,2	140	33	138	85,0
70	125	24	79,2	51,2	150	35	151	102
75	130	25	93,1	63,2	160	37	183	125
80	140	26	106	69,4	170	39	190	125
85	150	28	119	78,3	180	41	212	149
90	160	30	142	100	190	43	242	160
95	170	32	165	112	200	45	264	189
100	180	34	183	125	215	47	303	220
110	200	38	229	167	240	50	391	304
120	215	40	260	183	260	55	457	340
130	230	40	270	193	280	58	539	408
140	250	42	319	240	300	62	682	454
150	270	45	446	260	320	65	781	502

*OD = diâmetro externo.

Tabela 11-4 Recomendações acerca da vida do mancal para várias classes de maquinaria

Tipo de aplicação	Vida, kh
Instrumentos e aparelhagem de uso infreqüente	Até 0,5
Motores de aeronaves	0,5-2
Maquinarias para operações curtas, ou intermitentes, em que a interrupção de serviço é de menor importância	4-8
Maquinarias para serviço intermitente em que uma operação confiável é de grande importância	8-14
Maquinarias para serviço de 8 horas que nem sempre são totalmente utilizadas	14-20
Maquinarias para serviço de 8 horas que são totalmente utilizadas	20-30
Maquinarias para serviço de 24 horas contínuas	50-60
Maquinarias para serviço de 24 horas contínuas em que a confiabilidade é de extrema importância	100–200

Tabela 11-5 Fatores de aplicação de carga

Tipo de aplicação	Fator de carga
Engrenamento preciso	1,0-1,1
Engrenamento comercial	1,1-1,3
Aplicações com vedações de mancal pobres	1,2
Maquinaria sem impacto	1,0-1,2
Maquinaria com impacto leve	1,2-1,5
Maquinaria com impacto moderado	1,5-3,0

d = diâmetro de rolos, in (mm)
l_c = comprimento da linha de contato, in (mm)
e M assume os valores dos quais a seguinte tabela é representativa:

M	in e lbf	mm e kN
Esfera radial	$1{,}78(10)^3$	$5{,}11(10)^3$
Esfera axial	$7{,}10(10)^3$	$20{,}4(10)^3$
Rolo radial	$3{,}13(10)^3$	$8{,}99(10)^3$
Rolo axial	$14{,}2(10)^3$	$40{,}7(10)^3$

EXEMPLO 11-4

Um mancal de esferas de contato angular SKF 6210 tem uma carga axial F_a de 400 lbf e uma carga radial F_r de 500 lbf aplicadas com um anel externo estacionário. A capacidade de carga estática básica C_0 é de 4450 lbf, e a capacidade de carga básica C_{10} é de 7900 lbf. Estime a vida de L_{10} a uma velocidade de 720 rpm.

Solução $V = 1$ e $F_a/C_0 = 400/4450 = 0{,}090$. Interpole para e na Tabela 11-1:

F_a/C_0	e	
0,084	0,28	
0,090	e	a partir do que, $e = 0{,}285$
0,110	0,30	

$F_d/(VF_r) = 400/[(1)500] = 0{,}8 > 0{,}285$. Conseqüentemente, interpole para Y_2:

F_a/C_0	Y_2	
0,084	1,55	
0,090	Y_2	a partir do que $Y_2 = 1{,}527$
0,110	1,45	

A partir da Equação (11-9),

$$F_e = X_2 V F_r + Y_2 F_a = 0{,}56(1)500 + 1{,}527(400) = 890{,}8 \text{ lbf}$$

Com $L_D = L_{10}$ e $F_D = F_e$, solucionando a Equação (11-3) para L_{10}, obtemos

Resposta
$$L_{10} = \frac{60 L_R n_R}{60 n_D} \left(\frac{C_{10}}{F_e}\right)^a = \frac{10^6}{60(720)} \left(\frac{7900}{890{,}8}\right)^3 = 16\,150 \text{ h}$$

Agora sabemos como combinar carga radial e carga axial constantes em uma carga radial constante equivalente F_e que inflige o mesmo dano por revolução que a combinação axial-radial.

11-7 Carregamento Variável

As cargas de mancal são freqüentemente variáveis e ocorrem em algum padrão identificável:

- Carregamento de trechos constantes em um padrão cíclico
- Carregamento continuamente variável em um padrão cíclico repetível
- Variação aleatória

A Equação (11-1) pode ser escrita como

$$F^a L = \text{constante} = K \qquad (a)$$

Observe que F já pode ser uma carga radial constante equivalente para uma combinação de carga radial-axial. A Figura 11-9 é um gráfico de F^a como ordenada e L como abscissa para a Equação (a). Se um nível de carga de F_1 for selecionado e forçado até o critério de falha, então a área sob o traço F_1-L_1 será numericamente igual a K. O mesmo procede para um nível de carga F_2; isto é, a área sob o traço F_2-L_2 será numericamente igual a K. A teoria de dano linear aponta que, no caso do nível de carga F_1, a área de $L = 0$ até $L = L_A$ produz dano medido por $F_1^a L_A = D$.

Considere o ciclo contínuo por partes apresentado na Figura 11-10. As cargas F_{ei} são cargas radiais equivalentes constantes para cargas combinadas radial-axial. O dano provocado pelas cargas F_{e1}, F_{e2} e F_{e3} é

$$D = F_{e1}^a l_1 + F_{e2}^a l_2 + F_{e3}^a l_3 \qquad (b)$$

em que l_i é o número de revoluções até a vida L_i. A carga constante equivalente F_{eq}, quando se estende por $l_1 + l_2 + l_3$ revoluções, produz o mesmo dano D. Logo,

$$D = F_{eq}^a (l_1 + l_2 + l_3) \qquad (c)$$

Calculando as Equações (b) e (c), e solucionando para F_{eq}, obtemos

$$F_{eq} = \left[\frac{F_{e1}^a l_1 + F_{e2}^a l_2 + F_{e3}^a l_3}{l_1 + l_2 + l_3} \right]^{1/a} = \left[\sum f_i F_{ei}^a \right]^{1/a} \qquad (11\text{-}10)$$

em que f_i é a fração de revoluções realizadas sob a carga F_{ei}. Visto que l_i pode ser expresso como $n_i t_i$, em que n_i é a velocidade rotacional na carga F_{ei} e t_i é a duração dessa velocidade, então

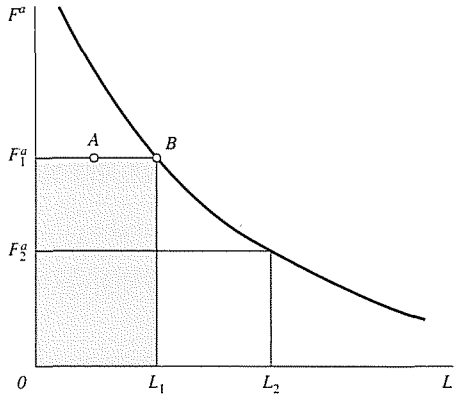


Figura 11-9 Gráfico de F^a como ordenada e de L como abscissa mostrando o local geométrico F^aL = constante. A hipótese de dano linear indica que, no caso da carga F_1, a área sob a curva, desde $L = 0$ até $L = L_A$, é uma medida do dano $D = F_1^a L_A$. O dano completo até a falha é medido por $C_{10}^a L_B$.

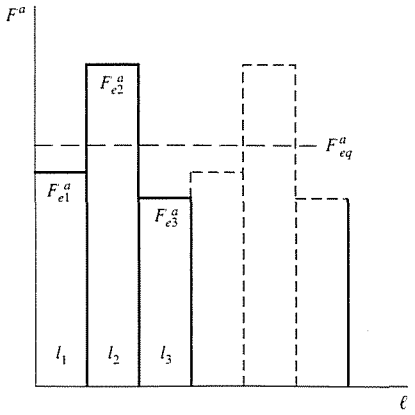


Figura 11-10 Um ciclo de carregamento periódico de três pedaços de partes contínuas envolvendo as cargas F_{e1}, F_{e2} e F_{e3}. F_{eq} é a carga constante equivalente que inflige o mesmo dano ao se estender por $l_1 + l_2 + l_3$ revoluções, produzindo o mesmo dano D por período.

$$F_{\text{eq}} = \left[\frac{\sum n_i t_i F_{ei}^a}{\sum n_i t_i}\right]^{1/a} \tag{11-11}$$

O caráter das cargas individuais pode mudar; dessa forma, um fator de aplicação (a_f) pode ser prefixado, para cada F_{ei}, como $(a_{fi}F_{ei})^a$; assim, a Equação (11-10) pode ser escrita como

$$F_{\text{eq}} = \left[\sum f_i (a_{fi} F_{ei})^a\right]^{1/a} \qquad L_{\text{eq}} = \frac{K}{F_{\text{eq}}^a} \tag{11-12}$$

EXEMPLO 11-5

Um mancal de esferas é submetido a quatro cargas constantes contínuas por partes, como mostra a tabela. As colunas (1), (2) e (5) a (8) são fornecidas.

(1) Fração de tempo	(2) Velocidade, rpm	(3) Produto, colunas (1) × (2)	(4) Fração de voltas, (3)/Σ(3)	(5) F_{ri}, lbf	(6) F_{ai}, lbf	(7) F_{ei}, lbf	(8) a_{fi}	(9) $a_{fi}F_{ei}$, lbf
0,1	2000	200	0,077	600	300	794	1,10	873
0,1	3000	300	0,115	300	300	626	1,25	795
0,3	3000	900	0,346	750	300	878	1,10	966
0,5	2400	1200	0,462	375	300	668	1,25	835
		2600	1,000					

As colunas 1 e 2 são multiplicadas para obter a coluna 3. O registro dessa última é dividido pela soma da coluna 3, 2600, de modo a fornecer a coluna 4. As colunas 5, 6 e 7 são as cargas radial, axial e equivalente, respectivamente. A coluna 8 é o fator apropriado de aplicação. A coluna 9 é o produto das colunas 7 e 8.

Solução A partir da Equação (11-10), com $a = 3$, a carga radial equivalente F_e é

Resposta $$F_e = \left[0{,}077(873)^3 + 0{,}115(795)^3 + 0{,}346(966)^3 + 0{,}462(835)^3\right]^{1/3} = 884 \text{ lbf}$$

Às vezes, após vários níveis de carregamento, a questão é a seguinte: quanto de vida restará se o próximo nível de tensão for mantido até a falha? Esta ocorre sob a hipótese de dano linear quando o dano D iguala-se à constante $K = F^a L$. Considerando a primeira forma da Equação (11-10), podemos escrever

$$F_{\text{eq}}^a L_{\text{eq}} = F_{e1}^a l_1 + F_{e2}^a l_2 + F_{e3}^a l_3$$

e observar que

$$K = F_{e1}^a L_1 = F_{e2}^a L_2 = F_{e3}^a L_3$$

e que K também se iguala a

$$K = F_{e1}^a l_1 + F_{e2}^a l_2 + F_{e3}^a l_3 = \frac{K}{L_1} l_1 + \frac{K}{L_2} l_2 + \frac{K}{L_3} l_3 = K \sum \frac{l_i}{L_i}$$

A partir das partes externas da equação precedente, obtemos

$$\sum \frac{l_i}{L_i} = 1 \tag{11-13}$$

Essa equação foi proposta por Palmgren, em 1924, e outra vez por Miner, em 1945. Veja a Equação (7-58).

O segundo tipo de variação de carga mencionado é contínuo, a variação periódica, mostrada na Figura 11-11. O dano diferencial provocado por F^a, durante a rotação pelo ângulo $d\theta$, é

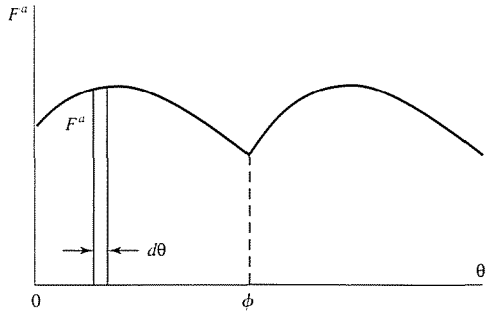


Figura 11-11 Uma variação contínua de carga de natureza cíclica cujo período é ϕ.

$$dD = F^a d\theta$$

Um exemplo disso seria um came cujos mancais rodassem com ele pelo ângulo $d\theta$. O dano total durante uma rotação completa de came é fornecido por

$$D = \int dD = \int_0^{\phi} F^a d\theta = F^a_{\text{eq}} \phi$$

a partir do que, solucionando para a carga equivalente, obtemos

$$F_{\text{eq}} = \left[\frac{1}{\phi} \int_0^{\phi} F^a d\theta \right]^{1/a} \qquad L_{\text{eq}} = \frac{K}{F^a_{\text{eq}}} \tag{11-14}$$

O valor de ϕ é freqüentemente 2π, embora outros valores ocorram. A integração numérica é seguidamente útil para levar a cabo a integração indicada, sobretudo quando a não é um inteiro e funções trigonométricas estão envolvidas. Aprendemos, agora, como encontrar a carga equivalente constante que produz o mesmo dano que uma carga cíclica variando continuamente.

EXEMPLO 11-6

A operação de uma bomba rotativa envolve uma demanda de potência $P = \bar{P} + A' \operatorname{sen} \theta$, em que $\bar{P}$ é a potência média. Os mancais sentem a mesma variação que $F = \bar{F} + A \operatorname{sen} \theta$. Desenvolva um fator de aplicação a_f para essa aplicação de mancais de esferas.

Solução

A partir da Equação (11-14), com a = 3

$$F_{\text{eq}} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F^a d\theta \right)^{1/a} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\bar{F} + A \operatorname{sen} \theta)^3 d\theta \right)^{1/3}$$

$$= \left[\frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} \bar{F}^3 d\theta + 3\bar{F}^2 A \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \theta \, d\theta + 3\bar{F} A^2 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 \theta d\theta \right. \right.$$

$$\left. \left. + A^3 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^3 \theta \, d\theta \right) \right]^{1/3}$$

$$F_{\text{eq}} = \left[\frac{1}{2\pi} (2\pi \bar{F}^3 + 0 + 3\pi \bar{F} A^2 + 0) \right]^{1/3} = \bar{F} \left[1 + \frac{3}{2} \left(\frac{A}{\bar{F}} \right)^2 \right]^{1/3}$$

Em termos de $\bar{F}$, o fator de aplicação é

$$a_f = \left[1 + \frac{3}{2} \left(\frac{A}{\bar{F}} \right)^2 \right]^{1/3}$$

Podemos apresentar o resultado em forma tabular:

$A/\bar{F}$	a_f
0	1
0,2	1,02
0,4	1,07
0,6	1,15
0,8	1,25
1,0	1,36

11-8 Seleção de Mancais de Esferas e Rolos Cilíndricos

Dispomos de informação suficiente no que diz respeito ao carregamento de mancais de esferas de contato rolante e de mancais de rolos que desenvolvem a carga radial equivalente constante que provocará tanto dano ao mancal quanto o carregamento existente. Coloquemos, então, isso em prática.

EXEMPLO 11-7

O segundo eixo em um redutor de velocidade de guindaste de fundição de 25 hp de eixos paralelos tem uma engrenagem helicoidal com um diâmetro de primitivo de 8,08 in. As engrenagens helicoidais transmitem componentes de força nas direções tangencial, radial e axial (ver Capítulo 13). As componentes da força de engrenagem transmitidas ao segundo eixo são exibidas na Figura 11-12, no ponto A. As reações de mancal em C e D, assumindo apoios simples, são também mostradas. Um mancal de esferas deve ser selecionado para a posição C, a fim de receber a força axial, e um mancal de rolos cilíndrico deve ser utilizado na posição D. A meta de vida do redutor de velocidade é de 10 kh, com um fator de confiabilidade para o conjunto de todos os quatro mancais (ambos os eixos) objetivando igualar ou exceder a 0,96 para os parâmetros de Weibull do Exemplo 11-3. O fator de aplicação deve ser de 1,2.

(a) Selecione o mancal de rolos para a posição D.

(b) Selecione o mancal de esferas (contato angular) para a posição C, assumindo que o anel interno gira.

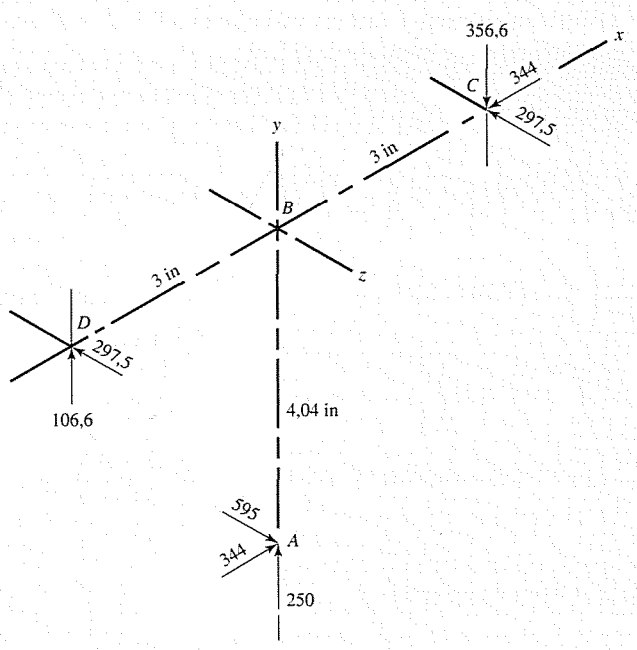


Figura 11-12 Forças em libras aplicadas ao segundo eixo redutor de velocidades de engrenagem helicoidal do Exemplo 11-7.

Solução O torque transmitido é $T = 595(4,04) = 2404$ lbf · in. A velocidade na potência nominal, fornecida pela Equação (4-40), é

$$n_D = \frac{63\,025H}{T} = \frac{63\,025(25)}{2404} = 655,4 \text{ rpm}$$

A carga radial em D é $\sqrt{106,6^2 + 297,5^2} = 316,0$ lbf, e a carga radial em C é $\sqrt{356,6^2 + 297,5^2} = 464,4$ lbf. As confiabilidades individuais de mancal, se iguais, devem ser, pelo menos, $\sqrt[4]{0,96} = 0,98985 \doteq 0,99$. A vida adimensional de projeto para ambos os mancais é

$$x_D = \frac{L}{L_{10}} = \frac{60L_D n_D}{60L_R n_R} = \frac{60(10\,000)655,4}{10^6} = 393,2$$

(a) A partir da Equação (11-7), dos parâmetros de Weibull do Exemplo 11-3, de um fator de aplicação de 1,2 e de $a = 10/3$ para o mancal de rolos em D, a capacidade de catálogo deve ser igual a ou maior que

$$C_{10} = a_f F_D \left[\frac{x_D}{x_0 + (\theta - x_0)(1 - R_D)^{1/b}}\right]^{1/a}$$

$$= 1,2(316,0)\left[\frac{393,2}{0,02 + 4,439(1 - 0,99)^{1/1,483}}\right]^{3/10} = 3591 \text{ lbf} = 16,0 \text{ kN}$$

Resposta A ausência de uma componente de empuxo torna o procedimento de seleção simples. Escolha um mancal de série 02-25 mm, ou um de rolos cilíndricos de série 03-25 mm da Tabela 11-3.

(b) O mancal de esferas em C envolve uma componente de empuxo (axial). O procedimento de seleção requer um procedimento iterativo. Assumindo $F_a/(VF_r) > e$,

1. Escolha Y_2 da Tabela 11-1.
2. Encontre C_{10}.
3. Identifique, por tentativa, um mancal apropriado da Tabela 11-2; observe C_0.
4. Usando F_a/C_0, entre na Tabela 11-1 para obter um novo valor de Y_2.
5. Encontre C_{10}.
6. Caso o mesmo mancal seja obtido, pare.
7. Do contrário, selecione o próximo mancal e vá para o passo 4.

Como uma primeira aproximação, escolha o valor intermediário da Tabela 11-1:

$$X_2 = 0,56 \qquad Y_2 = 1,63.$$

A partir da Equação (11-8*b*), com $V = 1$,

$$\frac{F_e}{VF_r} = X + \frac{Y}{V}\frac{F_a}{F_r} = 0,56 + 1,63\frac{344}{(1)464,4} = 1,77$$

$$F_e = 1,77VF_r = 1,77(1)464,4 = 822 \text{ lbf} \qquad \text{ou} \qquad 3,66 \text{ kN}$$

A partir da Equação (11-7), com $a = 3$,

$$C_{10} = 1,2(3,66)\left[\frac{393,2}{0,02 + 4,439(1 - 0,99)^{1/1,483}}\right]^{1/3} = 53,4 \text{ kN}$$

A partir da Tabela 11-2, o mancal de contato angular 02-60 mm tem $C_{10} = 55,9$ kN. C_0 é de 35,5 kN. O passo 4 torna-se, com F_a em kN,

$$\frac{F_a}{C_0} = \frac{344(4,45)10^{-3}}{35,5} = 0,0431$$

o que torna e, da Tabela 11-1, aproximadamente 0,24. Agora, $F_a/[VF_r] = 344/[(1)464,4] = 0,74$, que é maior que 0,24; assim, encontramos Y_2 por interpolação:

F_a/C_0	Y_2	
0,042	1,85	
0,043	Y_2	a partir do que $Y_2 = 1,84$
0,056	1,71	

A partir da Equação (11-8*b*),

$$\frac{F_e}{VF_r} = 0,56 + 1,84\frac{344}{464,4} = 1,92$$

$$F_e = 1,92VF_r = 1,92(1)464,4 = 892 \text{ lbf} \quad \text{ou} \quad 3,97 \text{ kN}$$

O cálculo anterior para C_{10} muda somente em F_e; logo,

$$C_{10} = \frac{3,97}{3,66}53,4 = 57,9 \text{ kN}$$

A partir da Tabela 11-2, um mancal de contato angular de 02 a 65 mm tem $C_{10} = 63,7$ kN e C_0 de 41,5 kN. Novamente,

$$\frac{F_a}{C_0} = \frac{344(4,45)10^{-3}}{41,5} = 0,0369$$

tornando e aproximadamente 0,23. A partir de então, $F_a/VF_r = 0,74$, que é maior que 0,23. Encontramos Y_2 novamente por interpolação:

F_a/C_0	Y_2	
0,028	1,99	
0,0369	Y_2	a partir do que $Y_2 = 1,90$
0,042	1,85	

A partir da Equação (11-8*b*),

$$\frac{F_e}{VF_r} = 0,56 + 1,90\frac{344}{464,4} = 1,967$$

$$F_e = 1,967VF_r = 1,967(1)464,4 = 913,5 \text{ lbf} \quad \text{ou} \quad 4,065 \text{ kN}$$

O cálculo anterior para C_{10} muda somente em F_e; logo,

$$C_{10} = \frac{4,07}{3,66}53,4 = 59,4 \text{ kN}$$

Resposta A partir da Tabela 11-2, um mancal de contato angular de 02 a 65 mm ainda está selecionado; conseqüentemente, a iteração está completa.

11-9 Seleção de Mancais de Rolos Cônicos

Os mancais de rolos cônicos apresentam certas características que os tornam complicados. Enquanto tratarmos das diferenças entre mancais de rolos cônicos e mancais de esferas e de rolos cilíndricos, observe que os fundamentos básicos são os mesmos, ainda que existam diferenças em detalhes. Ademais, o custo de mancais e combinações de copa não faz jus necessariamente à sua capacidade. Qualquer catálogo apresenta uma mistura de alta e baixa produção e projetos bem-sucedidos sob encomenda. Os supridores de mancais dispõem de programas de computador que aceitarão as descrições de seu problema, proverão informação intermediária de avaliação de projeto e listarão um número satisfatório de combinação de copa e cone, a fim de diminuir o custo. Os escritórios de venda de cada companhia fornecem acesso a serviços completos de engenharia, para ajudar os projetistas a selecionar e empregar seus mancais. Na fábrica matriz de um grande fabricante de equipamentos, poderá haver um representante residente da empresa de mancais.

Reserve alguns minutos para ir à biblioteca de projetos de seu departamento e observar o catálogo de engenharia de um supridor de mancais, como o catálogo *Bearing Selection Handbook – Revised* (1986), da The Timken Company. Há um registro de informações de engenharia e de detalhes baseado em uma experiência longa e bem-sucedida. Tudo o que podemos fazer aqui é introduzir o vocabulário, apresentar congruência quanto aos fundamentos que foram aprendidos anteriormente, oferecer exemplos e desenvolver confiança. Por fim, os problemas devem reforçar a experiência de aprendizagem.

Forma

As quatro componentes de uma montagem de mancal de rolos cônicos são

- Cone (anel interno)
- Copa (anel externo)
- Rolos cônicos
- Gaiola (retentor-espaçador)

O mancal montado consiste em duas partes separadas: (1) a montagem do cone – o cone, os rolos e a gaiola; e (2) a copa (anel externo). Os mancais podem ser feitos como fila única, fila dupla, fila quádrupla e montagem de mancal axial. Além disso, componentes auxiliares, como espaçadores, e elementos de vedação podem ser usados.

Um mancal de rolos cônicos pode carregar ambas as cargas radial e axial (empuxo), ou qualquer combinação de ambas. Contudo, mesmo quando uma carga externa de empuxo não estiver presente, a carga radial induzirá uma reação de empuxo dentro do mancal, por causa do cone. Para evitar a separação das pistas e dos roletes, esse empuxo deve sofrer resistência de uma força igual e oposta. Uma forma de gerar tal força implica sempre utilizar pelo menos dois mancais de rolos cônicos em um eixo. Dois mancais podem ser montados com as costas do cone diante de ambos, em uma configuração denominada *montagem direta,* ou com as frentes do cone também diante um do outro, no que dessa vez é denominado *montagem indireta.* A Figura 11-13 mostra a nomenclatura de um mancal de rolos cônicos e o ponto G por meio do qual as componentes radial e axial de carga atuam.

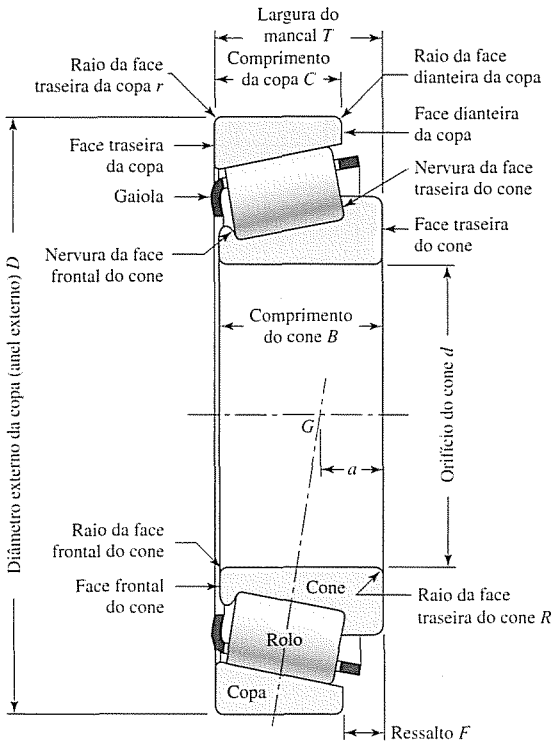


Figura 11-13 Nomenclatura de um mancal de rolo cônico. O ponto G é a posição do centro efetivo de carga; utilize-o para estimar a carga radial do mancal. *(Cortesia da The Timken Company.)*

Uma carga radial induzirá uma reação de empuxo. A *zona de carga* inclui cerca de metade dos rolos e subentende um ângulo de aproximadamente 180°. Usando o símbolo $F_{a(180)}$ para a carga de empuxo induzida de uma carga radial com uma zona de carga de 180°, a Timken provê a equação

$$F_{a(180)} = \frac{0{,}47F_r}{K} \tag{11-15}$$

em que o fator K é específico da geometria, advindo da relação

$$K = 0{,}389 \cot \alpha$$

na qual a é metade do ângulo incluído de copa. O fator K é a razão da capacidade de carga radial para a capacidade de carga axial. Ele pode ser primeiramente aproximado por 1,5, para um mancal radial, e 0,75, para um mancal de ângulo íngreme, no processo preliminar de seleção. Depois que um mancal possível for identificado, o valor exato de K para cada mancal poderá ser encontrado no *Bearing Selection Handbook – Revised* (1986), em se tratando de mancais da Timken.

Notação

A capacidade de catálogo C correspondendo à confiabilidade de 90% foi denotada C_{10} anteriormente, neste capítulo, com o subscrito 10 denotando 10% de nível de falha. A Timken denotou suas capacidades de catálogo como C_{90}, com o subscrito 90 significando "na revolução de 90 milhões". A fração de falha é de ainda 10% (confiabilidade de 90%). Isso não deve acarretar dificuldades, visto que as capacidades de catálogo da Timken para cargas radial e axial não mostram C_{90} nem $C_{a(90)}$ no cabeçalho das colunas. Veja a Figura 11-15, que reproduz duas páginas de catálogo da empresa.

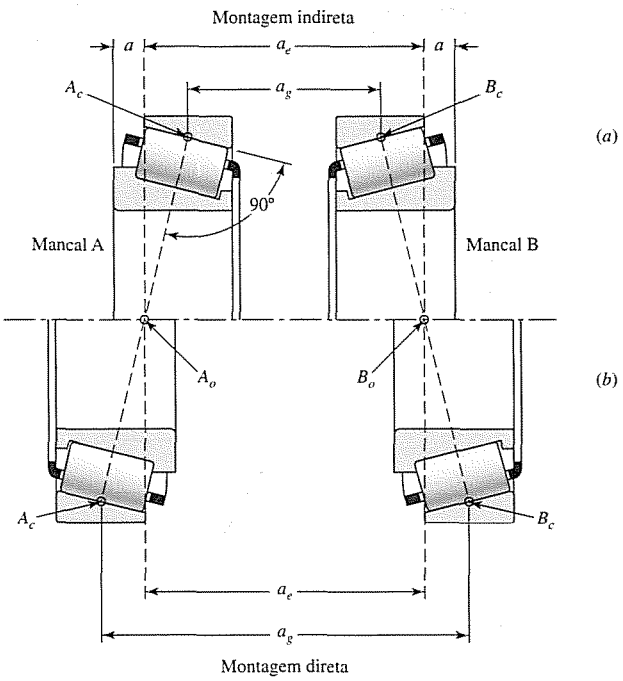


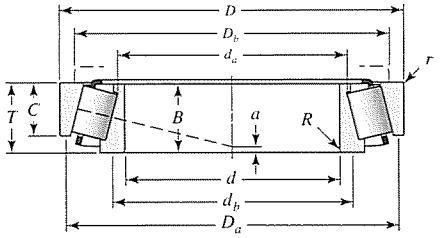
Figura 11-14 Comparação de estabilidade de montagem entre montagens indireta e direta. (*Cortesia da The Timken Company.*)

ORIFÍCIO RETO DE FILA ÚNICA

									cone		cone		copa		copa	
orifício	diâmetro externo	largura	capacidade, a 500 rpm, para 3000 horas L_{10}		fator	centro efetivo de carga	número das peças		raio máximo de filete do eixo	largura	diâmetros traseiros de encosto		raio máximo de filete do compartimento	largura	diâmetros traseiros de encosto	
			uma fila radial	axial			cone	copa								
d	D	T	N lbf	N lbf	K	a②			R①	B	d_b	d_a	r①	C	D_b	D_a
25,000	52,000	16.250	8190	5260	1,56	−3,6	◆30205	◆30205	1,0	15,000	30,5	29,0	1,0	13,000	46,0	48,5
0,9843	2,0472	0.6398	1840	1180		−0,14			0,04	0,5906	1,20	1,14	0,04	0,5118	1,81	1,91
25,000	52,000	19,250	9520	9510	1,00	−3,0	◆32205-B	◆32205-B	1,0	18,000	34,0	31,0	1,0	15,000	43,5	49,5
0,9843	2,0472	0,7579	2140	2140		−0,12			0,04	0,7087	1,34	1,22	0,04	0,5906	1,71	1,95
25,000	52,000	22.000	13200	7960	1,66	−7,6	◆33205	◆33205	1,0	22,000	34,0	30,5	1,0	18,000	44,5	49,0
0,9843	2,0472	0,8661	2980	1790		−0,30			0,04	0,8661	1,34	1,20	0,04	0,7087	1,75	1,93
25,000	62,000	18,250	13000	6680	1,95	−5,1	◆30305	◆30305	1,5	17,000	32,5	30,0	1,5	15,000	55,0	57,0
0,9843	2,4409	0,7185	2930	1500		−0,20			0,06	0,6693	1,28	1,18	0,06	0,5906	2,17	2,24
25,000	62,000	25,250	17400	8930	1,95	−9,7	◆32305	◆32305	1,5	24,000	35,0	31,5	1,5	20,000	54,0	57,0
0,9843	2,4409	0,9941	3910	2010		−0,38			0,06	0,9449	1,38	1,24	0,06	0,7874	2,13	2,24
25,159	50,005	13,495	6990	4810	1,45	−2,8	07096	07196	1,5	14,260	31,5	29,5	1,0	9,525	44,5	47,0
0,9905	1,9687	0,5313	1570	1080		−0,11			0,06	0,5614	1,24	1,16	0,04	0,3750	1,75	1,85
25,400	50,005	13,495	6990	4810	1,45	−2,8	07100	07196	1,0	14,260	30,5	29,5	1,0	9,525	44,5	47,0
1,0000	1,9687	0,5313	1570	1080		−0,11			0,04	0,5614	1,0	1,6	0,04	0,3750	1,75	1,85
25,400	50,005	13,495	6990	4810	1,45	−2,8	07100-S	07196	1,5	14,260	31,5	29,5	1,0	9,525	44,5	47,0
1,0000	1,9687	0,5313	1570	1080		−0,11			0,06	0,5614	1,24	1,16	0,04	0,3750	1,75	1,85
25,400	50,292	14,224	7210	4620	1,56	−3,3	L44642	L44610	3,5	14,732	36,0	29,5	1,3	10,668	44,5	47,0
1,0000	1,9800	0,5600	1620	1040		−0,13			0,14	0,5800	1,42	1,16	0,5	0,4200	1,5	1,85
25,400	50,292	14,224	7210	4620	1,56	−3,3	L44643	L44610	1,3	14,732	31,5	29,5	1,3	10,668	44,5	47,0
1,0000	1,9800	0,5600	1620	1040		−0,13			0,05	0,5800	1,24	1,16	0,05	0,4200	1,75	1,85
25,400	51,994	15,011	6990	4810	1,45	−2,8	07100	07204	1,0	14,260	30,5	29,5	1,3	12,700	45,0	48,0
1,0000	2,0470	0,5910	1570	1080		−0,11			0,04	0,5614	1,20	1,16	0,05	0,5000	1,77	1,89
25,400	56,896	19,368	10900	5740	1,90	−6,9	1780	1729	0,8	19,837	30,5	30,0	1,3	15,875	49,0	51,0
1,0000	2,2400	0,7625	2450	1290		−0,27			0,03	0,7810	1,20	1,18	0,05	0,6250	1,93	2,01
25,400	57,150	19,431	11700	10900	1,07	−3,0	M84548	M84510	1,5	19,431	36,0	33,0	1,5	14,732	48,5	54,0
1,0000	2,2500	0,7650	2620	2450		−0,12			0,06	0,7650	1,42	1,30	0,06	0,5800	1,91	2,13
25,400	58,738	19,050	11600	6560	1,77	−5,8	1986	1932	1,3	19,355	32,5	30,5	1,3	15,080	52,0	54,0
1,0000	2,3125	0,7500	2610	1470		−0,23			0,05	0,7620	1,28	1,20	0,05	0,5937	2,05	2,13
25,400	59,530	23,368	13900	13000	1,07	−5,1	M84249	M84210	0,8	23,114	36,0	32,5	1,5	18,288	49,5	56,0
1,0000	2,3437	0,9200	3140	2930		−0,20			0,03	0,9100	1,42	1,27	0,06	0,7200	1,95	2,20
25,400	60,325	19,842	11000	6550	1,69	−5,1	15578	15523	1,3	17,462	32,5	30,5	1,5	15,875	51,0	54,0
1,0000	2,3750	0,7812	2480	1470		−0,20			0,05	0,6875	1,28	1,20	0,06	0,6250	2,01	2,13
25,400	61,912	19,050	12100	7280	1,67	−5,8	15101	15243	0,8	20,638	32,5	31,5	2,0	14,288	54,0	58,0
1,0000	2,4375	0,7500	2730	1640		−0,23			0,03	0,8125	1,28	1,24	0,08	0,5625	2,13	2,28
25,400	62,000	19,050	12100	7280	1,67	−5,8	15100	15245	3,5	20,638	38,0	31,5	1,3	14,288	55,0	58,0
1,0000	2,4409	0,7500	2730	1640		−0,23			0,14	0,8125	1,50	1,24	0,05	0,5625	2,17	2,28
25,400	62,000	19,050	12100	7280	1,67	−5,8	15101	15245	0,8	20,638	32,5	31,5	1,3	14,288	55,0	58,0
1,0000	2,4409	0,7500	2730	1640		−0,23			0,03	0,8125	1,28	1,24	0,05	0,5625	2,17	2,28
25,400	62,000	19,050	12100	7280	1,67	−5,8	15102	15245	1,5	20,638	34,0	31,5	1,3	14,288	55,0	58,0
1,0000	2,4409	0,7500	2730	1640		−0,23			0,06	0,8125	1,34	1,24	0,05	0,5625	2,17	2,28
25,400	62,000	20,638	12100	7280	1,67	−5,8	15101	15244	0,8	20,638	32,5	31,5	1,3	15,875	55,0	58,0
1,0000	2,4409	0,8125	2730	1640		−0,23			0,03	0,8125	1,28	1,24	0,05	0,6250	2,17	2,28
25,400	63,500	20,638	12100	7280	1,67	−5,8	15101	15250	0,8	20,638	32,5	31,5	1,3	15,875	56,0	59,0
1,0000	2,5000	0,8125	2730	1640		−0,23			0,03	0,8125	1,28	1,24	0,05	0,6250	2,20	2,32
25,400	63,500	20,638	12100	7280	1,67	−5,8	15101	15250X	0,8	20,638	32,5	31,5	1,5	15,875	55,0	59,0
1,0000	2,5000	0,8125	2730	1640		−0,23			0,03	0,8125	1,28	1,24	0,06	0,6250	2,7	2,32
25,400	64,292	21,433	14500	13500	1,07	−3,3	M86643	M86610	1,5	21,433	38,0	36,5	1,5	16,670	54,0	61,0
1,0000	2,5312	0,8438	3250	3040		−0,13			0,06	0,8438	1,50	1,44	0,06	0,6563	2,13	2,40

Figura 11-15 Registro de catálogo de mancais de rolos de orifício reto de fila única da Timken. (*Cortesia da The Timken Company.*) (*continua*)

ORIFÍCIO RETO DE FILA ÚNICA



									cone				copa			
orifício	diâmetro externo	largura	capacidade, a 500 rpm, para 3000 horas L_{10}		fator	centro efetivo de carga	número das peças		raio máximo de filete do eixo	largura	diâmetros traseiros de encosto		raio máximo de filete do compartimento	largura	diâmetros traseiros de encosto	
			uma fila radial	axial			cone	copa								
d	D	T	N lbf	N lbf	K	a②			R①	B	d_b	d_a	r①	C	D_b	D_a
25,400	65,088	22,225	13100	16400	0,80	−2,3	23100	23256	1,5	21,463	39,0	34,5	1,5	15,875	53,0	63,0
1,0000	2,5625	0,8750	2950	3690		−0,09			0,06	0,8450	1,54	1,36	0,06	0,6250	2,09	2,48
25,400	66,421	23,812	18400	8000	2,30	−9,4	2687	2631	1,3	25,433	33,5	31,5	1,3	19,050	58,0	60,0
1,0000	2,6150	0,9375	4140	1800		−0,37			0,05	1,0013	1,32	1,24	0,05	0,7500	2,28	2,36
25,400	68,262	22,225	15300	10900	1,40	−5,1	02473	02420	0,8	22,225	34,5	33,5	1,5	17,462	59,0	63,0
1,0000	2,6875	0,8750	3440	2450		−0,20			0,03	0,8750	1,36	1,32	0,06	0,6875	2,32	2,48
25,400	72,233	25,400	18400	17200	1,07	−4,6	HM88630	HM88610	0,8	25,400	39,5	39,5	2,3	19,842	60,0	69,0
1,0000	2,8438	1,0000	4140	3870		−0,18			0,03	1,0000	1,56	1,56	0,09	0,7812	2,36	2,72
25,400	72,626	30,162	22700	13000	1,76	−10,2	3189	3120	0,8	29,997	35,5	35,0	3,3	23,812	61,0	67,0
1,0000	2,8593	1,1875	5110	2910		−0,40			0,03	1,1810	1,40	1,38	0,13	0,9375	2,40	2,64
26,157	62,000	19,050	12100	7280	1,67	−5,8	15103	15245	0,8	20,638	33,0	32,5	1,3	14,288	55,0	58,0
1,0298	2,4409	0,7500	2730	1640		−0,23			0,03	0,8125	1,30	1,28	0,05	0,5625	2,17	2,28
26,162	63,100	23,812	18400	8000	2,30	−9,4	2682	2630	1,5	25,433	34,5	32,0	0,8	19,050	57,0	59,0
1,0300	2,4843	0,9375	4140	1800		−0,37			0,06	1,0013	1,36	1,26	0,03	0,7500	2,24	2,32
26,162	66,421	23,812	18400	8000	2,30	−9,4	2682	2631	1,5	25,433	34,5	32,0	1,3	19,050	58,0	60,0
1,0300	2,6150	0,9375	4140	1800		−0,37			0,06	1,13	1,36	1,26	0,5	0,7500	2,28	2,36
26,975	58,738	19,050	11600	6560	1,77	−5,8	1987	1932	0,8	19,355	32,5	31,5	1,3	15,080	52,0	54,0
1,0620	2,3125	0,7500	2610	1470		−0,23			0,03	0,7620	1,28	1,24	0,05	0,5937	2,05	2,13
† 26,988	50,292	14,224	7210	4620	1,56	−3,3	L44649	L44610	3,5	14,732	37,5	31,0	1,3	10,668	44,5	47,0
† 1,0625	1,9800	0,5600	1620	1040		−0,13			0,14	0,5800	1,48	1,22	0,05	0,4200	1,75	1,85
† 26,988	60,325	19,842	11000	6550	1,69	−5,1	15580	15523	3,5	17,462	38,5	32,0	1,5	15,875	51,0	54,0
† 1,0625	2,3750	0,7812	2480	1470		−0,20			0,14	0,6875	1,52	1,26	0,06	0,6250	2,01	2,13
† 26,988	62,000	19,050	12100	7280	1,67	−5,8	15106	15245	0,8	20,638	33,5	33,0	1,3	14,288	55,0	58,0
† 1,0625	2,4409	0,7500	2730	1640		−0,23			0,03	0,8125	1,32	1,30	0,05	0,5625	2,17	2,28
† 26,988	66,421	23,812	18400	8000	2,30	−9,4	2688	2631	1,5	25,433	35,0	33,0	1,3	19,050	58,0	60,0
† 1,0625	2,6150	0,9375	4140	1800		−0,37			0,06	1,0013	1,38	1,30	0,05	0,7500	2,28	2,36
28,575	56,896	19,845	11600	6560	1,77	−5,8	1985	1930	0,8	19,355	34,0	33,5	0,8	15,875	51,0	54,0
1,1250	2,2400	0,7813	2610	1470		−0,23			0,03	0,7620	1,34	1,32	0,03	0,6250	2,01	2,11
28,575	57,150	17,462	11000	6550	1,69	−5,1	15590	15520	3,5	17,462	39,5	33,5	1,5	13,495	51,0	53,0
1,1250	2,2500	0,6875	2480	1470		−0,20			0,14	0,6875	1,56	1,32	0,06	0,5313	2,01	2,09
28,575	58,738	19,050	11600	6560	1,77	−5,8	1985	1932	0,8	19,355	34,0	33,5	1,3	15,080	52,0	54,0
1,1250	2,3125	0,7500	2610	1470		−0,23			0,03	0,7620	1,34	1,32	0,05	0,5937	2,05	2,13
28,575	58,738	19,050	11600	6560	1,77	−5,8	1988	1932	3,5	19,355	39,5	33,5	1,3	15,080	52,0	54,0
1,1250	2,3125	0,7500	2610	1470		−0,23			0,14	0,7620	1,56	1,32	0,05	0,5937	2,05	2,13
28,575	60,325	19,842	11000	6550	1,69	−5,1	15590	15523	3,5	17,462	39,5	33,5	1,5	15,875	51,0	54,0
1,1250	2,3750	0,7812	2480	1470		−0,20			0,14	0,6875	1,56	1,32	0,06	0,6250	2,01	2,13
28,575	60,325	19,845	11600	6560	1,77	−5,8	1985	1931	0,5	19,355	34,0	33,5	1,3	15,875	52,0	55,0
1,1250	2,3750	0,7813	2610	1470		−0,23			0,03	0,7620	1,34	1,32	0,05	0,6250	2,05	2,17

① Esses raios máximos de filete (arredondamento) deverão ser abertos pelos cantos de mancal.
② Valores negativos indicam que o centro está dentro da face traseira do cone.
† Para a classe padronizada. TÃO-SOMENTE, o tamanho métrico máximo é o valor de um milímetro completo.
* Para tolerâncias de peças "J", veja tolerâncias métricas, página 73, e técnica de ajuste, página 65.
◆ Combinações de cone ISO e copa são designadas com um número de peça comum e devem ser compradas como uma montagem. Para tolerâncias ISO de mancal, veja tolerâncias métricas, página 73, e técnica de ajuste, página 65.

Figura 11-15 Registro de catálogo de mancais de rolos de orifício reto de fila única da Timken. (*Cortesia da The Timken Company.*) (*continuação*)

Localização das Reações

A Figura 11-14 exibe um par de mancais de rolos cônicos montados direta (*b*) e indiretamente (*a*), com as posições de reação de mancal A_0 e B_0 mostradas para o eixo. Para o eixo como uma viga, o vão é a_e – a extensão efetiva. É através dos pontos A_0 e B_0 que as cargas radiais atuam perpendicularmente à linha de centro do eixo, ao passo que as cargas de empuxo atuam ao longo dela. A extensão geométrica a_g para a montagem direta é maior que para a montagem indireta. Com esta, os mancais ficam mais próximos, em comparação com a montagem direta; todavia, a estabilidade do sistema é a mesma (a_e é igual em ambos os casos). Portanto, as montagens direta e indireta envolvem espaço e compacidade necessária ou desejada, mas com a mesma estabilidade de sistema.

Relacionando Carga, Vida e Confiabilidade

Lembre-se da Equação (11-7) para um modelo Weibull de três parâmetros,

$$C_{10} = F_D \left[\frac{x_D}{x_0 + (\theta - x_0)(1 - R_D)^{1/b}} \right]^{1/a}$$

Solucionando para x_D, obtemos

$$x_D = x_0 + (\theta - x_0)(1 - R_D)^{1/b} \left(\frac{C_{10}}{F_D} \right)^a$$

A Timken utiliza um modelo Weibull de dois parâmetros, com $x_0 = 0$, $\theta = 4{,}48$ e $b = \frac{3}{2}$. Assim, x_D, para um mancal de rolos cônicos da Timken, com $a = \frac{10}{3}$, é

$$x_D = 4{,}48(1 - R_D)^{2/3} \left(\frac{C_{10}}{F_D} \right)^{10/3}$$

Agora, x_D é a vida desejada em múltiplos de vida nominal. A equação de vida para projeto da Timken é escrita em termos de revoluções, e, para as revoluções $L_{10} = 90(10^6)$ da empresa, podemos expressar $x_D = L_D/90(10^6)$. A partir da equação para a x_D supracitada,

$$L_D = 4{,}48(1 - R_D)^{2/3} \left(\frac{C_{10}}{F_D} \right)^{10/3} 90(10^6)$$

com L_D em revoluções.

A Timken escreve tal equação como

$$L_D = a_1 a_2 a_3 a_4 \left(\frac{C_{10}}{F_D} \right)^{10/3} 90(10^6) \qquad (11\text{-}16)$$

$4{,}48\,(1 - R_D)^{2/3}$ — material de mancal

$a_4 = 1$ (tamanho de lasca 0,01 in^2)

$a_3 = a_{3k} a_{3l} a_{3m}$

a_{3m} — alinhamento

$a_{3l} = f_T f_v$ — lubrificante

a_{3k} — zona de carga

O fator de temperatura f_T pode ser encontrado na Figura 11-16, e o fator de viscosidade f_v, por sua vez, na Figura 11-17.

Para o caso usual, $a_2 = a_{3k} = a_{3m} = 1$, e, solucionando a equação anterior para C_{10}, obtemos

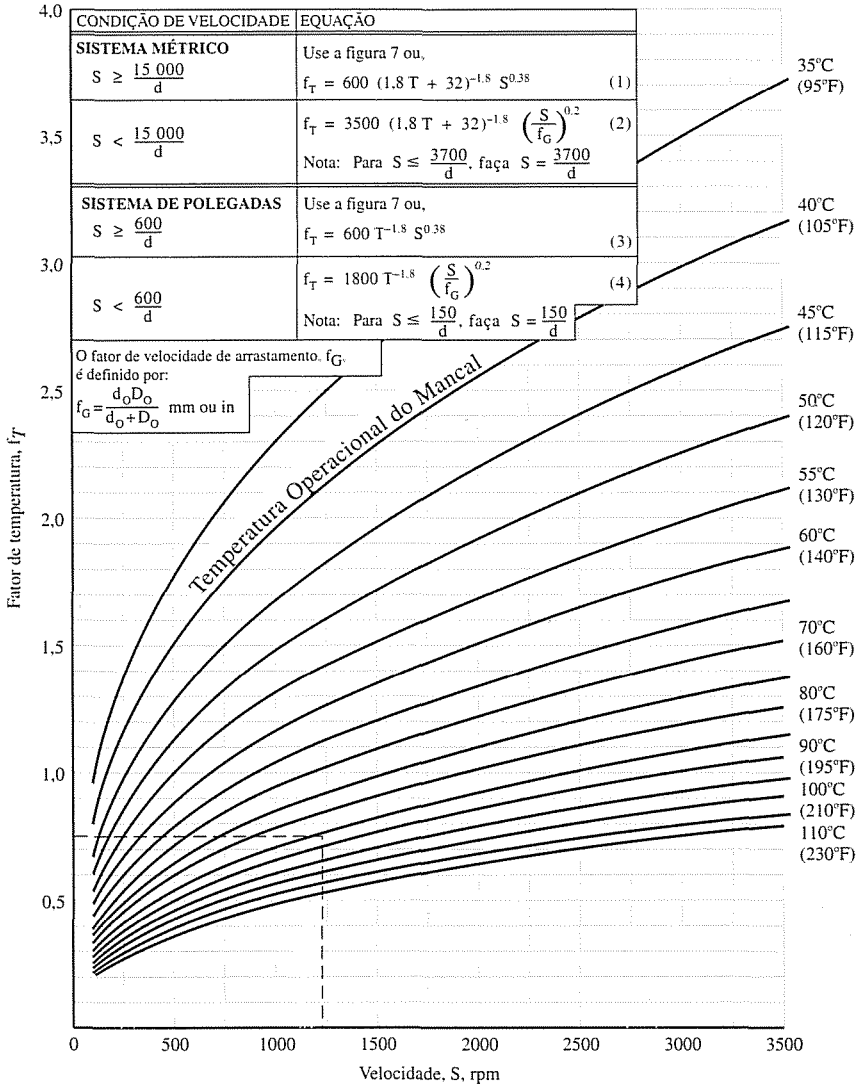


Figura 11-16 Fator de temperatura f_T como uma função da velocidade e da temperatura operacional do mancal. Para uma velocidade S menor que 15 000/d, utilize a equação mostrada no inserto quando d é o orifício de mancal em milímetros (menos que 600/d quando o orifício de mancal está em polegadas). *(Cortesia da The Timken Company.)*

$$C_{10} = a_f P \left[\frac{L_D}{4{,}48 f_T f_v (1 - R_D)^{2/3} 90(10^6)} \right]^{3/10} \qquad (L_D \text{ em revoluções}) \qquad (11\text{-}17)$$

em que F_D é substituído por $a_f P$. A carga P é a carga dinâmica equivalente da combinação F_r e F_a da Seção 11-6. Os valores particulares de X e Y são apresentados na Tabela 11-6, nas várias expressões para a carga radial equivalente P na coluna do lado direito. Ao utilizar a tabela, primeiro determine se o projeto é uma montagem direta ($m = 1$) ou uma montagem indireta ($m = -1$). A seguir, avalie as condições de empuxo e, dependendo da condição que for encontrada, aplique os conjuntos apropriados de equações de carga axial e/ou equações de carga radial dinâmica equivalente. Isso será demonstrado no exemplo que segue.

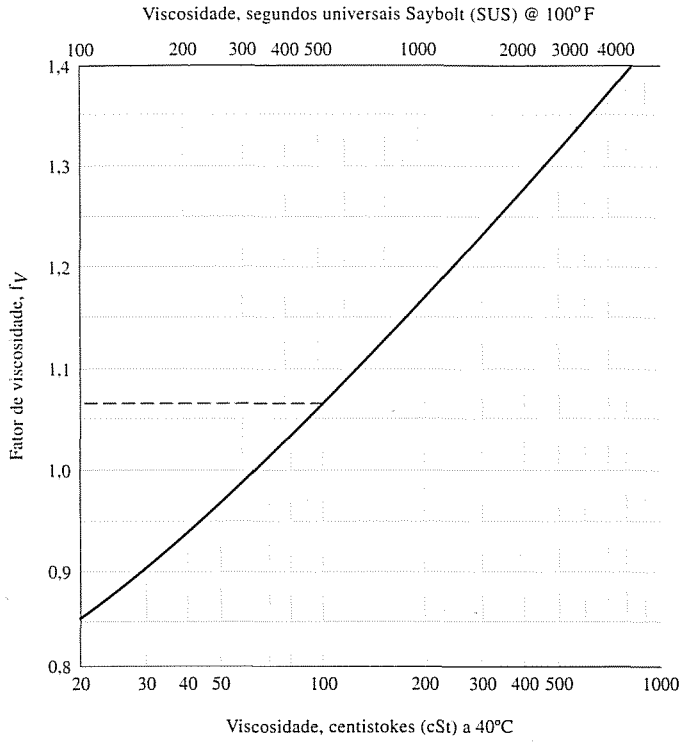


Figura 11-17 Fator de viscosidade f_v como uma função da viscosidade do óleo. (Este gráfico aplica-se a óleo de petróleo com um índice de viscosidade de aproximadamente 90.) *(Cortesia da The Timken Company.)*

Tabela 11-6 Equações de carga radial dinâmica equivalente para *P (Fonte: cortesia da The Timken Company)*

Série de mancais similares, montagem de duas filas, fixa ou flutuante (sem empuxo externo, $F_{ae} = 0$) Para a série de mancais similares, de duas filas sem empuxo externo, $F_{ae} = 0$, a carga radial dinâmica equivalente, P, é igual a F_{rAB} ou F_{rC}. Visto que F_{rAB} ou F_{rC} são a carga radial na montagem de duas filas, a capacidade de carga básica dinâmica radial das duas filas, $C_{90(2)}$, deve ser utilizada para calcular a vida do mancal.

ABORDAGEM OPCIONAL PARA A DETERMINAÇÃO DE CARGAS RADIAIS DINÂMICAS EQUIVALENTES

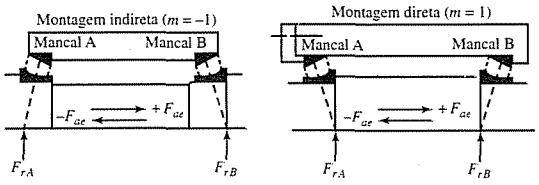
Eis, a seguir, uma abordagem geral para a determinação de cargas radiais dinâmicas equivalentes – mais adequada, portanto, para calculadoras programáveis e programação de computador. Aqui, um fator m tem de ser definido como +1, para mancais de fila única montados diretamente ou para mancais de duas filas, ou como −1, para mancais montados indiretamente. Também se faz necessária uma convenção de sinal para o empuxo externo F_{ae}, como segue:

a. No caso de um empuxo externo *aplicado ao eixo* (aplicação típica de cone – anel interno – rotativo), F_{ae}, para a direita, é positivo e, para a esquerda, negativo.

b. Quando o empuxo externo é *aplicado ao compartimento* (aplicação típica de copa – anel externo – rotativa), F_{ae}, para a direita, é negativo e, para a esquerda, positivo.

1. Montagem de fila única

Projeto



(continua...)

Tabela 11-6 Equações de carga radial dinâmica equivalente para *P (Fonte: cortesia da The Timken Company)* (continuação)

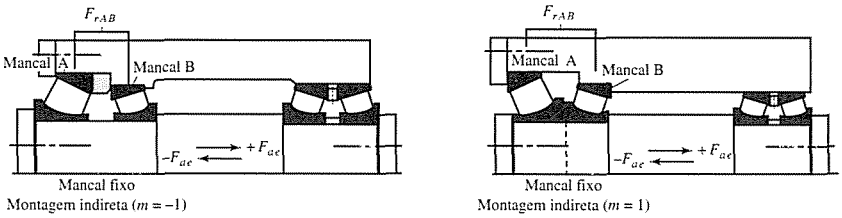
Condição de empuxo	Carga de empuxo	Carga dinâmica radial equivalente
$\frac{0{,}47F_{rA}}{K_A} \le \frac{0{,}47F_{rB}}{K_B} - mF_{ae}$	$F_{aA} = \frac{0{,}47F_{rB}}{K_B} - mF_{ae}$	$P_A = 0{,}4F_{rA} + K_A F_{aA}$
	$F_{aB} = \frac{0{,}47F_{rB}}{K_B}$	$P_B = F_{rB}$
$\frac{0{,}47F_{rA}}{K_A} > \frac{0{,}47F_{rB}}{K_B} - mF_{ae}$	$F_{aA} = \frac{0{,}47F_{rA}}{K_A}$	$P_A = F_{rA}$
	$F_{aB} = \frac{0{,}47F_{rAB}}{K_A} + mF_{ae}$	$P_B = 0{,}4F_{rB} + K_B F_{aB}$

Nota: Se $P_A < F_{rA}$, use $P_A = F_{rA}$ ou se $P_B < F_{rB}$, use $P_B = F_{rB}$.

2. Montagem de duas filas – mancal fixo com empuxo externo, F_{ae}

(Séries semelhantes e dessemelhantes)

Projeto



Condição de empuxo	Carga dinâmica radial equivalente
$F_{ae} \le \frac{0{,}6F_{rAB}}{K}$	$P_A = \frac{K_A}{K_A + K_B}(F_{rAB} - 1{,}67mK_B F_{ae})$
	$P_B = \frac{K_B}{K_A + K_B}(F_{rAB} + 1{,}67mK_A F_{ae})$
$F_{ae} > \frac{0{,}6F_{rAB}}{K}$	$P_A = 0{,}4F_{rAB} - mK_A F_{ae}$
	$P_B = 0{,}4F_{rAB} + mK_B F_{ae}$

*Se mF_{ae} for positivo, $K = K_B$; se mF_{ae} for negativo, $K = K_A$.

Nota: F_{rAB} é a carga radial em uma montagem de duas filas. A capacidade de carga básica dinâmica radial de fila única, C_{90}, deve ser aplicada ao se calcular a vida com base nas equações supracitadas.

EXEMPLO 11-8

O eixo representado na Figura 11-18(*a*) carrega uma engrenagem helicoidal com uma força tangencial de 3980 N, uma força de separação de 1770 N e uma força de empuxo de 1690 N no cilindro de passo (primitivo) com as direções mostradas. O cilindro primitivo da engrenagem tem um diâmetro de 200 mm. O eixo gira a uma velocidade de 1050 rpm, e o vão (extensão efetiva) entre os mancais de montagem direta é de 150 mm. A vida de projeto deve ser de 5000 h, e um fator de aplicação de 1 é apropriado. O lubrificante será óleo de ISO VG 68 (68 cSt a 40°C), a uma temperatura operacional estimada de 55°C. Se a confiabilidade do conjunto de mancal for de 0,99, selecione mancais apropriados de rolos cônicos de fila única da Timken.

Solução As reações no plano *xz* da Figura 11-18(*b*) são

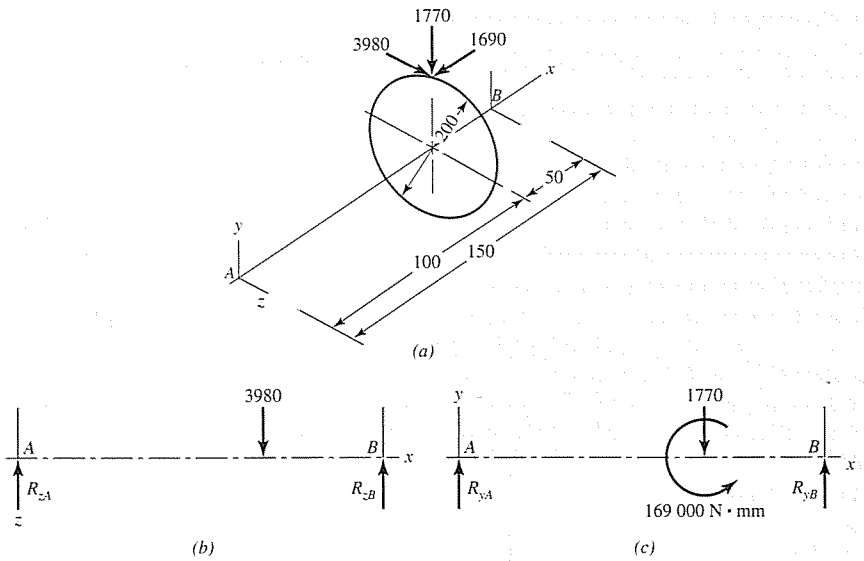


Figura 11-18 Geometria essencial de engrenagem helicoidal e eixo. Dimensões de comprimento em mm, cargas em N, momento em N · mm. (*a*) Esboço (fora de escala) mostrando forças de empuxo, tangencial e radial. (*b*) Forças no plano *xz*. (*c*) Forças no plano *xy*.

$$R_{zA} = \frac{3980(50)}{150} = 1327\,\text{N}$$

$$R_{zB} = \frac{3980(100)}{150} = 2653\,\text{N}$$

As reações no plano *xy* da Figura 11-18(*c*) são

$$R_{yA} = \frac{1770(50)}{150} + \frac{169\,000}{150} = 1716{,}7 = 1717\,\text{N}$$

$$R_{yB} = \frac{1770(100)}{150} - \frac{169\,000}{150} = 53{,}3\,\text{N}$$

As cargas radiais F_{rA} e F_{rB} são adições de vetores de R_{yA} e R_{zA} e de R_{yB} e R_{zB}, respectivamente:

$$F_{rA} = \left(R_{zA}^2 + R_{yA}^2\right)^{1/2} = (1327^2 + 1717^2)^{1/2} = 2170\,\text{N}$$

$$F_{rB} = \left(R_{zB}^2 + R_{yB}^2\right)^{1/2} = (2653^2 + 53{,}3^2)^{1/2} = 2654\,\text{N}$$

Tentativa 1: Usaremos $K_A = K_B = 1{,}5$ para iniciar. A partir da Tabela 11-6, observando que $m = +1$ para montagem direta e que F_{ae} para a direita é positivo, escrevemos

$$\frac{0{,}47F_{rA}}{K_A} <?> \frac{0{,}47F_{rB}}{K_B} - mF_{ae}$$

$$\frac{0{,}47(2170)}{1{,}5} <?> \left[\frac{0{,}47(2654)}{1{,}5} - (+1)(-1690)\right]$$

$$680 < 2522$$

Utilizamos a linha superior da Tabela 11-6 para encontrar cargas de empuxo:

$$F_{aA} = \frac{0{,}47F_{rB}}{K_B} - mF_{ae} = \frac{0{,}47(2654)}{1{,}5} - (+1)(-1690) = 2522\,\text{N}$$

$$F_{aB}\frac{0{,}47F_{rB}}{K_B} = \frac{0{,}47(2654)}{1{,}5} = 832\,\text{N}$$

As cargas dinâmicas equivalentes P_A e P_B são

$$P_A = 0{,}4F_{rA} + K_A F_{aA} = 0{,}4(2170) + 1{,}5(2522) = 4651 \text{ N}$$

$$P_B = F_{rB} = 2654 \text{ N}$$

A partir da Figura 11-16 para 1050 rpm a 55°C, $f_T = 1{,}31$. A partir da Figura 11-17, $f_v = 1{,}01$. Para uso na Equação (11-16), $a_{31} = f_T f_v = 1{,}31(1{,}01) = 1{,}32$. A capacidade de carga básica de catálogo correspondente às metas de carga-vida-confiabilidade é fornecida pela Equação (11-17). Estime R_D como $\sqrt{0{,}99} = 0{,}995$ para cada mancal. Para o mancal A, a partir da Equação (11-17), o registro de catálogo C_{10} deve igualar-se ou exceder a

$$C_{10} = (1)(4651)\left[\frac{5000(1050)60}{(4{,}48)1{,}32(1 - 0{,}995)^{2/3}90(10^6)}\right]^{3/10} = 11\,466 \text{ N}$$

A partir da Figura 11-14, selecione, por tentativa, um cone de tipo TS 15100 e uma copa 15245, que funcionará: $K_A = 1{,}67$, $C_{10} = 12\,100$ N.

Para o mancal B, a partir da Equação (11-17), o registro de catálogo C_{10} deve igualar-se ou exceder a

$$C_{10} = (1)2654\left[\frac{5000(1050)60}{(4{,}48)1{,}32(1 - 0{,}995)^{2/3}90(10^6)}\right]^{3/10} = 6543 \text{ N}$$

Por tentativa, selecione o mancal idêntico ao mancal A, que funcionará: $K_B = 1{,}67$, $C_{10} = 12\,100$ N.

Tentativa 2: Use $K_A = K_B = 1{,}67$ para a seleção provisória de mancal. O sentido da prévia desigualdade $680 < 2521$ é ainda o mesmo; dessa forma, as mesmas equações se aplicam:

$$F_{aA} = \frac{0{,}47F_{rB}}{K_B} - mF_{ae} = \frac{0{,}47(2654)}{1{,}67} - (+1)(-1690) = 2437 \text{ N}$$

$$F_{aB} = \frac{0{,}47F_{rB}}{K_B} = \frac{0{,}47(2654)}{1{,}67} = 747 \text{ N}$$

$$P_A = 0{,}4F_{rA} + K_A F_{aA} = 0{,}4(2170) + 1{,}67(2437) = 4938 \text{ N}$$

$$P_B = F_{rB} = 2654 \text{ N}$$

Para o mancal A, a partir da Equação (11-17), o registro corrigido de catálogo C_{10} deve igualar-se ou exceder a

$$C_{10} = (1)(4938)\left[\frac{5000(1050)60}{(4{,}48)1{,}32(1 - 0{,}995)^{2/3}90(10^6)}\right]^{3/10} = 12\,174 \text{ N}$$

Embora esse registro de catálogo exceda ligeiramente à seleção provisória para o mancal A, o manteremos, haja vista que a confiabilidade do mancal B excede a 0,995. Na próxima seção, mostraremos quantitativamente que a confiabilidade combinada dos mancais A e B excederá à meta de confiabilidade de 0,99.

Para o mancal B, $P_B = F_{rB} = 2654$ N. A partir da Equação (11-17),

$$C_{10} = (1)2654\left[\frac{5000(1050)60}{(4{,}48)1{,}32(1 - 0{,}995)^{2/3}90(10^6)}\right]^{3/10} = 6543 \text{ N}$$

Selecione um cone 15100 e uma copa 15245, respectivamente, para ambos os mancais A e B. Observe, a partir da Figura 11-14, que o centro efetivo de carga está localizado em $a = -5{,}8$ mm, isto é, 5,8 mm na copa, pela parte traseira. Assim, a dimensão de encosto a encosto deve ser de $150 - 2(5{,}8) = 138{,}4$ mm. Observe, também, que o cálculo para C_{10} do segundo mancal contém a mesma expressão em colchetes empregada para o primeiro. Por exemplo, na primeira tentativa, C_{10}, para o mancal A, é de 11 466 N. Para o mancal B, ele pode ser facilmente calculado por

$$(C_{10})_B = \frac{(C_{10})_A}{P_A} P_B = \frac{11\,466}{4651} 2654 = 6543 \text{ N}$$

O esforço computacional só poderá ser simplificado após isso ter sido entendido, não antes.

11-10 Avaliação do Projeto para Mancais Selecionados de Contato Rolante

Nos livros-texto, os elementos de máquina costumam ser tratados em separado. Isso pode levar o leitor a presumir que uma avaliação do projeto envolve tão-somente aquele elemento – neste caso, um mancal de contato rolante. Os elementos imediatamente adjacentes (o munhão, ou extremidade, de eixo e o orifício do compartimento) têm influência imediata no desempenho, assim como o têm outros elementos, posteriormente removidos (engrenagens produzindo carga de mancal). Da maneira como alguns dizem, "se você puxar algo no ambiente, descobrirá que ele está unido ao restante", o que deve ser intuitivamente óbvio a todos aqueles envolvidos com maquinaria. Como, então, podemos verificar os atributos de eixo que não estão mencionados em um enunciado de problema? Possivelmente, porque os mancais não foram projetados ainda (em detalhes minuciosos). Tudo isso aponta a natureza necessariamente iterativa de projetar, digamos, um redutor de velocidade. Se potência, velocidade e redução são estipuladas, então conjuntos de engrenagens podem ser esboçados; suas dimensões, geometria e localização, estimadas; forças de eixo e momentos, identificados; mancais, selecionados mediante tentativas; vedação, identificada. O volume começa a se fazer evidente, o compartimento e o esquema de lubrificação, bem como as considerações de refrigeração, tornam-se mais claros, as saliências de eixo e a acomodação de junções aparecem. É hora de iterar, agora dirigindo-se a cada elemento novamente, sabendo muito mais acerca de todos os outros elementos. Quando você tiver completado as iterações necessárias, saberá do que necessita para avaliar o projeto para os mancais. Nesse meio-tempo, avalie quantos projetos puder, evitando más seleções, mesmo que provisoriamente. Tenha sempre em mente que você terá de fazer tudo isso para declarar que seu projeto concluído é satisfatório.

Um esboço de uma avaliação de projeto para um mancal de contato rolante inclui, no mínimo:

- Confiabilidade existente para a carga imposta e para a vida esperada.
- Encosto em eixo e compartimento satisfatório.
- Acabamento de munhão, diâmetro e tolerância compatível.
- Acabamento de compartimento, diâmetro e tolerância compatível.
- Tipo de lubrificante consoante com as recomendações do fabricante; passo de lubrificante e volume suprido para manter temperatura operacional satisfatória.
- Pré-cargas, se requeridas, são supridas.

Haja vista estarmos focando mancais de contato rolante, podemos tratar a confiabilidade existente como quantitativa, bem como o encosto. Um outro tratamento quantitativo terá de esperar até que os materiais para eixo e compartimento, qualidade de superfície e diâmetros e tolerâncias sejam conhecidos.

Confiabilidade do Mancal

A Equação (11-6) pode ser solucionada para a confiabilidade R_D em termos de C_{10}, a capacidade básica de carga do mancal selecionado:

$$R = \exp\left(-\left\{\frac{x_D\left(\frac{a_f F_D}{C_{10}}\right)^a - x_0}{\theta - x_0}\right\}^b\right) \tag{11-18}$$

A Equação (11-7) pode igualmente ser solucionada para R_D:

$$R \doteq 1 - \left\{\frac{x_D\left(\frac{a_f F_D}{C_{10}}\right)^a - x_0}{\theta - x_0}\right\}^b \qquad R \geq 0{,}90 \tag{11-19}$$

EXEMPLO 11-9

No Exemplo 11-3, a capacidade de carga mínima requerida para a confiabilidade de 99%, em $x_D = L/L_{10} = 540$, é $C_{10} = 6671$ lbf = 29,7 kN. A partir da Tabela 11-2, um mancal de esferas de sulco profundo de 02 a 40 mm satisfaria aos requisitos. Se o orifício na aplicação tivesse de ter 70 mm ou mais (selecionando um mancal de sulco profundo de 02 a 70 mm), qual seria a confiabilidade resultante?

Solução A partir da Tabela 11-2, para um mancal de esfera de sulco profundo de 02 a 70 mm, $C_{10} = 61{,}8$ kN = 13 888 lbf. Utilizando a Equação (11-19), recordando o Exemplo 11-3, em que $a_f = 1{,}2$, $F_D = 413$ lbf, $x_0 = 0{,}02$, $(\theta - x_o) = 4{,}439$ e $b = 1{,}489$, podemos escrever

$$R \doteq 1 - \left\{ \frac{\left[540\left[\frac{1{,}2(413)}{13\ 888}\right]^3 - 0{,}02\right]}{4{,}439} \right\}^{1{,}489} = 0{,}999\ 965$$

que, como esperado, é muito maior que o 0,99 do Exemplo 11-3.

Em mancais de rolos cônicos, ou em outros mancais, para uma distribuição de Weibull de dois parâmetros, a Equação (11-18) torna-se, para $x_0 = 0$, $\theta = 4{,}48$, $b = \frac{3}{2}$,

$$R = \exp\left\{ -\left[\frac{x_D}{\theta(C_{10}/[a_f F_D])^a}\right]^b \right\}$$

$$= \exp\left\{ -\left[\frac{x_D}{4{,}48 f_T f_v (C_{10}/[a_f F_D])^{10/3}}\right]^{3/2} \right\} \tag{11-20}$$

ao passo que a Equação (11-19) torna-se

$$R \doteq 1 - \left\{\frac{x_D}{\theta[C_{10}/(a_f F_D)]^a}\right\}^b = 1 - \left\{\frac{x_D}{4{,}48 f_T f_v [C_{10}/(a_f F_D)]^{10/3}}\right\}^{3/2} \tag{11-21}$$

EXEMPLO 11-10

No Exemplo 11-8, os mancais A e B (cone 15100 e copa 15245) têm $C_{10} = 12\ 100$ N. Qual a confiabilidade do par de mancais A e B?

Solução A vida desejada x_D era de $5000(1050)60/[90(10^6)] = 3{,}5$ vidas nominais. Utilizando a Equação (11-21) para o mancal A, onde, a partir do Exemplo 11-8, $F_D = P_A = 4938$ N, $f_T f_v = 1{,}32$ e $a_f = 1$, obtemos

$$R_A \doteq 1 - \left\{\frac{3{,}5}{4{,}48(1{,}32)\,[12\ 100/(1 \times 4938)]^{10/3}}\right\}^{3/2} = 0{,}994\ 846$$

que é menos que 0,995, como esperado. Utilizando a Equação (11-21) para o mancal B com $F_D = P_B = 2654$ N, obtemos

$$R_B \doteq 1 - \left\{\frac{3{,}5}{4{,}48(1{,}32)\,[12\ 100/(1 \times 2654)]^{10/3}}\right\}^{3/2} = 0{,}999\ 769$$

Resposta A confiabilidade do par de mancais é

$$R = R_A R_B = 0{,}994\ 846(0{,}999\ 769) = 0{,}994\ 616$$

que é maior que a meta global de confiabilidade de 0,99. Quando dois mancais são feitos idênticos – para simplicidade, para reduzir o número de sobressalentes, ou para outra estipulação –, e o carregamento não é o mesmo, ambos podem ser feitos menores e ainda alcançar uma meta de confiabilidade. Se o carregamento é diferente, então o mancal carregado mais pesadamente pode ser escolhido para uma meta de confiabilidade apenas ligeiramente maior que a meta global.

Um exemplo adicional é útil para mostrar o que acontece nos casos de carregamento de puro empuxo.

EXEMPLO 11-11

Considere um compartimento restringido, como o mostrado na Figura 11-19, com dois mancais de rolos cônicos montados diretamente, resistindo a um empuxo externo F_{ae} de 8000 N. A velocidade de eixo é de 950 rpm; a vida desejada, de 10 000 h; o diâmetro suposto do eixo, de aproximadamente 1 in. O lubrificante é o óleo ISO VG 150 (150 cSt a 40°C), com uma temperatura operacional estimada de mancal de 80°C. A meta de confiabilidade é de 0,95. O fator de aplicação é, apropriadamente, $a_f = 1$.

(*a*) Escolha um mancal de rolos cônicos apropriado para *A*.

(*b*) Escolha um mancal de rolos cônicos apropriado para *B*.

(*c*) Encontre as confiabilidades R_A, R_B e R.

Solução (*a*) As reações de mancal em *A* são

$$F_{rA} = F_{rB} = 0$$

$$F_{aA} = F_{ae} = 8000 \text{ N}$$

Visto que o mancal *B* está descarregado, começaremos com $R = R_A = 0{,}95$. A partir da Tabela 11-6,

$$\frac{0{,}47F_{rA}}{K_A} <?> \frac{0{,}47F_{rB}}{K_B} - mF_{ae}$$

Observando que F_{ae}, para a direita, é positivo (Tabela 11-6), com montagem direta $m = +1$, podemos escrever

$$\frac{0(0)}{K_A} <?> \left[\frac{0{,}47(0)}{K_B} - (+1)(-8000)\right]$$

$$0 < 8000 \text{ N}$$

Aplica-se o conjunto de equações de topo na Tabela 11-6; logo,

$$F_{aA} = \frac{0{,}47(0)}{K_B} - (+1)(-8000) = 8000 \text{ N}$$

$$F_{aB} = \frac{0{,}47(0)}{K_B} = 0$$

Se considerarmos $K_A = 1$, poderemos encontrar C_{10} na coluna de empuxo e evitar a iteração:

$$P_A = 0{,}4F_{rA} + K_A F_{aA} = 0{,}4(0) + (1)8000 = 8000 \text{ N}$$

$$P_B = F_{rB} = 0$$

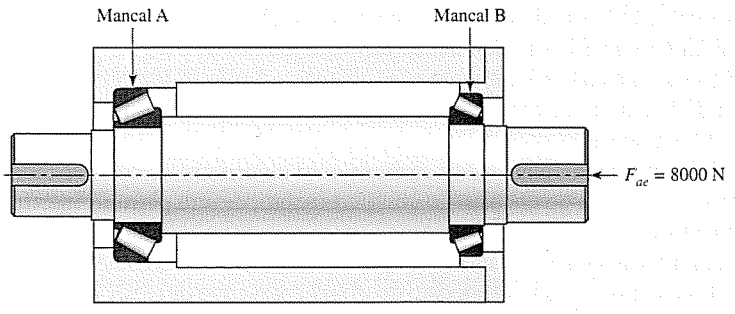


Figura 11-19 O compartimento restringido do Exemplo 11-11.

A vida requerida é

$$L_D = 10\,000(950)60 = 570(10^6) \text{ rev}$$

Sob as condições dadas, $f_T = 0{,}76$, a partir da Figura 11-16, e $f_v = 1{,}12$, a partir da Figura 11-17. Obtemos, então, $f_T f_v = 0{,}76(1{,}12) = 0{,}85$. Assim, a partir da Equação (11-17), para o mancal A

$$C_{10} = a_f P \left[\frac{L_D}{4{,}48 f_T f_v (1 - R_D)^{2/3} 90(10^6)} \right]^{3/10}$$

$$= (1)8000 \left[\frac{570(10^6)}{4{,}48(0{,}85)(1 - 0{,}95)^{2/3}\, 90(10^6)} \right]^{3/10} = 16\,970 \text{ N}$$

Resposta A Figura 11-14 apresenta uma possibilidade em um tamanho de orifício de 1 in (25,4 mm): cone, HM88630, copa HM88610 com $(C_{10})_a = 17\,200$ N.

Resposta (*b*) O mancal B não experimenta carga, e o mancal mais barato para esse tamanho de orifício funcionará, incluindo um mancal de esferas ou rolos.

(*c*) Para a Equação (11-21), $x_D = L_D/L_{10} = 570(10^6)/90(10^6) = 6{,}333$. Conseqüentemente, a confiabilidade real do mancal A, a partir da Equação (11-21), é

Resposta

$$R \doteq 1 - \left\{ \frac{x_D}{4{,}48 f_T f_v [C_{10}/(a_f F_D)]^{10/3}} \right\}^{3/2}$$

$$\doteq 1 - \left\{ \frac{6{,}333}{4{,}48(0{,}85)\,[17\,200/(1 \times 8000)]^{10/3}} \right\}^{3/2} = 0{,}953$$

que é maior que 0,95, como se poderia esperar. Para o mancal B,

$$F_D = P_B = 0$$

Resposta

$$R_B \doteq 1 - \left[\frac{6{,}333}{0{,}85(4{,}48)(17\,200/0)^{10/3}} \right]^{3/2} = 1 - 0 = 1$$

como se poderia esperar. A confiabilidade combinada dos mancais A e B como um par é

Resposta

$$R = R_A R_B = 0{,}953(1) = 0{,}953$$

que é maior que a meta de confiabilidade de 0,95, como se poderia esperar.

Questões de Ajuste

A Tabela 11-2 (e a Figura 11-8), que mostra a capacidade dos mancais de esferas de contato angular e sulco profundo, série 02, de fila única, inclui diâmetros de encosto recomendados para o assento do eixo do anel interno e diâmetro de encosto do anel externo, denotados d_S e d_H, respectivamente. O encosto de eixo pode ser maior que d_S, mas não o suficiente para obstruir o ânulo. É importante manter a concentricidade e a perpendicularidade à linha de centro do eixo; para tal propósito, o diâmetro do encosto deve igualar-se ou exceder a d_S. O diâmetro do encosto do compartimento d_H deve ser igual ou menor que d_H, para manter a concentricidade e a perpendicularidade à linha de eixo do orifício do compartimento. Nem as características do encosto do eixo, nem as do encosto do compartimento, devem permitir interferência no livre movimento do lubrificante através do ânulo do mancal.

Em um mancal de rolos cônicos (Figura 11-14), o diâmetro do encosto do compartimento da copa deve ser igual ou menor que D_b. O encosto do eixo para o cone deve ser igual ou maior que d_b. Ademais, o fluxo livre de lubrificante não deve ser impedido obstruindo-se qualquer dos ânulos. Em lubrificação de borrifo, comum em redutores de velocidade, o lubrificante é lançado para a cobertura do compartimento (teto) e é dirigido, em sua drenagem por nervuras, a um mancal. Na montagem direta, um mancal de rolos cônicos

bombeia óleo de fora para dentro. Um caminho de passagem de óleo para o lado de fora do mancal necessita ser fornecido. O óleo retorna ao reservatório como conseqüência da ação de bombeamento do mancal. Com uma montagem indireta, o óleo é dirigido para o ânulo interno, com o mancal bombeando-o para o lado externo. Uma passagem de óleo do lado externo para o reservatório tem de ser provida.

11-11 Lubrificação

As superfícies de contato em mancais de rolamento apresentam um movimento relativo que é igualmente rolante e deslizante; dessa forma, é difícil entender exatamente o que acontece. Se a velocidade relativa das superfícies deslizantes é alta o suficiente, então a ação lubrificante é hidrodinâmica (ver Capítulo 12). A *lubrificação elastoidrodinâmica* (EHD) é o fenômeno que ocorre quando um lubrificante é introduzido entre superfícies que estão em contato rolante puro. O contato de dentes de engrenagem e aquele encontrado em mancais de rolamento e em superfícies de came e seguidor são exemplos típicos. Quando um lubrificante acha-se preso entre duas superfícies em contato rolante, um grande aumento na pressão dentro do filme de lubrificante ocorre. Todavia, a viscosidade é relacionada exponencialmente à pressão, e, assim, um aumento muito grande na viscosidade ocorre no lubrificante que está preso entre as superfícies. Leibensperger[1] observa que a mudança na viscosidade dentro e fora da pressão de contato equivale à diferença entre asfalto frio e óleo leve de máquina de costura.

Os propósitos de um lubrificante antifricção de mancal podem ser resumidos da seguinte maneira:

1. Prover um filme de lubrificante entre as superfícies deslizantes e rolantes.
2. Ajudar a distribuir e dissipar calor.
3. Prevenir a corrosão de superfícies de mancal.
4. Proteger as peças da entrada de material estranho.

Tanto óleo quanto graxa podem ser empregados como lubrificante. As seguintes regras podem ajudar a decidir entre eles.

Use graxa quando	Use óleo quando
1. A temperatura não estiver acima de 200°F.	1. As velocidades forem altas.
2. A velocidade for baixa.	2. As temperaturas estiverem elevadas.
3. Proteção incomum for requerida, devido à entrada de material estranho.	3. Vedações herméticas forem empregadas prontamente.
4. Recintos simples de mancal forem desejados.	4. O tipo de mancal não for apropriado para lubrificação de graxa.
5. Operação por longos períodos sem atenção for desejada.	5. O mancal for lubrificado a partir de um supridor central também usado para outras peças da máquina.

11-12 Montagem e Recinto

Existem tantos métodos de montagem de mancais antifricção que cada novo projeto representa um verdadeiro desafio ao projetista. O orifício do compartimento e do diâmetro externo do eixo deve ser mantido a limites muito próximos, o que obviamente custa caro. Há, normalmente, uma ou mais operações de escareação, várias operações de faceamento e furação, operações de rosqueamento interno e rosqueamento, devendo todas ser realizadas no eixo, no compartimento ou na placa de cobertura. Cada uma dessas operações contribui para o custo de produção, de modo que o projetista, deslindando uma montagem de baixo custo e livre de problemas, é confrontado com um empecilho importante e difícil. Os diversos manuais de fabricantes de mancais fornecem muitos detalhes de montagem em quase todas as áreas de projeto. Em um texto dessa natureza, contudo, é possível prover somente os detalhes mais simples.

O problema de montagem encontrado com mais freqüência é aquele que requer um mancal em cada extremidade de um eixo. Um projeto de tal natureza deve utilizar um mancal de esferas e um de rolos cônicos em cada extremidade, ou um mancal de esferas em uma extremidade e um de rolos retos na outra. Um dos mancais, em geral, tem uma função adicional de posicionar ou de situar axialmente o eixo. A Figura 11-

[1] R. L. Leibensperger, "When Selecting a Bearing". *Machine Design*, vol. 47, nº 8, 3 de abril de 1975, p. 142-147.

20 mostra uma solução muito comum para esse problema. Os anéis internos são recostados contra os encostos do eixo e mantidos em posição por porcas redondas presas a este. O anel externo do mancal esquerdo é recostado contra um encosto do compartimento e é mantido em posição por um dispositivo que não é mostrado. O anel externo do mancal direito flutua no compartimento.

Existem muitas variações possíveis no método exibido na Figura 11-20. Por exemplo, a função do encosto do eixo pode ser realizada por anéis de retenção, por um cubo de uma engrenagem ou polia, ou por tubos de espaçamento ou anéis. As porcas redondas podem ser trocadas por anéis de retenção ou arruelas travadas em posição por parafusos, pinos ou pinos cônicos. O encosto do compartimento pode ser trocado por um anel de retenção; o anel externo do mancal pode ser entalhado para um anel de retenção, ou um anel externo abado pode ser utilizado. A força contra o anel externo do mancal esquerdo é normalmente aplicada pelas placas de cobertura, mas, se nenhum empuxo estiver presente, o anel poderá ser mantido no lugar por anéis de retenção.

A Figura 11-21 apresenta um método alternativo de montagem, no qual as pistas internas são recostadas contra os encostos do eixo, tal como antes, mas sem que nenhum dispositivo de retenção seja requerido. Com esse método, as pistas externas ficam completamente retidas. Isso elimina os sulcos ou as roscas, que causam concentração de tensão na extremidade em balanço, mas requer dimensões acuradas em uma direção axial ou o emprego de meios de ajuste. Tal método tem a desvantagem de que, se a distância entre os mancais for muito grande, a elevação de temperatura durante a operação poderá expandir o eixo o suficiente para destruí-los.

É freqüentemente necessário utilizar dois ou mais mancais em uma extremidade de um eixo. Por exemplo, dois mancais poderiam ser usados para obter rigidez adicional ou capacidade de carga aumentada, ou para pôr um eixo em balanço. Várias montagens de dois mancais são mostradas na Figura 11-22. Estas podem ser utilizadas com mancais de rolos cônicos, como mostrado, ou com mancais de esferas. De qualquer forma, deve ser observado que o efeito da montagem é pré-carregar os mancais em uma direção axial.

A Figura 11-23 ilustra uma outra montagem de dois mancais. Observe o uso de arruelas contra as costas do cone.

Quando a rigidez máxima e a resistência a desalinhamento de eixo forem desejadas, pares de mancais de esferas de contato angular (Figura 11-2) serão freqüentemente utilizados em um arranjo denominado *duplicação*. Os mancais manufaturados para montagem dupla (em pares) têm seus anéis retificados com uma compen-

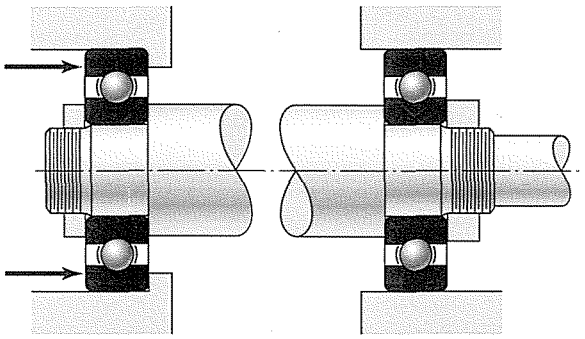


Figura 11-20 Uma montagem comum de mancal.

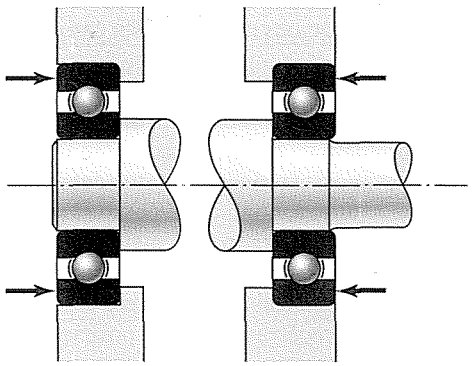


Figura 11-21 Uma montagem de mancal alternativa àquela mostrada na Figura 11-20.

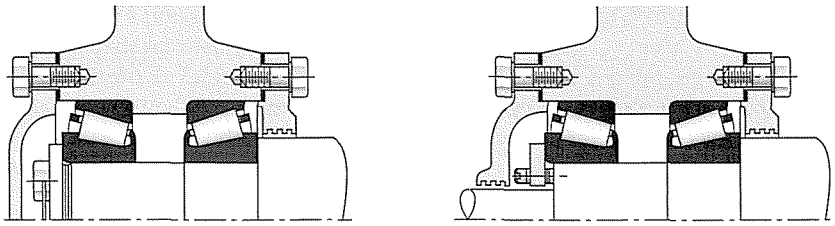


Figura 11-22 Montagem de dois mancais. *(Cortesia da The Timken Company.)*

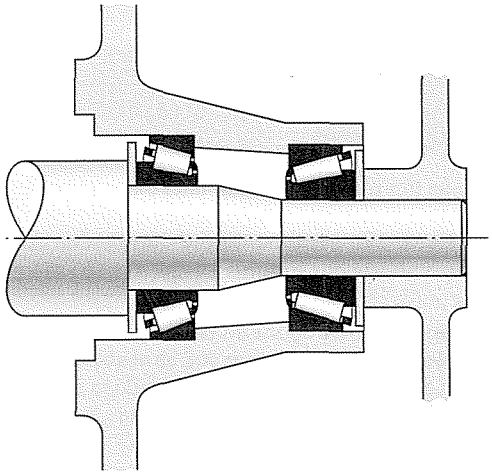


Figura 11-23 Montagem para um rotor de máquina de lavar. *(Cortesia da The Timken Company.)*

sação, de modo que, quando um par de mancais é preso firmemente junto, uma pré-carga é automaticamente estabelecida. Como mostrado na Figura 11-24, três arranjos de montagem são utilizados. A montagem face a face, denominada DF, aceitará cargas radiais pesadas e cargas axiais de qualquer direção. A montagem DB (costado com costado) tem a maior rigidez de alinhamento e é também boa para cargas radiais pesadas e cargas axiais de qualquer direção. O arranjo enfileirado, denominado montagem DT, é utilizado onde o empuxo ocorre sempre no mesmo sentido; na medida em que os dois mancais têm suas funções de empuxo no mesmo sentido, uma pré-carga, se requerida, deverá ser obtida de alguma outra maneira.

Os mancais são geralmente montados com um ajuste de pressão do anel rotante, seja este interno ou externo. O anel estacionário é então montado com um ajuste de empuxo. Isso lhe permite deslizar levemente em seu encaixe, trazendo novas partes do anel à zona de carga do mancal, a fim de igualar o desgaste.

Pré-Carregamento

O objetivo do pré-carregamento consiste em remover a folga interna normalmente encontrada em mancais, de modo a aumentar a vida de fadiga e diminuir a inclinação do eixo no mancal. A Figura 11-25 mostra um mancal típico, no qual a folga é exagerada por motivos de clareza.

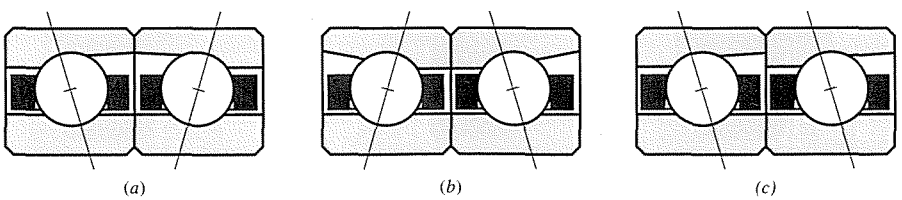


Figura 11-24 Arranjos de mancais de esferas de contato angular. (a) Montagem DF; (b) Montagem DB; (c) Montagem DT. *(Cortesia da The Timken Company.)*

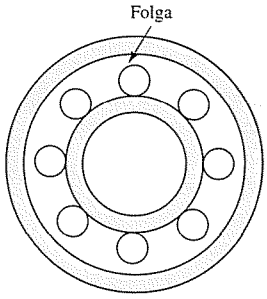


Figura 11-25 Folga em um mancal saído da prateleira, exagerada por motivos de clareza.

O pré-carregamento de mancais de rolos retos pode ser obtido da seguinte forma:

1. Montando-se o mancal em um eixo cônico, ou em uma manga, para expandir o anel interno.
2. Utilizando-se um ajuste de interferência para o anel externo.
3. Comprando-se um mancal com um anel externo pré-encolhido sobre os rolos.

Os mancais de esferas são geralmente pré-carregados com uma carga axial estabelecida durante a montagem. Contudo, os mancais das Figuras 11-24(*a*) e (*b*) são pré-carregados na montagem, devido às diferenças de largura dos anéis interno e externo.

É recomendável seguir as instruções do fabricante na determinação da pré-carga, pois o excesso levará a uma fadiga prematura.

Alinhamento

Com base na experiência geral com mancais rolantes, como expresso nos catálogos de fabricantes, o desalinhamento permissível em mancais de rolos cônicos e cilíndricos está limitado a 0,001 rad. Para mancais de esferas, o desalinhamento não deve exceder a 0,0087 rad. Entretanto, para mancais de esferas de sulco profundo, o intervalo admissível de desalinhamento é de 0,0035 a 0,0047 rad. A vida do mancal decresce significativamente quando o desalinhamento excede aos limites admissíveis.

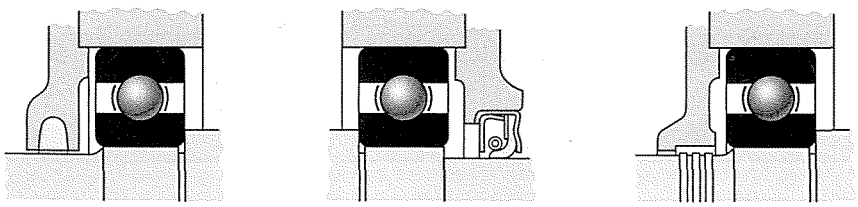
Proteção adicional contra desalinhamento é obtida provendo-se o encosto completo (ver Figura 11-8) recomendado pelo fabricante. Ademais, se de qualquer maneira houver algum desalinhamento, é de bom costume fornecer um fator de segurança próximo de 2, para levar em conta possíveis aumentos durante a montagem.

Recintos

Para excluir sujeira e matéria estranha e conservar o lubrificante, as montagens de mancal devem incluir uma vedação. Os três principais métodos desta são a vedação de feltro, a vedação comercial e a vedação de labirinto (Figura 11-26).

A *vedação de feltro* pode ser utilizada com lubrificação de graxa quando as velocidades são baixas. As superfícies de roçamento devem ter um alto polimento. Esse tipo de vedação deve ser protegido de sujeira mediante sua colocação em sulcos usinados ou sua utilização em estampagens de metal como blindagens.

A *vedação comercial* é uma montagem constituída do elemento roçador e, geralmente, de um suporte de mola, os quais são retidos em um envoltório de chapa metálica. Essas vedações costumam ser feitas por



(*a*) Vedação de feltro (*b*) Vedação comercial (*c*) Vedação de labirinto

Figura 11-26 Métodos típicos de vedação. *(General Motors Corp. Reproduzida com permissão, GM Media Archives.)*

meio de ajuste à pressão em um orifício escareação, na tampa do mancal. Visto que elas são obtidas por roçamento, não devem ser usadas para velocidades elevadas.

A *vedação de labirinto* é especialmente efetiva para instalações de alta velocidade e pode ser utilizada igualmente com óleo ou graxa. Às vezes, ela é usada com arremessadores. Pelo menos três ranhuras devem ser feitas, seja no orifício ou no diâmetro externo. A folga pode variar de 0,010 a 0,040 in, dependendo da velocidade e da temperatura.

PROBLEMAS

Uma vez que cada fabricante de mancal toma decisões individuais com respeito a materiais, tratamentos e processos de manufatura, as experiências de fabricantes com distribuição de vida de mancal diferem umas das outras. Ao resolver os seguintes problemas, faremos uso da experiência de dois fabricantes, tabeladas como segue:

		Parâmetros de Weibull Vidas nominais		
Fabricante	Vida nominal, revoluções	x_0	θ	b
1	$90(10^6)$	0	4,48	1,5
2	$1(10^6)$	0,02	4,459	1,483

As Tabelas 11-2 e 11-3 são baseadas no fabricante 2.

PROJETO **11-1** Uma certa aplicação requer um mancal de esferas com anel interno rotante, com uma vida de projeto de 30 000 h, a uma velocidade de 300 rpm. A carga radial é de 1,898 kN, e um fator de aplicação de 1,2 é apropriado. A meta de confiabilidade é de 0,90. Encontre o múltiplo da vida nominal requerido, x_D, e a capacidade de catálogo C_{10} para se entrar em uma tabela de mancal. Escolha um mancal de esferas de sulco profundo de série 02 da Tabela 11-2 e estime a confiabilidade em uso.

PROJETO **11-2** Um mancal de esferas de série 02 de contato angular, anel interno rotante, é requerido para uma aplicação em que o requerimento de vida é de 50 000 h, a 480 rpm. A carga radial de projeto é de 610 lbf. O fator de aplicação é de 1,4. A meta de confiabilidade é de 0,90. Encontre o múltiplo da vida nominal x_D requerido e a capacidade de catálogo C_{10} com a qual se entra na Tabela 11-2. Escolha um mancal e estime a confiabilidade existente em serviço.

PROJETO **11-3** O outro mancal no eixo do Problema 11-2 deve ser de rolos cilíndricos de série 03, com anel interno rotante. Para uma carga radial de 1650 lbf, encontre a capacidade de catálogo C_{10} com a qual se entra na Tabela 11-3. A meta de confiabilidade é de 0,90. Escolha um mancal e estime sua confiabilidade em uso.

ANÁLISE **11-4** Os Problemas 11-2 e 11-3 levantaram a questão referente à confiabilidade do par de mancais no eixo. Uma vez que as confiabilidades combinadas R são R_1R_2, qual a confiabilidade dos dois mancais (probabilidade de que qualquer um deles ou ambos não falharão), como um resultado de suas decisões nos Problemas 11-2 e 11-3? O que isso significa ao se definirem as metas de confiabilidade de cada um dos mancais do par no eixo?

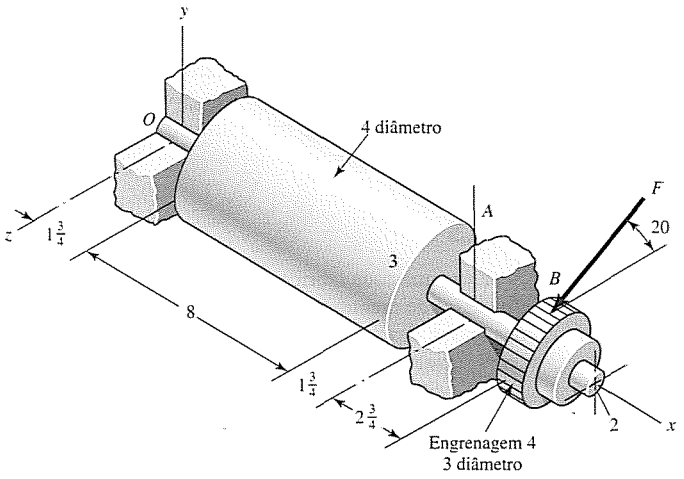
PROJETO **11-5** Combine os Problemas 11-2 e 11-3 para uma confiabilidade global de $R = 0{,}90$. Reconsidere suas seleções e satisfaça a essa meta de confiabilidade global.

ANÁLISE **11-6** Um mancal de esferas de série 02 deve ser selecionado para carregar uma carga radial de 8 kN e uma carga de empuxo de 4 kN. A vida desejada L_D deve ser de 5000 h, com uma taxa de rotação do anel interno de 900 rpm. Qual é a capacidade básica de carga que deve ser usada na seleção de um mancal para uma meta de confiabilidade de 0,90?

ANÁLISE **11-7** O mancal do Problema 11-6 deve ser dimensionado para apresentar uma confiabilidade de 0,96. Que capacidade básica de carga deve ser utilizada ao se selecionar o mancal?

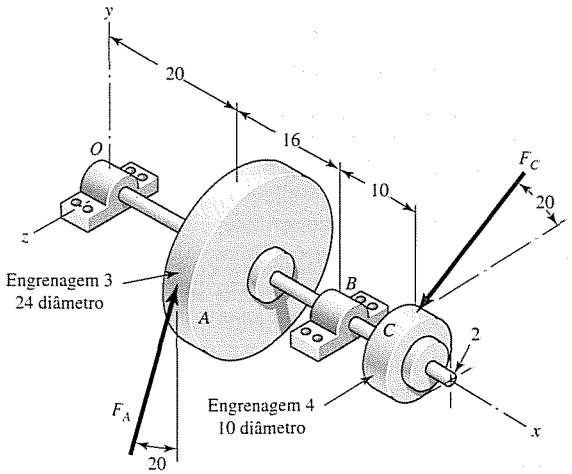
ANÁLISE **11-8** Um mancal de rolos retos (cilíndricos) está sujeito a uma carga radial de 12 kN. A vida deve ser de 4000 h, a uma velocidade de 750 rpm, e exibir uma confiabilidade de 0,90. Qual a capacidade básica de carga que deve ser utilizada ao se selecionar o mancal de um catálogo do fabricante 2?

PROJETO **11-9** Na figura é mostrado um rolo de pressão comandado por engrenagem, o qual se encaixa a um rolo intermediário, abaixo. O rolo é projetado para exercer uma força normal de 30 lbf/in do seu comprimento e um puxão de 24 lbf/in no material sendo processado. A velocidade do rolo é de 300 rpm, e uma vida de projeto de 30 000 h é desejada. Use um fator de aplicação de 1,2 e selecione um par de mancais de esferas de série 02 de contato angular para ser montado em 0 e A. Utilize mancais de mesmo tamanho em ambas as posições e uma confiabilidade combinada de pelo menos 0,92.



Problema 11-9
O rolo intermediário está abaixo do rolo motor. Dimensões em polegadas.

PROJETO **11-10** A figura mostrada é um eixo intermediário de engrenagem com um pinhão em balanço em *C*. Selecione um mancal de esferas de contato angular da Tabela 11-2, para montagem em *O*, e um mancal de rolos retos para montagem em *B*. A força na engrenagem *A* é $F_A = 600$ lbf, e o eixo deve girar a uma velocidade de 480 rpm. A solução do problema de estática provê a força de mancais contra o eixo em *O* como $\mathbf{R}_O = -387\mathbf{j} + 467\mathbf{k}$ lbf e em *B* como $\mathbf{R}_B = 316\mathbf{j} - 1615\mathbf{k}$ lbf. Especifique os mancais requeridos, empregando um fator de aplicação de 1,4, uma vida desejada de 50 000 h e uma meta de confiabilidade combinada de 0,90.



Problema 11-10
Dimensões em polegadas.

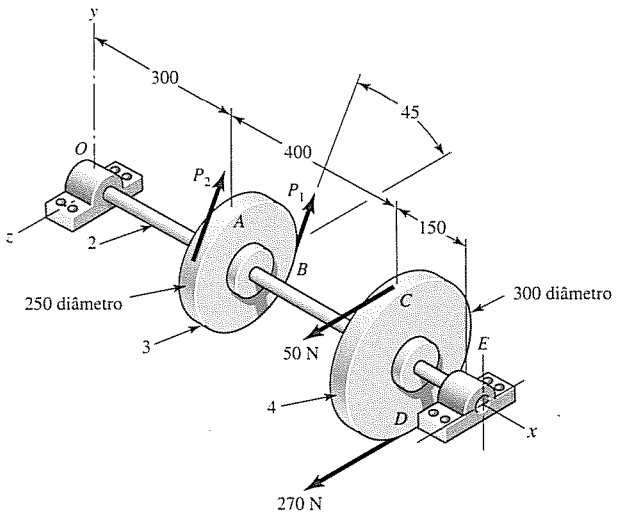
PROJETO **11-11** A figura é um desenho esquemático de um eixo intermediário que suporta duas polias em V. Esse eixo gira a 1200 rpm, e os mancais devem ter uma vida de 60 kh, a uma confiabilidade combinada de 0,999. A tração no lado folgado da polia *A* é 15% da tração no lado apertado. Selecione mancais de sulco profundo da Tabela 10-2 para uso em *O* e *E*, cada qual para ter um orifício de 25 mm, utilizando um fator de aplicação unitário.

ANÁLISE **11-12** O ponto de operação do lubrificante de mancal (513 SUS a 100°F) é 135°F. Um eixo intermediário é suportado por dois mancais de rolos cônicos usando uma montagem intermediária. As cargas do mancal radial são de 560 lbf para o mancal do lado esquerdo e de 1095 para o mancal do lado direito. O eixo roda a 400 rpm e deve ter uma vida desejada de 40 kh. Utilize um fator de aplicação de 1,4 e uma meta de confiabilidade combinada de 0,90. Usando um $K = 1,5$ inicial, encontre a capacidade radial requerida para cada mancal. Selecione os mancais da Figura 11-14.

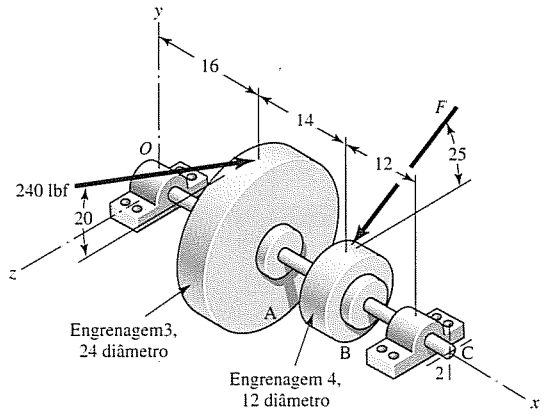
ANÁLISE **11-13** Uma unidade de redução de engrenagem utiliza o eixo intermediário representado na figura. Encontre as reações dos dois mancais, que devem ser de esferas de contato angular, tendo uma vida desejada de 40 kh quando empregados a 200 rpm. Use 1,2 para o fator de aplicação e uma meta de confiabilidade para o par de mancais de 0,95. Selecione os mancais a partir da Tabela 11-2

PROJETO **11-14** O eixo de rosca sem-fim mostrado na parte *a* da figura transmite 1,35 hp a 600 rpm. Uma análise de força estática forneceu os resultados mostrados na parte *b*. O mancal *A* deve ser de esferas de contato angular

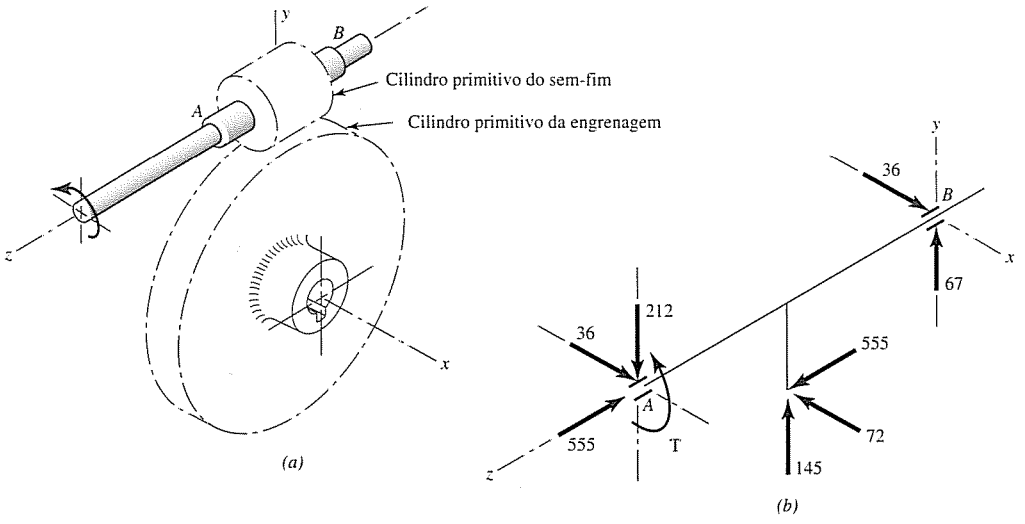
(a) fim



Problema 11-11
Dimensões em milímetros.



Problema 11-13
Dimensões em polegadas.

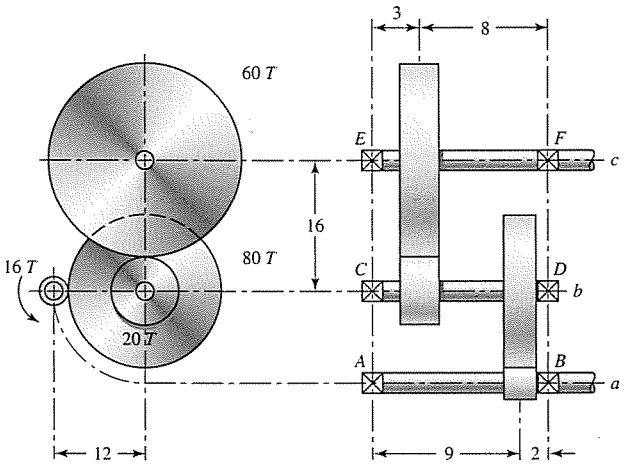


Problema 11-14
(a) Sem-fim e engrenagem sem-fim; (b) análise de força do eixo de rosca sem-fim, forças em libras.

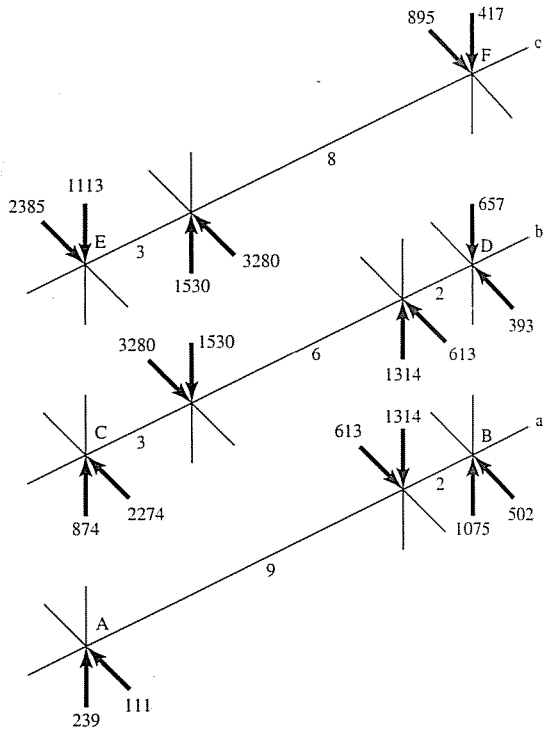
montado para agüentar 555 lbf de carga axial. O mancal em *B*, por sua vez, serve para agüentar somente a carga radial; assim, um mancal de rolos retos será empregado. Utilize um fator de aplicação de 1,3, uma vida desejada de 25 kh e uma meta de confiabilidade, combinada, de 0,99. Especifique cada mancal.

ANÁLISE **11-15** Em mancais testados a 2000 rpm, com uma carga radial constante de 18 kN, um conjunto de mancais mostrou uma vida L_{10} de 115 h e uma vida L_{80} de 600 h. A capacidade básica de carga desse mancal é de 39,6 kN. Estime o fator de forma de Weibull b e a vida característica θ para um modelo de dois parâmetros. Esse fabricante classifica mancais de esferas a um milhão de revoluções.

PROJETO **11-16** Um pinhão de 16 dentes move um trem de engrenagens de dentes retos de redução dupla na figura. Todas as engrenagens têm ângulos de pressão de 25°. O pinhão roda a 1200 rpm, em sentido anti-horário, e transmite potência para o trem de engrenagens. O eixo não foi projetado ainda, mas os diagramas de corpos livres foram gerados. As velocidades de eixo são de 1200 rpm, 240 rpm e 80 rpm. Um estudo do mancal está principiando com uma vida de 10 kh e uma confiabilidade de montagem da caixa de engrenagens de 0,99. Um fator de aplicação de 1,2 é apropriado. Especifique os seis mancais.



(*a*) Vista desenvolvida



(*b*) Vista desenvolvida

Problema 11-16

(a) Detalhe da transmissão; (*b*) análise de forças no eixo. Forças em libras; dimensões lineares em polegadas.

ANÁLISE **11-17** Diferentes tratamentos metalúrgicos de mancal afetam a vida dos mancais. Um fabricante relata que determinado tratamento térmico aumenta a vida do mancal em pelo menos três vezes. Um mancal idêntico àquele do Problema 11-15, exceto pelo tratamento térmico, carregado a 18 kN e rodando a 2000 rpm, revelou uma vida de L_{10} de 360 h e uma vida de L_{80} de 2000 h. Você concorda com a afirmação do fabricante concernente à vida aumentada?

ANÁLISE **11-18** Estime a vida restante, em revoluções, de um mancal de esferas de contato angular de 02 a 30 mm, já sujeito a 200 000 revoluções, com uma carga radial de 18 kN, se ele for agora submetido a uma mudança na carga de 30 kN.

ANÁLISE **11-19** Os mesmos mancais de esferas de contato angular de 02 a 30 mm, como no Problema 11-18, devem ser sujeitados a um ciclo de carregamento de dois estágios de 4 min, com um carregamento de 18 kN, e a um de 6 min, com um carregamento de 30 kN. Esse ciclo deve ser repetido até a falha. Estime a vida total em revoluções, horas e ciclos de carregamento.

ANÁLISE **11-20** A expressão $F^a L = constante$ pode ser escrita utilizando-se $x = L / L_{10}$ e expressa como $F^a x = K$ ou $F = (1/a)\log K - (1/a)\log X$. Essa é uma linha reta em um gráfico *log-log* e é a base da Figura 11-5. Pela percepção geométrica fornecida, produza a figura em escala, utilizando o Exemplo 11-3, e

Para o ponto D: encontre $F_D = 102(413) = 495{,}6$ lbf, $\log F_D$, x_D, $\log x_D$, K_D
Para o ponto B: encontre x_B, $\log x_B$, F_B, $\log F_B$, K_B
Para o ponto A: encontre $F_A = F_B = C_{10}$, $\log F_A$, K_{10}

e trace o gráfico em escala. Neste gráfico, mostre também a linha contendo C_{10}, a capacidade básica de carga, do mancal *selecionado*.

CAPÍTULO

12 Lubrificação e Mancais de Munhão

12-1 Tipos de Lubrificação 578
12-2 Viscosidade 579
12-3 Equação de Petroff 580
12-4 Lubrificação Estável 582
12-5 Lubrificação de Filme Espesso 583
12-6 Teoria Hidrodinâmica 583
12-7 Considerações de Projeto 588
12-8 As Relações das Variáveis 589
12-9 Condições de Estado Permanente em Mancais Autocontidos 602
12-10 Folga 605
12-11 Mancais de Alimentação por Pressão 606
12-12 Cargas e Materiais 612
12-13 Tipos de Mancal 614
12-14 Mancais de Empuxo 615
12-15 Mancais de Contorno Lubrificado 616

O objetivo da lubrificação consiste em reduzir a fricção, o desgaste e o aquecimento das peças de máquina que se movem relativamente umas às outras. Um lubrificante é qualquer substância que, quando inserida entre superfícies móveis, alcança tais propósitos. Em um mancal de manga (ou deslizamento), um eixo, ou *munhão*, roda ou oscila dentro de uma manga, ou *bucha*, e o movimento relativo é o deslizamento. Em um mancal antifricção, o movimento relativo principal é o rolamento. Um seguidor pode rolar ou deslizar em um came. Os dentes de engrenagem unem-se entre si por uma combinação de rolamento e deslizamento, e os pistões deslizam dentro de seus cilindros. Todas essas aplicações requerem lubrificação para reduzir a fricção, o desgaste e o aquecimento.

O campo de aplicação dos mancais de munhão é imenso. O eixo de manivela e os mancais dos eixos de conexão de um motor de automóvel devem operar por centenas de quilômetros, a temperaturas elevadas e sob condições de carga variantes. Aos mancais de deslizamento usados em turbinas de vapor de estações de geração de potência são atribuídas confiabilidades aproximadas de 100%. No outro extremo, existem centenas de aplicações nas quais as cargas são leves e o serviço, relativamente sem importância; um mancal simples, facilmente instalável, é requerido usando pouca ou nenhuma lubrificação. Em tais casos, um mancal antifricção deve constituir uma má resposta devido a fatores como custo, recintos elaborados, tolerâncias restritas, espaço radial requerido, velocidades elevadas ou efeitos inerciais aumentados. Em vez disso, um mancal de náilon não requerendo lubrificação, um mancal de metalurgia do pó com lubrificação "intrínseca", ou ainda um mancal de bronze com oleação de anel, alimentação de pavio ou filme lubrificante sólido ou lubrificação de graxa, podem ser uma solução muito satisfatória. Desenvolvimentos recentes de metalurgia em materiais de mancal, combinados com o conhecimento ampliado do processo de lubrificação, tornam possível, hoje, projetar mancais de munhão com vidas satisfatórias e muito boas confiabilidades.

Muito do material que estudamos até aqui baseia-se em estudos fundamentais de engenharia, tais como estática, dinâmica, mecânica de sólidos, processamento de metais, matemática e metalurgia. Na abordagem referente à lubrificação e aos mancais de deslizamento, estudos fundamentais adicionais, tais como química, mecânica de fluidos, termodinâmica e transferência de calor, devem ser utilizados para desenvolver o material. Embora possamos não utilizar todos eles no conteúdo a ser incluído aqui, você pode, por ora, melhor verificar como o estudo de projeto de engenharia mecânica realmente se constitui em uma integração da maioria de seus estudos prévios e em um direcionamento desse conhecimento total à resolução de um único objetivo.

12-1 Tipos de Lubrificação

Cinco formas distintas de lubrificação podem ser identificadas, a saber:

1. Hidrodinâmica
2. Hidrostática
3. Elastoidrodinâmica
4. Contorno
5. Filme sólido

Lubrificação hidrodinâmica significa que as superfícies de carregamento de carga do mancal encontram-se separadas por um filme relativamente espesso de lubrificante, a fim de prevenir o contato metal-metal, e que a estabilidade assim obtida possa ser explicada pelas leis da mecânica de fluidos. Tal lubrificação não depende da introdução do lubrificante sob pressão, embora isso possa ocorrer, mas requer, sim, a existência de um suprimento adequado constantemente. A pressão de filme é criada pela superfície móvel puxando o lubrificante para a zona em forma de cunha, a uma velocidade suficientemente alta para criar a pressão necessária para separar as superfícies contra a carga no mancal. A lubrificação hidrodinâmica é também denominada *lubrificação de filme completo*, ou *fluida*.

A *lubrificação hidrostática* é obtida pela introdução do lubrificante – às vezes ar ou água – na área de suporte de carga, a uma pressão alta o suficiente para separar as superfícies com um filme relativamente espesso de lubrificante. Assim, ao contrário da lubrificação hidrodinâmica, esse tipo de lubrificação não requer o movimento de uma superfície em relação a outra. Não abordaremos a lubrificação hidrostática neste livro, mas tal assunto deve ser considerado ao se projetarem mancais em que as velocidades são pequenas ou zero e a resistência friccional deve ser um mínimo absoluto.

A *lubrificação elastoidrodinâmica* é o fenômeno que ocorre quando um lubrificante é introduzido entre superfícies que estão em contato rolante, tais como engrenagens acopladoras ou mancais de rolamento. A explicação matemática requer a teoria hertziana de tensão de contato e mecânica de fluido.

Fatores como área insuficiente de superfície, uma queda na velocidade da superfície móvel, uma diminuição na quantidade de lubrificante enviado a um mancal, um aumento na carga do mancal, ou na temperatu-

ra do lubrificante, resultando em uma diminuição da viscosidade – qualquer um destes –, podem prevenir a construção de um filme espesso o suficiente para a lubrificação de filme completo. Quando isso ocorre, as asperezas mais elevadas podem estar separadas por filmes de lubrificante de somente algumas dimensões moleculares em espessura. Isso é denominado *lubrificação de contorno.* A mudança da lubrificação hidrodinâmica para a de contorno não é, em absoluto, uma mudança repentina ou abrupta. É provável que uma lubrificação tipo mista, entre hidrodinâmica e de contorno, ocorra primeiro e que, à medida que as superfícies se moverem mais próximas, a lubrificação tipo de contorno torne-se predominante. A viscosidade do lubrificante não é tão importante, no que se refere à lubrificação de contorno, quanto o é a composição química.

Quando os mancais têm de ser operados a temperaturas extremas, um *lubrificante de filme sólido*, como o grafite ou o dissulfeto de molibdênio, deve ser utilizado, pois os óleos minerais ordinários não são satisfatórios. Muita pesquisa vem sendo realizada atualmente, num esforço, também, para encontrar materiais compostos para mancais com baixas taxas de desgaste, bem como pequenos coeficientes friccionais.

12-2 Viscosidade

Na Figura 12-1, considere uma placa A movendo-se com uma velocidade U, em um filme de lubrificante de espessura h. Imaginemos esse filme como composto de uma série de camadas horizontais e a força F fazendo com que essas camadas se deformem ou deslizem umas sobre as outras, tal como um baralho de cartas. As camadas em contato com a placa móvel devem ter uma velocidade U; aquelas em contato com a superfície estacionária, por sua vez, devem ter uma velocidade zero. As camadas intermediárias apresentam velocidades que dependem de suas distâncias y em relação à superfície estacionária. O efeito de viscosidade de Newton afirma que a tensão de cisalhamento no fluido é proporcional à taxa de mudança da velocidade com respeito a y. Logo,

$$\tau = \frac{F}{A} = \mu \frac{du}{dy} \tag{12-1}$$

em que μ é a constante de proporcionalidade e define *a viscosidade absoluta*, também denominada *viscosidade dinâmica.* A derivada du/dy é a taxa de mudança da velocidade com a distância e pode ser chamada de taxa de cisalhamento, ou de gradiente de velocidade. A viscosidade μ é, portanto, uma medida da resistência friccional interna do fluido. Se for aventada a hipótese de que, para fluidos mais lubrificantes, a taxa de cisalhamento é uma constante, então $du/dy = U/h$. Logo, a partir da Equação (12-1),

$$\tau = \frac{F}{A} = \mu \frac{U}{h} \tag{12-2}$$

Fluidos exibindo tal característica são considerados *fluidos newtonianos.* A unidade de viscosidade no sistema *ips* é vista como libra-força-segundo por polegada quadrada – o mesmo que tensão ou pressão multiplicada por tempo. A unidade *ips* é denominada *reyn*, em homenagem a *Sir* Osborne Reynolds.

A viscosidade absoluta é medida por pascal-segundo (Pa · s) no SI – o mesmo que newton-segundo por metro quadrado. A conversão de unidades *ips* para SI é a mesma que para a tensão. Por exemplo, multiplique a viscosidade absoluta em *reyns* por 6890, de modo a converter para unidades de Pa · s.

A American Society of Mechanical Engineers (ASME[1]) publicou uma lista de unidades *cgs* que não devem ser utilizadas em seus documentos. Essa lista resulta de uma recomendação do International Committee of Weights and Measures (CIPM) para que o uso das unidades *cgs* com nomes especiais seja desencorajado. Nela estão incluídas uma unidade de força denominada *dyne* (dyn), uma unidade de viscosidade

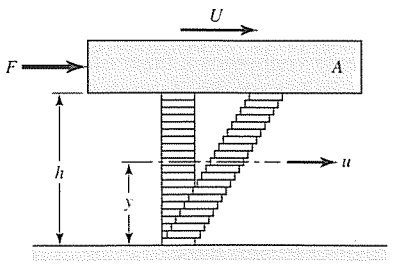


Figura 12-1

[1] *ASME Orientation and Guide for Use of Metric Units*, 2nd ed., American Society of Mechanical Engineers, 1972, p.13.

dinâmica denominada *poise* (P) e uma unidade de viscosidade cinemática denominada *stoke* (St). Todas essas unidades foram, e ainda são, empregadas extensivamente em estudos de lubrificação.

Poise é a unidade *cgs* de viscosidade dinâmica, ou absoluta, e sua unidade é o *dyne*-segundo por centímetro quadrado (dyn.s/cm^2). Tem sido habitual utilizar o *centipoise* (cP) em análise, visto que seu valor é mais conveniente. Quando a viscosidade é expressa em *centipoise*, é designada por Z. A conversão de unidades *cgs* para SI e unidades *ips* ocorre da seguinte maneira:

$$\mu(\text{Pa} \cdot \text{s}) = (10)^{-3} Z \text{ (cP)}$$

$$\mu(\text{reyn}) = \frac{Z \text{ (cP)}}{6{,}89(10)^6}$$

$$\mu(\text{mPa} \cdot \text{s}) = 6{,}89\ \mu'(\mu\text{reyn})$$

Ao utilizar unidades *ips*, o *microreyn* (μreyn) é, em geral, mais conveniente. O símbolo μ' será empregado para designar a viscosidade em μreyn, de modo que $\mu = \mu'/(10^6)$.

O método da norma da ASTM para a determinação da viscosidade faz uso de um instrumento denominado Viscosímetro Universal Saybolt. O método consiste na medição do tempo em segundos para 60 mL de lubrificante, a uma temperatura especificada, visando a escorrer por um tubo de 17,6 mm de diâmetro e 12,25 mm de comprimento. O resultado é chamado de *viscosidade cinemática,* e no passado a unidade de centímetros quadrados por segundo foi utilizada. Um centímetro quadrado por segundo é definido como um *stoke.* Pelo uso da *lei de Hagen-Poiseuille,* a viscosidade cinemática baseada em segundos Saybolt, também denominada *Viscosidade Universal Saybolt* (SUV) em segundos, é

$$Z_k = \left(0{,}22t - \frac{180}{t}\right) \tag{12-3}$$

em que Z_k está em *centistokes* (cSt) e t é o número de segundos Saybolt.

No SI, a viscosidade cinemática ν tem a unidade de metros quadrados por segundo (m^2/s), e a conversão é

$$\nu(\text{m}^2/\text{s}) = 10^{-6} Z_k \text{ (cSt)}$$

Logo, a Equação (12-3) torna-se

$$\nu = \left(0{,}22t - \frac{180}{t}\right)(10^{-6}) \tag{12-4}$$

Para converter a viscosidade dinâmica, multiplicamos ν pela densidade em unidades *SI.* Designando a densidade como ρ com a unidade de quilograma por metro cúbico, obtemos

$$\mu = \rho\left(0{,}22t - \frac{180}{t}\right)(10^{-6}) \tag{12-5}$$

com μ *em* pascal-segundos

A Figura 12-2 mostra a viscosidade absoluta no sistema *ips* de determinados fluidos freqüentemente usados para propósitos de lubrificação e suas variações com a temperatura.

12-3 Equação de Petroff

O fenômeno de fricção de mancais foi primeiro explicado por Petroff, a partir da afirmativa de que o eixo é concêntrico. Embora raramente venhamos a fazer uso do método de Petroff de análise no material que segue, ele é importante porque define grupos de parâmetros adimensionais e porque o coeficiente de fricção previsto por essa lei vem a ser muito bom mesmo quando o eixo não é concêntrico.

Consideremos agora um eixo vertical rodando em um mancal de guia. Supõe-se que esse mancal carrega uma carga muito pequena, que o espaço de folga está completamente preenchido com óleo e que o vazamento é mínimo (Figura 12-3). Denotamos o raio do eixo por r, a folga radial por c e o comprimento do mancal por l – todas as dimensões sendo em polegadas. Se o eixo roda a N rev/s, então sua velocidade de superfície é $U = 2\pi rN$ in/s. Haja vista que a tensão de cisalhamento no lubrificante é igual ao gradiente de velocidade vezes a viscosidade, a partir da Equação (12-2) obtemos

$$\tau = \mu\frac{U}{h} = \frac{2\pi r\mu N}{c} \tag{a}$$

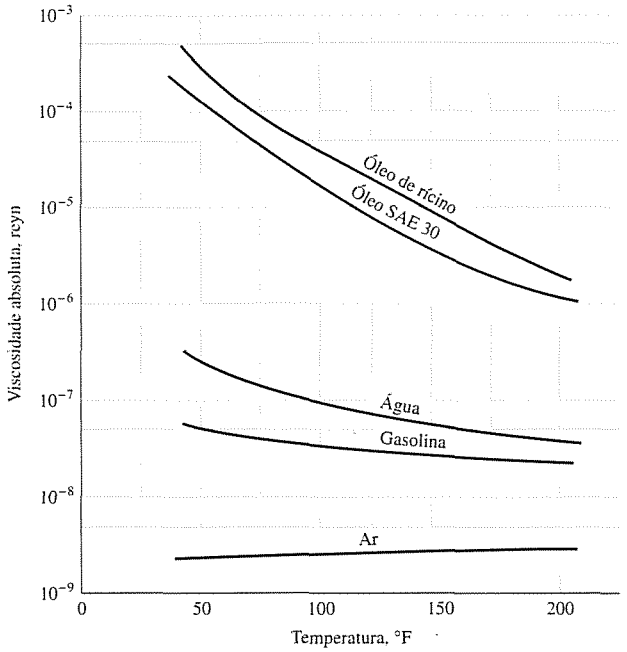


Figura 12-2 Uma comparação das viscosidades de vários fluidos.

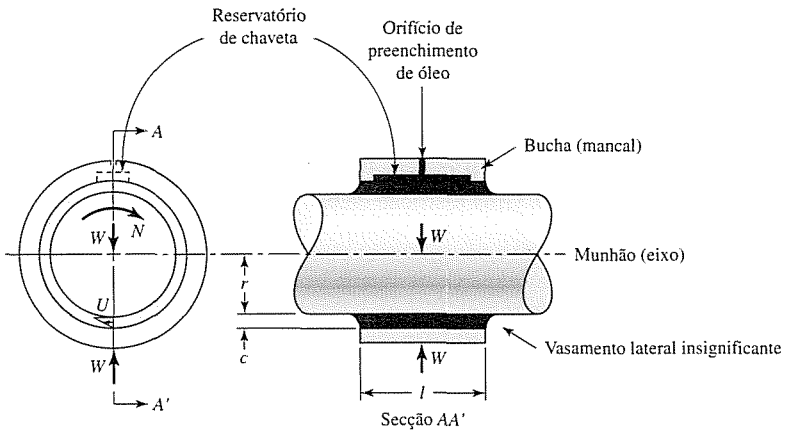


Figura 12-3 Mancal de deslizamento (munhão) de Petroff, carregado levemente, consistindo em um munhão de eixo e uma bucha com um reservatório de lubrificante interno de sulco axial. O gradiente de velocidade linear é mostrado na vista lateral. A folga c corresponde a vários milésimos de uma polegada e está grosseiramente exagerada para propósitos de apresentação.

em que a folga radial c foi substituída pela distância h. A força requerida para cisalhar o filme é a tensão vezes a área. O torque é a força vezes o braço de alavanca r. Logo,

$$T = (\tau A)(r) = \left(\frac{2\pi r \mu N}{c}\right)(2\pi r l)(r) = \frac{4\pi^2 r^3 l \mu N}{c} \qquad (b)$$

Se agora designarmos uma pequena força no mancal por W, em libras-força, então a pressão P, em libras-força por polegada quadrada de área projetada, será $P = W/2rl$. A força friccional é fW, sendo f o coeficiente de fricção; assim, o torque friccional é

$$T = fWr = (f)(2rlP)(r) = 2r^2 flP \qquad (c)$$

Substituindo o valor do torque da Equação (c) na Equação (b), e solucionando para o coeficiente de fricção, encontramos

$$f = 2\pi^2 \frac{\mu N}{P} \frac{r}{c} \tag{12-6}$$

A Equação (12-6) é denominada *equação de Petroff* e foi primeiramente publicada em 1883. As duas quantidades $\mu N/P$ e r/c são parâmetros muito importantes em lubrificação. A substituição das dimensões apropriadas em cada parâmetro mostrará que eles são adimensionais.

O número característico de mancal, ou *número Sommerfeld*, é definido pela equação

$$S = \left(\frac{r}{c}\right)^2 \frac{\mu N}{P} \tag{12-7}$$

O número de Sommerfeld é muito importante na análise de lubrificação porque contém muito dos parâmetros que são especificados pelo projetista. Observe também que ele é adimensional. A quantidade r/c é denominada *razão de folga radial*. Se multiplicarmos ambos os lados da Equação (12-6) por essa razão, obteremos a interessante relação

$$f\frac{r}{c} = 2\pi^2 \frac{\mu N}{P}\left(\frac{r}{c}\right)^2 = 2\pi^2 S \tag{12-8}$$

12-4 Lubrificação Estável

A diferença entre as lubrificações de contorno e hidrodinâmica pode ser explicada pela referência à Figura 12-4. Esse gráfico da mudança no coeficiente de fricção *versus* a característica de mancal $\mu N/P$ foi obtido pelos irmãos McKee em um ensaio real de fricção.[2] O gráfico é importante porque define a estabilidade da lubrificação e nos ajuda a entender as lubrificações hidrodinâmica e de contorno, ou ainda de filme fino.

Lembre-se de que o modelo de mancal de Petroff na forma da Equação (12-6) prevê que f é proporcional a $\mu N/P$, isto é, uma linha reta a partir da origem, no primeiro quadrante. Nas coordenadas da Figura 12-4, o local geométrico à direita do ponto C é um exemplo. O modelo de Petroff presume tratar-se de lubrificação de filme espesso, isto é, sem contato metal-metal, sendo as superfícies completamente separadas por um filme de lubrificante.

A abscissa de McKee era ZN/P (*centipoise* x r/min/psi), e a abscissa B na Figura 12-4 era 30. O correspondente $\mu N/P$ (*reyn* x rev/s/psi) é $0{,}33(10^{-6})$. Os projetistas mantêm $\mu N/P \geq 1{,}7(10^{-6})$, o que corresponde a $ZN/P \geq 150$. Uma restrição de projeto para manter consistente a lubrificação de filme espesso é assegurar-se de que

$$\frac{\mu N}{P} \geq 1{,}7(10^{-6}) \tag{a}$$

Suponha que estejamos operando à direita da linha BA e algo acontece – digamos, um aumento na temperatura do lubrificante. Isso resulta em uma viscosidade inferior e, conseqüentemente, em um valor menor de $\mu N/P$. O coeficiente de fricção decresce, não muito calor é gerado ao se cisalhar o lubrificante e, por conseguinte, a temperatura deste cai. Dessa forma, a região à direita da linha BA define a *lubrificação estável*, pois as variações são autocorretivas.

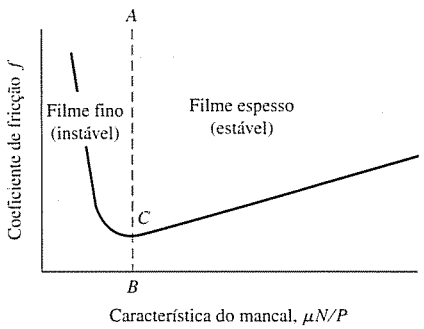


Figura 12-4 A variação do coeficiente de fricção f com $\mu N/P$.

[2] S. A. McKee e T. R. McKee. "Journal Bearing Friction in the Region of Thin Film Lubrication", *SAE J.*, vol. 31, 1932, p. (T)371-377.

À esquerda da linha *BA*, um decréscimo na viscosidade resultaria em fricção. Disso decorreria uma elevação na temperatura, e a viscosidade se reduziria ainda mais. O resultado seria composto. Assim, a região à esquerda da linha *BA* representa a *lubrificação instável.*

É também útil observar que uma viscosidade pequena, e portanto um $\mu N/P$ pequeno, significa que o filme de lubrificante é muito fino e que haverá uma possibilidade maior de ocorrer algum contato metal-metal – e, assim, de mais fricção. Logo, o ponto *C* representa o que é provavelmente o começo do contato de metal com metal, à medida que $\mu N/P$ torna-se menor.

12-5 Lubrificação de Filme Espesso

Examinemos agora a formação de um filme de lubrificante em um mancal de munhão. A Figura 12-5(*a*) exibe um munhão que está apenas começando a rodar em sentido horário. Sob condições de arranque, o mancal estará seco, ou pelo menos parcialmente seco, e em conseqüência o munhão subirá ou se enrolará para o lado direito do mancal, como mostra a Figura 12-5(*a*).

Agora, suponha que um lubrificante seja introduzido no topo do mancal, como mostra a Figura 12-5(*b*). A ação do munhão girando é a de bombear o lubrificante ao redor do mancal, em sentido horário. O lubrificante é então bombeado em um espaço em forma de cunha e força o munhão para o outro lado. Uma *espessura mínima de filme* h_0 ocorre não no fundo do munhão, mas deslocada do fundo em sentido horário, como na Figura 12-5(*b*). Isso é explicado pelo fato de que uma pressão de filme na metade convergente do mesmo alcança um máximo em algum lugar à esquerda do centro do mancal.

A Figura 12-5 mostra como decidir se o munhão, sob lubrificação hidrodinâmica, está localizado excentricamente à direita ou à esquerda do mancal. Visualize o munhão começando a rodar. Encontre o lado do mancal sobre o qual ele tende a rolar. Então, se a lubrificação for hidrodinâmica, mentalmente o coloque no lado oposto.

A nomenclatura de um mancal de munhão é apresentada na Figura 12-6. A dimensão *c* é a *folga radial* e a diferença entre os raios da bucha e do munhão. Nessa figura, o centro do munhão está em *O* e o centro do mancal, em *O'*. A distância entre esses centros é a *excentricidade*, denotada por *e*. A *espessura mínima de filme* é designada por h_0 e ocorre na linha de centros. A espessura de filme em qualquer outro ponto é designada por *h*. Também definimos uma *razão de excentricidade* ϵ como

$$\epsilon = \frac{e}{c}$$

O mancal mostrado na figura é conhecido como *mancal parcial.* Se o raio da bucha é o mesmo que o raio do munhão, ele é conhecido como *mancal ajustado.* Se a bucha envolve o munhão, como indicado pelas linhas tracejadas, ele se torna um *mancal completo.* O ângulo β descreve o comprimento angular de um mancal parcial. Por exemplo, um mancal parcial de 120° tem um ângulo β igual a 120°.

12-6 Teoria Hidrodinâmica

A atual teoria de lubrificação hidrodinâmica originou-se no laboratório de Beauchamp Tower, no início da década de 1880, na Inglaterra. Tower fora empregado para estudar a fricção em mancais de munhão de ferrovia e aprendeu os melhores métodos para lubrificá-los. Foi um acidente ou erro, durante o curso dessa investigação, que o levou a olhar para o problema mais detalhadamente e que resultou em uma descoberta que mais tarde originou a teoria.

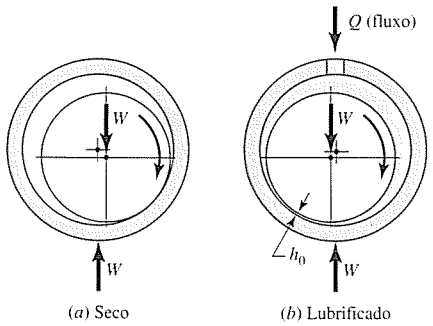


Figura 12-5 Formação de um filme.

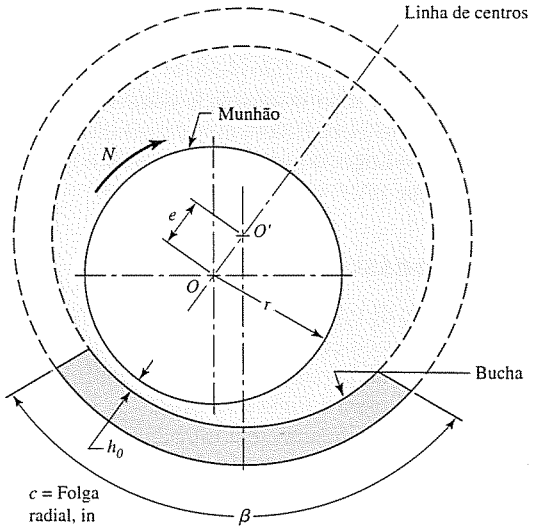


Figura 12-6 Nomenclatura de um mancal parcial de munhão.

A Figura 12-7 é um desenho esquemático do mancal de munhão que Tower investigou. Trata-se de um mancal parcial, com um diâmetro de 4 in, um comprimento de 6 in e um arco de mancal de 157°, apresentando lubrificação do tipo banho, como mostrado. Os coeficientes de fricção obtidos por Tower em suas investigações acerca desse mancal foram bem baixos, o que hoje não surpreende. Após testá-lo, ele posteriormente realizou um orifício de lubrificação com diâmetro de $\frac{1}{2}$ in através do topo. Entretanto, quando o aparato foi posto em movimento, o óleo fluiu para fora do orifício. Em um esforço para prevenir tal ocorrência, foi utilizado um tampão de cortiça, o qual estourou, sendo então necessário cravar um tampão de madeira no orifício. Quando este foi também expelido, Tower, a essa altura, indubitavelmente compreendeu que estava à beira da descoberta. Um medidor de pressão conectado ao orifício indicou uma pressão de mais de duas vezes a carga unitária de mancal. Então, ele investigou as pressões de filme de mancal em detalhe, de um extremo ao outro da largura e do comprimento do mancal, e reportou uma distribuição similar à da Figura 12-8.[3]

Os resultados obtidos por Tower apresentavam tamanha regularidade que Osborne Reynolds concluiu que deveria existir uma equação precisa relacionando a fricção, a pressão e a velocidade. A atual teoria matemática de lubrificação está baseada no trabalho de Reynolds seguindo o experimento de Tower.[4] A equação diferencial original, desenvolvida por Reynolds, foi por ele utilizada para explicar os resultados de To-

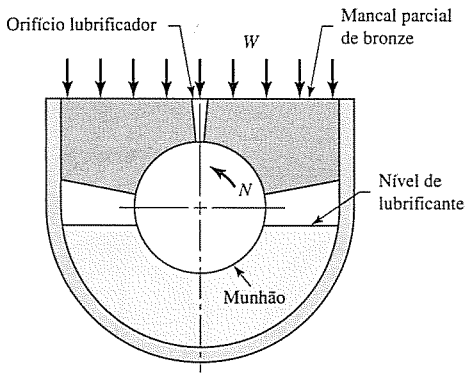


Figura 12-7 Representação esquemática do mancal parcial utilizado por Tower.

[3] Beauchamp Tower. "First Report on Friction Experiments". *Proc. Inst. Mech. Eng.*, novembro de 1883, p. 632-666; "Second Report", *ibid.*, 1885, p. 58-70; "Third Report", *ibid.*, 1888, p. 173-205; "Fourth Report", *ibid.*, 1891, p. 111-140.

[4] Osborne Reynolds. "Theory of Lubrication, Part I", *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, 1886.

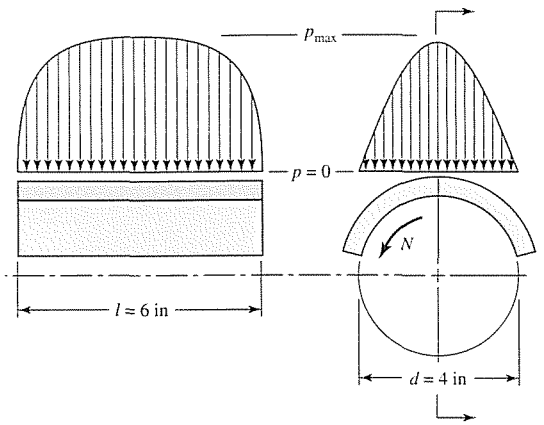


Figura 12-8 Curvas aproximadas de distribuição de pressão obtidas por Tower.

wer. A solução constitui um problema desafiador que tem interessado a muitos investigadores desde então, representando ainda o ponto de partida para estudos de lubrificação.

Reynolds retratou o lubrificante como aderindo a ambas as superfícies e sendo puxado pela superfície móvel em um espaço estreito, em forma de cunha, de modo a criar uma pressão de fluido ou de filme de intensidade suficiente para suportar a carga de mancal. Uma das hipóteses simplificadoras importantes resultou da compreensão de Reynolds de que os filmes de fluido eram tão finos, em comparação com o raio do mancal, que a curvatura poderia ser negligenciada. Isso lhe permitiu substituir o mancal parcial curvado por um mancal plano, denominado *mancal plano deslizante*. Eis outras hipóteses aventadas:

1. O lubrificante obedece ao efeito viscoso de Newton, Equação (12-1).
2. As forças atribuídas à inércia do lubrificante são ignoradas.
3. O lubrificante é tido como incompressível.
4. A viscosidade é tida como constante por todo o filme.
5. A pressão não varia na direção axial.

A Figura 12-9(*a*) mostra um munhão rodando em sentido horário, suportado por um filme de lubrificante de espessura variável h em um mancal parcial, que está fixo. Especificamos que o munhão tem uma velocidade de superfície constante U. Empregando a hipótese de Reynolds, de que a curvatura pode ser negligenciada, fixamos um sistema de referência xyz manidestro para o mancal estacionário. Agora, aventamos as seguintes hipóteses adicionais:

6. A bucha e o munhão estendem-se infinitamente, na direção z; isso significa que pode não existir fluxo de lubrificante nessa direção.
7. A pressão de filme é constante na direção y. Assim, a pressão depende somente da coordenada x.
8. A velocidade de qualquer partícula de lubrificante no filme depende somente das coordenadas x e y.

Agora, selecionamos um elemento de lubrificante no filme (Figura12-9(*a*), de dimensões dx, dy e dz e computamos as forças que atuam nos lados desse elemento. Como mostrado na Figura 12-9(*b*), forças normais, devido à pressão, atuam sobre os lados direito e esquerdo do elemento, ao passo que forças de cisalhamento, devidas à viscosidade e à velocidade, atuam sobre os lados de cima e de baixo. Somando as forças, obtemos

$$\sum F_x = p\,dy\,dz - \left(p + \frac{dp}{dx}dx\right)dy\,dz - \tau\,dx\,dz + \left(\tau + \frac{\partial\tau}{\partial y}dy\right)dx\,dz = 0 \qquad (a)$$

Isso reduz-se a

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\partial\tau}{\partial y} \qquad (b)$$

A partir da Equação (12-1), obtemos

$$\tau = \mu\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (c)$$

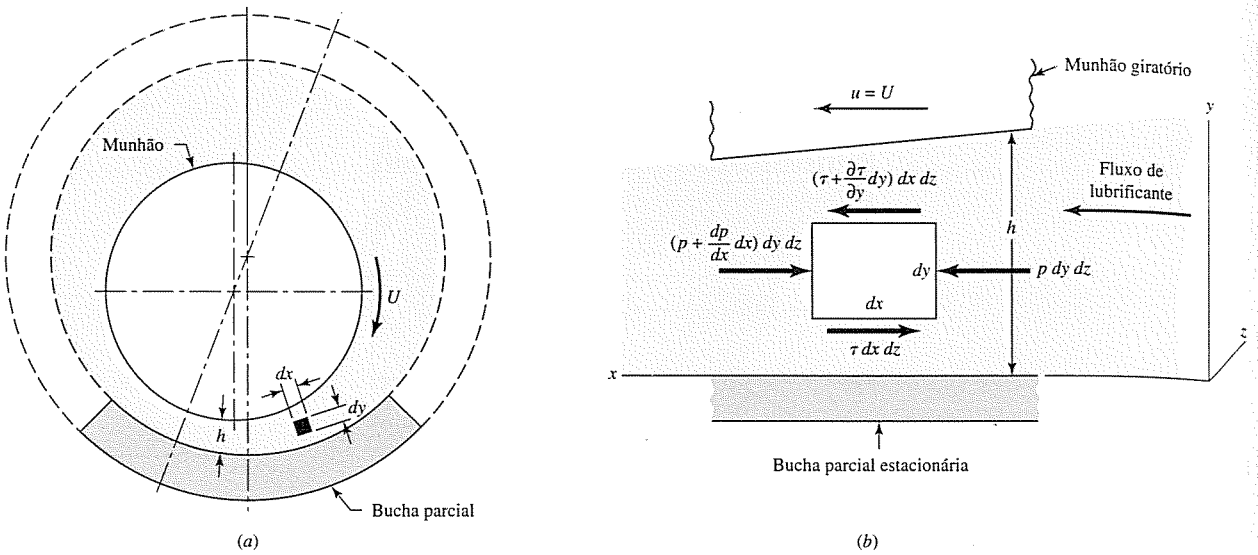


Figura 12-9

em que a derivada parcial é utilizada porque a velocidade u depende de ambos x e y. Substituindo a Equação (c) na (b), obtemos

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{d}$$

Mantendo x constante, integramos agora essa expressão duas vezes, com respeito a y. Temos, então

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}y + C_1$$
$$u = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}y^2 + C_1 y + C_2 \tag{e}$$

Observe que o ato de manter x constante significa que C_1 e C_2 podem ser funções de x. Assumimos agora que não existe deslizamento entre o lubrificante e as superfícies de contorno. Isso resulta em dois conjuntos de condições de contorno para a avaliação das constantes C_1 e C_2:

$$\text{com} \quad y = 0, \; u = 0$$
$$\text{com} \quad y = h, \; u = U \tag{f}$$

Observe, na segunda condição, que h é uma função de x. Substituindo essas condições na Equação (e), e solucionando para as constantes, obtemos

$$C_1 = \frac{U}{h} - \frac{h}{2\mu}\frac{dp}{dx} \qquad C_2 = 0$$

ou

$$u = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}(y^2 - hy) + \frac{U}{h}y \tag{12-9}$$

Essa equação provê a distribuição de velocidade do lubrificante no filme como uma função da coordenada y e do gradiente de pressão dp/dx. Ela mostra que a distribuição de velocidade através do filme (de $y = 0$ a $y = h$) é obtida superpondo-se uma distribuição parabólica (o primeiro termo) sobre uma distribuição linear (o segundo termo). A Figura 12-10 exibe a superposição dessas distribuições para obter a velocidade para valores particulares de x e dp/dx. Em geral, o termo parabólico pode ser aditivo ou subtrativo ao termo linear, dependendo do sinal do gradiente de pressão. Quando a pressão é máxima, $dp/dx = 0$ e a velocidade é

$$u = \frac{U}{h}y \tag{g}$$

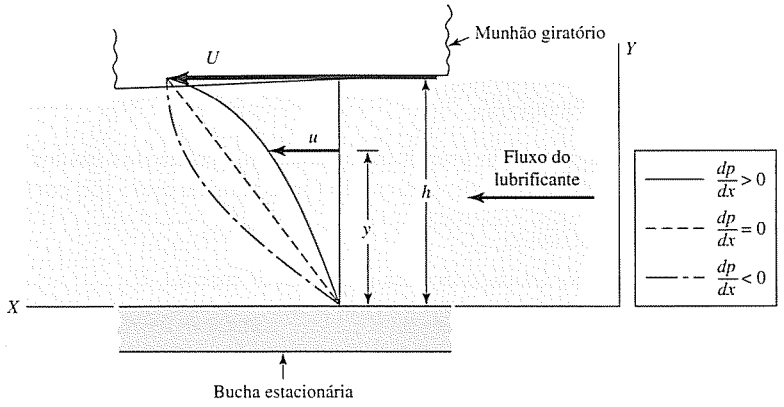


Figura 12-10 Velocidade do lubrificante.

o que constitui uma relação linear.

A seguir, definimos Q como o volume de lubrificante fluindo na direção x por unidade de tempo. Utilizando uma largura unitária na direção z, o volume pode ser obtido pela expressão

$$Q = \int_0^h u \, dy \tag{h}$$

Substituindo o valor de u da Equação (12-9) e integrando, obtemos

$$Q = \frac{Uh}{2} - \frac{h^3}{12\mu} \frac{dp}{dx} \tag{i}$$

O próximo passo faz uso da hipótese de um lubrificante incompressível e afirma que o fluxo é o mesmo para qualquer secção transversal. Logo,

$$\frac{dQ}{dx} = 0$$

A partir da Equação (*i*),

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{U}{2} \frac{dh}{dx} - \frac{d}{dx}\left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{dp}{dx}\right) = 0$$

ou

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{h^3}{\mu} \frac{dp}{dx}\right) = 6U \frac{dh}{dx} \tag{12-10}$$

que é a equação clássica de Reynolds para fluxo unidimensional. Ela ignora o vazamento lateral, isto é, o fluxo na direção z. Um desenvolvimento similar é utilizado quando tal vazamento não é ignorado. A equação resultante é

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z}\right) = 6U \frac{\partial h}{\partial x} \tag{12-11}$$

Não existe solução geral para a Equação (12-11); soluções aproximadas têm sido obtidas a partir de analogias elétricas, somatórios matemáticos, métodos de relaxação e métodos numéricos e gráficos. Uma das soluções importantes deve-se a Sommerfeld[5], podendo ser expressa na forma

$$\frac{r}{c} f = \phi\left[\left(\frac{r}{c}\right)^2 \frac{\mu N}{P}\right] \tag{12-12}$$

[5] A. Sommerfeld, "Zur Hydrodynamischen Theorie der Schmiermittel-Reibung" ("On the Hydrodynamic Theory of Lubrication"). *Z. Math. Physik*, vol. 50, 1904, p. 97-155.

em que ϕ indica uma relação funcional. Sommerfeld encontrou funções para mancais pela metade e mancais completos ao fazer uso da hipótese de nenhum vazamento lateral.

12-7 Considerações de Projeto

Podemos distinguir entre dois grupos de variáveis no projeto de mancais de deslizamento. No primeiro grupo estão aquelas variáveis cujos valores são fornecidos ou estão sob controle do projetista. São elas:

1. A viscosidade μ.
2. A carga por unidade de área projetada de mancal, P.
3. A velocidade N.
4. As dimensões de mancal r, c, β e l.

Dessas quatro variáveis, o projetista normalmente não tem controle sobre a velocidade, haja vista ser ela especificada pelo projeto global da máquina. Às vezes, a viscosidade é especificada de antemão, como, por exemplo, quando o óleo é guardado em um reservatório e utilizado para lubrificar e resfriar uma variedade de mancais. As variáveis restantes, e às vezes a viscosidade, podem ser controladas pelo projetista, constituindo, por isso, as *decisões* que ele toma. Em outras palavras, quando essas quatro decisões são tomadas, o projeto está completo.

No segundo grupo estão as variáveis dependentes. O projetista não pode controlá-las senão indiretamente, ao mudar uma ou mais do primeiro grupo. São elas:

1. O coeficiente de fricção f.
2. A elevação de temperatura ΔT.
3. A taxa de fluxo de óleo Q.
4. A espessura mínima do filme h_0.

Esse grupo de variáveis nos diz quão bem o mancal está funcionando; podemos considerá-las, portanto, como *fatores de desempenho*. Certas limitações de seus valores devem ser impostas pelo projetista, para assegurar um desempenho satisfatório. Tais limitações são especificadas pelas características dos materiais de mancal e do lubrificante. O problema fundamental no projeto de mancal, por conseguinte, é definir limites satisfatórios para o segundo grupo de variáveis e então decidir sobre valores para o primeiro grupo, de modo que essas limitações não sejam excedidas.

Velocidade Angular Significativa

Na próxima seção, examinaremos diagramas importantes relacionando variáveis-chave ao número de Sommerfeld. Até este ponto, assumimos que somente o munhão roda e que sua velocidade rotacional é a utilizada no número de Sommerfeld. Foi descoberto que a velocidade angular N significativa para o desempenho do mancal de filme hidrodinâmico é [6]

$$N = |N_j + N_b - 2N_f| \tag{12-13}$$

em que N_j = velocidade angular do munhão, rev/s
N_b = velocidade angular do mancal, rev/s
N_f = velocidade angular do vetor de carga, rev/s

Ao determinar o número de Sommerfeld para um mancal qualquer, utilize a Equação (12-13) ao introduzir N. A Figura 12-11 apresenta várias situações para a determinação de N.

Critério de Projeto de Trumpler para Mancais de Munhão

Como a montagem de um mancal cria a pressão de lubrificante para carregar uma carga, ele reage ao carregamento mudando sua excentricidade, a qual reduz a espessura mínima de filme h_0 até que a carga seja suportada. Qual é o limite de pequenez de h_0? Um exame detalhado revela que as superfícies adjacentes móveis do munhão e da bucha não são lisas, mas consistem em uma série de asperezas que passam de uma para a outra, separadas por um filme de lubrificante. No arranque de um mancal sob carga a partir do repouso, existe contato metal-metal, e as asperezas de superfície são quebradas, tornando-se livres para se mover e circular com o óleo.

[6] Paul Robert Trumpler, *Design of Film Bearings*. Macmillan, New York, 1966, p. 103-119.

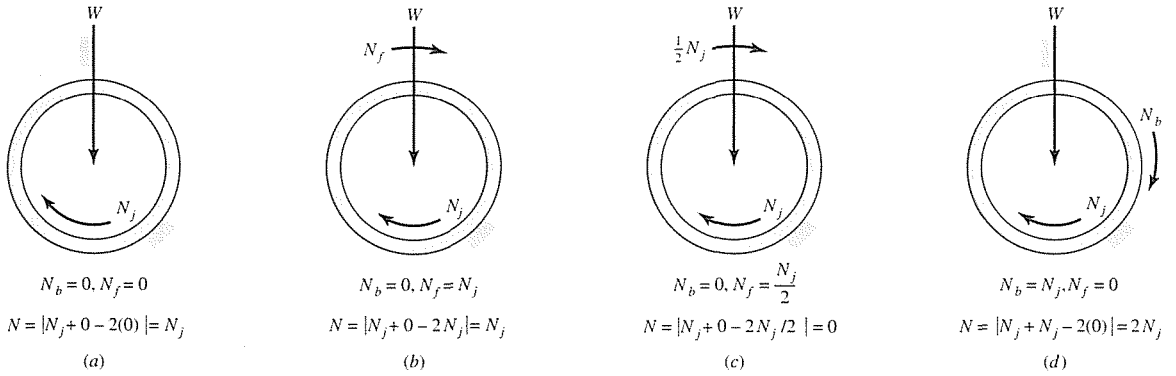


Figura 12-11 O modo como a velocidade significativa varia. (*a*) Caso comum de mancal. (*b*) O vetor de carga move-se à mesma velocidade do munhão. (*c*) O vetor de carga move-se à metade da velocidade do munhão; carga alguma pode ser sustentada. (*d*) O munhão e a bucha movem-se à mesma velocidade; vetor de carga estacionário.

A menos que um filtro seja provido, essas aparas acumulam-se. Tais partículas têm de ser liberadas para tombar nas secções que contêm a espessura mínima de filme, sem formar saliências em uma configuração similar a pinos, criando dano adicional e aparas. Trumpler, um bem-sucedido projetista de mancais, providenciou uma garganta de pelo menos 200 μin, para passar partículas das superfícies de fundo.[7] Ele também se previniu para a influência do tamanho (as tolerâncias tendem a aumentar com o tamanho), estipulando

$$h_0 \geq 0{,}0002 + 0{,}000\,04d \text{ in} \tag{a}$$

em que d é o diâmetro do munhão em polegadas.

Um lubrificante é uma mistura de hidrocarbonetos que reagem ao aumento da temperatura vaporizando componentes mais leves, deixando para atrás os mais pesados. Esse processo (os mancais dispõem de muito tempo) aumenta vagarosamente a viscosidade do lubrificante restante, o que eleva a taxa de geração de calor e as temperaturas do lubrificante. Monta-se, assim, o cenário para falhas futuras. Para óleos leves, Trumpler limitou a temperatura máxima de filme $T_{\max}$ a

$$T_{\max} \leq 250°\text{F} \tag{b}$$

Alguns óleos podem operar a temperaturas ligeiramente mais altas. É importante verificar isso com o fabricante do lubrificante.

Um mancal de munhão consiste freqüentemente em um munhão retificado de aço trabalhando contra uma bucha mais mole, geralmente não-ferrosa. No arranque sob carga existe contato metal-metal, abrasão e geração de partículas de desgaste, que, com o tempo, podem mudar a geometria da bucha. A carga de arranque dividida pela área projetada está limitada a

$$\frac{W_{st}}{lD} \leq 300 \text{ psi} \tag{c}$$

Se a carga em um mancal de munhão é subitamente aumentada, a elevação na temperatura de filme em um ânulo é imediata. Visto que a vibração do solo decorrente de caminhões passando, trens e tremores de terra freqüentemente está presente, Trumpler empregou um fator de projeto de 2 ou mais na carga de funcionamento, mas não na de arranque da Equação (*c*):

$$n_d \geq 2 \tag{d}$$

Muitos dos projetos de Trumpler ainda funcionam – sua carreira como consultor já está encerrada. Claramente, portanto, eles constituem um bom conselho para o projetista iniciante.

12-8 As Relações das Variáveis

Antes de se proceder ao problema de projeto, é necessário estabelecer os relacionamentos entre as variáveis. Albert A. Raimondi e John Boyd, da Westinghouse Research Laboratories, empregaram uma técnica de ite-

[7] *Op. cit.*, p. 192-194.

ração para resolver a equação de Reynolds em computador digital.[8] Essa é a primeira vez que dados tão extensos têm estado disponíveis para uso pelos projetistas. Assim sendo, os empregaremos neste livro.[9]

Os trabalhos de Raimondi e Boyd foram publicados em três partes e contêm 45 diagramas detalhados e seis tabelas de informação numérica. Em todas as três partes, diagramas são utilizados para definir as variáveis para razões de comprimento-diâmetro *(l/d)* de 1:4, 1:2 e 1, bem como para ângulos beta de 60 a 360°. Sob certas condições, a solução para a equação de Reynolds oferece pressões negativas na porção divergente do filme de óleo. Uma vez que um lubrificante não pode normalmente suportar uma tensão de tração, a Parte III dos trabalhos de Raimondi e Boyd assume que o filme de óleo é rompido quando a pressão de filme torna-se zero. A Parte III também contém dados para um mancal infinitamente longo; visto que ele não tem extremidades, isso significa que não existe vazamento lateral. Os diagramas que aparecem neste livro pertencem à Parte III dos trabalhos e referem-se tão-somente a mancais de munhão completo ($\beta = 360^0$). O espaço não permite a inclusão de diagramas para mancais parciais. Isso significa que você deve se referir aos diagramas nos trabalhos originais quando ângulos beta de menos que 360° forem desejados. A notação é, muito aproximadamente, a mesma que a utilizada neste livro; portanto, nenhum problema deverá surgir.

Diagramas de Viscosidade (Figuras 12-12 a 12-14)

Uma das mais importantes hipóteses aventadas na análise de Raimondi e Boyd é a de que a *viscosidade do lubrificante é constante à medida que ele passa através do mancal.* No entanto, uma vez que o trabalho é realizado no lubrificante durante esse fluxo, a temperatura do óleo é mais alta quando ele deixa a zona de carregamento do que quando a adentra. Além disso, os diagramas de viscosidade claramente indicam que a viscosidade decresce significativamente com um aumento na temperatura. Na medida em que a análise se baseia em uma viscosidade constante, nosso problema agora é determinar o valor da viscosidade a ser nela empregado.

Parte do lubrificante que entra no mancal emerge como um fluxo lateral, que arrebata um pouco do calor. O saldo desse lubrificante flui através da zona de carga de mancal e arrebata o saldo do calor gerado. Ao determinar a viscosidade a ser utilizada, empregaremos uma temperatura que é a média das temperaturas de entrada e saída, ou

$$T_{av} = T_1 + \frac{\Delta T}{2} \tag{12-14}$$

em que T_1 é a temperatura de entrada e ΔT é o aumento na temperatura do lubrificante, da entrada à saída. Logicamente, a viscosidade utilizada na análise deve corresponder a T_{av}.

A viscosidade varia consideravelmente com a temperatura, em uma forma não-linear. As ordenadas nas Figuras 12-12 a 12-14 não são logarítmicas, ao passo que as décadas são de comprimento vertical diferente. Esses gráficos representam a temperatura *versus* as funções de viscosidade para graus comuns de óleos lubrificantes, tanto em unidades habituais de engenharia quanto em unidades SI. Temos a temperatura *versus* a função de viscosidade somente na forma gráfica, a menos que ajustes de curva sejam desenvolvidos. Veja a Tabela 12-1.

Um dos objetivos da análise de lubrificação é determinar a temperatura de saída do óleo quando este e sua temperatura de entrada são especificados. Isso constitui um tipo de problema de tentativa e erro. Em uma análise, o aumento na temperatura será primeiramente estimado. Isso permite à viscosidade ser determinada pelo diagrama. Com o valor dela, a análise é realizada onde o aumento de temperatura é então computado. Com isso, uma nova estimativa do aumento de temperatura é estabelecida. Esse processo é mantido até que as temperaturas estimadas e computadas concordem.

Para ilustrar, suponha que tenhamos decidido utilizar óleo SAE 30 em uma aplicação na qual a temperatura de entrada do óleo é $T_1 = 180°F$. Começamos por estimar que o aumento de temperatura será $\Delta T = 30°F$. Logo, a partir da Equação (12-14),

$$T_{av} = T_1 + \frac{\Delta T}{2} = 180 + \frac{30}{2} = 195°F$$

A partir da Figura 12-12, seguimos a linha de SAE 30 e descobrimos que $\mu = 1{,}40$ μreyn a 195°F. Assim, utilizamos essa viscosidade (em uma análise a ser explicada detalhadamente, adiante) e descobrimos que o aumento de temperatura é realmente $\Delta T = 54°F$. Logo, a Equação (12-14) fornece

[8] A. A. Raimondi e John Boyd, "A solution for the Finite Journal Bearing and Its Application to Analysis and Design, Parts I, II, and III", *Trans. ASLE*, vol. 1, n. 1; *in Lubrication Science and Technology*, Pergamon, New York, 1958, p. 159-209.

[9] Ver também o trabalho anterior relacionado: John Boyd e Albert A. Raimondi, "Applying Bearing Theory to the Analysis and Design of Journal Bearings, Part I and II", *J. Appl. Mechanics*, vol. 73, 1951, p. 298-316.

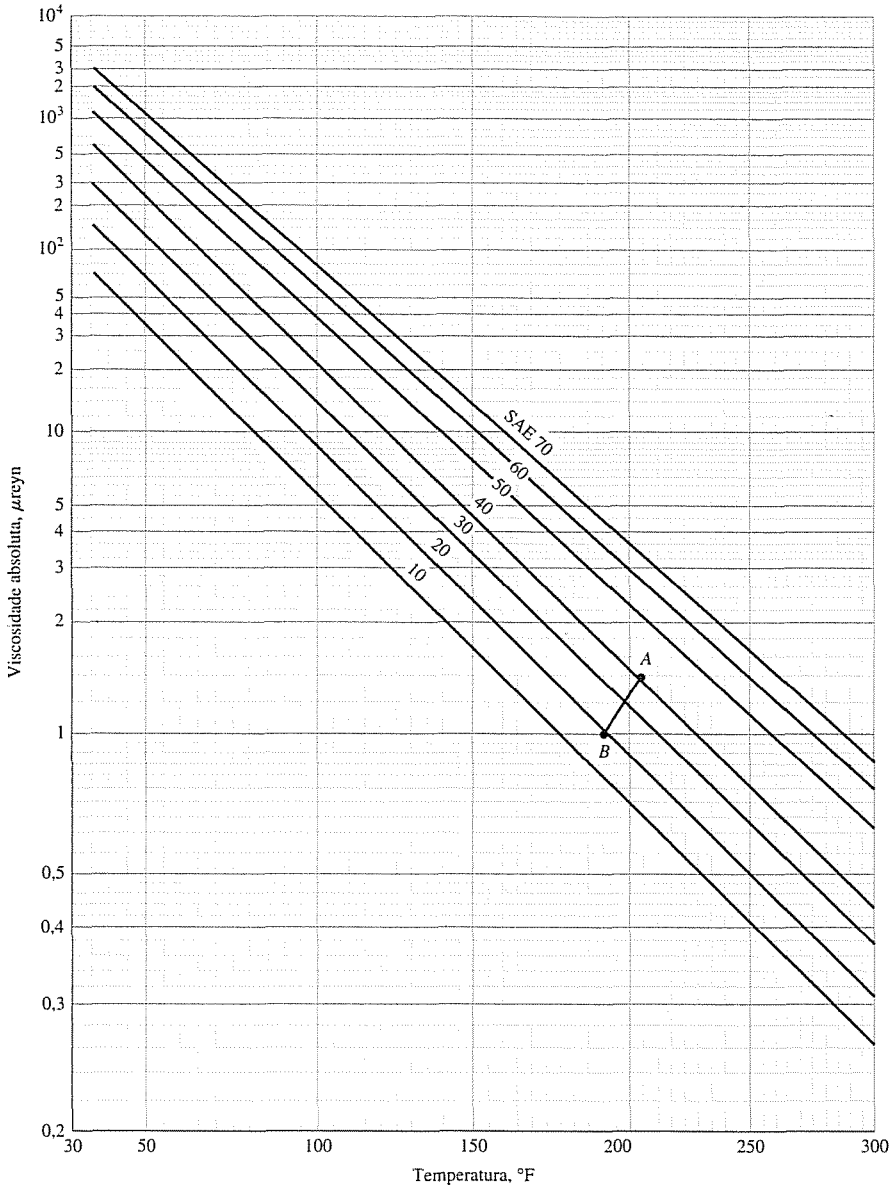


Figura 12-12 Diagrama viscosidade-temperatura em unidades usadas nos Estados Unidos. *(Raimondi e Boyd.)*

$$T_{av} = 180 + \frac{54}{2} = 207°\text{F}$$

Isso corresponde ao ponto A na Figura 12-12, o qual está acima da linha de SAE 30 e indica que a viscosidade utilizada na análise era muito alta.

Para uma segunda estimativa, experimente $\mu = 1{,}00$ μreyn. Novamente passamos pela análise e, dessa vez, descobrimos que $\Delta T = 30°\text{F}$. Isso fornece uma temperatura média de

$$T_{av} = 180 + \frac{30}{2} = 195°\text{F}$$

e localiza o ponto B na Figura 12-12.

Se os pontos A e B estiverem razoavelmente próximos um do outro e situados em lados opostos da linha de SAE 30, uma linha reta poderá ser traçada entre eles, com a intersecção localizando os valores corretos da viscosidade e da temperatura média a serem empregados na análise. Para essa ilustração, observamos, a partir do diagrama de viscosidade, que eles são $T_{av} = 203°\text{F}$ e $\mu = 1{,}20$ μreyn.

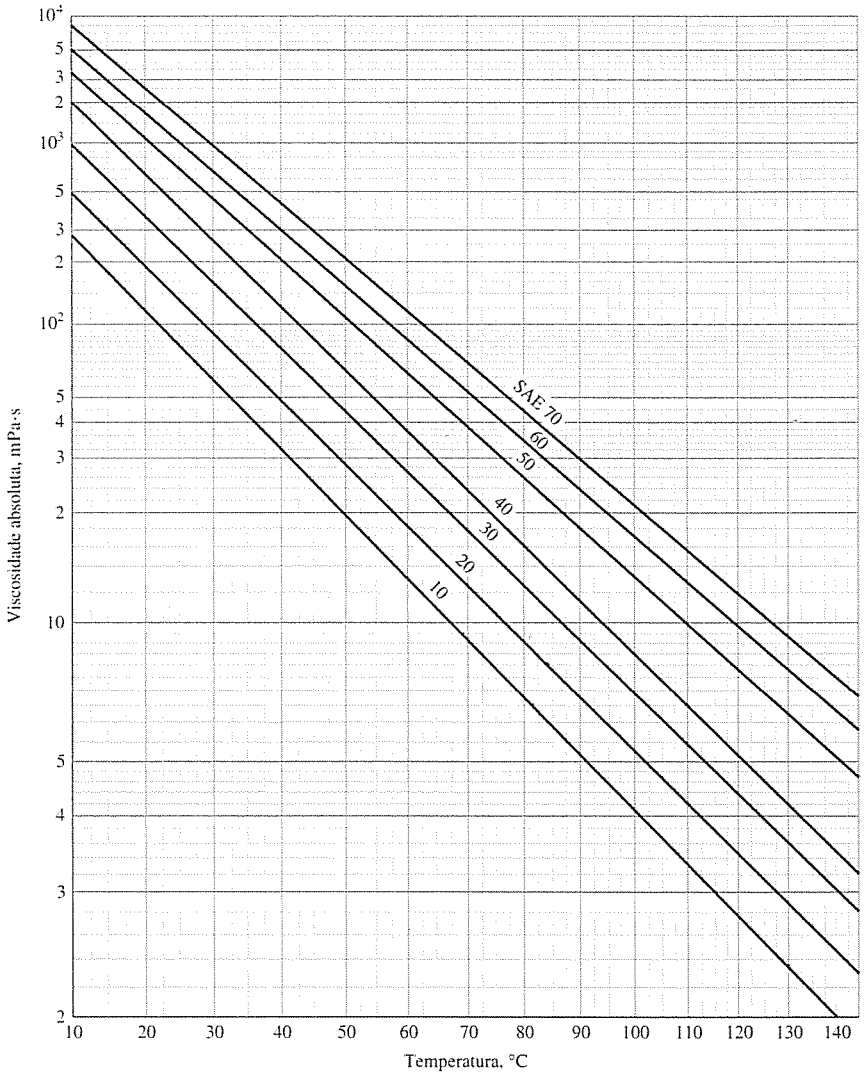


Figura 12-13 Diagrama viscosidade-temperatura nas unidades SI. *(Adaptada da Figura 12-12.)*

Os diagramas remanescentes de Raimondi e Boyd relacionam diversas variáveis ao número de Sommerfeld. Tais variáveis são:

Espessura mínima de filme (Figuras 12-16 e 12-17)
Coeficiente de fricção (Figuras 12-18)
Fluxo de lubrificante (Figuras 12-19 e 12-20)
Pressão de filme (Figuras 12-21 e 12-22)

A Figura 12-15 mostra a notação empregada para as variáveis. Descreveremos o uso de tais curvas em uma série de exemplos utilizando o mesmo conjunto de parâmetros dados.

Espessura Mínima de Filme

Na Figura 12-16, a variável de *espessura mínima de filme* h_0/c e a *razão de excentricidade* $\epsilon = e/c$ são traçadas contra o número de Sommerfeld S, com contornos para vários valores de l/d. A posição angular correspondente de espessura mínima de filme é encontrada na Figura 12-17.

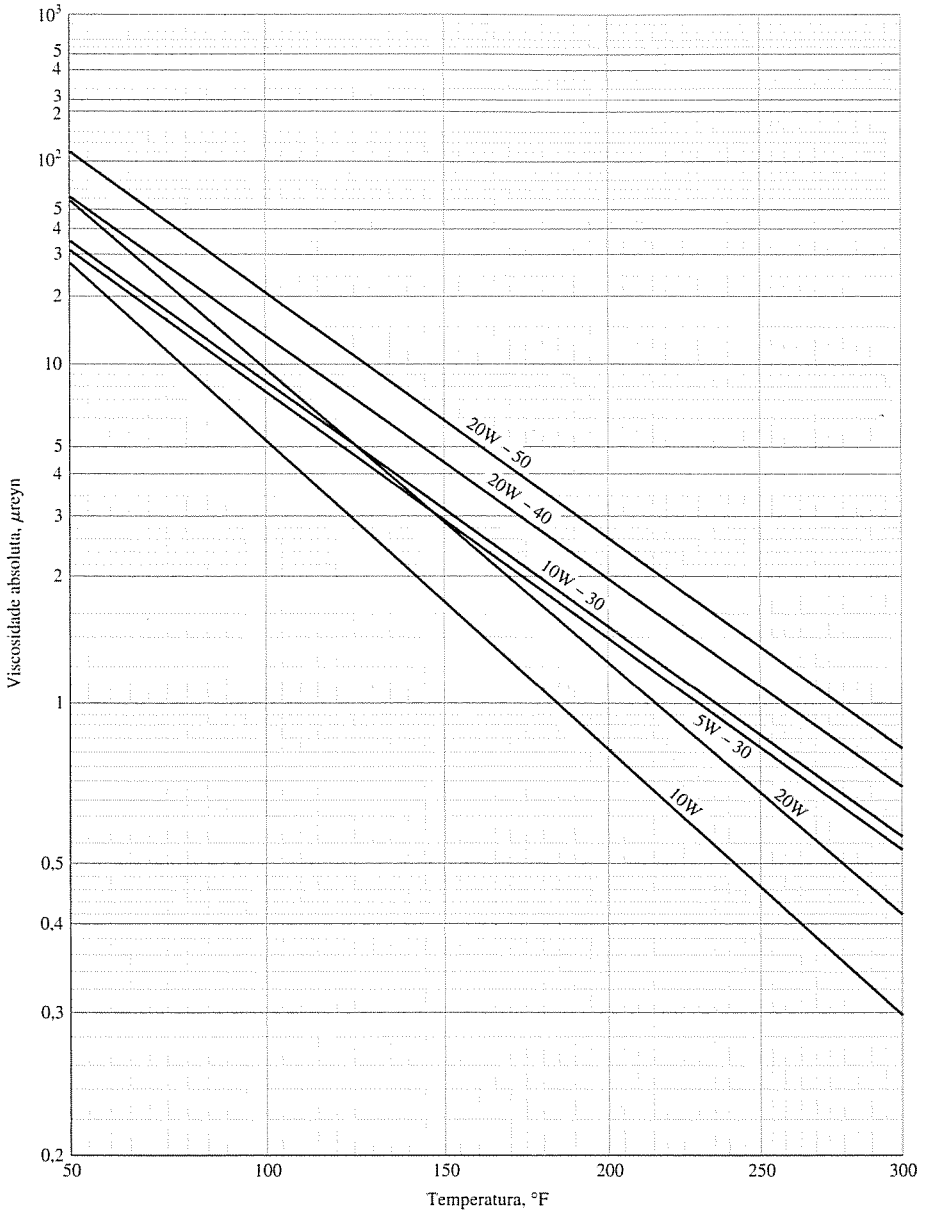


Figura 12-14 Diagrama para lubrificantes multiviscosos, derivado de viscosidades conhecidas em dois pontos, 100 e 210°F, acreditando-se que os resultados estejam corretos para outras temperaturas.

Tabela 12-1 Ajustes* de curva para aproximar a viscosidade *versus* funções de temperatura para graus SAE de 10 a 60

Grau do óleo, SAE	Viscosidade μ_0, reyn	Constante b, °F
10	$0{,}0158(10^{-6})$	1157,5
20	$0{,}0136(10^{-6})$	1271,6
30	$0{,}0141(10^{-6})$	1360,0
40	$0{,}0121(10^{-6})$	1474,4
50	$0{,}0170(10^{-6})$	1509,6
60	**$0{,}0187(10^{-6})$**	**1564,0**

*$\mu = \mu_0 \exp [b/(T + 95)]$, T em °F.
Fonte: A. S. Seireg e S. Dandage, "Empirical Design Procedure for the Thermodynamic Behavior of Journal Bearings", *J. Lubrication Technology*, vol. 104, abril de 1982, p. 135-148.

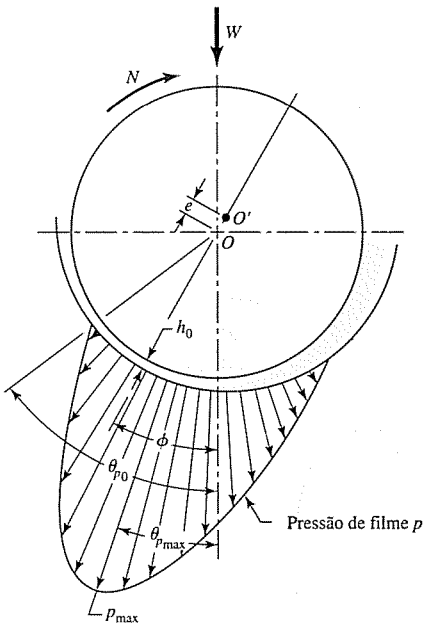


Figura 12-15 Diagrama polar da distribuição de pressão de filme mostrando a notação empregada. *(Raimondi e Boyd.)*

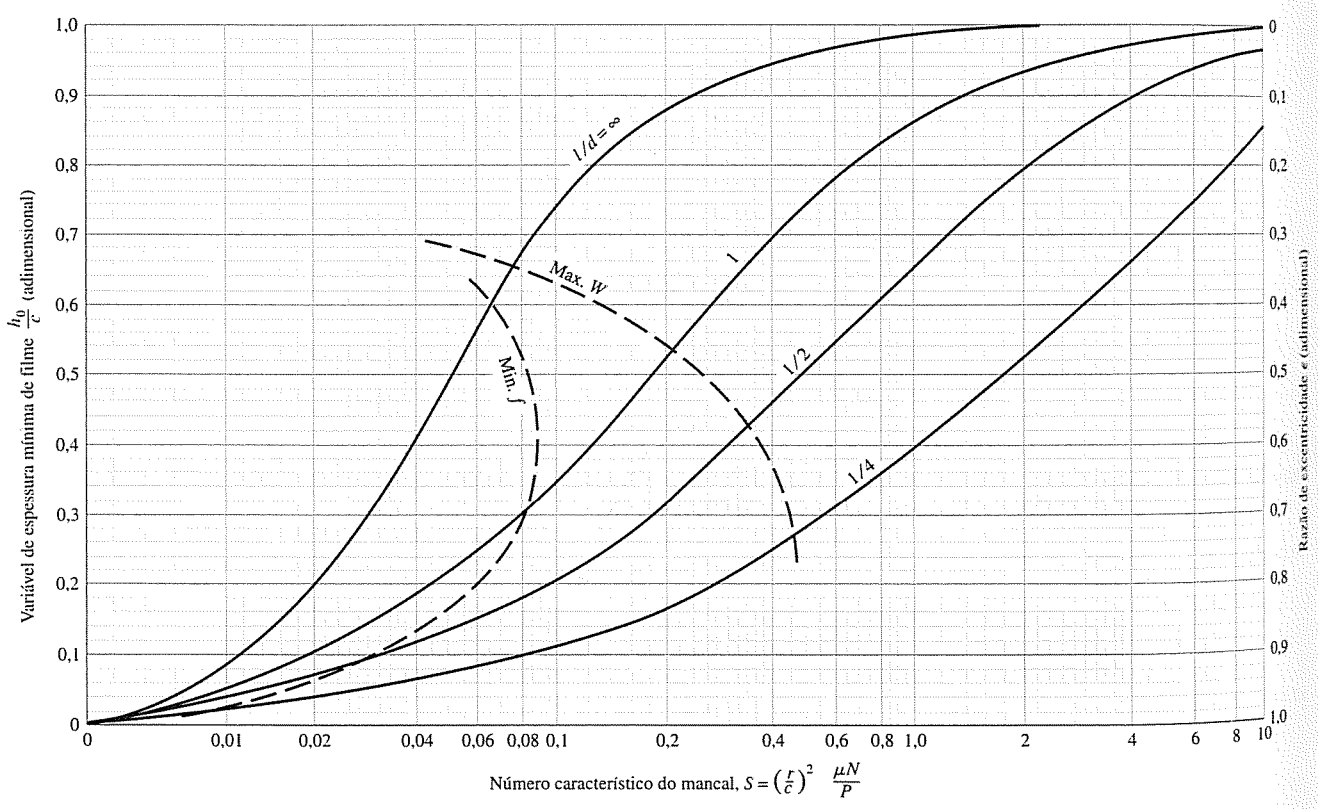


Figura 12-16 Diagrama para variável de espessura mínima de filme e razão de excentricidade. O limite esquerdo da zona define o h_0 ótimo para fricção mínima; o limite direito é h_0 ótimo para carga. *(Raimondi e Boyd.)*

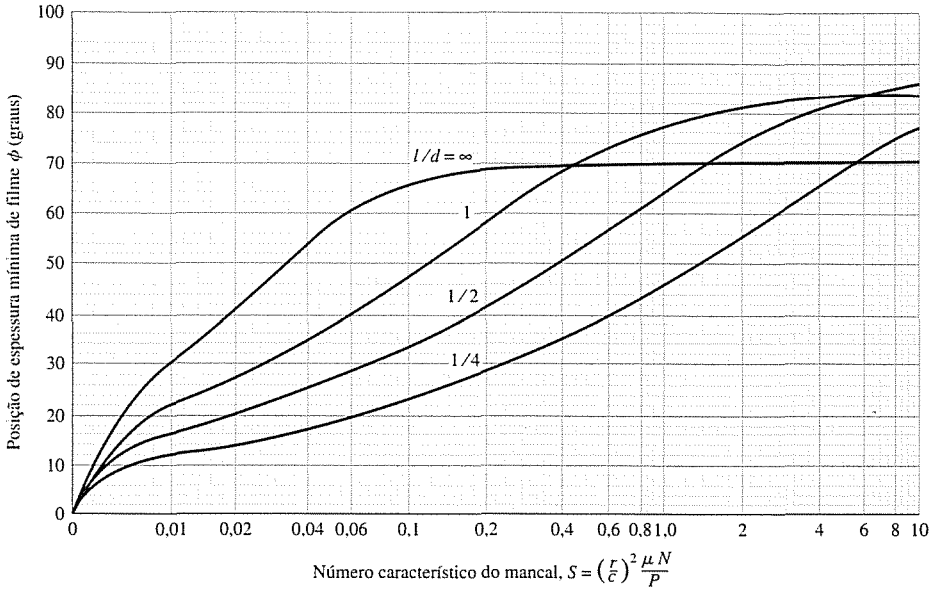


Figura 12-17 Diagrama para determinação da posição de espessura mínima de filme h_0. *(Raimondi e Boyd.)*

EXEMPLO 12-1

Determine h_0 e e utilizando os seguintes parâmetros: $\mu = 4$ μreyn, $N = 30$ rev, $W = 500$ lbf (carga de mancal), $r = 0{,}75$ in, $c = 0{,}0015$ in e $l = 1{,}5$ in.

Solução

A pressão nominal de mancal (em área projetada do munhão) é

$$P = \frac{W}{2rl} = \frac{500}{2(0{,}75)1{,}5} = 222 \text{ psi}$$

O número de Sommerfeld é, a partir da Equação (12-7), na qual $N = N_j = 30$ rev/s,

$$S = \left(\frac{r}{c}\right)^2 \left(\frac{\mu N}{P}\right) = \left(\frac{0{,}75}{0{,}0015}\right)^2 \left[\frac{4(10^{-6})30}{222}\right] = 0{,}135$$

Ademais, $l/d = 1{,}50/[2(0{,}75)] = 1$. Na Figura 12-16, se $S = 0{,}135$ e l/d = 1, obteremos $h_0/c = 0{,}42$ e $\epsilon = 0{,}58$. A quantidade h_0/c é denominada *variável de espessura mínima de filme.* Visto que $c = 0{,}0015$ in, a espessura mínima de filme h_0 é

$$h_0 = 0{,}42(0{,}0015) = 0{,}000\,63 \text{ in}$$

Podemos encontrar a localização angular ϕ da espessura mínima de filme do diagrama a partir da Figura 12-17. Se $S = 0{,}135$ e $l/d = 1$, obteremos $\phi = 53°$.

A razão de excentricidade é $\epsilon = e/c = 0{,}58$. Isso significa que a excentricidade e é

$$e = 0{,}58(0{,}0015) = 0{,}000\,87 \text{ in}$$

Observe que, se o munhão estiver centrado na bucha, $e = 0$ e $h_0 = c$, correspondendo a uma carga muito leve (zero). Haja vista que $e = 0$, $\epsilon = 0$. À medida que a carga é aumentada, o munhão move-se para baixo; a posição-limite é alcançada quando $h_0 = 0$ e $e = c$, isto é, quando o munhão toca a bucha. Por essa condição, a razão de excentricidade é unitária. Uma vez que $h_0 = c - e$, dividindo ambos os lados por c, obtemos

$$\frac{h_0}{c} = 1 - \epsilon$$

Ótimo projeto às vezes são *cargas máximas* – o que constitui uma característica de carregamento de carga do mancal – e, às vezes, *perda mínima de potência parasítica* ou *coeficiente mínimo de fricção*. Linhas tracejadas aparecem na Figura 12-16 para carga máxima e coeficiente mínimo de fricção, de modo que você pode facilmente escolher uma de carga máxima ou coeficiente mínimo de fricção, mas não ambas. A zona entre os dois contornos de linha tracejada pode ser considerada uma localidade desejável para um ponto de projeto.

Coeficiente de Fricção

O diagrama de fricção, Figura 12-18, tem a *variável de fricção* $(r/c)f$ traçada contra o número de Sommerfeld S, com contornos para vários valores da razão l/d.

EXEMPLO 12-2

Utilizando os parâmetros fornecidos no Exemplo 12-1, determine o coeficiente de fricção, o torque para superar a fricção e a perda de potência por fricção.

Solução

Se, na Figura 12-18, $S = 0{,}135$ e $l/d = 1$ encontramos $(r/c)f = 3{,}50$. O coeficiente de fricção f é

$$f = 3{,}50\, c/r = 3{,}50(0{,}0015/0{,}75) = 0{,}0070$$

O torque de fricção no munhão é

$$T = fWr = 0{,}007(500)0{,}75 = 2{,}62 \text{ lbf} \cdot \text{in}$$

A perda de potência em cavalos é

$$(hp)_{\text{perda}} = \frac{TN}{1050} = \frac{2{,}62(30)}{1050} = 0{,}075 \text{ hp}$$

ou, expressa em Btu/s,

$$H = \frac{2\pi TN}{778(12)} = \frac{2\pi(2{,}62)30}{778(12)} = 0{,}0529 \text{ Btu/s}$$

Fluxo de Lubrificante

As Figuras 12-19 e 12-20 são utilizadas para determinar o fluxo de lubrificante e o fluxo lateral.

EXEMPLO 12-3

Seguindo com os parâmetros do Exemplo 12-1, determine a taxa de fluxo volumétrico total Q e a taxa de fluxo lateral Q_s.

Solução

Para estimar o fluxo de lubrificante, coloque na Figura 12-19 $S = 0{,}135$ e $l/d = 1$, para obter $Q/(rcNl) = 4{,}28$. A taxa total de fluxo volumétrico é

$$Q = 4{,}28rcNl = 4{,}28(0{,}75)0{,}0015(30)1{,}5 = 0{,}217 \text{ in}^3/\text{s}$$

A partir da Figura 12-20, encontramos a *razão de fluxo* $Q_s/Q = 0{,}655$, e Q_s é

$$Q_s = 0{,}655Q = 0{,}655(0{,}217) = 0{,}142 \text{ in}^3/\text{s}$$

O vazamento lateral Q_s origina-se da parte inferior do mancal, onde a pressão interna está acima da pressão atmosférica. Tal vazamento forma um filete na junção externa da bucha e do munhão e é levado pelo movimento desse último para o topo da bucha – onde a pressão interna está abaixo da pressão atmosférica e o intervalo é muito maior –, para ser "sugado" e retornar ao reservatório de lubrificante. Aquela porção

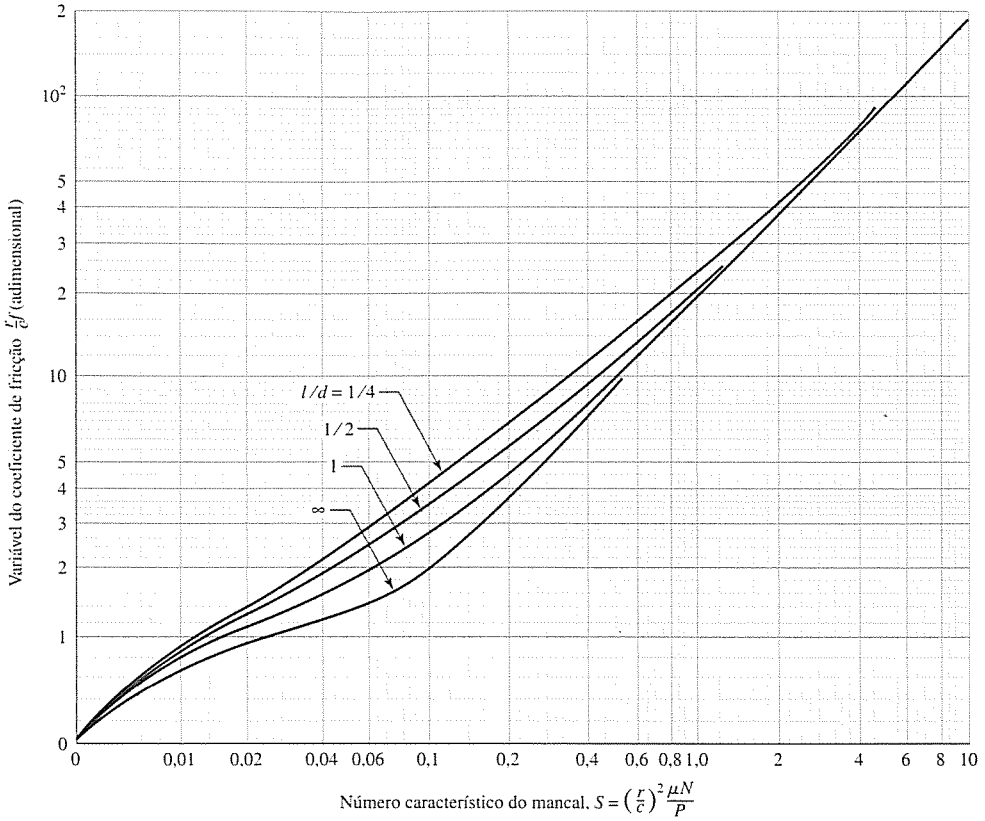


Figura 12-18 Diagrama para a variável de coeficiente de fricção; observe que a equação de Petroff é a assíntota. *(Raimondi e Boyd.)*

do vazamento lateral que vaza para longe do mancal deve ser completada com a adição de óleo ao reservatório do mancal, periodicamente, pelo pessoal da manutenção.

Pressão de Filme

A pressão máxima desenvolvida no filme pode ser estimada encontrando-se a razão de pressão P/p_{max} a partir do diagrama da Figura 12-21. As localizações nas quais as pressões de término e máxima ocorrem, como definido da Figura 12-15, são determinadas a partir da Figura 12-22.

Os Exemplos 12-1 a 12-4 demonstram como os diagramas de Raimondi e Boyd são usados. Deveria estar claro que não temos as relações paramétricas de mancal e munhão como equações, mas na forma de diagramas. Ademais, os exemplos foram simples porque a viscosidade equivalente de estado permanente foi fornecida. Mostraremos, agora, como a temperatura média de filme (e a correspondente viscosidade) é encontrada a partir de considerações de energia.

EXEMPLO 12-4

Utilizando os parâmetros fornecidos no Exemplo 12-1, determine a pressão máxima de filme e as localizações das pressões máxima e de término.

Solução

Se, na Figura 12-21, $S = 0{,}135$ e $l/d = 1$, encontramos $P/p_{max} = 0{,}42$. A pressão máxima p_{max} é, portanto,

$$p_{max} = \frac{P}{0{,}42} = \frac{222}{0{,}42} = 529 \text{ psi}$$

Com $S = 0{,}135$ e $l/d = 1$, a partir da Figura 12-22, $\theta_{Pmax} = 18{,}5°$ e a posição de término θ_{po} é 75°.

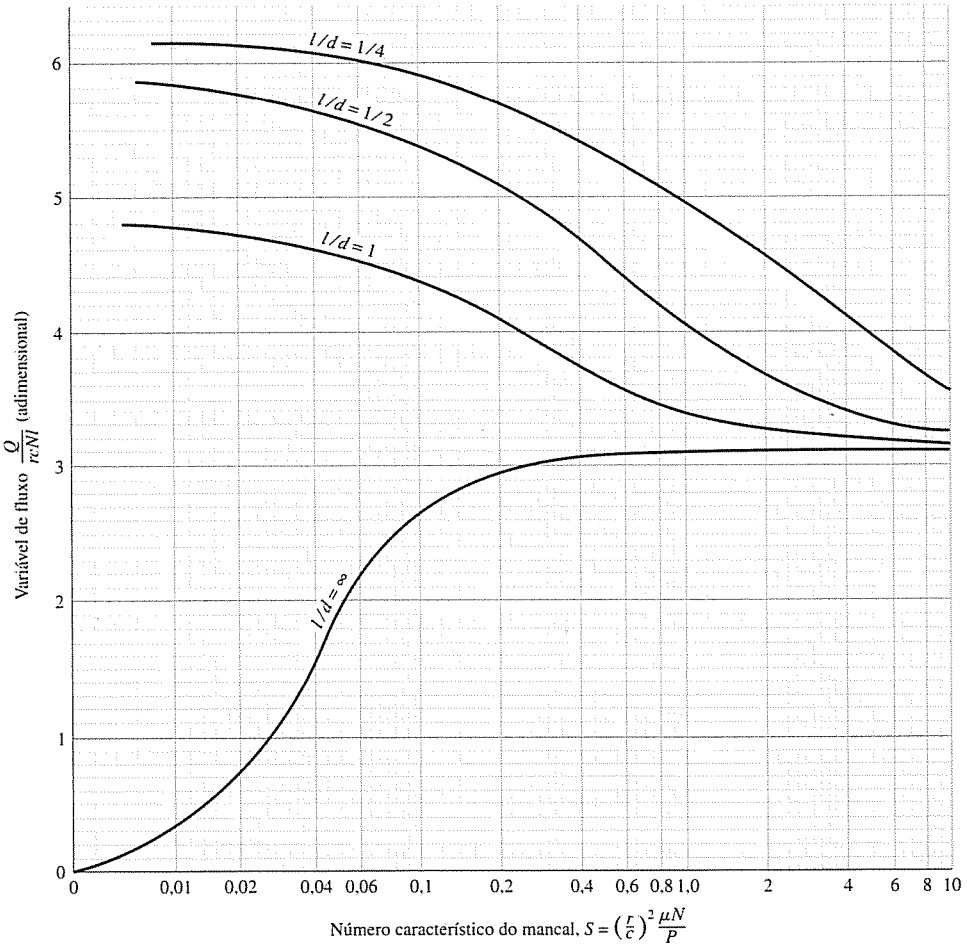


Figura 12-19 Diagrama para variável de fluxo. Nota: não se aplica a mancais de alimentação por pressão. *(Raimondi e Boyd.)*

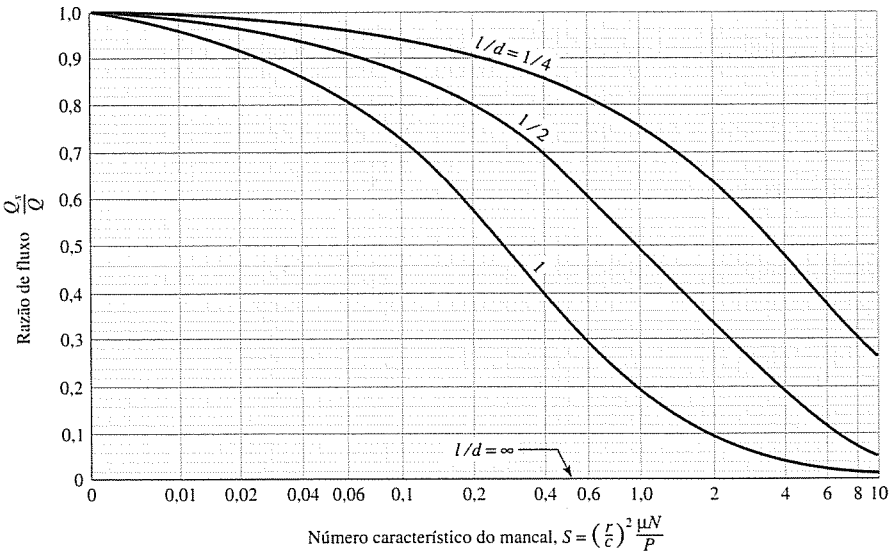


Figura 12-20 Diagrama para determinação da razão do fluxo lateral para o fluxo total. *(Raimondi e Boyd.)*

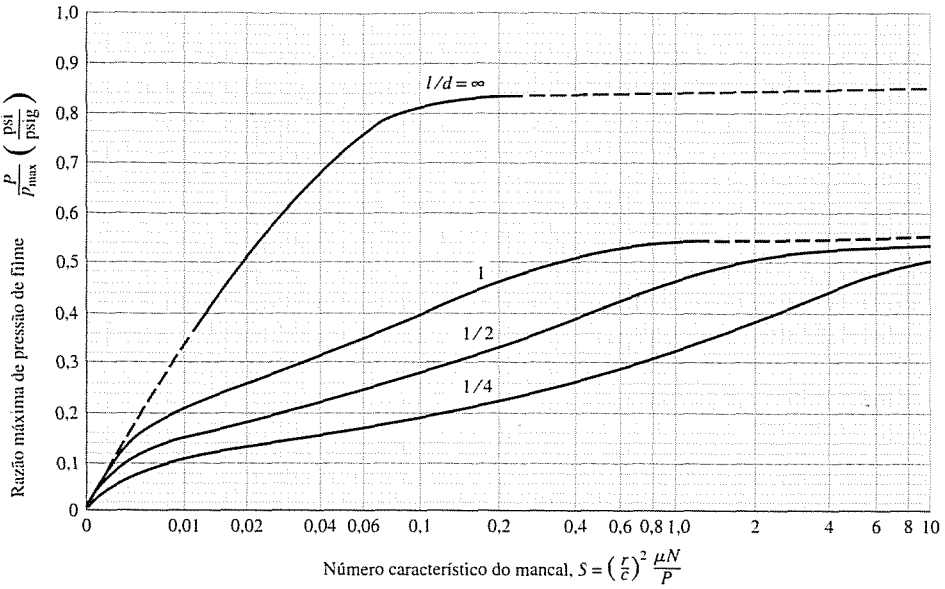


Figura 12-21 Diagrama para determinação da pressão máxima de filme. Nota: Não se aplica a mancais de alimentação por pressão *(Raimondi e Boyd.)*

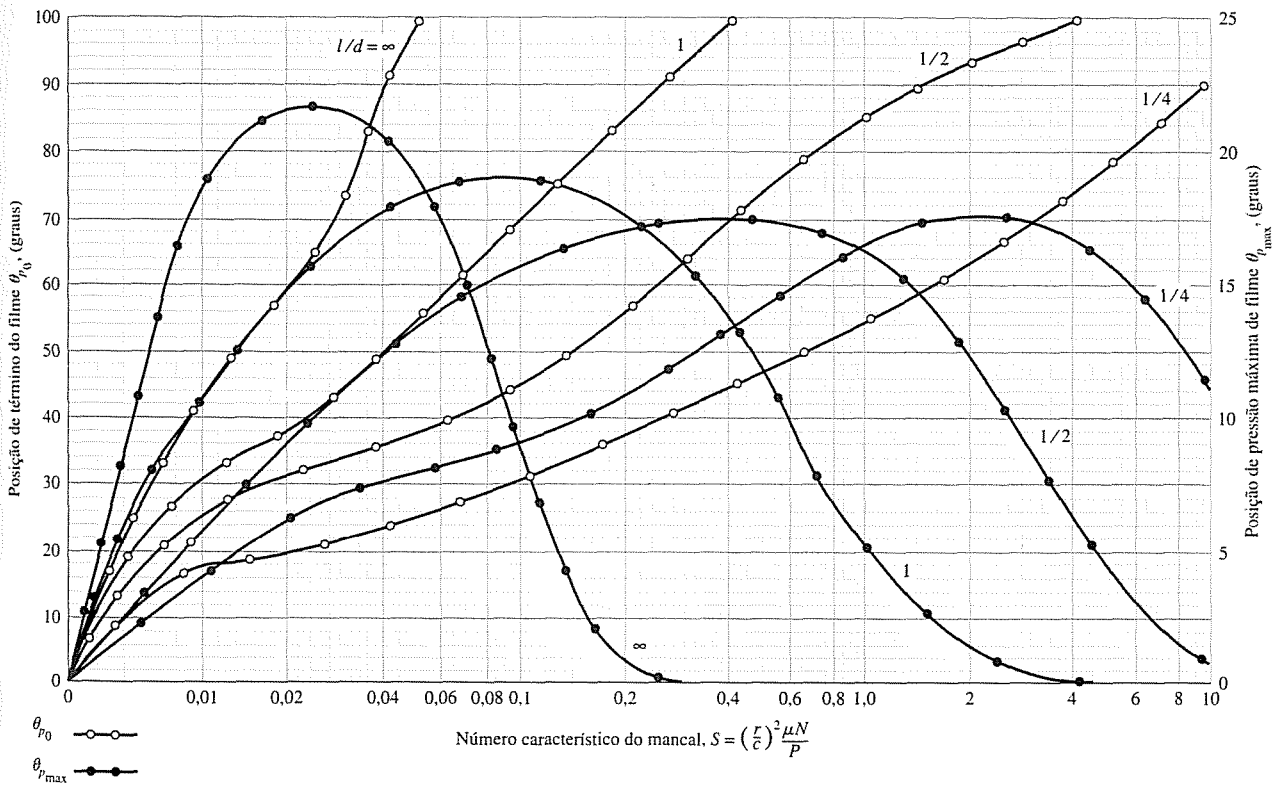


Figura 12-22 Diagrama para encontrar a posição de término do filme de lubrificante e a posição de pressão máxima de filme. *(Raimondi e Boyd.)*

Elevação da Temperatura de Lubrificante

A temperatura do lubrificante aumenta até que a taxa na qual o trabalho é realizado pelo munhão no filme, mediante o cisalhamento do fluido, seja a mesma que aquela na qual o calor é transferido para os arredores maiores. O arranjo específico do encanamento de mancal afeta os relacionamentos quantitativos (ver Figura 12-23). Um reservatório de lubrificante (interno ou externo ao compartimento ou à caixa do mancal) fornece lubrificante, à temperatura T_s do reservatório, ao ânulo de mancal à temperatura $T_s = T_1$. O lubrificante passa uma vez ao redor da bucha e é entregue, a uma temperatura de lubrificante mais alta $T_1 + \Delta T$, ao reservatório. Parte dele vaza para fora do mancal, a uma temperatura de mistura de copa de $T_1 + \Delta T/2$, e retorna ao reservatório. Este pode consistir em um sulco do tipo chaveta na tampa do mancal ou de uma câmara maior, até metade da circunferência do mesmo. Pode ocupar toda a tampa de um mancal bipartido – tipo no qual o vazamento lateral ocorre a partir da porção mais baixa e é sugado de volta para dentro, no arco do filme roto. O reservatório poderia ser satisfatoriamente removido da interface entre bucha e munhão.

Considere

Q = taxa volumétrica de fluxo de óleo para o mancal, in^3/s

Q_s = taxa volumétrica de fluxo de vazamento lateral para fora do mancal e para o reservatório, in^3/s

$Q - Q_s$ = descarga volumétrica de fluxo de óleo do ânulo ao reservatório, in^3/s

T_1 = temperatura de entrada de óleo (igual à temperatura de reservatório T_s), °F

ΔT = aumento de temperatura no óleo entre entrada e saída, °F

ρ = densidade do lubrificante, lbm/in^3

C_p = capacidade específica de calor do lubrificante, Btu/(lbm. °F)

J = calor equivalente em joules, in. lbf/Btu

H = taxa de calor, Btu/s

Usando o reservatório como uma região de controle, podemos escrever um balanço de entalpia. Usando T_1 como a temperatura de referência, obtemos

$$H_{\text{perda}} = \rho C_p Q_s \Delta T/2 + \rho C_p (Q - Q_s)\Delta T = \rho C_p Q \Delta T \left(1 - \frac{1}{2}\frac{Q_s}{Q}\right) \qquad (a)$$

A perda de energia térmica no estado permanente H_{perda} é igual à razão em que o munhão trabalha no filme; logo, $H_{\text{perda}} = \mathcal{W} = 2\pi T N/J$. O torque $T = fWr$, a carga, em termos de pressão, é $W = 2Prl$ e, multiplicando o numerador e o denominador pela folga c, obtemos

$$H_{\text{perda}} = \frac{4\pi PrlNcrf}{J}\frac{}{c} \qquad (b)$$

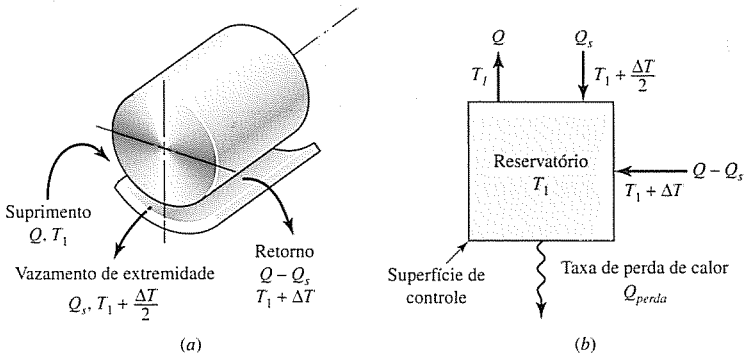


Figura 12-23 Esquema de um mancal de munhão apresentando uma cavidade externa com resfriamento; o lubrificante realiza uma passagem antes de retornar à cavidade.

Igualando as Equações (*a*) e (*b*) e rearranjando os resultados em

$$\frac{J\rho C_p\,\Delta T}{4\pi P} = \frac{rf/c}{(1-0{,}5Q_s/Q)\,[Q/(rcNl)]} \tag{c}$$

Para lubrificantes comuns de petróleo, p = 0,0311 lbm/in^3, Cp = 0,42 Btu/(lbm · °F) e J = 778(12) = 9336 in · lbf/Btu; portanto, o termo esquerdo da Equação (*c*) é

$$\frac{J\rho C_p\,\Delta T}{4\pi P} = \frac{9336(0{,}0311)0{,}42\Delta T_F}{4\pi P_{\text{psi}}} = 9{,}70\frac{\Delta T_F}{P_{\text{psi}}}$$

logo,

$$\frac{9{,}70\Delta T_F}{P_{\text{psi}}} = \frac{rf/c}{\left(1-\frac{1}{2}Q_s/Q\right)(Q/rcN_jl)} \tag{12-15}$$

em que ΔT_F é o aumento de temperatura em °F e P_{psi} é a pressão de mancal em psi. O lado direito da Equação (12-15) pode ser avaliado, a partir das Figuras 12-18 a 12-20, para vários números de Sommerfeld e razões de l/d, visando, assim, a produzir a Figura 12-24. É fácil mostrar que o lado esquerdo da Equação (12-15) pode ser expresso como $0{,}120\Delta T_C / P_{\text{MPa}}$, em que ΔT_C é expressa em °C e a pressão P_{MPa}, em MPa. A ordenada na Figura 12-24 é igualmente $9{,}70\Delta T_F / P_{\text{psi}}$ ou $0{,}120\Delta T_C / P_{\text{MPa}}$, o que não surpreende, visto que ambas são adimensionais nas unidades apropriadas e *idênticas em magnitude*. Uma vez que as soluções para problemas de mancal envolvem iteração e que a leitura de muitos gráficos pode introduzir erros, a Figura 12-24 reduz três gráficos a apenas um – um passo na direção apropriada.

Interpolação

De acordo com Raimondi e Boyd, a interpolação de dados do diagrama para outras razões de *l/d* pode ser feita mediante a equação

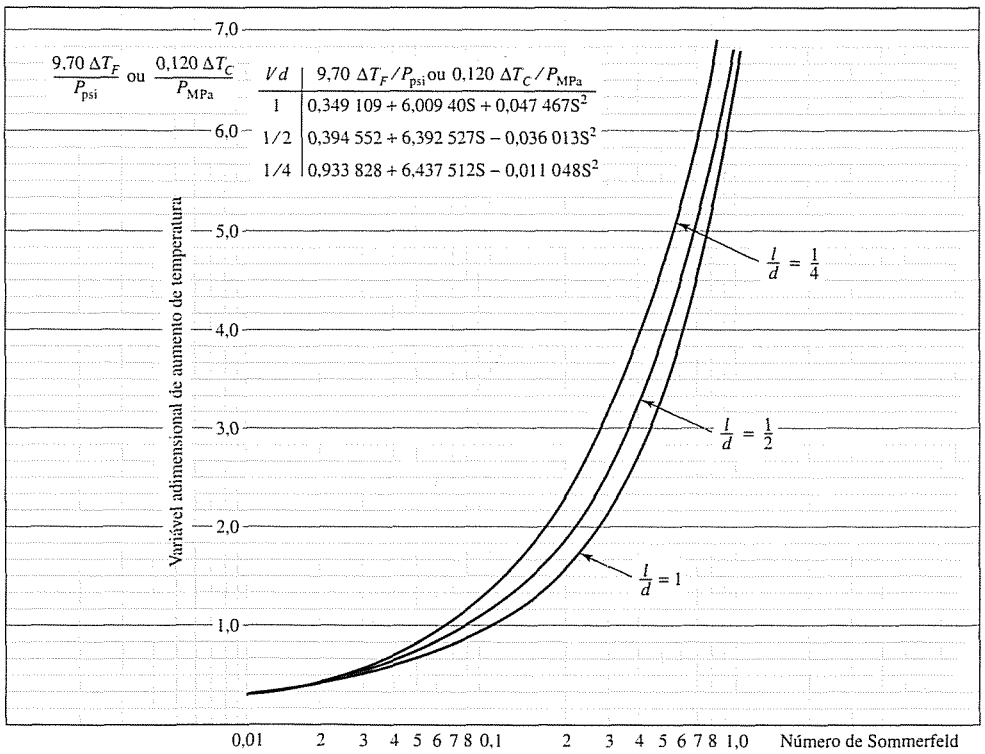


Figura 12-24 Figuras 12-18, 12-19 e 12-20 combinadas para reduzir a busca em tabela iterativa. *(Fonte: Diagrama baseado na manipulação da condição "2" de contorno de Raimondi e Boyd, isto é, nenhuma pressão negativa de lubrificante desenvolvida. O diagrama destina-se a mancal completo de munhão utilizando passo único de lubrificante, o fluxo lateral emerge com o aumento de temperatura ΔT / 2, o fluxo direto emerge com o aumento de temperatura ΔT e o fluxo inteiro é suprido à temperatura de referência do reservatório.)*

$$y = \frac{1}{(l/d)^3}\left[-\frac{1}{8}\left(1-\frac{l}{d}\right)\left(1-2\frac{l}{d}\right)\left(1-4\frac{l}{d}\right)y_\infty + \frac{1}{3}\left(1-2\frac{l}{d}\right)\left(1-4\frac{l}{d}\right)y_1 - \frac{1}{4}\left(1-\frac{l}{d}\right)\left(1-4\frac{l}{d}\right)y_{1/2} + \frac{1}{24}\left(1-\frac{l}{d}\right)\left(1-2\frac{l}{d}\right)y_{1/4}\right] \tag{12-16}$$

na qual y é a variável desejada dentro do intervalo $\infty > l/d > \frac{1}{4}$ e y_∞, y_1, $y_{1/2}$ e $y_{1/4}$ são as correspondentes variáveis para as razões de l/d de ∞, 1, $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$, respectivamente.

12-9 Condições de Estado Permanente em Mancais Autocontidos

O caso no qual o lubrificante leva embora todo o aumento da entalpia do par munhão-bucha já foi discutido. Serão agora abordados os mancais em que o lubrificante aquecido fica dentro do compartimento do mancal. Esses mancais são denominados mancais *autocontidos*, uma vez que o reservatório do lubrificante fica dentro do compartimento do mancal e o lubrificante é resfriado dentro desse compartimento. Tais mancais são descritos como de *bloco de almofada* ou de *pedestal*. Eles são usados em ventiladores, sopradores, bombas e motores, por exemplo. Essencial às considerações de projeto para esses mancais é dissipar o calor de seus compartimentos para os arredores, na mesma razão em que a entalpia está sendo gerada dentro do filme de fluido.

Em um mancal autocontido, o reservatório pode ser posicionado como uma cavidade semelhante à chaveta na bucha, com as extremidades dessa cavidade não penetrando os planos finais da bucha. O óleo do filme deixa o ânulo com cerca de metade das velocidades relativas periféricas do munhão e da bucha e tomba vagarosamente o lubrificante do reservatório, misturando-se com o conteúdo deste. Visto que o filme na "metade" superior da tampa foi cavitado,* ele essencialmente em nada contribui para o suporte da carga, mas sim para a fricção. As tampas dos mancais acham-se em uso onde a cavidade de "chaveta" é expandida, perifericamente, para abarcar a metade superior do mancal. Isso reduz a fricção para a mesma carga, mas o ângulo incluído β do mancal foi reduzido a 180°. Diagramas para esse caso foram incluídos no trabalho de Raimondi e Boyd.

O calor cedido pelo compartimento do mancal pode ser estimado a partir da equação

$$H_{\text{perda}} = \hbar_{\text{CR}} A (T_b - T_\infty) \tag{12-17}$$

na qual H_{perda} = calor dissipado, Btu/h

$\hbar_{\text{CR}}$ = coeficiente global de radiação combinado e transferência de calor de convecção, Btu/(h · ft^2 · °F)

A = área de superfície do compartimento de mancal, ft^2

T_b = temperatura de superfície do compartimento, °F

T_∞ = temperatura ambiente, °F

O coeficiente global $\hbar_{\text{CR}}$ depende de fatores como material, revestimento de superfície, geometria, e até a rugosidade, diferença de temperatura entre o compartimento e os objetos dos arredores, e a velocidade do ar. Depois de Karelitz,[10] e de outros, em ambientes industriais ordinários, o coeficiente global $\hbar_{\text{CR}}$ pode ser tratado como uma constante. Alguns valores representativos são

$$\hbar_{\text{CR}} = \begin{cases} 2 \text{ Btu/(h} \cdot \text{ft}^2 \cdot \text{°F)} & \text{para ar parado} \\ 2{,}7 \text{ Btu/(h} \cdot \text{ft}^2 \cdot \text{°F)} & \text{para ar revolvido pelo eixo} \\ 5{,}9 \text{ Btu/(h} \cdot \text{ft}^2 \cdot \text{°F)} & \text{para ar em movimento a 500 ft/min} \end{cases} \tag{12-18}$$

Uma expressão similar à Equação (12-17) pode ser escrita pela diferença de temperatura $T_f - T_b$ entre o filme de lubrificante e a superfície do compartimento. Isso é possível porque a bucha e o compartimento são metálicos e quase isotérmicos. Se definido $\bar{T}_f$ como a temperatura *média* de filme (a meio caminho entre a temperatura de entrada do lubrificante T_s e a temperatura de saída $T_s + \Delta T$), então a seguinte proporcionalidade pode ser observada entre $\bar{T}_f - T_b$ e a diferença entre a temperatura de superfície do compartimento e a temperatura ambiente, $T_b - T_\infty$:

* N. de T.: Cavitação formação de cavidades (bolhas de vapor ou de gás) em um líquido, por efeito de uma redução da pressão total (pode ocorrer no uso de bombas hidráulicas ou de turbinas).

[10] G. B. Karelitz. "Heat Dissipation in Self-Contained Bearings", Trans. ASME, Vol. 64, 1942, p. 463; D. C. Lemmon e E. R. Booser. "Bearing Oil-Ring Performance", Trans. ASME, J. Bas. Engin., Vol. 88, 1960, p. 327.

$$\bar{T}_f - T_b = \alpha(T_b - T_\infty) \qquad (a)$$

em que $\bar{T}_f$ é a temperatura média de filme e α é uma constante dependendo do esquema de lubrificação e da geometria de compartimento do mancal. A Equação (a) pode ser utilizada para estimar a temperatura do compartimento do mancal. A Tabela 12-2 fornece algum guia concernente a valores convenientes de α. O trabalho de Karelitz permite a ampliação do emprego dos diagramas de Raimondi e Boyd com o objetivo de aplicá-los a diversos tipos de mancais, além do mancal de bloco de almofada de circulação natural.

Solucionando a Equação (a) para T_b, e substituindo na Equação (12-17), obtemos a taxa de perda de calor do mancal para os arredores como

$$H_{\text{perda}} = \frac{\hbar_{\text{CR}} A}{1 + \alpha}(\bar{T}_f - T_\infty) \qquad (12\text{-}19a)$$

e, reescrevendo a Equação (a), obtemos

$$T_b = \frac{\bar{T}_f + \alpha T_\infty}{1 + \alpha} \qquad (12\text{-}19b)$$

Ao se iniciar uma análise de regime permanente, a temperatura média de filme é desconhecida – e daí também a viscosidade do lubrificante em um mancal autocontido. Encontrar as temperaturas de equilíbrio constitui um processo iterativo no qual uma temperatura média de teste do filme (e a correspondente viscosidade) é utilizada para comparar as taxas de geração e de perda de calor. Um ajuste é efetuado para levar ambas a um acordo, o que pode ser realizado em papel, com um arranjo tabular objetivando ajudar a ajustar $\bar{T}_f$ para alcançar a igualdade entre as taxas de geração e de perda de calor. Um algoritmo de encontro de raízes pode ser usado. Mesmo um algoritmo simples pode ser programado para um computador digital.

Devido à ação de cisalhamento, há, no lubrificante, uma liberação de energia uniformemente distribuída que o aquece à medida que executa seu caminho ao redor do mancal. A temperatura é uniforme na direção radial, mas aumenta a partir da temperatura do reservatório T_s de uma quantidade ΔT, durante a passagem do lubrificante. O lubrificante que sai mistura-se ao conteúdo do reservatório, sendo resfriado à temperatura deste. O lubrificante no reservatório é resfriado porque a bucha e o metal do compartimento encontram-se a uma temperatura menor quase uniforme, em decorrência das perdas de calor, por convecção e radiação, para os arredores à temperatura ambiente T_∞. Nas configurações usuais desses mancais, as temperaturas da bucha e do metal do compartimento estão aproximadamente entre a metade da temperatura do filme $\bar{T}_f = Ts + \Delta T/2$ e a temperatura do ambiente T_∞. A taxa de geração de calor H_{ger}, em regime permanente, é igual à taxa de trabalho do torque friccional T. Expressar isso em Btu/h requer as constantes de conversão 2545 Btu/(hp · h) e 1050 (lbf · in)(rev/s)/hp, resultando em $H_{\text{ger}} = 2545\,TN/1050$. Assim, a partir da Equação (a), Seção 12-3, o torque é $T = 4\pi^2 r^3 l\mu/c$, resultando em

$$H_{\text{ger}} = \frac{2545}{1050}\frac{4\pi^2 r^3 l \mu N}{c} N = \frac{95{,}69\mu N^2 l r^3}{c} \qquad (b)$$

Equilibrando isso com a Equação (12-19a), e solucionando para $\bar{T}_f$ obtemos

$$\bar{T}_f = T_\infty + 95{,}69(1 + \alpha)\frac{\mu N^2 l r^3}{\hbar_{\text{CR}} A c} \qquad (12\text{-}20)$$

Tabela 12-2

Sistema de lubrificação	Condições	Intervalo de α
Anel de lubrificação de óleo	Ar em movimento	1-2
	Ar parado	$\frac{1}{2}$–1
Banho de óleo	Ar em movimento	$\frac{1}{2}$–1
	Ar parado	$\frac{1}{5}$–$\frac{2}{5}$

EXEMPLO 12-5

Considere um mancal de bloco de almofadas com um reservatório de chaveta, cujo munhão roda a 900 rpm em um ar agitado pelo eixo a 70°F, com $\alpha = 1$. A área lateral do mancal é de 40 in^2. O lubrificante é óleo SAE grau 20. A carga radial gravitacional é de 100 lbf, e a razão de l/d é unitária. O mancal tem um diâmetro de munhão de 2,000 + 0,000/–0,002 in e um orifício de bucha de 2,002 + 0,004/–0,000 in. Para uma montagem de folga mínima, estime as temperaturas de regime permanente, bem como a espessura mínima de filme e o coeficiente de fricção.

Solução

A folga radial mínima, $c_{\min}$, é igual a

$$c_{\min} = \frac{2{,}002 - 2{,}000}{2} = 0{,}001 \text{ in}$$

$$P = \frac{W}{ld} = \frac{100}{(2)2} = 25 \text{ psi}$$

$$S = \left(\frac{r}{c}\right)^2 \frac{\mu N}{P} = \left(\frac{1}{0{,}001}\right)^2 \frac{\mu'(15)}{10^6(25)} = 0{,}6\,\mu'$$

em que μ'é a viscosidade em $\mu reyn$. A perda de potência por fricção, $(hp)_f$ é encontrada como segue:

$$(\text{hp})_f = \frac{fWrN}{1050} = \frac{WNc}{1050}\frac{fr}{c} = \frac{100(900/60)0{,}001}{1050}\frac{fr}{c} = 0{,}001\,429\frac{fr}{c} \text{ hp}$$

A taxa de geração de calor H_{ger}, em Btu/h, é

$$H_{\text{ger}} = 2545(\text{hp})_f = 2545(0{,}001\,429)fr/c = 3{,}637\,fr/c \text{ Btu/h}$$

A partir da Equação (12-19a), com $\bar{h}_{CR}$ = 2,7 Btu/(h · ft^2 · °F), a taxa de perda de calor para o ambiente H_{perda} é

$$H_{\text{perda}} = \frac{\bar{h}_{CR}A}{\alpha + 1}(\bar{T}_f - 70) = \frac{2{,}7(40/144)}{(1+1)}(\bar{T}_f - 70) = 0{,}375(\bar{T}_f - 70) \text{ Btu/h}$$

Construa uma tabela, como a que segue, para valores de $\bar{T}_f$ de tentativa, desde 190 até 195°F.

Tentativa $\bar{T}_f$	μ'	S	fr/c	H_{ger}	H_{perda}
190	1,15	0,69	13,6	49,5	45,0
195	1,03	0,62	12,2	44,4	46,9

A temperatura na qual $H_{ger} = H_{perda}$ = 46,3 Btu/h é 193,4°F. Arredondando $\bar{T}_f$ para 193°F, encontramos μ' = 1,08 μreyn e S = 0,6(1,08) = 0,65. A partir da Figura 12-24, 9,70$\Delta T_F/P$ = 4,25 °F/psi; logo,

$$\Delta T_F = 4{,}25P/9{,}70 = 4{,}25(25)/9{,}70 = 11{,}0°\text{F}$$

$$T_1 = T_s = \bar{T}_f - \Delta T/2 = 193 - 11/2 = 187{,}5°\text{F}$$

$$T_{\max} = T_1 + \Delta T_F = 187{,}5 + 11 = 198{,}5°\text{F}$$

A partir da Equação (12-19b),

$$T_b = \frac{T_f + \alpha T_\infty}{1 + \alpha} = \frac{193 + (1)70}{1 + 1} = 131{,}5°\text{F}$$

com S = 0,65, a espessura mínima de filme, a partir da Figura 12-16, é

$$h_0 = \frac{h_0}{c}c = 0{,}79(0{,}001) = 0{,}000\,79 \text{ in}$$

O coeficiente de fricção, a partir da Figura 12-18, é

$$f = \frac{fr}{c}\frac{c}{r} = 12{,}8\frac{0{,}001}{1} = 0{,}012\,8$$

O torque parasita de fricção T é

$$T = fWr = 0{,}012\,8(100)(1) = 1{,}28 \text{ lbf} \cdot \text{in}$$

12-10 Folga

Ao projetar um mancal de munhão para a lubrificação de filme espesso, o engenheiro deve selecionar o grau do óleo a ser utilizado, junto com os valores apropriados para P, N, r, c e l. Uma má seleção ou um controle inadequado destes, durante a manufatura ou em sua utilização, podem resultar em um filme muito fino, de modo que o fluxo de óleo será insuficiente, causando superaquecimento do mancal e, então, falha. Ademais, a folga radial c é difícil de manter precisa durante a manufatura, podendo aumentar em decorrência do desgaste. Qual é o efeito de um intervalo completo de folgas radiais, esperadas na manufatura, e o que acontecerá ao desempenho do mancal se c aumentar devido ao desgaste? Muitas dessas questões podem ser respondidas e o projeto, otimizado ao se traçarem as curvas do desempenho como funções das quantidades sobre as quais o projetista tem controle.

A Figura 12-25 mostra os resultados obtidos quando o desempenho de um determinado mancal é calculado para um intervalo completo de folgas radiais e traçado com a folga como variável independente. O mancal utilizado para este gráfico é o mesmo dos Exemplos 12-1 a 12-4, com óleo SAE 20 a uma temperatura de entrada de 100°F. O gráfico mostra que, se a folga for muito apertada, a temperatura será muito alta e a espessura mínima de filme, muito pequena. Altas temperaturas podem fazer o mancal falhar por fadiga. Se o filme de óleo for muito fino, partículas de sujeira poderão ser incapazes de passar sem escoriar, ou poderão encravar-se no mancal. De qualquer forma, haverá desgaste excessivo e fricção, resultando em temperaturas elevadas e em possível emperramento.

Para investigar o problema mais detalhadamente, a Tabela 12-3 foi preparada utilizando-se os dois tipos de ajustes correntes preferidos, os quais parecem ser mais úteis para o projeto de mancal de munhão

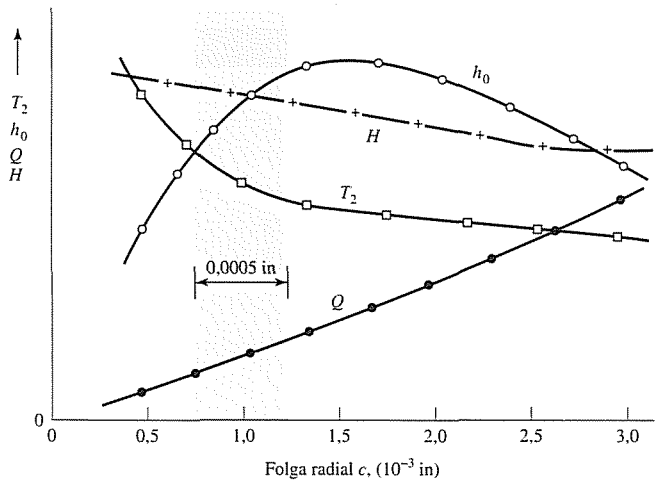


Figura 12-25 Um gráfico de algumas características de desempenho do mancal dos Exemplos 12-1 a 12-4 para folgas radiais de 0,0005 a 0,003 in. A temperatura de saída do mancal é designada T_2. Mancais novos devem ser projetados para a zona sombreada, em virtude de que o desgaste moverá o ponto de operação para a direita.

Tabela 12-3 Folgas máximas, mínimas e médias para mancais de munhão de 1,5 in de diâmetro com base no tipo de ajuste

		Folga c, in		
Tipo de ajuste	Símbolo	Máxima	Média	Mínima
Passagem apertada	H8/f7	0,001 75	0,001 125	0,000 5
Passagem livre	H9/d9	0,003 95	0,002 75	0,001 55

(ver Tabela 2-8). Os resultados exibidos na Tabela 12-3 foram obtidos a partir das Equações (2-38) e (2-39) da Seção 2-6. Observe que existe uma ligeira sobreposição, mas o intervalo de folgas para os ajustes de passagem livre é cerca de duas vezes aquele do ajuste de passagem apertada.

As seis folgas da Tabela 12-3 foram usadas em um programa de computador, de modo a obter os resultados numéricos mostrados na Tabela 12-4. Tais resultados correspondem aos da Figura 12-25, também. Tanto a tabela como a figura mostram que uma folga apertada resulta em uma temperatura elevada. A Figura 12-26 pode ser empregada para estimar um limite superior de temperatura quando as características da aplicação são conhecidas.

Parecia que uma folga grande permitiria às partículas de sujeita passar, assim como também permitiria um grande fluxo de óleo, como indicado na Tabela 12-4. Isso diminui a temperatura e aumenta a vida do mancal. Contudo, se a folga se tornar muito grande, o mancal, por sua vez, tornar-se-á barulhento e a espessura mínima de filme começará a decrescer novamente.

Entre essas duas limitações, existe um intervalo bastante grande de folgas, o qual resultará em um desempenho satisfatório do mancal.

Quando a tolerância de produção e o desgaste futuro no mancal são ambos considerados, vê-se, a partir da Figura 12-25, que o melhor compromisso é um intervalo de folga ligeiramente para a esquerda do topo da curva de espessura mínima de filme. Dessa maneira, o desgaste futuro moverá o ponto de operação para a direita, aumentará a espessura do filme e decrescerá a temperatura de operação.

12-11 Mancais de Alimentação por Pressão

A capacidade de suster a carga dos mancais de munhão de circulação natural autocontidos é muito restrita. O fator que melhor limita o desempenho é a capacidade de dissipação de calor do mancal. A princípio, uma forma de aumentar essa dissipação implica resfriar o reservatório com um fluido externo como a água. O problema da alta temperatura reside no filme em que o calor é gerado, mas nele o resfriamento não é possível senão posteriormente. Isso não evita se exceder à temperatura máxima admissível do lubrificante. Uma segunda alternativa é reduzir consideravelmente a *elevação de temperatura* no filme, aumentando, para tan-

Tabela 12-4 Desempenho do mancal de munhão de 1,5 in de diâmetro com várias folgas. (Lubrificante SAE 20, T_i = 100°F, N = 30 r/s, W = 500 lbf, L = 1,5 in)

c, in	T_2, °F	h_o, in	f	Q, in³/s	H, Btu/s
0,000 5	226	0,000 38	0,011 3	0,061	0,086
0,001 125	142	0,000 65	0,009 0	0,153	0,068
0,001 55	133	0,000 77	0,008 7	0,218	0,066
0,001 75	128	0,000 76	0,008 4	0,252	0,064
0,002 75	118	0,000 73	0,007 9	0,419	0,060
0,003 95	113	0,000 69	0,007 7	0,617	0,059

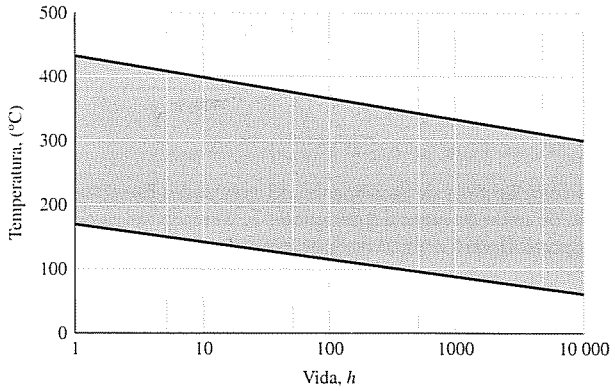


Figura 12-26 Limites de temperatura para óleos minerais. O limite inferior é para óleos contendo antioxidantes e se aplica quando o oxigênio suprido é ilimitado. O limite superior se aplica quando quantidades insignificantes de oxigênio estão presentes. A vida na zona sombreada depende da quantidade de oxigênio e catalisadores presente. *(Fonte: M. J. Neale (ed.),* Tribology Handbook, *Section B1, Newnes-Butterworth, London, 1975.)*

to, a taxa de fluxo de lubrificante. Este está, por si só, reduzindo a elevação da temperatura. Um reservatório resfriado à base de água pode ainda ser levado em consideração. Para aumentar o fluxo de lubrificante, uma bomba externa deve ser utilizada com o lubrificante provido a pressões de dezenas de libras por dimensões em polegada quadrada. Devido a esse fornecimento ao mancal sob pressão, tais mancais são denominados *mancais de alimentação por pressão.*

Para forçar um fluxo maior através do mancal e assim obter um efeito de resfriamento aumentado, uma prática comum é utilizar um sulco circunferente no centro do mancal, com um orifício de suprimento de óleo oposto à zona de carga dele. Um mancal desse tipo é mostrado na Figura 12-27. O efeito do sulco é criar dois meio-mancais, cada qual com uma razão l/d menor que a original. Tal sulco divide a curva de distribuição de pressão em dois lóbulos e reduz a espessura mínima de filme; não obstante, ele conta com ampla aceitação entre os engenheiros de lubrificação, uma vez que tais mancais carregam mais carga sem superaquecer.

A fim de estabelecer um método de solução para o fluxo de óleo, assumiremos um sulco amplo o suficiente, de modo que a queda de pressão nele seja pequena. Inicialmente, ignoraremos a excentricidade e então aplicaremos um fator de correção para essa condição. O fluxo de óleo é, assim, a quantidade que flui para fora das duas metades do mancal, na direção do eixo concêntrico. Se ignorarmos a rotação do eixo, o fluxo de lubrificante será causado pela pressão de suprimento p_s, mostrada na Figura 12-28. O fluxo laminar é admitido, com a pressão variando linearmente de $p = p_s$, em $x = 0$, a $p = 0$, em $x = l'$. Considere o equilíbrio estático de um elemento de espessura dx, altura $2y$ e profundidade unitária. Observe especialmente que a origem do sistema de referência foi escolhida no ponto médio do espaço de folga e que a simetria em relação ao eixo x está implícita, com as tensões de cisalhamento τ sendo iguais nas superfícies de topo e fundo. A equação de equilíbrio na direção x é

$$-2y(p + dp) + 2yp + 2\tau\, dx = 0 \tag{a}$$

Expandindo e cancelando termos, descobrimos que

$$\tau = y\frac{dp}{dx} \tag{b}$$

A equação de Newton para fluxo viscoso [Equação (12-1)] é

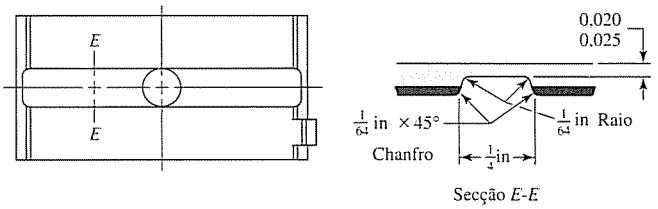


Figura 12-27 Sulco anular completo, localizado centralmente. *(Cortesia da Cleveland Graphite Bronze Company, Division of Clevite Corporation.)*

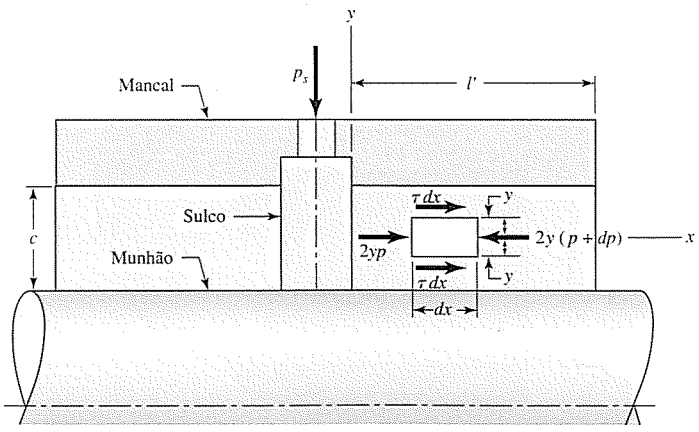


Figura 12-28 Fluxo de lubrificante de um mancal de alimentação por pressão com um sulco central anular.

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \tag{c}$$

Agora, eliminando τ das Equações (*b*) e (*c*), obtemos

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} y \tag{d}$$

Tratando *dp/dx* como uma constante, e integrando com respeito a *y*, obtemos

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y^2 + C_1 \tag{e}$$

Nos contornos, onde y = ± *c*/2, a velocidade *u* é zero. Utilizando uma dessas condições na Equação (*e*), obtemos

$$0 = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} \left(\frac{c}{2}\right)^2 + C_1$$

ou

$$C_1 = -\frac{c^2}{8\mu} \frac{dp}{dx}$$

Substituindo essa constante na Equação (*e*), produz-se

$$u = \frac{1}{8\mu} \frac{dp}{dx} (4y^2 - c^2) \tag{f}$$

Assumindo que a pressão de óleo varia linearmente de p_s a 0 em $x = 0$ a l', respectivamente, a pressão pode ser escrita como

$$p = p_s - \frac{p_s}{l'} x \tag{g}$$

e, portanto, o gradiente de pressão é fornecido por

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{p_s}{l'} \tag{h}$$

Podemos, agora, substituir a Equação (*h*) na Equação (*f*), para obter o relacionamento entre a velocidade do óleo e a coordenada *y*:

$$u = \frac{p_s}{8\mu l'} (c^2 - 4y^2) \tag{12-21}$$

A Figura 12-29 apresenta um gráfico dessa relação ajustado no espaço de folga *c*, de modo que você pode verificar como a velocidade do lubrificante varia desde a superfície do munhão até a do mancal. A distribuição é parabólica, como mostrado, com a velocidade máxima ocorrendo no centro, onde $y = 0$. A magnitude é, a partir da Equação (12-21),

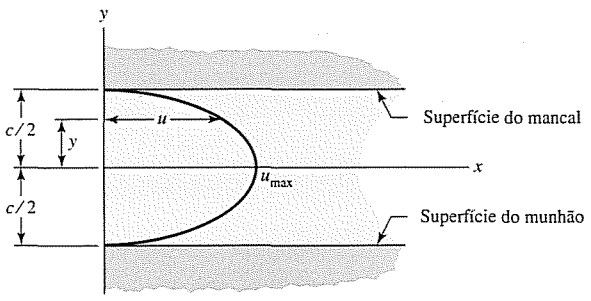


Figura 12-29 Uma distribuição parabólica de velocidade do lubrificante.

$$u_{\max} = \frac{p_s c^2}{8\mu l'} \tag{i}$$

Para considerar a excentricidade, tal como exibida na Figura 12-30, a espessura de filme é $h = c - e \cos\theta$. Substituindo h por c na Equação (i), com a ordenada média de uma parábola sendo dois terços da máxima, a velocidade média em qualquer posição angular θ é

$$u_{\text{av}} = \frac{2}{3}\frac{p_s h^2}{8\mu l'} = \frac{p_s}{12\mu l'}(c - e\cos\theta)^2 \tag{j}$$

Ainda temos de seguir um pouco mais adiante nesta análise; portanto, seja paciente. Agora que dispomos de uma expressão para a velocidade do lubrificante, podemos computar a quantidade deste que flui para fora de ambas as extremidades; o fluxo lateral elementar em qualquer posição θ (Figura 12-30) é

$$dQ_s = 2u_{\text{av}}\, dA = 2u_{\text{av}}(rh\, d\theta) \tag{k}$$

em que dA é a área elementar. Substituindo u_{av} da Equação (j) e h da Figura 12-30, obtemos

$$dQ_s = \frac{p_s r}{6\mu l'}(c - e\cos\theta)^3\, d\theta \tag{l}$$

Integrando ao redor do mancal, obtemos o fluxo lateral total como

$$Q_s = \int dQ_s = \frac{p_s r}{6\mu l'}\int_0^{2\pi}(c - e\cos\theta)^3\, d\theta = \frac{p_s r}{6\mu l'}(2\pi c^3 + 3\pi\, ce^2)$$

Rearranjando, com $\epsilon = e/c$, obtemos

$$Q_s = \frac{\pi p_s r c^3}{3\mu l'}(1 + 1{,}5\epsilon^2) \tag{12-22}$$

Ao analisar o desempenho dos mancais de alimentação por pressão, o comprimento do mancal deve ser assumido conforme l', como definido na Figura 12-28. A pressão característica em cada um dos dois mancais que constituem a montagem do mancal de alimentação por pressão P é dada por

$$P = \frac{W/2}{2rl'} = \frac{W}{4rl'} \tag{12-23}$$

Os diagramas para a variável de fluxo e para a razão de fluxo (Figuras 12-19 e 12-20) não se aplicam aos mancais de alimentação por pressão. Ademais, a pressão máxima de filme fornecida na Figura 12-21 deve ser aumentada pela pressão de suprimento de óleo p_s, de modo a obter a pressão total de filme.

Visto que o fluxo de óleo foi aumentado por alimentação forçada, a Equação (12-14) produzirá uma elevação de temperatura muito alta, pois o fluxo lateral carrega para longe todo o calor gerado. A canaliza-

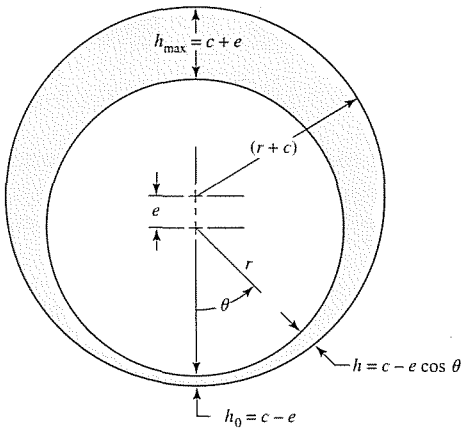


Figura 12-30

ção em um mancal de alimentação pressurizada está representada esquematicamente na Figura 12-31. O óleo deixa o reservatório à temperatura mantida externamente T_s, à taxa volumétrica Q_s. O ganho de calor do fluido passando através do mancal é

$$H_{\text{ganho}} = 2\,\rho C_p (Q_s/2)\Delta T = \rho C_p Q_s \Delta T \tag{m}$$

Em regime permanente, a taxa na qual o munhão produz trabalho de fricção no filme de fluido é

$$H_f = \frac{2\pi TN}{J} = \frac{2\pi f WrN}{J} = \frac{2\pi WNc}{J}\frac{fr}{c} \tag{n}$$

Igualando o ganho de calor ao trabalho de fricção, e solucionando para ΔT, obtemos

$$\Delta T = \frac{2\pi WNc}{J\rho C_p Q_s}\frac{fr}{c} \tag{o}$$

Substituindo a Equação (12-22) por Q_s na equação para ΔT, obtemos

$$\Delta T = \frac{2\pi}{J\rho C_p} WNc\frac{fr}{c}\frac{3\mu l'}{(1+1{,}5\epsilon^2)\pi p_s r c^3}$$

O número de Sommerfeld pode ser expresso como

$$S = \left(\frac{r}{c}\right)^2 \frac{\mu N}{P} = \left(\frac{r}{c}\right)^2 \frac{4rl'\mu N}{W}$$

Solucionando para $\mu Nl'$ na expressão de Sommerfeld, substituindo na expressão de ΔT e usando $J = 9336$ lbf · in/Btu, $p = 0{,}0311$ lbf/in^3 e $C_P = 0{,}42$ Btu/(lbf · °F), encontramos

$$\Delta T_F = \frac{3(fr/c)SW^2}{2J\rho C_p p_s r^4}\frac{1}{(1+1{,}5\epsilon^2)} = \frac{0{,}0123(fr/c)SW^2}{(1+1{,}5\epsilon^2)p_s r^4} \tag{12-24}$$

em que ΔT_F é ΔT em °F. A equação correspondente em unidades SI utiliza a carga do mancal W em kN, a pressão de suprimento de lubrificante p_s em kPa e o raio do munhão r em mm:

$$\Delta T_C = \frac{978(10^6)}{1+1{,}5\epsilon^2}\frac{(fr/c)SW^2}{p_s r^4} \tag{12-25}$$

Um exemplo de análise de um mancal de alimentação por pressão será útil.

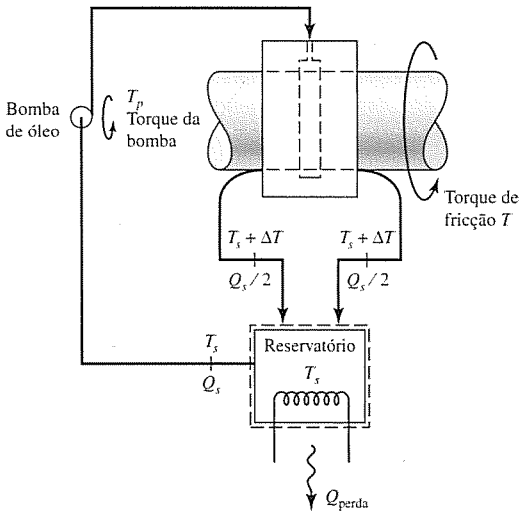


Figura 12-31 Mancal de munhão de sulco anular completo, localizado centralmente, alimentado por pressão, com reservatório externo espiralado de lubrificante.

EXEMPLO 12-6

Um mancal de alimentação por pressão de sulco circunferente é lubrificado com óleo SAE grau 20, fornecido a uma pressão no medidor de 30 psi. O diâmetro do munhão d_j é de 1,750 in, com uma tolerância unilateral de –0,002 in. A bucha circunferente central tem um diâmetro d_b de 1,753 in, com uma tolerância unilateral de +0,004 in. A razão l'/d dos dois "meio-mancais" que constituem o mancal completo de alimentação por pressão é de 1/2. A velocidade angular do munhão é de 300 rpm, ou 50 rev/s, e a carga permanente radial é de 900 lbf. O reservatório externo é mantido a 120°F, desde que a transferência de calor necessária não exceda a 800 Btu/h.

(*a*) Encontre a temperatura média de filme de regime permanente.

(*b*) Compare h_0, T_{max} e P_{st} com o critério de Trumpler.

(*c*) Estime o fluxo lateral volumétrico Q_s, a taxa de perda de calor H_{perda} e o torque parasita de fricção.

Solução (*a*)

$$r = \frac{d_j}{2} = \frac{1{,}750}{2} = 0{,}875 \text{ in}$$

$$c_{min} = \frac{(d_b)_{min} - (d_j)_{max}}{2} = \frac{1{,}753 - 1{,}750}{2} = 0{,}0015 \text{ in}$$

Sendo $l'/d = 1/2$, $l' = d/2 = r = 0{,}875$ in. Assim, a pressão devida à carga é

$$P = \frac{W}{4rl'} = \frac{900}{4(0{,}875)0{,}875} = 294 \text{ psi}$$

O número de Sommerfeld S pode ser expresso como

$$S = \left(\frac{r}{c}\right)^2 \frac{\mu N}{P} = \left(\frac{0{,}875}{0{,}0015}\right)^2 \frac{\mu'}{(10^6)} \frac{50}{294} = 0{,}0579\mu' \qquad (1)$$

Faremos uso de um método de tabulação para encontrar a temperatura média de filme. Essa temperatura, na primeira tentativa $\bar{T}_f$, será de 170°F. Com o ajuste de curva de Seireg contido na Tabela 12-1, obtemos

$$\mu' = 0{,}0136 \exp[1271{,}6/(170 + 95)] = 1{,}650 \ \mu\text{reyn}$$

A partir da Equação (1),

$$S = 0{,}0579\mu' = 0{,}0579(1{,}650) = 0{,}0955$$

A partir da Figura (12-18), $fr/c = 33$, e da Figura (12-16), $\epsilon = 0{,}80$. A partir da Figura (12-24),

$$\Delta T_F = \frac{0{,}0123(3{,}3)0{,}0955(900^2)}{[1 + 1{,}5(0{,}80)^2]30(0{,}875^4)} = 91{,}1°\text{F}$$

$$T_{av} = T_s + \frac{\Delta T}{2} = 120 + \frac{91{,}1}{2} = 165{,}6°\text{F}$$

Formamos uma tabela, adicionando uma segunda linha com $\bar{T}f = 168{,}5$°F:

Tentativa $\bar{T}_f$	μ'	S	fr/c	ϵ	ΔT_F	T_{av}
170	1,65	0,0955	3,3	0,800	91,1	165,6
168,5	1,693	0,0980	3,39	0,792	97,1	168,5

Se a iteração não tivesse encerrado, poder-se-ia traçar a tentativa $\bar{T}_f$ contra a resultante T_{av} e desenhar uma linha reta entre elas, com a intersecção com uma linha $\bar{T}_f = T_{av}$ definindo a nova tentativa $\bar{T}_f$. O resultado dessa tabulação é $\bar{T}_f = 168{,}5$, $\Delta T_F = 97{,}1$°F e $T_{max} = 120 + 97{,}1 = 217{,}1$°F.

(*b*) Visto que $h_0 = (1 - \epsilon)c$,

$$h_0 = (1 - 0{,}792)0{,}0015 = 0{,}000\,312 \text{ in}$$

Os quatro critérios requeridos de Trumpler, de "Velocidade angular significativa", na Seção 12-7, são

$$h_0 \geq 0{,}0002 + 0{,}000\,04(1{,}750) = 0{,}000\,270 \text{ in} \qquad \text{(correto)}$$

$$T_{\max} = T_s + \Delta T = 120 + 97{,}1 = 217{,}1°\text{F} \qquad \text{(correto)}$$

$$P_{st} = \frac{W_{st}}{4rl'} = \frac{900}{4(0{,}875)0{,}875} = 294 \text{ psi} \qquad \text{(correto)}$$

O fator de segurança na carga é aproximadamente unitário. (incorreto)

(*c*) A partir da Equação (12-22),

$$Q_s = \frac{\pi(30)0{,}875(0{,}0015)^3}{3(1{,}693)10^{-6}(0{,}875)}[1 + 1{,}5(0{,}80)^2] = 0{,}123 \text{ in}^3/\text{s}$$

$$H_{\text{perda}} = \rho C_p Q_s \Delta T = 0{,}0311(0{,}42)0{,}123(97{,}1) = 0{,}156 \text{ Btu/s}$$

ou 562 Btu/h ou 0,221 hp. O torque parasita de fricção T é

$$T = fWr = \frac{fr}{c}Wc = 3{,}39(900)0{,}0015 = 4{,}58 \text{ lbf} \cdot \text{in}$$

12-12 Cargas e Materiais

Certo auxílio na seleção de cargas unitárias e de materiais de mancal é proporcionado pelas Tabelas 12-5 e 12-6. Visto que o diâmetro e o comprimento de um mancal dependem da carga unitária, essas tabelas ajudarão o projetista a estabelecer um ponto de partida no projeto.

A razão comprimento-diâmetro *l*/*d* de um mancal depende de se esperar ou não operar sob condições de lubrificação de filme fino. Um mancal longo (razão *l*/*d* grande) reduz o coeficiente de fricção e o fluxo lateral de óleo, sendo, portanto, desejável onde a lubrificação de filme fino ou a de magnitude de contorno estiverem presentes. Por outro lado, onde a alimentação forçada ou a lubrificação positiva

Tabela 12-5 Intervalo de cargas unitárias de uso corrente para mancais de manga

Aplicação	Carga unitária, psi	Carga unitária, MPa
Motores a diesel:		
Mancais principais	900-1700	6-12
Pino de manivela	1150-2300	8-15
Pino de biela	2000-2300	14-15
Motores elétricos	120-250	0,8-1,5
Turbinas de vapor	120-250	0,8-1,5
Redutores de engrenagem	120-250	0,8-1,5
Motores automotivos:		
Mancais principais	600-750	4-5
Pino de manivela	1700-2300	10-15
Compressores de ar:		
Mancais principais	140-280	1-2
Pino de manivela	280-500	2-4
Bombas centrífugas	100-180	0,6-1,2

Tabela 12-6 Algumas características das ligas de mancal

Nome da liga	Espessura, in	Número SAE	Razão de folga r/c	Capacidade de carga	Resistência à corrosão
Babbitt à base de estanho	0,022	12	600-1000	1,0	Excelente
Babbitt à base de chumbo	0,022	15	600-1000	1,2	Muito bom
Babbitt à base de estanho	0,004	12	600-1000	1,5	Excelente
Babbitt à base de chumbo	0,004	15	600-1000	1,5	Muito bom
Bronze-chumbo	Sólido	792	500-1000	3,3	Muito bom
Cobre-chumbo	0,022	480	500-1000	1,9	Bom
Liga de alumínio	Sólido		400-500	3,0	Excelente
Prata mais revestimento	0,013	17P	600-1000	4,1	Excelente
Cádmio (1,5% Ni)	0,022	18	400-500	1,3	Bom
Trimetal 88*				4,1	Excelente
Trimetal 77†				4,1	Muito bom

* Esta é uma camada de 0,008 in de cobre-chumbo em substrato de aço, mais 0,001 in de *babbitt* à base de estanho.
† Esta é uma camada de 0,013 in de cobre-chumbo em substrato de aço, mais 0,001 in de *babbitt* à base de chumbo.

estiverem presentes, a razão *l/d* deverá ser relativamente pequena. O comprimento curto de mancal resulta em um fluxo maior de óleo para fora das extremidades, mantendo, assim, o mancal mais fresco. A prática corrente consiste em utilizar uma razão *l/d* próxima da unidade, em geral, e então aumentar essa razão, se a lubrificação de filme fino for provável de ocorrer, e decrescê-la para a lubrificação de filme espesso ou para altas temperaturas. Se a deflexão do eixo tiver provavelmente de ser severa, um mancal curto deverá ser usado para prevenir o contato metal-metal nas extremidades dos mancais.

Você deve sempre considerar o uso de um mancal parcial no caso de temperaturas elevadas constituírem um problema, haja vista que remover a área sem carga do mancal pode reduzir muito substancialmente o calor gerado.

Os dois requisitos conflitantes de um bom material de mancal são que ele deve apresentar resistências à compressão e à fadiga satisfatórias, para resistir a cargas externamente aplicadas, ser mole e ter um baixo ponto de fusão e um baixo módulo de elasticidade. O segundo conjunto de requisitos é necessário para permitir ao material desgastar-se ou romper-se, uma vez que ele pode então se conformar às ligeiras irregularidades e absorver e soltar partículas estranhas. A resistência ao desgaste e o coeficiente de fricção são também importantes, pois todos os mancais devem operar, pelo menos parte do tempo, com lubrificação de filme fino ou lubrificação de contorno.

Considerações adicionais na seleção de um bom material de mancal são sua habilidade de resistir à corrosão e, também, o custo de produção do mancal. Alguns dos materiais comumente utilizados estão listados na Tabela 12-6, junto com suas composições e características.

A vida do mancal pode ser ampliada significativamente depositando-se uma camada de *babbitt*, ou outro metal branco, nas espessuras de 0,001 a 0,014 in sobre o material metálico de suporte. De fato, uma camada de cobre-chumbo sobre o aço, visando a prover resistência, combinada com um revestimento de *babbitt* para realçar a conformidade da superfície e a resistência à corrosão, produz um excelente mancal.

É comum esperar-se que pequenas buchas e colares de empuxo operem com lubrificação de filme fino ou de contorno. Quando esse é o caso, melhorias em um material sólido do mancal podem ser realizadas de modo a adicionar-se consideravelmente à vida. Uma bucha de metalurgia de pó é porosa e permite ao óleo penetrar em seu material. Às vezes, uma bucha desse tipo pode ser circundada por um material impregnado de óleo, para prover espaço adicional de armazenagem. Mancais são freqüentemente indentados por esferas, a fim de prover pequenas bacias para armazenagem de lubrificante enquanto o munhão está em descanso. Isso permite alguma lubrificação durante o arranque. Um outro método de redução de fricção consiste em indentar a parede do mancal e encher as indentações com grafite.

Tendo sido tomadas todas essas decisões provisórias, um lubrificante pode ser selecionado e a análise hidrodinâmica, realizada – como já apresentado. Os valores dos vários parâmetros de desempenho, se traçados como na Figura 12-25, por exemplo, indicarão, pois, se um projeto satisfatório foi alcançado ou se iterações adicionais serão necessárias.

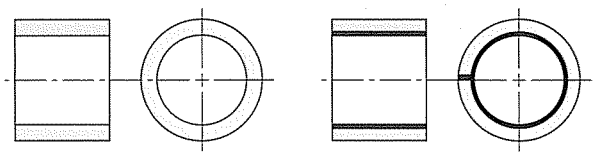
12-13 Tipos de Mancal

Um mancal pode ser tão simples quanto um orifício usinado em um membro de máquina de ferro fundido. Pode ainda ser simples e requerer procedimentos detalhados de projeto, como, por exemplo, o mancal de duas peças sulcado de alimentação por pressão de conexão por bastão em um motor automotivo. Ou, ainda, pode ser tão elaborado quanto os grandes mancais resfriados por água e oleados por anel mediante reservatórios incorporados usados em maquinarias pesadas.

A Figura 12-32 mostra dois tipos de buchas. A bucha sólida é feita por fundição, por repuxamento e usinagem, ou pelo uso de um processo de metalurgia do pó. A bucha forrada é normalmente do tipo dividida. Em um método de manufatura, o material fundido de forro é fundido continuamente em uma fina tira metálica. A tira de *babbitt* é então processada por prensas, rebarbadores e brochadores, resultando em uma bucha forrada. Qualquer tipo de sulco pode ser cortado em buchas, as quais são montadas como um ajuste forçado e acabadas por furação, escareação ou brunimento.

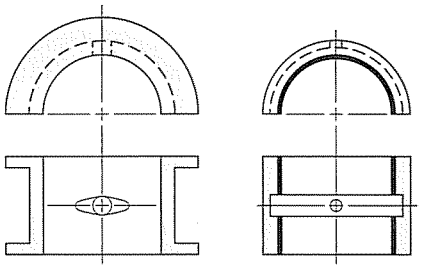
Mancais de flange e retos de duas peças são exibidos na Figura 12-33. Eles estão disponíveis em muitos tamanhos, em ambos os tipos – de parede fina ou grossa, com ou sem material de forramento. Uma alça de travamento posiciona o mancal e efetivamente previne o movimento axial ou rotacional deste no compartimento.

Alguns modelos típicos de sulco são mostrados na Figura 12-34. Em geral, o lubrificante pode ser introduzido desde a extremidade da bucha, através do eixo ou da própria bucha. O fluxo pode ser intermitente ou contínuo. A prática preferida é introduzir o óleo no centro da bucha, de modo que flua para fora de ambas as extremidades, aumentando, assim, o fluxo e a ação de resfriamento.



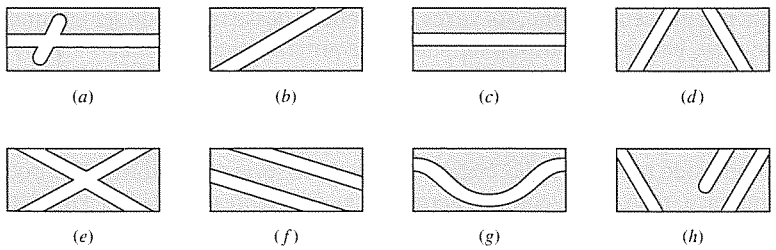
(*a*) Bucha sólida (*b*) Bucha forrada

Figura 12-32 Buchas de manga, deslizamento.



(*a*) De flange (*b*) Reta

Figura 12-33 Buchas de duas peças, bipartidas.



(*a*) (*b*) (*c*) (*d*)

(*e*) (*f*) (*g*) (*h*)

Figura 12-34 Vistas desenvolvidas de padrões típicos de sulco. *(Cortesia da The Cleveland Graphite Bronze Company, Division of Clevite Corporation.)*

12-14 Mancais de Empuxo

Este capítulo é dedicado ao estudo da mecânica de lubrificação e sua aplicação ao projeto e à análise de mancais de munhão. O projeto e a análise de mancais de empuxo é também uma aplicação importante da teoria de lubrificação. Um estudo detalhado dos mancais de empuxo não está incluído aqui, porque não contribuiria em nada significativamente diferente e em razão das limitações de espaço. Tendo estudado este capítulo, você não deverá encontrar dificuldade ao ler a literatura de mancais de empuxo e aplicar seus conhecimentos a situações reais de projeto.[11]

A Figura 12-35 mostra um mancal de empuxo de pastilha fixa consistindo essencialmente em um rotor deslizante sobre uma pastilha fixa. O lubrificante é trazido aos sulcos radiais e bombeado no espaço em forma de cunha pelo movimento do rotor. A lubrificação de filme completo, ou hidrodinâmica, será obtida se a velocidade do rotor for contínua e suficientemente alta, se o lubrificante tiver a viscosidade correta e se for suprido em quantidade suficiente. A Figura 12-36 fornece uma descrição da distribuição de pressão sob condições de lubrificação de filme completo.

Devemos observar que os mancais são freqüentemente feitos com um flange, como mostra a Figura 12-37. Esse flange posiciona o mancal no compartimento e também recebe uma carga de empuxo. Contu-

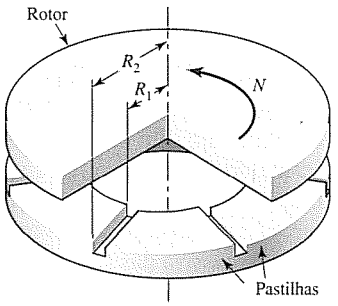


Figura 12-35 Mancal de empuxo de pastilha fixa. *(Cortesia da The Westinghouse Corporation Research Laboratories.)*

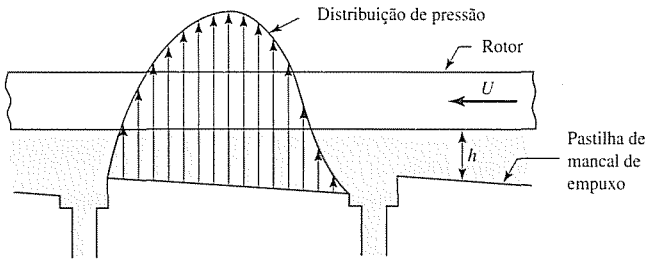


Figura 12-36 Distribuição de pressão de lubrificante em um mancal de empuxo. *(Cortesia da Cooper Research Corporation.)*

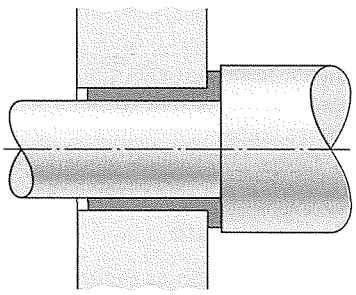


Figura 12-37 O mancal de manga com flange recebe ambas as cargas, radial e de empuxo.

[11] Harry C. Rippel, *Cast Bronze Thrust Bearing Design Manual*, International Copper Research Association Inc., 825 Third Ave., New York, NY 10022, 1967. CBBI, 14600 Detroit Ave., Cleveland, OH, 44107, 1967.

do, mesmo quando sulcado e apresentando uma lubrificação adequada, tal arranjo não é teoricamente um mancal de empuxo lubrificado hidrodinamicamente. A razão para isso se deve ao fato de que o espaço de folga não se apresenta em forma de cunha, mas tem uma espessura uniforme. Um raciocínio similar se aplicaria a vários projetos de arruelas de empuxo.

12-15 Mancais de Contorno Lubrificado

Quando duas superfícies deslizam uma em relação à outra, com somente um filme parcial de lubrificante entre elas, diz-se existir *lubrificação de contorno.* A lubrificação de contorno, ou de filme fino, ocorre em mancais lubrificados hidrodinamicamente, quando estes estão arrancando ou parando, quando a carga aumenta, quando o suprimento de lubrificante decresce, ou sempre que outras mudanças de operação ocorrem. Existem, por certo, muitos casos em projeto nos quais os mancais de contorno lubrificado devem ser utilizados em razão do tipo de aplicação ou situação competitiva.

O coeficiente de fricção para superfícies de contorno lubrificado pode ser bastante diminuído pelo uso de óleos animais ou vegetais misturados com óleo mineral ou graxa. Ácidos graxos, tais como ácido esteárico, ácido palmítico ou ácido oléico, ou outros destes, que ocorrem em gorduras animais e vegetais, são denominados *agentes oleaginosos.* Tais ácidos parecem reduzir a fricção, seja em virtude de suas fortes afinidades por certas superfícies metálicas ou por formarem um filme de sabão que se liga às superfícies metálicas mediante uma reação química. Dessa forma, as moléculas de ácido graxo ligam-se às superfícies do munhão e do mancal com tamanha intensidade que as asperezas metálicas dos metais roçadores não se soldam nem se cisalham.

Os ácidos graxos rompem-se a temperaturas de 250°F ou mais, causando aumento de fricção e desgaste nos mancais lubrificados de filme fino. Em tais casos, os lubrificantes de *pressão extrema,* ou EP, podem ser misturados com o lubrificante de ácido graxo. Eles são compostos de substâncias químicas, tais como ésteres clorinados ou fosfato tricresílico, que formam um filme inorgânico entre as superfícies roçadoras. Embora os lubrificantes EP façam o possível para operar a temperaturas mais elevadas, existe a possibilidade adicional de corrosão química excessiva das superfícies deslizantes.

Quando um mancal opera em parte sob condições hidrodinâmicas e em parte sob condições secas ou de filme fino, há uma *lubrificação de filme misto.* Se o lubrificante for suprido por oleamento manual, gotejamento ou alimentação mecânica, ou ainda por alimentação de pavio, por exemplo, o mancal estará operando sob condições de filme misto. Além de ocorrerem com escassez de lubrificante, as condições de filme misto poderão estar presentes quando

- A viscosidade for muito baixa.
- A velocidade de mancal for muito baixa.
- O mancal estiver sobrecarregado.
- A folga for muito apertada.
- O munhão e o mancal não estiverem apropriadamente alinhados.

O movimento relativo entre superfícies em contato, na presença de um lubrificante, é denominado *lubrificação de contorno.* Essa condição está presente em mancais de filme hidrodinâmico durante o arranque, a parada, o sobrecarregamento ou a deficiência de lubrificante. Alguns mancais têm contorno lubrificado (ou seco) a todo momento. Para indicar isso, um adjetivo é posto antes da palavra "mancal". Alguns dos adjetivos comumente aplicados (para mencionar somente alguns) são filme fino, fricção de contorno, oilítico, oleaginoso e pino-bucha. As aplicações incluem situações em que o filme espesso não se desenvolverá e em que há baixas velocidades de munhão, munhão oscilante, pistas forradas, cargas leves e lubrificação vitalícia. As características incluem fricção considerável, habilidade de tolerar o desgaste esperado sem perder a função e carregamento leve. Tais mancais são limitados por fatores como temperatura de lubrificante, velocidade, pressão característica, escoriação e desgaste cumulativo. A Tabela 12-7 fornece algumas propriedades de uma série de materiais de bucha.

Desgaste Linear de Deslizamento

Considere o bloco deslizante representado na Figura 12-38, movendo-se ao longo de uma placa com pressão de contato P' agindo sobre uma área A, na presença de um coeficiente de fricção de deslizamento f_s. A medida linear do desgaste w é expressa em polegadas ou milímetros.

O trabalho realizado pela força f_sPA, durante o deslocamento S, é f_sPAS *ou* f_sPAVt, em que V é a velocidade de deslizamento e t é o tempo. O volume de material removido como resultado do desgaste é wA e proporcional ao trabalho realizado, ou seja, $wA \propto f_sPAVt$, ou

$$wA = KPAVt$$

Tabela 12-7 Alguns materiais para mancais de contorno lubrificado e seus limites operacionais

Material	Carga máxima, psi	Temperatura máxima, °F	Velocidade máxima, fpm	Valor máximo de PV*
Bronze fundido	4 500	325	1 500	50 000
Bronze poroso	4 500	150	1 500	50 000
Ferro poroso	8 000	150	800	50 000
Fenólicos	6 000	200	2 500	15 000
Náilon	1 000	200	1 000	3 000
Teflon	500	500	100	1 000
Teflon reforçado	2 500	500	1 000	10 000
Tecido de teflon	60 000	500	50	25 000
Delrin	1 000	180	1 000	3 000
Carbono-grafite	600	750	2 500	15 000
Borracha	50	150	4 000	
Madeira	2 000	150	2 000	15 000

* P = carga, *psi*; V = velocidade, fpm.

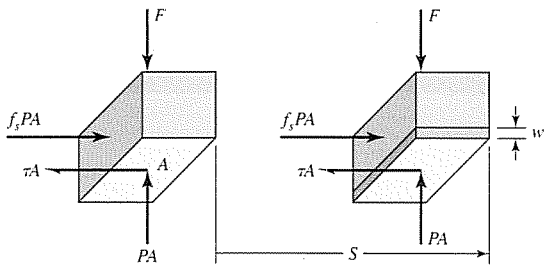


Figura 12-38 Bloco deslizante sujeito a desgaste.

em que K é o fator de proporcionalidade, o qual inclui f_s, e é determinado por ensaio de laboratório. O desgaste linear é expresso como

$$w = K P V t \tag{12-26}$$

Em unidades usuais nos Estados Unidos, P é expresso em psi; V, em fpm (isto é, em ft/min); e t, em horas. Isso torna as unidades de K in^3 · min/(lbf · ft · h). Unidades comumente empregadas para K são cm^3 · min/(kgf · m · h), em que 1 kgf = 9,806 N. As Tabelas 12-8 e 12-9 apresentam alguns fatores de desgaste e coeficientes de fricção de um fabricante.

É útil incluir um fator de modificação f_1, dependendo do tipo de movimento, da carga e da velocidade, e um fator ambiental f_2 para levar em conta a temperatura e as condições de limpeza (ver Tabelas 12-10 e 12-11). Esses fatores consideram discrepâncias entre as condições de laboratório sob as quais K foi medido. A Equação (12-26) pode agora ser escrita como

$$w = f_1 f_2 K P V t \tag{12-27}$$

O desgaste, então, é proporcional ao PV, à propriedade do material K, às condições operacionais f_1 e f_2 e ao tempo t.

Desgaste de Bucha

Considere um pino de diâmetro D rodando a uma velocidade N, em uma bucha de comprimento L, e suportando uma carga radial estacionária F. A pressão nominal P é dada por

$$P = \frac{F}{DL} \tag{12-28}$$

e se N estiver em rpm e D em polegadas, a velocidade em ft/min será dada por

Tabela 12-8 Fatores de desgaste em unidades comuns (Estados Unidos)*

Material de bucha	Fator de desgaste K	Limite PV
Oleosos 800	$3(10^{-10})$	18 000
Oleosos 500	$0{,}6(10^{-10})$	46 700
Copolímero poliactal	$50(10^{-10})$	5 000
Homopolímero poliactal	$60(10^{-10})$	3 000
Náilon	$200(10^{-10})$	2 000
Náilon 66 + 15% PTFE	$13(10^{-10})$	7 000
Náilon 66 + 15% PTFE + 30% vidro	$16(10^{-10})$	10 000
Náilon 66 + 2,5% MoS_2	$200(10^{-10})$	2 000
Náilon 6	$200(10^{-10})$	2 000
Policarbonato + 15% PTFE	$75(10^{-10})$	7 000
Bronze sinterizado	$102(10^{-10})$	8 500
Fenol + 25% fibra de vidro	$8(10^{-10})$	11 500

* dim [K] = $in^3 \cdot min/(lbf \cdot ft \cdot h)$, dim [PV] = psi · ft/min.
Fonte: Oiles America Corp., Plymouth, MI 48170.

Tabela 12-9 Coeficientes de fricção

Tipo	Mancal	f_s
Plástico	Oleosos** 80	0,05
Composto	Metal seco** ST	0,03
	Metal duro **	0,05
Metálico	Cerâmico metálico	0,05
	Oleosos 2000	0,03
	Oleosos 300	0,03
	Oleosos 500SP	0,03

Fonte: Oiles America Corp., Plymouth, MI 48170.

$$V = \frac{\pi DN}{12} \tag{12-29}$$

Assim, PV, em psi · ft/min, é

$$PV = \frac{F}{DL}\frac{\pi DN}{12} = \frac{\pi}{12}\frac{FN}{L} \tag{12-30}$$

Observe a independência de PV em relação ao diâmetro D do munhão.

Uma equação de desgaste temporal similar à Equação (12-27) pode ser escrita. Todavia, antes de fazê-lo, é importante observar que a Equação (12-28) fornece o valor nominal de P. A Figura 12-39, por sua vez, oferece uma representação mais precisa da distribuição de pressão, a qual pode ser escrita como

$$p = P_{\max}\cos\theta \qquad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

A componente vertical de $p\,dA$ é $p\,dA\cos\theta = [pL(D/2)d\theta]\cos\theta = P_{max}(DL/2)\cos^2\theta\,d\theta$. Integrando isso a partir de $\theta = -\pi/2$ a $\pi/2$, produz-se F. Logo,

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} P_{\max}\left(\frac{DL}{2}\right)\cos^2\theta\,d\theta = \frac{\pi}{4}P_{\max}DL = F$$

ou

$$P_{\max} = \frac{4}{\pi}\frac{F}{DL} \tag{12-31}$$

Tabela 12-10 Fator relacionado ao movimento f_1

Modo de movimento	Pressão característica P, psi		Velocidade V, ft/min	f_1*
Rotatório	720 ou menos		3,3 ou menos	1,0
			3,3-33	1,0-1,3
			33-100	1,3-1,8
	720-3600		3,3 ou menos	1,5
			3,3-33	1,5-2,0
			33-100	2,0-2,7
Oscilatório	720 ou menos	> 30°	3,3 ou menos	1,3
			3,3-100	1,3-2,4
		< 30°	3,3 ou menos	2,0
			3,3-100	2,0-3,6
	720-3600	> 30°	3,3 ou menos	2,0
			3,3-100	2,0-3,2
		< 30°	3,3 ou menos	3,0
			3,3-100	3,0-4,8
Alternante	720 ou menos		33 ou menos	1,5
			33-100	1,5-3,8
	720-3600		33 ou menos	2,0
			33-100	2,0-7,5

* Valores de f_1 baseados em resultados sobre um período estendido de tempo em maquinaria de fabricação automotiva.

Tabela 12-11 Fator ambiental f_2

Temperatura ambiental, °F	Material estranho	f_2
140 ou inferior	Não	1,0
140 ou inferior	Sim	3,0-6,0
140-210	Não	3,0-6,0
140-210	Sim	6,0-12,0

Fonte: Oiles America Corp, Plymouth, MI., 48170.

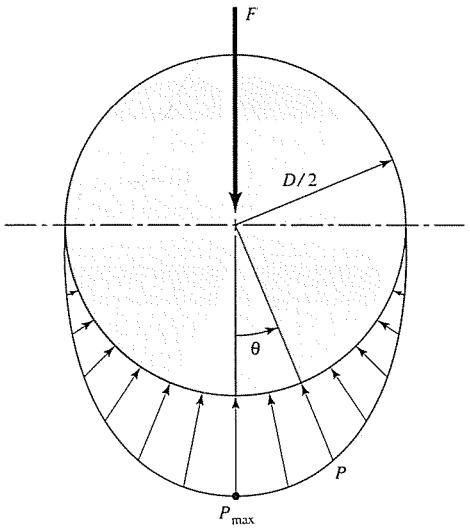


Figura 12-39 Distribuição de pressão em uma bucha de contorno lubrificado.

Substituindo V da Equação (12-29) e P_{max} por P, da Equação (12-31), na Equação (12-27), temos

$$w = f_1 f_2 K \frac{4}{\pi} \frac{F}{DL} \frac{\pi DN t}{12} = \frac{f_1 f_2 K F N t}{3L} \tag{12-32}$$

Ao projetar uma bucha, em virtude dos vários compromissos é recomendado que a razão comprimento/diâmetro esteja no intervalo

$$0{,}5 \leq L/D \leq 2 \tag{12-33}$$

EXEMPLO 12-7

Uma bucha de liga de latão oleaginosa SP 500 tem 1 in de comprimento, com um orifício de 1 in, e opera em um ambiente limpo a 70°F. O desgaste admissível sem perda de função é de 0,005 in. A carga radial é de 700 lbf. A velocidade periférica é de 33 ft/min. Estime o número de revoluções para que o desgaste radial seja de 0,005 in. Veja a Figura 12-40 e a Tabela 12-12 do fabricante.

Solução

A partir da Tabela 12-8, $K = 0{,}6(10^{-10})\text{in}^3 \cdot \text{min}/(\text{lbf} \cdot \text{ft} \cdot \text{h})$; das Tabelas 12-10 e 12-11, $f_1 = 1{,}3$, $f_2 = 1$; e da Tabela 12-12, $PV = 46\,700$ psi. ft/min, $P_{max} = 3560$ psi, $V_{max} = 100$ ft/min. A partir das Equações (12-31), (12-29) e (12-30),

$$P_{max} = \frac{4}{\pi} \frac{F}{DL} = \frac{4}{\pi} \frac{700}{(1)(1)} = 891 \text{ psi} < 3560 \text{ psi} \qquad \text{(correto)}$$

$$P = \frac{F}{DL} = \frac{700}{(1)(1)} = 700 \text{ psi}$$

$$V = 33 \text{ ft/min} < 100 \text{ ft/min} \qquad \text{(correto)}$$

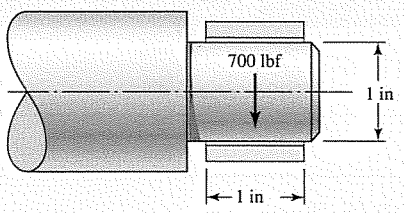


Figura 12-40 Munhão/bucha para o Exemplo 12-7.

Tabela 12-12 Intervalo de serviço e propriedades do Oiles SP 500 (SPBN SPWN)

Intervalo de serviço	Unidades	Admissível
Pressão característica P_{max}	psi	< 3560
Velocidade V_{max}	ft/min	< 100
Produto PV	(psi)(ft/min)	< 46 700
Temperatura T	°F	< 300
Propriedades	**Método de ensaio, unidades**	**Valor**
Resistência à tração	(ASTM E8) psi	> 110 000
Elongação	(ASTM E8) %	> 12
Resistência à compressão	(ASTM E9) psi	49 770
Dureza Brinell	(ASTM E10) HB	> 210
Coeficiente de expansão térmica	(10^{-5}) °C	> 1,6
Gravidade específica		8,2

Fonte: Oiles America Corp., Plymouth, MI 48170.

$$PV = 700(33) = 23\ 100 \text{ psi} \cdot \text{ft/min} < 46\ 700 \text{ psi} \cdot \text{ft/min} \qquad \text{(correto)}$$

A Equação (12-32) é

$$w = f_1 f_2 K \frac{4}{\pi} \frac{F}{DL} \frac{\pi DNt}{12} = f_1 f_2 K \frac{4}{\pi} \frac{F}{DL} Vt$$

Solucionando para t, temos

$$t = \frac{\pi DLw}{4 f_1 f_2 KVF} = \frac{\pi(1)(1)0{,}005}{4(1{,}3)(1)0{,}6(10^{-10})33(700)} = 2180 \text{ h} = 130\ 770 \text{ min}$$

A velocidade rotacional é

$$N = \frac{12V}{\pi D} = \frac{12(33)}{\pi(1)} = 126 \text{ rpm}$$

Resposta Ciclos = $N_t = 126(130\ 770) = 16{,}5(10^6)$ rev

Aumento da Temperatura

No regime permanente, a taxa na qual o trabalho é feito contra a fricção do mancal iguala-se à taxa na qual o calor é transferido do compartimento do mancal aos arredores por convecção e radiação. A taxa de geração de calor em Btu/h é dada por $f_s F V/J$, ou

$$H_{\text{ger}} = \frac{f_s F(\pi D)(60N)}{12J} = \frac{5\pi f_s FDN}{J} \tag{12-34}$$

em que N é a velocidade do munhão em rpm e $J = 778$ ft · lbf/Btu. A taxa na qual o calor é transferido aos arredores, em Btu/h, é

$$H_{\text{perda}} = h_{\text{CR}} A \Delta T = h_{\text{CR}} A(T_b - T_\infty) = \frac{h_{\text{CR}} A}{2}(T_f - T_\infty) \tag{12-35}$$

em que A = área da superfície do compartimento, ft^2

h_{CR} = coeficiente combinado global de transferência de calor, Btu/(h · ft^2 · °F)

T_b = temperatura do metal do compartimento, °F

T_f = temperatura do lubrificante, °F

A observação empírica de que T_b é cerca da metade entre T_f e T_∞ foi incorporada na Equação (12-35). Igualando as Equações (12-34) e (12-35), obtemos

$$T_f = T_\infty + \frac{10\pi f_s FDN}{J h_{\text{CR}} A} \tag{12-36}$$

Embora esta equação pareça indicar que o aumento de temperatura $Tf - T\infty$ seja independente do comprimento L, a área da superfície do compartimento é uma função de L. A área da superfície do compartimento pode ser inicialmente estimada e, à medida que os ajustes do projeto prosseguirem, resultados melhores convergirão. Se a bucha tiver de ser compartimentada em um bloco de almofada, a área da superfície pode grosseiramente ser estimada a partir de

$$A \doteq \frac{2\pi DL}{144} \tag{12-37}$$

Substituindo a Equação (12-37) na (12-36), obtemos

$$T_f \doteq T_\infty + \frac{10\pi f_s FDN}{J h_{\text{CR}}(2\pi DL/144)} = T_\infty + \frac{720 f_s FN}{J h_{\text{CR}} L} \tag{12-38}$$

EXEMPLO 12-8

Escolha uma bucha Oiles 500 para dar um desgaste máximo de 0,001 in em 800 h de uso com um munhão de 300 rpm e uma carga radial de 50 lbf. Use $\hbar_{CR} = 2{,}7$ Btu/(h · ft^2 · °F), $T_{max} = 300$°F, $f_s = 0{,}03$ e um fator de projeto $n_d = 2$. A Tabela 12-13 lista os tamanhos disponíveis de bucha do fabricante.

Solução

Com um fator de projeto n_d, substitua n_dF por F. Primeiro, estime o comprimento de bucha usando a Equação (12-32) com $f_1 = f_2 = 1$, e $K = 0{,}6(10^{-10})$ a partir da Tabela 12-8:

$$L = \frac{f_1 f_2 K n_d F N t}{3w} = \frac{1(1)0{,}6(10^{-10})2(50)300(800)}{3(0{,}001)} = 0{,}48 \text{ in} \qquad (1)$$

Da Equação (12-38), com $f_s = 0{,}03$ da Tabela 12-9, $\hbar_{CR} = 2{,}7$ Btu/(h · ft^2 · °F), e n_dF para F,

$$L \doteq \frac{720 f_s n_d F N}{J\hbar_{CR}(T_f - T_\infty)} = \frac{720(0{,}03)2(50)300}{778(2{,}7)(300 - 70)} = 1{,}34 \text{ in}$$

Ambos os resultados restrigem L de tal forma que $0{,}48 \le L \le 1{,}34$ in. Como um começo, seja $L = 1$ in. A partir da Tabela 12-13, selecionamos $D = 1$ in do intervalo médio das buchas disponíveis.

Tentativa 1: $D = L = 1$ in.

Equação (12–31): $$P_{\max} = \frac{4}{\pi}\frac{n_d F}{DL} = \frac{4}{\pi}\frac{2(50)}{1(1)} = 127 \text{ psi} < 3560 \text{ psi}$$ (correto)

Tabela 12-13 Tamanhos de bucha disponíveis (em polegadas) de um fabricante*

		L													
ID*	OD*	1/2	5/8	3/4	7/8	1	1 1/4	1 1/2	1 3/4	2	2 1/2	3	3 1/2	4	5
1/2	3/4	•	•	•	•	•									
5/8	7/8		•	•		•		•							
3/4	1 1/8		•	•		•		•							
7/8	1 1/4			•		•	•	•							
1	1 3/8			•		•	•	•	•	•					
1	1 1/2			•		•		•		•					
1 1/4	1 5/8					•	•	•	•	•					
1 1/2	2					•	•	•	•	•					
1 3/4	2 1/4						•	•	•	•	•	•	•	•	
2	2 1/2							•		•	•	•			
2 1/4	2 3/4							•		•	•	•			
2 1/2	3							•		•		•			
2 3/4	3 3/8							•		•	•	•			
3	3 5/8									•	•	•	•		
3 1/2	4 1/8									•		•		•	
4	4 3/4									•		•		•	
4 1/2	5 3/8											•		•	•
5	6											•		•	•

ID = diâmetro interno; OD = diâmetro externo

* Em um *display* como este, o fabricante mostraria números de catálogo onde um • aparece.

$$P = \frac{n_d F}{DL} = \frac{2(50)}{1(1)} = 100 \text{ psi}$$

Equação (12–29): $V = \dfrac{\pi DN}{12} = \dfrac{\pi(1)300}{12} = 78{,}5 \text{ ft/min} < 100 \text{ ft/min}$ (correto)

$$PV = 100(78{,}5) = 7850 \text{ psi} \cdot \text{ft/min} < 46\,700 \text{ psi} \cdot \text{ft/min} \quad \text{(correto)}$$

A partir da Tabela 12-9:

V	f_1	
33	1,3	
78,5	f_1	$\Rightarrow f_1 = 1{,}64$
100	1,8	

Nossa segunda estimativa é $L \geq 0{,}48(1{,}64) = 0{,}787$ in. A partir da Tabela 12-13, não sobra muito para $L = \frac{7}{8}$ in. Assim, ficando com $L = 1$ in, tentemos $D = \frac{1}{2}$ in.

Tentativa 2: $D = 0{,}5$ in, $L = 1$ in.

$$P_{\max} = \frac{4}{\pi}\frac{n_d F}{DL} = \frac{4}{\pi}\frac{2(50)}{0{,}5(1)} = 255 \text{ psi} < 3560 \text{ psi} \quad \text{(correto)}$$

$$P = \frac{n_d F}{DL} = \frac{2(50)}{0{,}5(1)} = 200 \text{ psi}$$

$$V = \frac{\pi DN}{12} = \frac{\pi(0{,}5)300}{12} = 39{,}3 \text{ ft/min} < 100 \text{ ft/min} \quad \text{(correto)}$$

Note que PV não é função de D, e visto que não mudamos L, PV permanecerá o mesmo:

$$PV = 200(39{,}3) = 7860 \text{ psi} \cdot \text{ft/min} < 46\,700 \text{ psi} \cdot \text{ft/min} \quad \text{(correto)}$$

A partir da Tabela 12-9, $f_1 = 1{,}34$, $L \geq 1{,}34(0{,}48) = 0{,}643$ in. Existem muitas buchas de $\frac{3}{4}$ in que podem ser selecionadas. O menor diâmetro na Tabela 12-13 é $D = \frac{1}{2}$ in. Isso dá uma razão L/D de 1,5, que é aceitável de acordo com a Equação (12-33).

Tentativa 3: $D = 0{,}5$ in, $L = 0{,}75$ in. A partir da tentativa 2, $V = 39{,}3$ ft/min não muda.

$$P_{\max} = \frac{4}{\pi}\frac{n_d F}{DL} = \frac{4}{\pi}\frac{2(50)}{0{,}5(0{,}75)} = 340 \text{ psi} < 3560 \text{ psi} \quad \text{(correto)}$$

$$P = \frac{n_d F}{DL} = \frac{2(50)}{0{,}5(0{,}75)} = 267 \text{ psi}$$

$$PV = 267(39{,}3) = 10\,490 \text{ psi} \cdot \text{ft/min} < 46\,700 \text{ psi} \cdot \text{ft/min} \quad \text{(correto)}$$

Resposta Selecione qualquer das buchas das tentativas, em que o valor ótimo, da tentativa 3, é $D = \frac{1}{2}$ in e $L = \frac{3}{4}$ in. Outros fatores podem entrar no projeto global, tornando as demais buchas mais apropriadas.

PROBLEMAS

ANÁLISE **12-1** Um mancal completo de munhão tem um diâmetro de munhão de 1,000 in, com uma tolerância unilateral de –0,0015 in. O orifício de bucha tem um diâmetro de 1,0015 in e uma tolerância unilateral de 0,003 in. A razão l/d é unitária. A carga é de 250 lbf e o munhão gira a 1100 rpm. Se a viscosidade média é de 8 μreyn, encontre a espessura mínima de filme, a perda de potência e o fluxo lateral para uma montagem de folga mínima.

ANÁLISE **12-2** Um mancal completo de munhão tem um diâmetro de munhão de 1,250 in, com uma tolerância unilateral de –0,001 in. O orifício de bucha tem um diâmetro de 1,252 in e uma tolerância unilateral de 0,003 in. O mancal tem comprimento de 2,5 in. A carga de munhão é de 400 lbf e gira a uma velocidade de 1150 rpm.

Usando uma viscosidade média de 10 μreyn, encontre a espessura mínima de filme, a pressão máxima de filme e a taxa total de fluxo de óleo para uma montagem de folga mínima.

ANÁLISE **12-3** Um mancal de munhão tem um diâmetro de munhão de 3,000 in, com uma tolerância unilateral de –0,001 in. O orifício da bucha tem um diâmetro de 3,005 in e uma tolerância unilateral de 0,004 in. A bucha tem comprimento de 1,5 in. A velocidade do munhão é de 600 rpm e a carga é de 800 lbf. Para ambos os lubrificantes SAE 10 e SAE 40, encontre a espessura mínima de filme e a pressão máxima de filme para uma temperatura de operação de 150°F para uma montagem de folga mínima.

ANÁLISE **12-4** Um mancal de munhão tem um diâmetro de munhão de 3,000 in com uma tolerância unilateral de –0,003 in. O orifício de bucha tem um diâmetro de 3,006 in e tolerância unilateral de 0,004 in. A bucha tem comprimento de 3 in e suporta uma carga de 600 lbf. A velocidade do munhão é de 750 rpm. Encontre a espessura mínima de filme de óleo e a pressão máxima de filme para ambos os lubrificantes SAE 10 e SAE 20W-40, para uma montagem mais apertada se a temperatura operacional de filme é 140°F.

ANÁLISE **12-5** Um mancal completo de munhão tem um munhão com diâmetro de 2,000 in e uma tolerância unilateral de –0,0012 in. A bucha tem um orifício com diâmetro de 2,0024 e tolerância unilateral de 0,002 in. A bucha tem um comprimento de 1 in e suporta uma carga de 600 lbf a uma velocidade de 800 rpm. Encontre a espessura mínima de filme, a perda de potência e o fluxo total de lubrificante se a temperatura média de filme é de 130°F e lubrificante SAE 20 é usado. A montagem mais apertada deve ser analisada.

ANÁLISE **12-6** Um mancal completo de munhão tem um diâmetro de munhão de eixo de 25 mm com uma tolerância unilateral de –0,01 mm. O orifício de bucha tem um diâmetro de 25,04 mm com uma tolerância unilateral de 0,03 mm. A razão *l*/*d* é unitária. A carga de bucha é de 1,25 kN, e o munhão roda a 1200 rpm. Analise a montagem de folga mínima se a viscosidade média é de 50 mPa · s para encontrar a espessura mínima de filme de óleo, a perda de potência e a percentagem de fluxo lateral.

ANÁLISE **12-7** Um mancal completo de munhão tem um munhão de eixo com diâmetro de 30,00 mm e uma tolerância unilateral de –0,015 mm. O orifício de bucha tem um diâmetro de 30,05 mm com uma tolerância unilateral de 0,035 mm. O orifício de bucha tem 50 mm de comprimento. A carga de mancal é de 2,75 kN e o munhão roda a 1120 rpm. Analise a montagem de folga mínima e encontre a espessura mínima de filme, o coeficiente de fricção e o fluxo total de óleo se a viscosidade média é de 60 mPa · s.

ANÁLISE **12-8** Um mancal de munhão tem um diâmetro de eixo de 75,00 mm com uma tolerância unilateral de –0,02 mm. O orifício de bucha tem um diâmetro de 75,10 mm com uma folga unilateral de 0,06 mm. A bucha tem um comprimento de 36 mm e suporta uma carga de 2 kN. A velocidade do munhão é de 720 rpm. Para uma montagem de folga mínima, encontre a espessura mínima de filme, a taxa de perda de calor e a pressão máxima de lubrificante para lubrificantes SAE 20 e SAE 40 operando a uma temperatura média de filme de 60°C.

ANÁLISE **12-9** Um mancal completo de munhão tem comprimento de 25 mm. O munhão de eixo tem um diâmetro de 50 mm com uma tolerância unilateral de –0,01 mm. O orifício de bucha tem um diâmetro de 50,05 mm com uma tolerância unilateral de 0,01 mm. A carga é de 2000 *N* e a velocidade de munhão é de 840 rpm. Para uma montagem de folga mínima, encontre a espessura mínima de filme de óleo, a perda de potência e o fluxo lateral se a temperatura operacional é de 55°C e óleo lubrificante SAE 30 é usado.

ANÁLISE **12-10** Um mancal de manga de $1\frac{1}{4} \times 1\frac{1}{4}$ in suporta uma carga de 700 lbf e tem uma velocidade de munhão de 3600 rpm. Um óleo SAE 10 é usado a uma temperatura média de 160°F. Usando a Figura 12-16, estime a folga radial para um coeficiente mínimo de fricção *f* e para uma capacidade máxima de carregamento de carga *W*. A diferença entre essas duas folgas é chamada de intervalo de folga. É o intervalo resultante alcançável na fabricação?

ANÁLISE **12-11** Um mancal completo de munhão tem um diâmetro de eixo de 80,00 mm com uma tolerância unilateral de –0,01 mm. A razão *l*/*d* é unitária. A bucha tem um diâmetro de orifício de 80,08 mm com uma tolerância unilateral de 0,03 mm. O suprimento de óleo SAE 30 está em um reservatório de sulco axial com uma temperatura de regime estável de 60°C. A carga radial é de 3000 N. Estime a temperatura média de filme, a espessura mínima de filme, a taxa de perda de calor e a taxa de fluxo lateral de lubrificante para a montagem de folga mínima, se a velocidade do munhão é de 8 rpm.

ANÁLISE **12-12** Um mancal de manga de $2\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2}$ in usa um lubrificante de grau 20. O reservatório de sulco axial tem uma temperatura de regime estável de 110°F. O munhão de eixo tem um diâmetro de 2,500 in com uma tolerância unilateral de –0,001 in. O orifício de bucha tem um diâmetro de 2,504 in com uma tolerância unilateral de 0,001 in. A velocidade de munhão é de 1120 rpm e a carga radial é de 1200 lbf. Estime

(*a*) A magnitude e a localização da espessura mínima de filme de óleo.

(*b*) A excentricidade.

(*c*) O coeficiente de fricção.

(*d*) A taxa de perda de potência.

(*e*) A taxa total e a taxa lateral de fluxo de óleo.

(*f*) A pressão máxima de filme de óleo e sua localização angular.

(*g*) A posição terminal do filme de óleo.

(*h*) A temperatura média do fluxo lateral.

(*i*) A temperatura de óleo na posição terminal do filme de óleo.

ANÁLISE **12-13** Um conjunto de mancais de manga tem uma especificação de diâmetro de munhão de 1,250 in com uma tolerância unilateral de –0,001 in. O orifício de bucha tem um diâmetro de 1,252 in com uma tolerância unilateral de 0,003 in. A bucha tem um comprimento de $1\frac{1}{4}$ in. A carga radial é 250 lbf e a velocidade rotacional de eixo é de 1750 rpm. O lubrificante é óleo SAE 10 e a temperatura do reservatório de sulco axial em regime permanente T_s é de 120°F. Para as montagens de c_{min} c_{median}, e c_{max}, analise os mancais e observe as mudanças em S, ϵ, f, Q, Q_s, ΔT, T_{max}, $\bar{T}_f$ e h_p.

12-14 Uma equação de interpolação foi dada por Raimondi e Boyd, e está mostrada como a Equação (12-16). Essa equação é uma boa candidata para um programa de computador. Escreva um programa desses para uso iterativo. Uma vez pronto, ele pode economizar tempo e reduzir erros. Uma outra versão de tal programa pode ser usada com um subprograma que contenha ajustes de curva para os diagramas de Raimondi e Boyd para uso computacional.

PROJETO **12-15** Um mancal de bloco de almofada de circulação natural tem um diâmetro de munhão D de 2,500 in com uma tolerância unilateral de –0,001 in. O diâmetro de orifício da bucha B é de 2,504 in com uma tolerância unilateral de 0,004 in. O eixo gira a uma velocidade angular de 1120 rpm, o mancal usa óleo SAE grau 20 e carrega uma carga permanente de 300 lbf em ar agitado pelo eixo a 70°F. A área lateral do compartimento de bloco de almofada é de 60 in^2. Execute uma avaliação do projeto (adequação) usando folga radial mínima para uma carga de 600 lbf e 300 lbf. Use o critério de Trumpler.

PROJETO **12-16** Um motor a diesel de oito cilindros tem um mancal dianteiro principal com um diâmetro de munhão de 3,500 in e uma tolerância unilateral de –0,003 in. O diâmetro de orifício de bucha é de 3,505 in com uma tolerância unilateral de +0,005 in. O comprimento de bucha é de 2 in. O mancal de alimentação por pressão tem um sulco anular central de 0,250 in de largura. O óleo SAE 30 vem de um reservatório a 120°F usando uma pressão de suprimento de 50 psig. A capacidade de dissipação de calor do reservatório é de 5000 Btu/h por mancal. Para uma folga radial mínima, uma velocidade de 2000 rpm e uma carga radial de 4600 lbf, encontre a temperatura média de filme e aplique o critério de Trumpler na avaliação de seu projeto.

PROJETO **12-17** Um mancal de alimentação por pressão tem um diâmetro de munhão de 50,00 mm com uma tolerância unilateral de –0,05 mm. O diâmetro de orifício de bucha é de 50,084 mm com uma tolerância unilateral de 0,10 mm. O comprimento de bucha é de 55 mm. Seu sulco anular central tem 5 mm de largura e é alimentado por óleo SAE 30 a 55°C na pressão do medidor de suprimento de 200 kPa. A velocidade de munhão é 2880 rpm com uma carga de 10 kN. O reservatório pode dissipar 300 watts por mancal, se necessário. Para folgas radiais mínimas, execute uma avaliação do projeto usando o critério de Trumpler.

PROJETO **12-18** Projete um mancal de alimentação por pressão de sulco anular central com uma razão l'/d de 0,5, usando óleo SAE grau 20, o lubrificante suprido a 30 psig. Um resfriador externo de óleo pode manter a temperatura do reservatório a 120°F para taxas de dissipação de calor de até 1500 Btu/h. A carga a ser carregada é de 900 lbf a 3000 rpm. A largura do sulco é de $\frac{1}{4}$ in. Use o diâmetro nominal de munhão d como uma variável de projeto e c como a outra. Use o critério de Trumpler para sua avaliação do projeto (adequação).

PROJETO **12-19** Repita o problema de projeto 12-18 usando o orifício nominal de bucha B como uma variável de decisão e a folga radial c como a outra. Novamente, o critério de Trumpler deve ser usado.

ANÁLISE **12-20** A Tabela 12-1 mostra o ajuste de curva de Seireg e Dandage para a viscosidade absoluta em unidades usuais de engenharia nos Estados Unidos. Mostre que, nas unidades SI de mPa · s e temperatura de C graus Celsius, a viscosidade pode ser expressa como

$$\mu = 6{,}89(10^6)\mu_0 \exp[(b/(1{,}8C + 127))]$$

em que μ_o e b são da Tabela 12-1. Se a viscosidade μ'_o for expressa em μreyn, então

$$\mu = 6{,}89\mu'_0 \exp[(b/(1{,}8C + 127))]$$

PROJETO **12-21** Qual é a viscosidade de um óleo grau 30 a 79°C?

Para o Problema 12-18, um projeto satisfatório é

$$d = 2{,}000^{+0}_{-0.001} \text{ in} \qquad b = 2{,}005^{+0.003}_{-0} \text{ in}$$

Duplique o tamanho das dimensões do mancal e quadruplique a carga a 3600 lbf.

(*a*) Analise o mancal aumentado para montagem mediana.

(*b*) Compare os resultados de uma análise similar para um mancal de 2 in, montagem mediana.

12-22 Uma bucha de liga de latão Oiles SP 500 tem 1 in de comprimento com um orifício de 1 in e opera em um ambiente limpo a 70°F. O desgaste admissível sem perda de função é de 0,005 in. A carga radial é de 500 lbf. A velocidade do eixo é de 200 rpm. Estime o número de revoluções para que o desgaste radial seja de 0,005 in.

12-23 Escolha uma bucha de liga de latão Oiles SP 500 para obter um desgaste máximo de 0,002 in para 1000 h de uso com um munhão a 400 rpm e carga radial de 100 lbf. Use $h_{CR} = 2{,}7$ Btu/(h · ft^2 · °F), $T_{max} = 300$°F, $f_s = 0{,}03$ e um fator de projeto $n_d = 2$. A Tabela 12-13 lista os tamanhos de bucha disponíveis do fabricante.

CAPÍTULO

13 Engrenagens – Geral

13-1 Tipos de Engrenagens 628
13-2 Nomenclatura 629
13-3 Ação Conjugada 630
13-4 Propriedades da Evolvente 631
13-5 Fundamentos 632
13-6 Razão de Contato 637
13-7 Interferência 638
13-8 Fabricação de Dentes de Engrenagens 640
13-9 Engrenagens Cônicas de Dentes Retos 643
13-10 Engrenagens Helicoidais de Eixos Paralelos 643
13-11 Engrenagens Sem-Fim 647
13-12 Sistemas de Dentes 648
13-13 Trens de Engrenagens 650
13-14 Análise de Força – Engrenagens Cilíndricas de Dentes Retos 655
13-15 Análise de Força – Engrenagens Cônicas 658
13-16 Análise de Força – Engrenagens Helicoidais 661
13-17 Análise de Força – Engrenagens Sem-Fim 663

Este capítulo abordará a geometria das engrenagens, as relações cinemáticas e as forças transmitidas pelos quatro tipos principais de engrenagens: cilíndricas de dentes retos, helicoidais, cônicas e sem-fim. As forças transmitidas entre engrenagens engranzadas fornecem momentos torcionais a eixos, para gerar movimento e transmissão de potência, e criam forças e momentos que afetam o eixo e seus mancais. Os dois capítulos subseqüentes tratarão da tensão, resistência, segurança e confiabilidade dos quatro tipos de engrenagens.

13-1 Tipos de Engrenagens

As *engrenagens cilíndricas de dentes retos*, ilustradas na Figura 13-1, têm dentes paralelos ao eixo de rotação e são utilizadas para transmitir movimento entre dois eixos paralelos. De todos os tipos, a engrenagem cilíndrica de dentes retos é a mais simples, sendo, por essa razão, empregada para desenvolver as relações cinemáticas primárias da forma de dente.

As *engrenagens helicoidais*, mostradas na Figura 13-2, têm dentes inclinados em relação ao eixo de rotação. Podem ser utilizadas nas mesmas aplicações que as engrenagens de dentes retos, porém sem ser tão barulhentas quanto aquelas, devido ao engajamento mais gradual dos dentes durante o engranzamento. O dente inclinado também cria forças axiais e momentos flexores, os quais não estão presentes em se tratando de dentes retos. Algumas vezes, as engrenagens helicoidais são empregadas para transmitir movimento entre eixos não-paralelos.

As *engrenagens cônicas,* exibidas na Figura 13-3, têm dentes formados em superfícies cônicas e são utilizadas para transmitir movimento entre eixos que se interceptam. A figura realmente ilustra *engrenagens cônicas de dentes retos*. As *engrenagens cônicas espiraladas* são cortadas de forma que o dente deixe de ser reto, formando um arco circular. As *engrenagens hiperbolóides*, abreviadas por *hipóides*, são muito semelhantes às engrenagens cônicas espiraladas, exceto pelo fato de serem os eixos deslocados e não-interceptantes.

O par *parafuso-coroa sem-fim*, apresentado na Figura 13-4, representa o quarto tipo básico de engrenagem. Como mostrado, o pinhão sem-fim assemelha-se a um parafuso. A direção de rotação da coroa sem-fim, também chamada de roda sem-fim, depende da direção de rotação do parafuso e de serem seus dentes

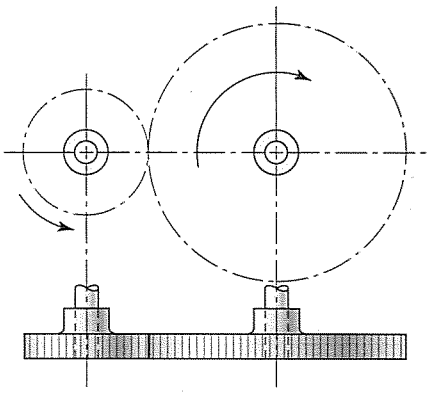


Figura 13-1 Engrenagens cilíndricas de dentes retos são utilizadas para transmitir movimento rotativo entre eixos paralelos.

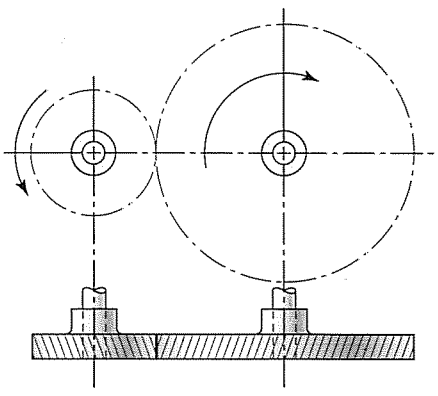


Figura 13-2 Engrenagens helicoidais são utilizadas para transmitir movimento entre eixos paralelos e não-paralelos.

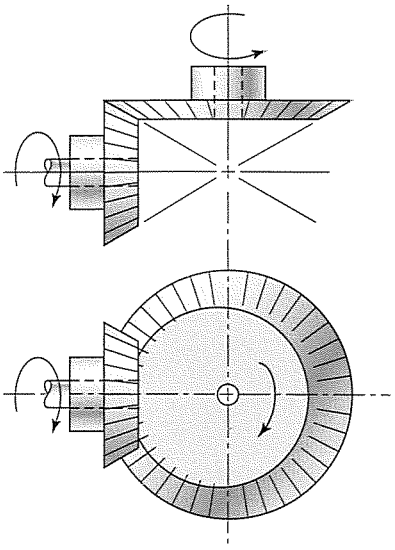


Figura 13-3 Engrenagens cônicas de dentes retos são utilizadas para transmitir movimento entre eixos interceptantes.

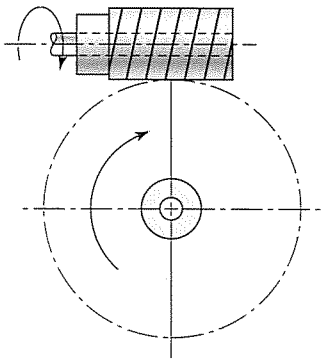


Figura 13-4 Engrenagens sem-fim são utilizadas para transmitir movimento rotativo entre eixos não-paralelos e não-interceptantes.

cortados à direita ou à esquerda. Conjuntos de engrenagens sem-fim também são construídos para que os dentes de um deles, ou de ambos, cubram-se parcialmente um ao outro. Tais conjuntos são denominados conjuntos de sem-fim de *envelope único* ou de *envelope duplo*. Os conjuntos de sem-fim são mais utilizados quando as razões de velocidade dos dois eixos são bastante altas – digamos, 3 ou mais.

13-2 Nomenclatura

A terminologia para os dentes de engrenagens retas está ilustrada na Figura 13-5. O *círculo primitivo*, ou *de passo*, é um círculo teórico sobre o qual todos os cálculos são geralmente baseados; seu diâmetro é o *diâmetro primitivo*. Os círculos primitivos de um par de engrenagens engranzadas são tangentes entre si. O *pinhão* é a menor das duas engrenagens. A maior é freqüentemente denominada *coroa*, ou *engrenagem*.

O *passo circular p* é a distância, medida no círculo primitivo, de um ponto de um dente ao correspondente ponto no dente adjacente. Assim, o passo circular é igual à soma da *espessura de dente* e da *largura do espaçamento*.

O *módulo m* é a razão entre o diâmetro primitivo e o número de dentes. A unidade habitual de comprimento é o milímetro. O módulo é o índice de tamanho de dente no SI.

O *passo diametral P* é a razão entre o número de dentes da engrenagem e o diâmetro primitivo. Logo, é o recíproco do módulo. Uma vez que o passo diametral é utilizado somente com unidades americanas, é expresso como dentes por polegada.

O *adendo a* é a distância radial entre o *topo do dente* e o círculo primitivo. O *dedendo b* é a distância radial do *fundo de dente* ao círculo primitivo. A *altura completa* h_t é a soma do adendo e do dedendo.

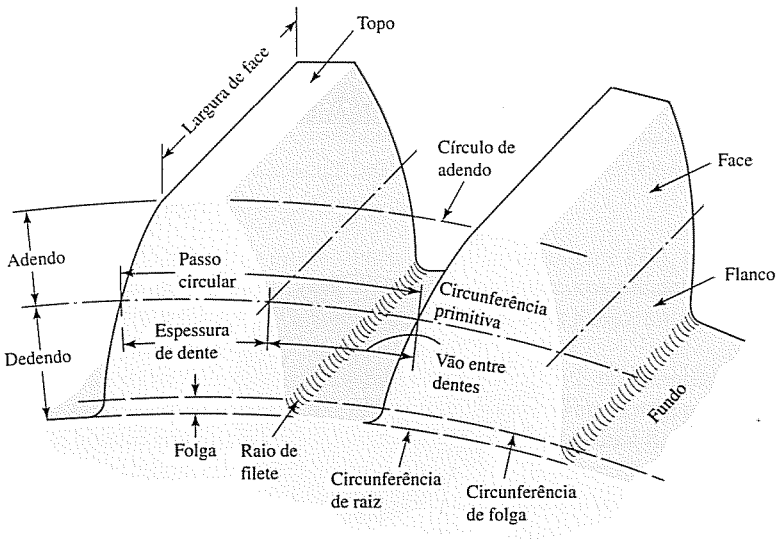


Figura 13-5 Nomenclatura para dentes de engrenagens cilíndricas de dentes retos.

O *círculo de folga* é um círculo tangente ao círculo de adendo da engrenagem par. A *folga c* é o quanto o dedendo, em uma dada engrenagem, excede ao adendo da sua engrenagem par. O *recuo* é o quanto a largura do espaço entre os dentes excede à espessura dos dentes engranzados, medido sobre os círculos primitivos.

Você deve provar a si mesmo a validade das seguintes relações úteis:

$$P = \frac{N}{d} \tag{13-1}$$

$$m = \frac{d}{N} \tag{13-2}$$

$$p = \frac{\pi d}{N} = \pi m \tag{13-3}$$

$$pP = \pi \tag{13-4}$$

em que: P = passo diametral, dentes por polegada
N = número de dentes
d = diâmetro primitivo, in
m = módulo, mm
d = diâmetro primitivo, mm
p = passo circular

13-3 Ação Conjugada

A discussão que se segue supõe que os dentes sejam perfeitamente formados, suaves e rígidos. Tal hipótese é, obviamente, irrealista, já que a aplicação de forças causará deflexões.

Os dentes de engrenagens engranzadas, agindo uns sobre os outros para produzir movimento rotatório, são similares a cames. Quando os perfis de dente, ou cames, são projetados para produzir uma razão de velocidade angular constante durante o engranzamento, diz-se que os mesmos têm *ação conjugada*. Pelo menos em tese é possível selecionar, arbitrariamente, qualquer perfil para um dente e então encontrar um perfil para o dente engajante que resulte em ação conjugada. Uma dessas soluções é o *perfil de evoluta*, o qual, com umas poucas exceções, é de uso universal para dentes de engrenagens e o único com o qual nos preocuparemos.

Quando uma superfície curva empurra outra superfície (Figura 13-6), o ponto de contato ocorre onde ambas são tangentes entre si (ponto c), e as forças em qualquer instante são direcionadas, ao longo da normal comum ab, às duas curvas. A linha ab, representando a direção da ação das forças, é denominada *linha de ação*. Essa linha interceptará a linha de centros O-O em um ponto P. A razão de velocidade angular en-

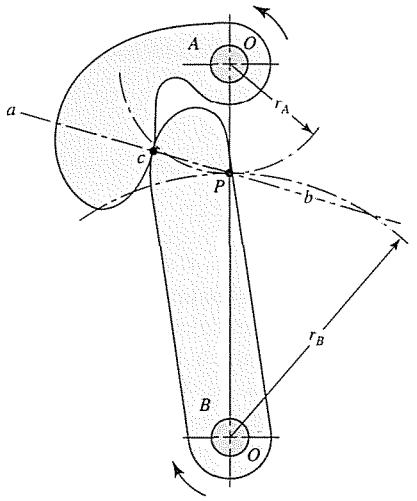


Figura 13-6 Came *A* e seguidor *B* em contato. Quando as superfícies em contato têm perfis de evolvente, a ação conjugada resultante produz uma razão constante de velocidade angular.

tre os dois braços é inversamente proporcional aos seus raios ao ponto *P*. Os círculos traçados através do ponto *P*, a partir de cada centro, são denominados *círculos primitivos,* e o raio de cada um deles é denominado *raio primitivo.* O ponto *P*, por sua vez, é denominado *ponto primitivo.*

A Figura 13-6 é útil para uma outra observação. Um par de engrenagens é, de fato, um par de cames que agem em um pequeno arco e que, antes do término do contorno de evoluta, são substituídos por um outro par idêntico de cames. Os cames podem rodar em uma ou outra direção e são configurados para transmitir uma razão de velocidade angular constante. Se curvas de evoluta são utilizadas, as engrenagens toleram mudanças na distância centro a centro, *sem* qualquer variação na razão constante de velocidade angular. Ademais, os perfis de cremalheira têm flancos retos, tornando o ferramental primário mais simples.

Para transmitir movimento a uma razão de velocidade angular constante, o ponto primitivo deve permanecer fixo; isto é, todas as linhas de ação, para cada ponto instantâneo de contato, devem passar pelo mesmo ponto *P*. No caso do perfil de evoluta, será mostrado que todos os pontos de contato ocorrem na mesma linha reta *ab*, que todas as normais aos perfis de dente, no ponto de contato, coincidem com a linha *ab* e que, portanto, esses perfis transmitem movimento rotativo uniforme.

13-4 Propriedades da Evolvente

Uma curva evolvente, ou involuta,* pode ser gerada como mostra a Figura 13-7(*a*). Um flange parcial *B* é atado ao cilindro *A*, ao redor do qual é enrolada uma corda *def*, que é mantida esticada. O ponto *b* na corda representa o ponto traçador e, à medida que ela é enrolada e desenrolada ao redor do cilindro, esse ponto irá traçar a curva evolvente *ac*. O raio de curvatura da evolvente varia continuamente, sendo zero no ponto *a* e um máximo no ponto *c*. No ponto *b*, o raio é igual à distância *be*, uma vez que o ponto *b* está, instantaneamente, rodando em relação ao ponto *e*. Dessa forma, a linha geradora *de* é normal à evolvente em todos os pontos da intersecção e, ao mesmo tempo, sempre tangente ao cilindro *A*. O cilindro sobre o qual a evolvente é gerada é denominado *círculo de base.*

Examinemos o perfil da evolvente para verificar como ela satisfaz aos requerimentos para transmissão de movimento uniforme. Na Figura 13-7(*b*), duas rodas de engrenagens com centros fixos em O_1 e O_2 são mostradas tendo círculos de base cujos raios respectivos são O_1a e O_2b. Imaginemos, agora, que uma corda seja enrolada ao redor do círculo de base da engrenagem 1, esticada entre os pontos *a* e *b* e enrolada, em sentido anti-horário, ao redor do círculo de base da engrenagem 2. Se, então, os círculos de base forem rodados em direções diferentes, a fim de manter a corda esticada, um ponto *g* nela irá descrever as evolventes *cd* na engrenagem 1 e *ef* na engrenagem 2. Tais evolventes são, assim, geradas simultaneamente pelo ponto traçador. Esse ponto representa, portanto, o ponto de contato, ao passo que a porção da corda *ab* é a linha gera-

* N. de T.: Os termos *evoluta* e *involuta* são relacionados. *Evoluta*, do latim *evolutus*, é a curva que corresponde ao local geométrico de uma outra curva; o envelope das perpendiculares da involuta. *Involuta*, ou *evolvente*, do latim *involutus,* é, por sua vez, o local geométrico dos centros de curvatura de uma curva plana ou inversa; curva cujas tangentes são normais a uma outra; curva que se faz sobre a superfície tangente de uma outra curva e que intercepta, ortogonalmente, as retas geradoras.

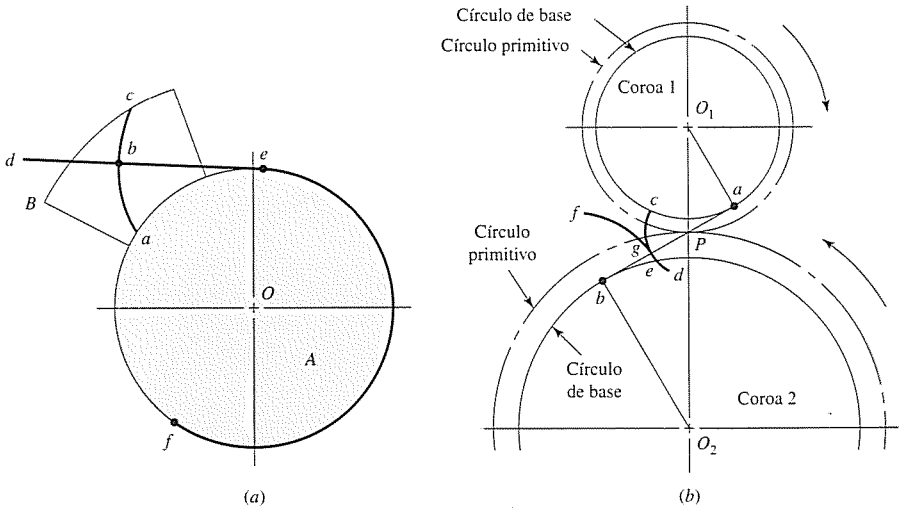


Figura 13-7 (a) Geração de uma evolvente; (b) ação de evolvente.

dora – ao longo da qual o ponto de contato se move; essa linha não muda de posição, pois é sempre tangente aos círculos de base; ademais, uma vez que ela é sempre normal à evolvente no ponto de contato, o requerimento de movimento uniforme é satisfeito.

13-5 Fundamentos

Entre outras coisas, é necessário que você realmente seja capaz de desenhar os dentes de um par de engrenagens engranzadas. Contudo, deve entender que não está fazendo isso para propósitos de oficina ou de fabricação de engrenagens. Ao contrário, fazemos os desenhos de dentes de engrenagens para obter um entendimento dos problemas envolvidos no engranzamento de dentes engajados.

Primeiro, é necessário aprender como construir uma curva evolvente. Como mostrado na Figura 13-8, divida o círculo de base em partes iguais e construa linhas radiais OA_0, OA_1, OA_2, etc. Começando em A_1, construa perpendiculares A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, etc. A seguir, ao longo de A_1B_1, marque a distância* A_1A_0; ao longo de A_2B_2, marque duas vezes a distância A_1A_0, etc., produzindo os pontos através dos quais a curva evolvente pode ser construída.

A fim de investigar os fundamentos da ação de dentes, prossigamos, passo a passo, no processo de construção de dentes de um par de engrenagens.

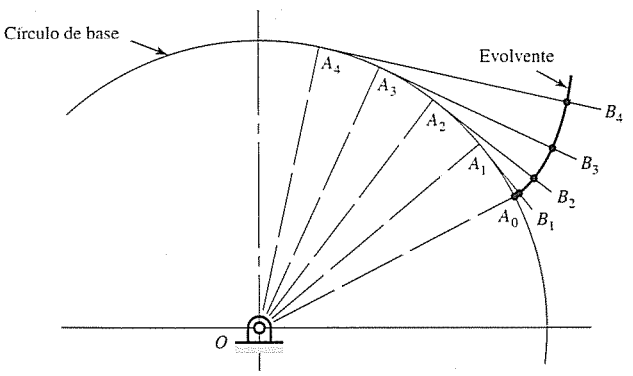


Figura 13-8 Construção de uma curva evolvente de círculo.

* N. de T.: Na verdade, o autor refere-se ao comprimento do arco A_1A_0 a ser marcado ao longo da tangente A_1B_1.

Quando duas engrenagens estão engranzadas, seus círculos primitivos rolam uns sobre os outros, sem escorregamento. Designe os raios primitivos como r_1 e r_2 e as velocidades angulares como ω_1 e ω_2, respectivamente. Desse modo, a velocidade no círculo primitivo vale

$$V = |r_1\omega_1| = |r_2\omega_2|$$

Logo, a relação entre raios e velocidades angulares é

$$\left|\frac{\omega_1}{\omega_2}\right| = \frac{r_2}{r_1} \tag{13-5}$$

Suponha que desejemos projetar um redutor de velocidade tal que a velocidade de entrada seja de 1800 rpm e a de saída, 1200 rpm. Isso representa uma razão de 3:2; os diâmetros dos círculos primitivos estariam, portanto, na mesma razão, por exemplo, de um pinhão de 4 in acionando uma coroa de 6 in. As várias dimensões encontradas em engrenamentos são sempre baseadas nos círculos primitivos.

Suponha que especifiquemos que um pinhão de 18 dentes deva engranzar com uma engrenagem de 30 dentes e que o passo diametral do conjunto de engrenagens deva ser de dois dentes por polegada. Assim, a partir da Equação (13-1), os diâmetros primitivos do pinhão e da coroa são, respectivamente,

$$d_1 = \frac{N_1}{P} = \frac{18}{2} = 9 \text{ in} \qquad d_2 = \frac{N_2}{P} = \frac{30}{2} = 15 \text{ in}$$

O primeiro passo, ao desenhar dentes em um par de rodas, é mostrado na Figura 13-9. A distância entre centros é a soma dos raios primitivos – nesse caso, 12 in. Sendo assim, localize os centros O_1 e O_2 das engrenagens, 12 polegadas à parte. Construa então os círculos primitivos de raios r_1 e r_2. Esses círculos são tangentes entre si no ponto P, o *ponto primitivo*. A seguir, construa a linha *ab*, a tangente comum, passando pelo ponto primitivo. Designamos a engrenagem 1 como sendo a engrenagem motora, e, uma vez que ela esteja se movendo em sentido anti-horário, desenhamos uma linha *cd* passando pelo ponto P, formando um ângulo ϕ com a tangente comum *ab*. A linha *cd* tem três nomes, todos eles de uso geral: é denominada *linha de pressão*, *linha de geração* e *linha de ação*. Ela representa a direção na qual a força resultante atua entre as engrenagens. O ângulo ϕ é denominado *ângulo de pressão* e geralmente apresenta os valores de 20 ou 25°, ainda que $14\frac{1}{2}^\circ$ tenha sido utilizado no passado.

A seguir, em cada engrenagem, desenhe um círculo tangente à linha de pressão. Esses círculos constituem os *círculos de base*. Uma vez que são tangentes à linha de pressão, o ângulo de pressão determina seus tamanhos. Como mostrado na Figura 13-10, o raio do círculo de base é

$$r_b = r\cos\phi \tag{13-6}$$

em que r é o raio primitivo.

Agora, gere uma evolvente sobre cada círculo de base, tal como discutido previamente e mostrado na Figura 13-9. Essa evolvente deve ser utilizada para um lado de dente de engrenagem. Não é necessário desenhar uma outra curva na direção reversa para criar o outro lado do dente, uma vez que iremos utilizar um gabarito que pode ser girado de modo a obtê-lo.

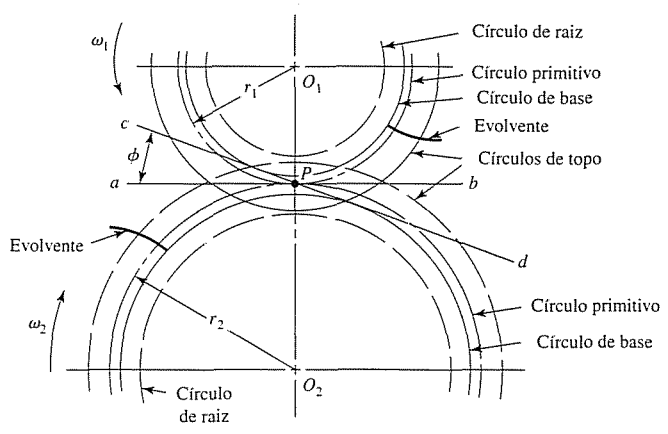


Figura 13-9 Círculos de um arranjo de engrenagens.

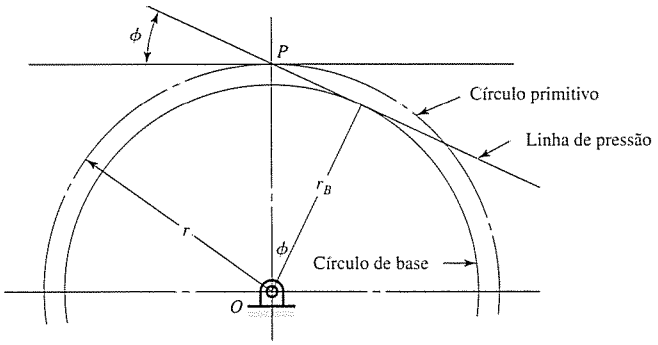


Figura 13-10 O raio do círculo de base pode ser relacionado ao ângulo de pressão ϕ e ao raio do círculo primitivo por meio de $r_b = r \cos \phi$.

As distâncias referentes ao adendo e ao dedendo para dentes padronizados intercambiáveis são, como iremos aprender mais adiante, $1/P$ e $1{,}25/P$, respectivamente. Portanto, para o par de engrenagens que estamos construindo,

$$a = \frac{1}{P} = \frac{1}{2} = 0{,}500 \text{ in} \qquad b = \frac{1{,}25}{P} = \frac{1{,}25}{2} = 0{,}625 \text{ in}$$

Fazendo uso dessas distâncias, desenhe os círculos de adendo e dedendo do pinhão e da coroa como mostrado na Figura 13-9.

A seguir, utilizando papel de desenho espesso ou, preferivelmente, uma folha de plástico claro de 0,015 a 0,020 in, recorte um gabarito para cada evolvente, sendo cuidadoso ao localizar os centros das engrenagens de forma apropriada com relação a cada evolvente. A Figura 13-11 consiste em uma reprodução do gabarito empregado para criar algumas das ilustrações deste livro. Observe que apenas um lado do perfil de dente é construído nesse gabarito. Para obter o outro lado, vire-o. Para alguns problemas, você pode querer construir um gabarito para o dente inteiro.

Para desenhar um dente, você necessita saber sua espessura. A partir da Equação (13-4), o passo circular é

$$p = \frac{\pi}{P} = \frac{\pi}{2} = 1{,}57 \text{ in}$$

Sendo assim, a espessura do dente é

$$t = \frac{p}{2} = \frac{1{,}57}{2} = 0{,}785 \text{ in}$$

medida no círculo primitivo. Utilizando essa distância para a espessura de dente, assim como para o espaço entre dentes, desenhe tantos dentes quanto desejar, por meio do gabarito, após os pontos terem sido marcados no círculo primitivo. Na Figura 13-12, somente um dente foi desenhado em cada engrenagem. Você poderá encontrar problemas ao desenhar esses dentes, se um dos círculos de base for maior que o círculo de dedendo. A razão para isso reside no fato de que a evolvente começa no círculo de base, sendo indefinida abaixo dele. Assim, ao desenhar dentes de engrenagens, geralmente desenhamos uma linha radial para o perfil abaixo do círculo de base. A forma real, entretanto, dependerá do tipo de ferramenta de máquina utilizada para formar os dentes durante a manufatura, isto é, da forma como o perfil é gerado.

A porção do dente entre o círculo de folga e o círculo de dedendo inclui o filete. Nesse caso, a folga é

$$c = b - a = 0{,}625 - 0{,}500 = 0{,}125 \text{ in}$$

A construção termina quando os filetes tiverem sido desenhados.

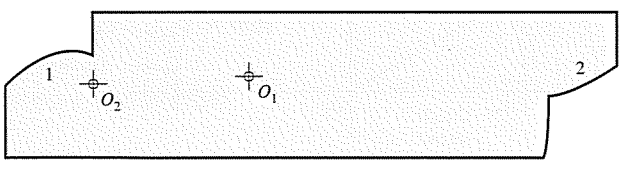


Figura 13-11 Um gabarito para o desenho de dentes.

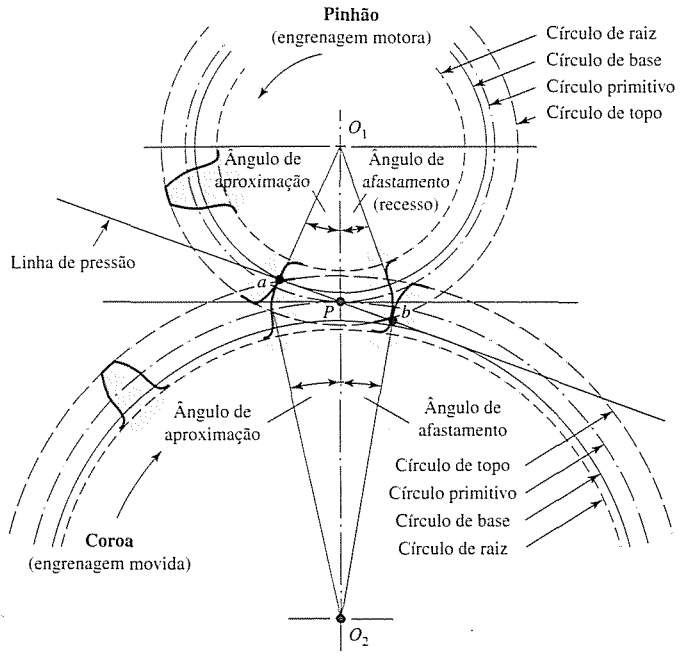


Figura 13-12 Interação entre dentes.

Referindo-nos novamente à Figura 13-12, o pinhão com centro em O_1 é a engrenagem motora e roda em sentido anti-horário. A linha de pressão, ou geração, é a mesma corda utilizada na Figura 13-7(*a*) para gerar a evolvente, e o contato ocorre ao longo dessa linha. O contato inicial acontecerá quando o flanco da engrenagem motora entrar em contato com a ponta do dente da engrenagem movida. Isso ocorre no ponto *a* da Figura 13-12, no qual o círculo de adendo da engrenagem acionada cruza a linha de pressão. Se construirmos agora perfis de dente através desse ponto e traçarmos linhas radiais desde a intersecção desses perfis com os círculos primitivos até os centros das engrenagens, obteremos o *ângulo de aproximação* de cada engrenagem.

À medida que os dentes engranzarem, o ponto de contato irá deslizar sobre o lado do dente motor, de modo que a ponta desse dente estará em contato justamente antes que o contato termine. Por conseguinte, o ponto final de contato estará onde o círculo de adendo da engrenagem motora cruzar a linha de pressão. Esse é o ponto *b* na Figura 13-12. Desenhando um outro par de perfis de dentes em *b*, obtemos o *ângulo de recesso* de cada engrenagem de maneira semelhante àquela utilizada para encontrar os ângulos de aproximação. A soma do ângulos de aproximação e de recesso para cada engrenagem é denominada *ângulo de ação*. A linha *ab* é denominada *linha de ação*.

Podemos imaginar uma *cremalheira* como uma engrenagem cilíndrica de dentes retos, com um diâmetro primitivo infinitamente grande. Logo, a cremalheira tem um número infinito de dentes e um círculo de base que se situa a uma distância infinita do ponto primitivo. Os lados dos dentes de evolvente em uma cremalheira são linhas retas formando um ângulo com a linha de centros igual ao ângulo de pressão. A Figura 13-13 mostra uma cremalheira com perfil de evolvente, engranzada com um pinhão. Os lados correspondentes em dentes de evolvente são curvas paralelas; o *passo de base* é a distância, constante e fundamental, entre eles, ao longo de uma normal comum, como exibido na Figura 13-13. O passo de base relaciona-se com o passo circular pela equação

$$p_b = p_c \cos \phi \tag{13-7}$$

na qual p_b é o passo de base.

A Figura 13-14 mostra um pinhão engranzado com uma engrenagem *interna* ou *anelar*. Observe que, nesse momento, ambas as engrenagens têm seus centros de rotação do mesmo lado que o ponto primitivo. Dessa forma, as posições dos círculos de adendo e dedendo, em relação ao círculo primitivo, são invertidas; o círculo de adendo da engrenagem de dentes internos situa-se *dentro* do círculo primitivo. Observe também, a partir da Figura 13-14, que o círculo de base da engrenagem interna situa-se dentro do círculo primitivo, próximo do círculo de adendo.

Uma outra observação interessante refere-se ao fato de que os diâmetros operativos dos círculos primitivos de um par de engrenagens engranzadas não necessitam ser os mesmos que os respectivos diâmetros

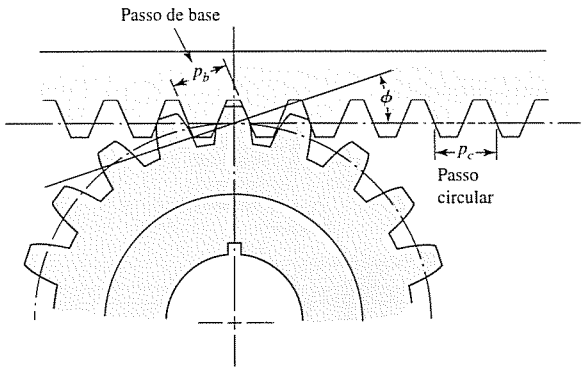


Figura 13-13 Pinhão de dentes com perfil de evolvente e cremalheira.

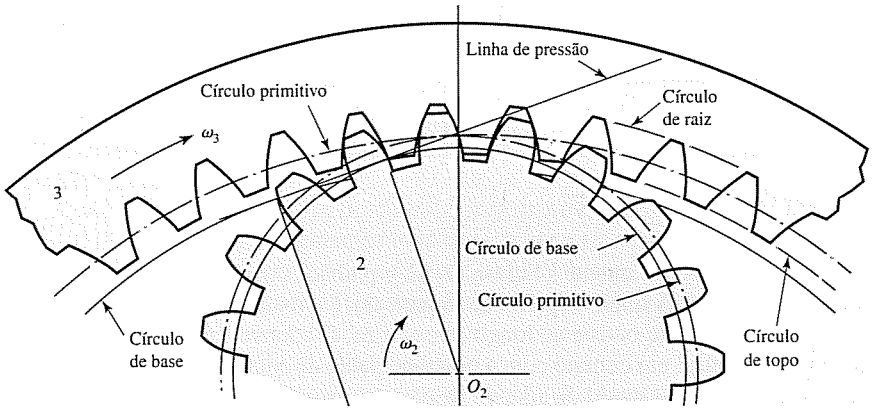


Figura 13-14 Engrenagem interna e pinhão.

primitivos de projeto das engrenagens, embora seja essa a forma como eles foram construídos na Figura 13-12. Se aumentarmos a distância entre os centros, criaremos dois novos círculos primitivos de operação com diâmetros maiores, haja vista que eles devem ser tangentes entre si no ponto primitivo. Dessa forma, os círculos primitivos das engrenagens realmente não começarão a existir até que um par de engrenagens seja posto em engranzamento.

Alterar a distância entre os centros não produz efeito sobre os círculos de base, visto que esses círculos foram utilizados para gerar os perfis de dentes. Assim, o círculo de base é fundamental para uma engrenagem. Incrementar a distância entre os centros aumenta o ângulo de pressão e diminui o comprimento da linha de ação; no entanto, os dentes ainda são conjugados, o requerimento de transmissão uniforme de movimento ainda é satisfeito e a razão de velocidade angular não mudou.

EXEMPLO 13-1

Um par de engrenagens consiste em um pinhão de 16 dentes movendo uma coroa de 40 dentes. O passo diametral vale 2, e o adendo e o dedendo são $1/P$ e $1{,}25/P$, respectivamente. As engrenagens são cortadas com um ângulo de pressão de 20°.

(*a*) Compute o passo circular, a distância entre os centros e os raios dos círculos de base.

(*b*) Ao montar essas engrenagens, a distância entre os centros foi, incorretamente, aumentada em $\frac{1}{4}$ in. Calcule os novos valores do ângulo de pressão e os diâmetros de círculo primitivo.

Solução

Resposta (*a*)

$$p = \frac{\pi}{P} = \frac{\pi}{2} = 1{,}57 \text{ in}$$

Os diâmetros primitivos do pinhão e da coroa são, respectivamente,

$$d_P = \frac{16}{2} = 8 \text{ in} \qquad d_G = \frac{40}{2} = 20 \text{ in}$$

Portanto, a distância entre os centros é

$$\frac{d_P + d_G}{2} = \frac{8 + 20}{2} = 14 \text{ in}$$

Uma vez que os dentes foram cortados com um ângulo de pressão de 20°, os raios do círculo de base são determinados segundo a expressão $r_b = r \cos \phi$,

Resposta
$$r_b \text{ (pinhão)} = \frac{8}{2} \cos 20^\circ = 3{,}76 \text{ in}$$

Resposta
$$r_b \text{ (coroa)} = \frac{20}{2} \cos 20^\circ = 9{,}40 \text{ in}$$

(*b*) Designando como d'_P e d'_G os novos diâmetros primitivos, o aumento de $\frac{1}{4}$ in na distância entre os centros requer que

$$\frac{d'_P + d'_G}{2} = 14{,}250 \tag{1}$$

Ademais, a razão de velocidades não muda, e assim

$$\frac{d'_P}{d'_G} = \frac{16}{40} \tag{2}$$

Solucionando as Equações (1) e (2), simultaneamente, obtemos

Resposta
$$d'_P = 8{,}143 \text{ in} \qquad d'_G = 20{,}357 \text{ in}$$

Uma vez que $r_b = r \cos \phi$, o novo ângulo de pressão é

Resposta
$$\phi' = \cos^{-1} \frac{r_b \text{ (pinhão)}}{d'_P/2} = \cos^{-1} \frac{3{,}76}{8{,}143/2} = 22{,}56^\circ$$

13-6 Razão de Contato

A zona de ação de dentes de engrenagens engranzadas é mostrada na Figura 13-15. Recordemo-nos de que o contato entre dentes começa e termina na intersecção dos dois círculos de adendo com a linha de pressão. Na Figura 13-15, o contato inicial ocorre em *a* e o contato final, em *b*. Perfis de dentes traçados a partir desses pontos interceptam o círculo primitivo em *A* e *B*, respectivamente. Como mostrado, a distância *AP* é denominada *arco de aproximação* q_a e a distância *PB*, *arco de recesso* q_r. A soma dessas quantidades é o *arco de ação* q_t.

Agora, considere uma situação em que o arco de ação seja exatamente igual ao passo circular, isto é, $q_t = p$. Isso significa que um dente e seu espaço irão ocupar o arco completo *AB*. Em outras palavras, quando um dente está justamente começando o contato em *a*, o dente anterior está, ao mesmo tempo, terminando o seu contato em *b*. Portanto, durante a ação de dente entre *a* e *b* existirá exatamente um par de dentes em contato.

A seguir, considere uma situação em que o arco de ação seja maior que o passo circular, ainda que não muito – digamos, $q_t \doteq 1{,}2p$. Isso significa que, quando um par de dentes está acabando de entrar em contato em *a*, um outro par, ainda em contato, não terá ainda alcançado *b*. Logo, por um curto período de tempo haverá dois dentes em contato, um na vizinhança de *A* e outro na de *B*. À medida que o engranzamento prossegue, o par próximo a *B* deve cessar o contato, deixando apenas um par de dentes em contato, até que o procedimento se repita.

Devido à natureza dessa ação entre dentes, na qual um ou dois pares de dentes estão em contato, é conveniente definir o termo *razão de contato* m_c como

$$m_c = \frac{q_t}{p} \tag{13-8}$$

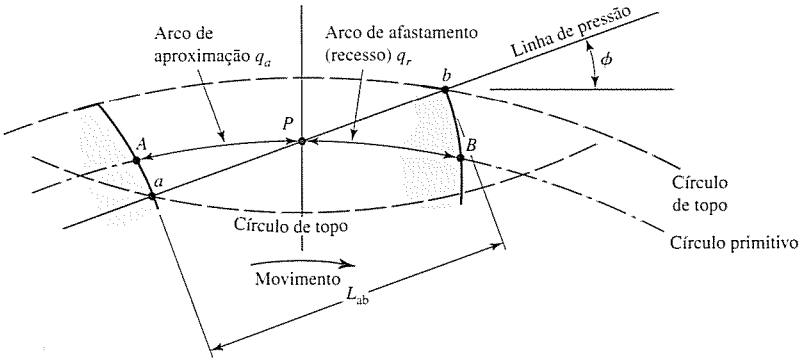


Figura 13-15 Definição da razão de contato.

um número que indica o número médio de pares de dentes em contato. Observe que essa razão é também igual ao comprimento da trajetória de contato dividido pelo passo de base. Engrenagens não devem, em geral, ser projetadas com razões de contato menores que cerca de 1,20, pois imprecisões de montagem podem reduzir a razão de contato ainda mais, aumentando a possibilidade de impacto entre os dentes, bem como um aumento do nível de barulho.

Uma maneira mais fácil de obter a razão de contato é medir a linha de ação *ab*, em vez do comprimento de arco *AB*. Uma vez que *ab*, na Figura 13-15, é tangente ao círculo de base quando estendido, o passo de base p_b deve ser utilizado para calcular m_c, em vez do passo circular, como na Equação (13-8). Se o comprimento da linha de ação é L_{ab}, a razão de contato é

$$m_c = \frac{L_{ab}}{p \cos \phi} \tag{13-9}$$

na qual a Equação (13-7) foi utilizada para o passo de base.

13-7 Interferência

O contato entre porções de perfis de dente que não são conjugados é conhecido como *interferência*. Considere a Figura 13-16; ela ilustra duas engrenagens de 16 dentes que foram cortadas com o ângulo de pressão, agora obsoleto, de $14\frac{1}{2}^\circ$. A engrenagem motora, engrenagem 2, roda em sentido horário. Os pontos inicial e final de contato são designados como *A* e *B*, respectivamente, e estão localizados na linha de pressão. Agora, observe que os pontos de tangência dessa linha com os círculos de base *C* e *D* estão localizados *dentro* do intervalo determinado por *A* e *B*. A interferência está presente.

A interferência é explicada como segue. O contato inicia quando o topo do dente movido contata o flanco do dente motor. Nesse caso, o flanco do dente motor faz contato primeiramente com o dente movido no ponto *A*, e isso ocorre *antes* que a porção de evolvente do perfil do dente motor inicie. Em outras palavras, o contato está ocorrendo abaixo do círculo de base da engrenagem 2, na porção de perfil *não-evolvente* do flanco. O efeito real é que a ponta em evolvente ou face da engrenagem movida tende a cavar para fora o flanco de perfil não-evolvente da engrenagem motora.

Nesse exemplo, o mesmo efeito ocorre novamente quando os dentes abandonam o contato, que deve terminar no ponto *D*, ou antes. Uma vez que ele não o faz até o ponto *B*, o efeito é o de o topo do dente motor cavar ou interferir no flanco do dente movido.

Quando dentes de engrenagens são produzidos mediante um processo de geração, a interferência é automaticamente eliminada, visto que a ferramenta de corte remove a porção interferente do flanco. Tal efeito é denominado *adelgaçamento*; se tal adelgaçamento for realmente pronunciado, o dente adelgaçado será enfraquecido de forma considerável. Portanto, o efeito da eliminação da interferência por um processo de geração serve meramente para substituir o problema original por um outro problema.

O menor número de dentes em um pinhão e uma coroa cilíndricos de dentes retos,[1] com razão de engrenamento de 1:1, que pode existir sem interferência é N_P. Esse número de dentes para engrenagens cilíndricas de dentes retos é dado por

[1] Robert Lipp, "Avoiding Tooth Interference in Gears", *Machine Design*, vol. 54, Nº 1, 1982, p. 122, 124.

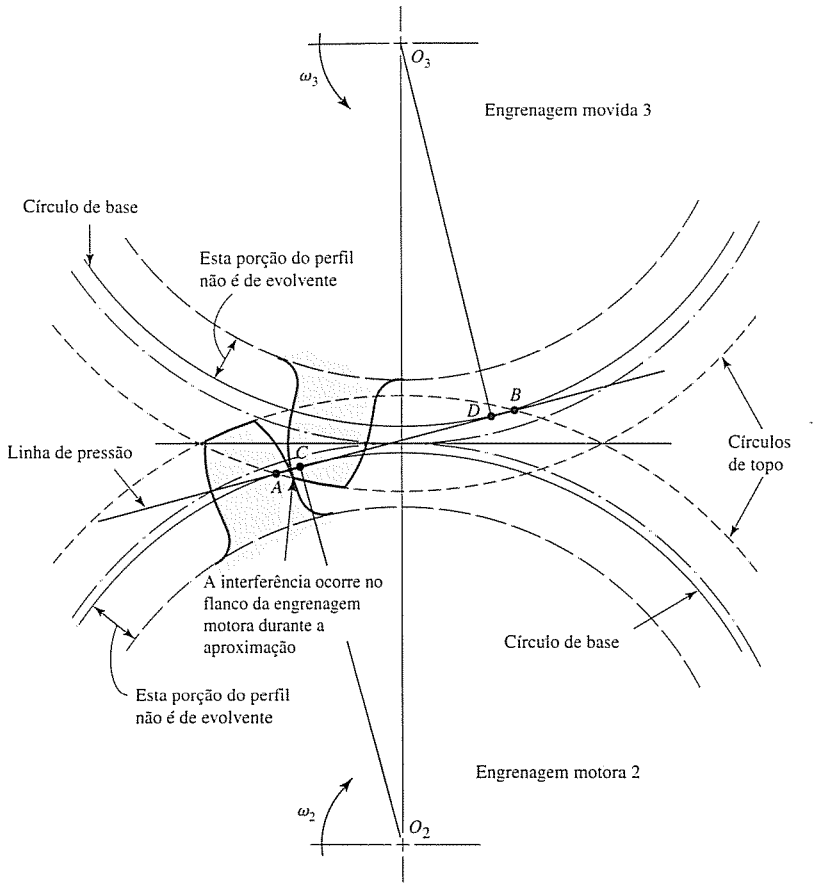


Figura 13-16 Interferência na ação de dentes de engrenagens. (Esta é, de fato, uma figura pobre; J. E. Shigley desenhou a forma dos dentes fazendo uso de arcos circulares, o que é incorreto, para responder a uma questão formulada por um estudante há muitos anos.)

$$N_P = \frac{4k}{6\,\text{sen}^2\,\phi}\left(1 + \sqrt{1 + 3\,\text{sen}^2\,\phi}\right) \tag{13-10}$$

em que $k = 1$ para dentes de altura completa, 0,8 para dentes reduzidos e ϕ = ângulo de pressão.

Para um ângulo de pressão de 20°, com $k = 1$,

$$N_P = \frac{4(1)}{6\,\text{sen}^2\,20^\circ}\left(1 + \sqrt{1 + 3\,\text{sen}^2\,20^\circ}\right) = 12{,}3 = 13 \text{ dentes}$$

Assim, 13 dentes no pinhão e na coroa não causam interferência. Observe que 12,3 dentes constituem um resultado possível para arcos engranzados; porém, para engrenagens rotantes, 13 dentes representam o menor número. Para um ângulo de pressão de $14\frac{1}{2}^\circ$, $N_P = 23$ dentes, de maneira que se pode entender por que poucos sistemas com dentes de $14\frac{1}{2}^\circ$ de ângulo de pressão são usados, já que ângulos de pressão maiores podem produzir um pinhão menor, com uma menor distância correspondente entre os centros.

Se a engrenagem par tem um número de dentes maior do que o pinhão, isto é, se $m_G = N_G / N_P = m$ é maior que um, então o menor número de dentes no pinhão, sem que ocorra interferência, é fornecido por

$$N_P = \frac{2k}{(1 + 2m)\,\text{sen}^2\,\phi}\left(m + \sqrt{m^2 + (1 + 2m)\,\text{sen}^2\,\phi}\right) \tag{13-11}$$

Se $m = 4$, $\phi = 20^\circ$,

$$N_P = \frac{2(1)}{(1 + 2[4])\,\text{sen}^2\,20^\circ}\left[4 + \sqrt{4^2 + (1 + 2[4])\,\text{sen}^2\,20^\circ}\right] = 15{,}4 = 16 \text{ dentes}$$

Assim, um pinhão de 16 dentes irá engranzar com uma coroa de 64 dentes, sem interferência.

O menor pinhão cilíndrico de dentes retos que irá operar com uma cremalheira, sem interferência, é

$$N_P = \frac{4(k)}{2\,\text{sen}^2\,\phi} \tag{13-12}$$

Para um ângulo de pressão de 20°, com dentes de profundidade completa, o menor número de dentes do pinhão é

$$N_P = \frac{4(1)}{2\,\text{sen}^2\,20^\circ} = 17{,}1 = 18 \text{ dentes}$$

A maior coroa com um pinhão especificado livre de interferência é

$$N_G = \frac{N_P^2\,\text{sen}^2\,\phi - 4k^2}{4k - 2N_P\,\text{sen}^2\,\phi} \tag{13-13}$$

Para um pinhão de 13 dentes, com um ângulo de pressão ϕ de 20°,

$$N_G = \frac{13^2\,\text{sen}^2\,20^\circ - 4(1)^2}{4(1) - 2(13)\,\text{sen}^2\,20^\circ} = 16{,}45 = 16 \text{ dentes}$$

Para um pinhão cilíndrico de dentes retos com 13 dentes, o máximo número de dentes possível na coroa, sem ocorrência de interferência, é 16.

Uma vez que ferramentas que dão forma a engrenagens resumem-se a contato com uma cremalheira, e o processo de fresagem é similar, o número mínimo de dentes para evitar a interferência, para evitar adelgaçamento no processo de fresagem, é igual ao valor de N_P quando N_G é infinito.

A importância do problema relativo a dentes que foram enfraquecidos por adelgaçamento não pode ser superenfatizada. Obviamente, a interferência pode ser eliminada utilizando-se mais dentes no pinhão. Todavia, se este se destina a transmitir uma dada quantidade de potência, mais dentes podem ser usados somente com aumento do diâmetro primitivo.

A interferência também pode ser reduzida mediante a utilização de um ângulo de pressão maior. Isso resulta em um círculo de base menor, de modo que uma parte maior do perfil de dente torna-se evolvente. A demanda por pinhões menores, com menos dentes, favorece, portanto, o uso de um ângulo de pressão de 25°, ainda que as forças de atrito e as cargas nos mancais aumentem e a razão de contato decresça.

13-8 Fabricação de Dentes de Engrenagens

Existem muitas maneiras de fabricar dentes de engrenagens, tais como *fundição em areia, moldagem em casca, fundição de investimento, fundição em molde permanente, fundição em matriz* e *fundição centrífuga*. Os dentes também podem ser fabricados mediante o *processo de metalurgia do pó*; de outra forma, por meio de *extrusão,* uma única barra de alumínio pode ser fabricada e então fatiada em engrenagens. De fato, as engrenagens que suportam altas cargas, em comparação com seus tamanhos, são geralmente feitas de aço e cortadas com *cortadores de forma* ou *de geração*. No corte de forma, o espaçamento dos dentes toma a forma exata do cortador. No de geração, uma ferramenta com uma forma diferente do perfil de dente move-se relativamente à peça que dará origem à engrenagem, de modo a gerar a forma apropriada de dente. Um dos métodos de formação de dentes mais recentes e promissores é conhecido como *conformação a frio*, ou *laminação a frio*, no qual matrizes são roladas sobre peças de aço para formar os dentes. As propriedades mecânicas do metal são notavelmente melhoradas pelo processo de rolamento, e um perfil gerado de alta qualidade é obtido ao mesmo tempo.

Os dentes de engrenagens podem ser usinados por fresagem, moldagem ou fresagem de caracol; podem também ser acabados por rebarbação, brunimento, retífica ou lapidação.

Engrenagens de termoplásticos como náilon, policarbonatos e acetal são bastante populares e facilmente manufaturadas por *injeção em molde*. Apresentam precisão variando entre baixa e moderada e são de baixo custo para produção em altas quantidades, além de serem e capazes de transmitir cargas leves, podendo funcionar sem lubrificação.

Fresagem

Os dentes de engrenagens podem ser cortados com uma fresa de forma feita para adaptar-se ao espaço de dente. Com esse método, é teoricamente necessário utilizar um cortador diferente para cada engrenagem.

uma vez que uma com 25 dentes, por exemplo, irá dispor de um espaço de dente diferente de uma outra que tenha, digamos, 24 dentes. De fato, a diferença em espaço não é muito grande, e verificou-se que oito cortadores podem ser utilizados para talhar, com precisão razoável, qualquer engrenagem no intervalo entre 12 dentes até uma cremalheira. Um conjunto separado de cortadores é, logicamente, requerido para cada passo.

Geração

Dentes podem ser gerados tanto por um pinhão cortador quanto por uma cremalheira cortadora. O pinhão cortador (Figura 13-17) reciproca o movimento alternativo ao longo do eixo vertical e avança vagarosamente sobre a peça sendo cortada até a profundidade requerida. Quando os círculos primitivos são tangentes, ambos, o cortador e a peça, rodam ligeiramente após cada golpe de corte. Uma vez que cada dente do cortador é uma ferramenta de corte, todos os dentes aparecerão cortados quando a peça completar uma rotação. Os lados de um dente de cremalheira de evolvente são retos. Por tal razão, uma ferramenta de geração tipo cremalheira proporciona um método preciso de corte dos dentes de engrenagens. Essa também é uma operação de forma e é ilustrada pelo desenho da Figura 13-18. Em operação, o cortador reciproca e inicialmente avança sobre a peça a ser cortada, até que os círculos primitivos sejam tangentes. Então, após cada golpe cortante, a peça e o cortador rolam ligeiramente em seus círculos primitivos. Quando ambos tiverem rolado uma distância igual ao passo circular, o cortador retorna ao ponto de partida e o processo continua até que todos os dentes tenham sido cortados.

Caracol de Corte

O processo de corte por ferramenta em caracol é ilustrado na Figura 13-19. O caracol de corte é uma ferramenta com forma idêntica à de um pinhão sem-fim. Os dentes têm lados retos, como em uma cremalheira; porém, o eixo do caracol deve ser girado do ângulo de hélice para que corte dentes de uma engrenagem cilíndrica de dentes retos. Por essa razão, os dentes gerados por um caracol de corte têm uma forma ligeiramente diferente daqueles gerados por um cortador de cremalheira. Ambos, o caracol e a peça, devem ser girados à razão de velocidade angular apropriada. O caracol é então avançado vagarosamente ao longo da face da peça, até que todos os dentes tenham sido cortados.

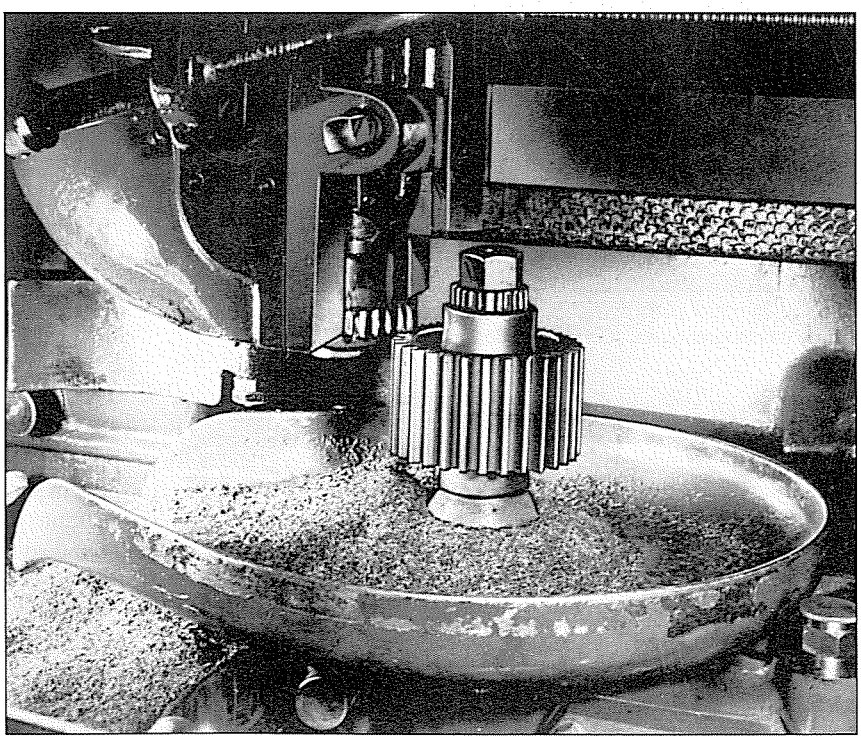


Figura 13-17 Geração de uma engrenagem cilíndrica de dentes retos com um pinhão cortador. *(Cortesia da Boston Gear Works, Inc.)*

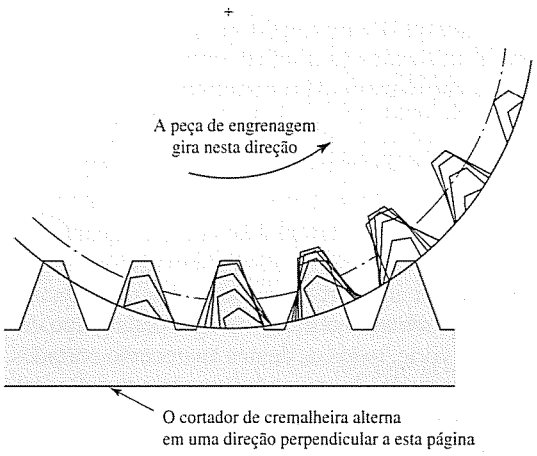


Figura 13-18 Usinagem de dentes por meio de uma cremalheira. (Esta é uma figura de quadro-negro que J. E. Shigley fez, em resposta a uma pergunta de um estudante, há quase 35 anos, na Universidade de Michigan.)

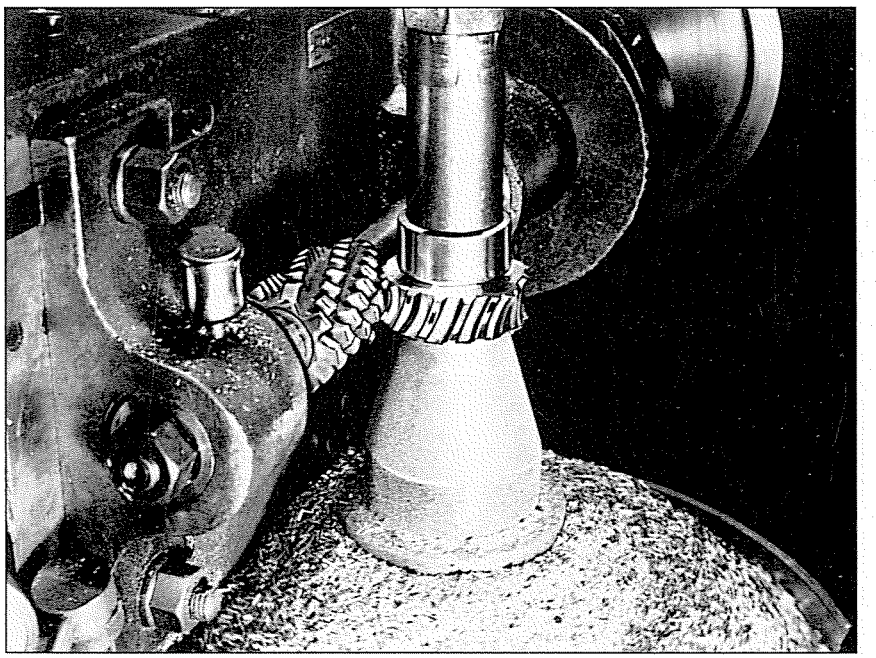


Figura 13-19 Fresagem de uma engrenagem. *(Cortesia da Boston Gear Works, Inc.)*

Acabamento

Engrenagens que rodam a altas velocidades e transmitem grandes forças podem ser submetidas a forças dinâmicas adicionais, no caso de haver erros nos perfis de dentes. Os erros podem ser de alguma forma evitados pelo acabamento dos perfis de dentes, o qual pode ser feito após o corte, tanto por rebarbação como por brunimento. Existem várias máquinas de rebarbação que cortam uma quantidade diminuta de metal, trazendo a acurácia do perfil de dente para dentro dos limites de 250 μin.

O brunimento, assim como a rebarbação, é usado com engrenagens que foram cortadas, ainda que não tratadas termicamente. Nele, engrenagens endurecidas, com dentes ligeiramente maiores que o necessário, são postas a rodar com a engrenagem, até que as superfícies tornem-se suaves.

A retífica e a lapidação são usadas para dentes de engrenagens endurecidas após tratamento térmico. A operação de retífica emprega o princípio da geração e produz dentes bastante precisos. Na lapidação, os dentes da engrenagem em trabalho e da lapidadora deslizam de forma axial, para que toda a sua superfície seja desgastada igualmente.

13-9 Engrenagens Cônicas de Dentes Retos

Quando engrenagens são utilizadas para transmitir movimento entre eixos interceptantes, algum tipo de engrenagem cônica é usado. Um par de engrenagens desse tipo é mostrado na Figura 13-20. Embora essas engrenagens sejam geralmente construídas para um ângulo entre eixos de 90°, elas podem ser produzidas para quase qualquer ângulo. Os dentes podem ser fundidos, fresados ou gerados. Apenas os dentes gerados podem ser classificados como precisos.

A terminologia relativa a engrenagens cônicas é ilustrada na Figura 13-20. O passo de tais engrenagens é medido na extremidade maior do dente, e ambos, o passo circular e o passo diametral, são calculados da mesma maneira que para engrenagens cilíndricas de dentes retos. Deve ser observado que a folga é uniforme. Os ângulos primitivos são definidos pelos cones primitivos que se encontram no ápice, como mostrado na figura. Eles são relacionados ao número de dentes, como segue:

$$\tan \gamma = \frac{N_P}{N_G} \qquad \tan \Gamma = \frac{N_G}{N_P} \tag{13-14}$$

em que os subscritos P e G referem-se ao pinhão e à engrenagem coroa, respectivamente, e em que γ e Γ são, respectivamente, os ângulos primitivos do pinhão e da coroa.

A Figura 13-20 mostra que a forma dos dentes, quando projetada no cone traseiro, é a mesma que em uma engrenagem cilíndrica de dentes retos com um raio igual à distância de cone traseiro r_b. Essa é conhecida como a aproximação de Tredgold. O número de dentes nessa engrenagem imaginária é

$$N' = \frac{2\pi r_b}{p} \tag{13-15}$$

em que N' é o *número virtual de dentes* e p é o passo circular medido na extremidade maior dos dentes. As engrenagens cônicas padronizadas de dentes retos são cortadas utilizando-se um ângulo de pressão de 20°, adendo e dedendo distintos, e dentes de altura completa. Isso aumenta a razão de contato, evita adelgaçamento e eleva a resistência do pinhão.

13-10 Engrenagens Helicoidais de Eixos Paralelos

As engrenagens helicoidais, utilizadas para transmitir movimento entre eixos paralelos, são mostradas na Figura 13-2. O ângulo de hélice é o mesmo em cada engrenagem; no entanto, uma engrenagem deve ter uma hélice destra (mão direita), ao passo que a outra, uma hélice sestra (mão esquerda). A forma de dente é a de uma evolvente helicoidal e está ilustrada na Figura 13-21. Se um pedaço de papel, cortado na forma de um

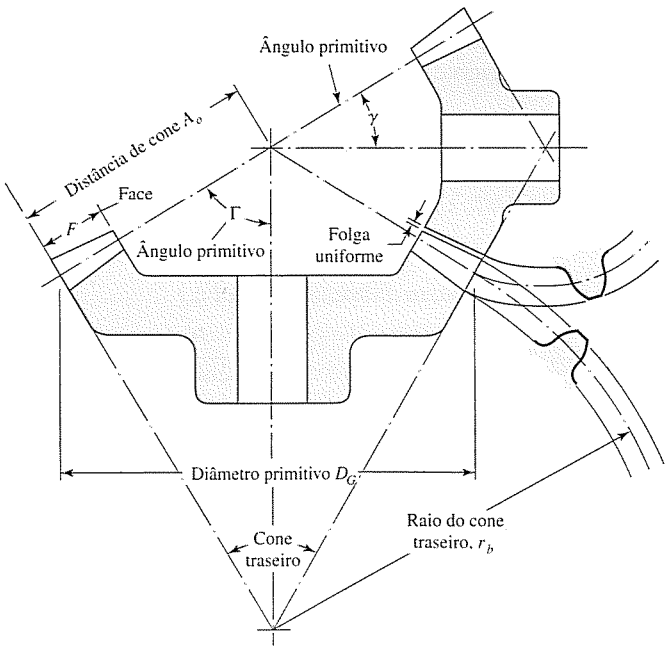


Figura 13-20 Terminologia de engrenagens cônicas de dentes retos.

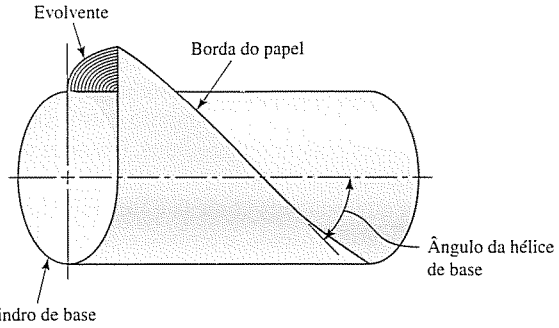


Figura 13-21 Uma evolvente helicoidal.

paralelogramo, é enrolado ao redor de um cilindro, a extremidade angular do papel torna-se uma hélice. Se desenrolarmos esse papel, cada ponto na extremidade angular irá gerar uma curva evolvente. Tal superfície, obtida quando cada ponto da extremidade gera uma evolvente, é denominada *helicóide de evolvente*.

O contato inicial dos dentes das engrenagens cilíndricas de dentes retos é uma linha que se estende ao longo da face completa do dente. O contato inicial dos dentes das engrenagens helicoidais é um ponto que se estende até formar uma reta, à medida que os dentes aumentam o grau de engranzamento. Em engrenagens cilíndricas de dentes retos, a linha de contato é paralela ao eixo de rotação; em engrenagens helicoidais, é uma diagonal cruzando a face do dente. É precisamente esse engajamento gradual dos dentes e a transferência suave de carga de um dente para o outro que confere às engrenagens helicoidais a habilidade de transmitir grandes cargas a altas velocidades. Devido à natureza do contato entre engrenagens helicoidais, a razão de contato tem importância menor, sendo a área de contato, que é proporcional à largura de face da engrenagem, o fator relevante.

As engrenagens helicoidais submetem os mancais de eixo a ambas as cargas, radial e axial. Quando as cargas axiais tornam-se elevadas, ou então motivo de objeção por outras razões, pode ser desejável utilizar engrenagens helicoidais duplas. Uma engrenagem desse tipo (espinha-de-peixe) é equivalente a duas engrenagens helicoidais de mãos opostas, montadas lado a lado no mesmo eixo. Elas desenvolvem reações axiais opostas e, assim, cancelam a carga axial.

Quando duas ou mais engrenagens helicoidais simples são montadas no mesmo eixo, a mão das engrenagens deve ser selecionada de modo a produzir uma carga axial mínima.

A Figura 13-22 representa uma porção da vista do topo de uma cremalheira helicoidal. As linhas *ab* e *cd* são as linhas de centro de dois dentes helicoidais adjacentes tomados sobre o mesmo plano primitivo. O ângulo ψ é o *ângulo de hélice*. A distância *ac* é o *passo circular transversal* p_t no plano de rotação (geralmente chamado de *passo circular*). A distância *ae* é o *passo circular normal* p_n e está relacionada com o passo circular transversal da seguinte forma:

$$p_n = p_t \cos \psi \tag{13-16}$$

A distância *ad* é chamada de *passo axial* p_x e está definida pela expressão

$$p_x = \frac{p_t}{\tan \psi} \tag{13-17}$$

Uma vez que $p_n P_n = \pi$, o *passo diametral normal* é

$$P_n = \frac{P_t}{\cos \psi} \tag{13-18}$$

O ângulo de pressão ϕ_n, na direção normal, é diferente do ângulo de pressão ϕ_t, na direção de rotação, devido à angularidade dos dentes. Esses ângulos relacionam-se por meio da equação

$$\cos \psi = \frac{\tan \phi_n}{\tan \phi_t} \tag{13-19}$$

A Figura 13-23 ilustra um cilindro cortado por um plano oblíquo *ab* em um ângulo ψ relativo a uma secção reta. Esse plano corta um arco que tem um raio de curvatura R. Para a condição $\psi = 0$, o raio de curvatura é $R = D/2$. Se imaginarmos o ângulo ψ sendo pouco a pouco aumentado de zero a 90°, veremos que R inicia em um valor $D/2$ e aumenta até quando $\psi = 90°$, $R = \infty$. O raio R é o raio primitivo apa-

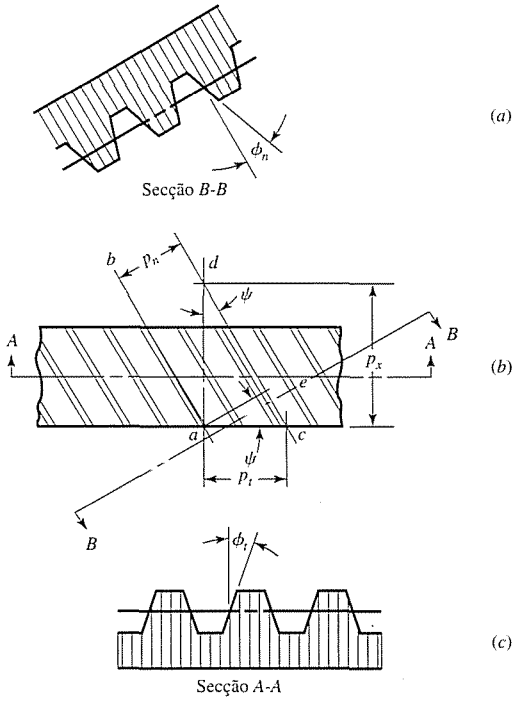


Figura 13-22 Nomenclatura de engrenagens helicoidais.

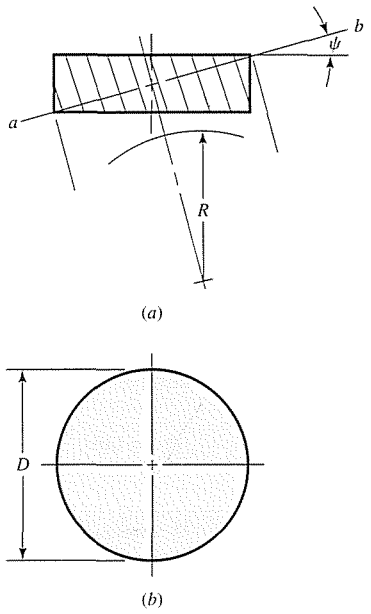


Figura 13-23 Cilindro cortado por um plano oblíquo.

rente de um dente de engrenagem helicoidal quando visto na direção dos elementos de dentes. Uma engrenagem do mesmo passo e com o raio R terá um número maior de dentes, devido ao aumento do raio. Na terminologia das engrenagens helicoidais, isso é conhecido como *número virtual de dentes*. Pode ser mostrado pela geometria analítica que o número virtual de dentes está relacionado com o número real por meio da equação

$$N' = \frac{N}{\cos^3 \psi} \tag{13-20}$$

em que N' é o número virtual de dentes e N, o número real. É necessário saber o número virtual de dentes no projeto para a resistência e também, algumas vezes, no corte de dentes helicoidais. Esse número aparentemente maior de raio de curvatura significa que menos dentes necessitam ser utilizados em engrenagens helicoidais, uma vez que terão menos adelgaçamento.

EXEMPLO 13-2

Uma engrenagem helicoidal de estoque tem um ângulo de pressão de 20°, um ângulo de hélice de 25° e um passo diametral transversal de 6 dentes/polegada, tendo 18 dentes. Encontre:

(*a*) O diâmetro primitivo

(*b*) Os passos axial, normal e transversal

(*c*) O passo diametral normal

(*d*) O ângulo de pressão transversal

Solução

Resposta (*a*)
$$d = \frac{N}{P_t} = \frac{18}{6} = 3 \text{ in}$$

Resposta (*b*)
$$p_t = \frac{\pi}{P_t} = \frac{\pi}{6} = 0{,}5236 \text{ in}$$

Resposta
$$p_n = p_t \cos\psi = 0{,}5236 \cos 25° = 0{,}4745 \text{ in}$$

Resposta
$$p_x = \frac{p_t}{\tan\psi} = \frac{0{,}5236}{\tan 45°} = 1{,}123 \text{ in}$$

Resposta (*c*)
$$P_n = \frac{P_t}{\cos\psi} = \frac{6}{\cos 25°} = 6{,}620 \text{ dentes/in}$$

Resposta (*d*)
$$\phi_t = \tan^{-1}\left(\frac{\tan\phi_n}{\cos\psi}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\tan 20°}{\cos 25°}\right) = 21{,}88°$$

Da mesma forma que no caso de engrenagens de dentes retos, dentes de engrenagens helicoidais podem apresentar interferência. Na Equação (13-19), o ângulo de pressão na direção tangencial (de rotação) ϕ_t pode ser posto em evidência para resultar em

$$\phi_t = \tan^{-1}\left(\frac{\tan\phi_n}{\cos\psi}\right)$$

O menor número de dentes N_P de um pinhão helicoidal que irá rodar, sem interferência,[2] com uma coroa com o mesmo número de dentes é

$$N_P = \frac{4k\cos\psi}{6\,\text{sen}^2\,\phi_t}\left(1 + \sqrt{1 + 3\,\text{sen}^2\,\phi_t}\right) \tag{13-21}$$

Se o ângulo de pressão normal ϕ_n é 20° e o ângulo de hélice ψ, 30°, então ϕ_t é

$$\phi_t = \tan^{-1}\left(\frac{\tan 20°}{\cos 30°}\right) = 22{,}80°$$

$$N_P = \frac{4(1)\cos 30°}{6\,\text{sen}^2\,22{,}80°}\left(1 + \sqrt{1 + 3\,\text{sen}^2\,22{,}80°}\right) = 8{,}48 = 9 \text{ dentes}$$

[2] *Op. cit.*, Robert Lipp, *Machine Design*, p. 122, 124.

Para uma determinada razão de engrenamento $m_G = N_G/N_P = m$, o menor número de dentes no pinhão é

$$N_P = \frac{2k\cos\psi}{(1+2m)\,\text{sen}^2\phi_t}\left[m + \sqrt{m^2 + (1+2m)\,\text{sen}^2\phi_t}\right] \tag{13-22}$$

O menor pinhão que pode rodar com uma cremalheira é

$$N_P = \frac{4k\cos\psi}{2\,\text{sen}^2\phi_t} \tag{13-23}$$

Para um ângulo de pressão normal ϕ_n de 20° e um ângulo de hélice ψ de 30°, e com $\phi_t = 22{,}80°$,

$$N_P = \frac{4(1)\cos 30°}{2\,\text{sen}^2\,22{,}80°} = 11{,}5 = 12 \text{ dentes}$$

A maior engrenagem com um pinhão especificado é dada por

$$N_G = \frac{N_P^2\,\text{sen}^2\,\phi_t - 4k^2\cos^2\psi}{4k\cos\psi - 2N_P\,\text{sen}^2\,\phi_t} \tag{13-24}$$

Para um pinhão de nove dentes com um ângulo de pressão ϕ_n de 20° e um ângulo de hélice ψ de 30°, lembrando que o ângulo de pressão tangencial ϕ_t é 22,80°,

$$N_G = \frac{9^2\,\text{sen}^2\,22{,}80° - 4(1)^2\cos^2 30°}{4(1)\cos 30° - 2(9)\,\text{sen}^2\,22{,}80°} = 12{,}02 = 12$$

Para dentes de engrenagens helicoidais, o número de dentes engranzados através da largura de uma engrenagem será maior que a unidade, e um termo denominado *razão de contato de face* é utilizado para descrevê-lo. Esse aumento da razão de contato, e o deslizamento gradual de cada dente, resultará em engrenagens mais silenciosas.

13-11 Engrenagens Sem-Fim

A nomenclatura de um par sem-fim é mostrada na Figura 13-24. O parafuso (sem-fim) e a coroa do sem-fim têm a mesma mão de hélice, como no caso de engrenagens helicoidais cruzadas; porém, os ângulos de hélice costumam ser bem diferentes. O ângulo de hélice do parafuso é normalmente muito grande, enquanto o da coroa é muito pequeno. Por causa disso, é comum especificar o ângulo de avanço λ no sem-fim e o ângulo de hélice ψ_G na coroa; ambos são iguais para um ângulo entre eixos de 90°. O ângulo de avanço do parafuso é o complemento do ângulo de hélice da coroa, como ilustrado na Figura 13-24.

Ao especificar o passo de pares sem-fim, é habitual declarar o *passo axial* p_x do parafuso e o *passo circular transversal* p_t – freqüentemente chamado apenas de passo circular – da engrenagem par. Esses passos são idênticos se o ângulo entre os eixos for de 90°. O passo diametral da engrenagem é o diâmetro medido no plano contendo o eixo do sem-fim, como apresentado na Figura 13-24; trata-se do mesmo que no caso de engrenagens de dentes retos e é

$$d_G = \frac{N_G p_t}{\pi} \tag{13-25}$$

Na medida em que não está relacionado ao número de dentes, o sem-fim pode ter qualquer diâmetro de passo ou primitivo; esse diâmetro deve, contudo, ser o mesmo que o de passo da fresa caracol utilizada para cortar os dentes do par sem-fim. Geralmente, o diâmetro de passo do parafuso sem-fim deve ser selecionado de modo a cair no intervalo

$$\frac{C^{0.875}}{3{,}0} \le d_W \le \frac{C^{0.875}}{1{,}7} \tag{13-26}$$

em que C representa a distância entre os centros. Essas proporções parecem resultar em ótima capacidade de potência do par.

O *avanço* L e o *ângulo de avanço* λ do parafuso sem-fim obedecem às seguintes relações:

$$L = p_x N_W \tag{13-27}$$

$$\tan\lambda = \frac{L}{\pi d_W} \tag{13-28}$$

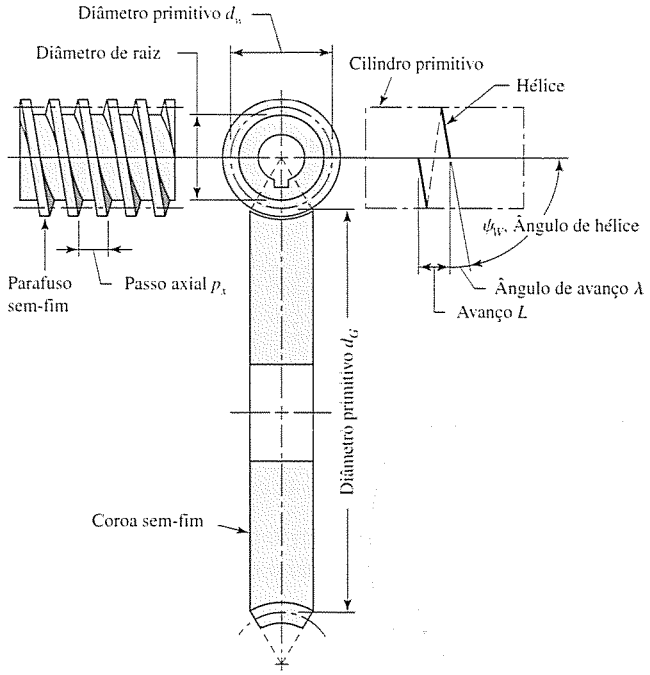


Figura 13-24 Nomenclatura de um par sem-fim de envelope único.

13-12 Sistemas de Dentes[3]

Um *sistema de dentes* é um padrão que especifica as relações envolvendo adendo, dedendo, profundidade de trabalho, espessura de dente e ângulo de pressão. Os padrões foram originalmente pensados para atingir o intercambiamento das engrenagens de qualquer quantidade de dentes, ainda que com o mesmo ângulo de pressão e passo.

A Tabela 13-1 contém os padrões mais utilizados para engrenagens cilíndricas de dentes retos. O ângulo de pressão de $14\frac{1}{2}^\circ$ foi utilizado nesses padrões, mas hoje já é obsoleto; as engrenagens, nesse caso, tinham de ser comparativamente maiores, para evitar problemas de interferência.

A Tabela 13-2 é particularmente útil na seleção do passo ou do módulo de uma engrenagem. Em geral, cortadores com os tamanhos nela mostrados estão disponíveis.

A Tabela 13-3 lista as proporções padronizadas de dentes de engrenagens cônicas de dentes retos. Esses tamanhos referem-se à extremidade maior dos dentes. A nomenclatura é definida na Figura 13-20.

As proporções padronizadas de dentes de engrenagens helicoidais estão listadas na Tabela 13-4. As proporções de dente são baseadas no ângulo de pressão normal; esses ângulos são padronizados da mesma forma que

Tabela 13-1 Sistemas de dentes usados comumente e sistema-padrão para engrenagens cilíndricas de dentes retos

Sistema de dente	Ângulo de pressão ϕ, graus	Adendo a	Dedendo b
Profundidade completa	20	$1/P_d$ ou $1m$	$1{,}25/P_d$ ou $1{,}25m$
			$1{,}35/P_d$ ou $1{,}35m$
	$22\frac{1}{2}$	$1/P_d$ ou $1m$	$1{,}25/P_d$ ou $1{,}25m$
			$1{,}35/P_d$ ou $1{,}35m$
	25	$1/P_d$ ou $1m$	$1{,}25/P_d$ ou $1{,}25m$
			$1{,}35/P_d$ ou $1{,}35m$
Curta	20	$0{,}8/P_d$ ou $0{,}8m$	$1/P_d$ ou $1m$

[3] Padronizados pela American Gear Manufacturers Association (AGMA). Escreva à AGMA para obter uma lista completa de normas, uma vez que mudanças são realizadas periodicamente. O endereço é: 1500 King Street, Suite 201, Alexandria, VA 22314; ou www.agma.org.

Tabela 13-2 Tamanhos de dentes em usos gerais

Passo diametral	
Bruto	$2, 2\frac{1}{4}, 2\frac{1}{2}, 3, 4, 6, 8, 10, 12, 16$
Fino	20, 24, 32, 40, 48, 64, 80, 96, 120, 150, 200
Módulos	
Preferidos	1, 1,25, 1,5, 2, 2,5, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 16, 20, 25, 32, 40, 50
Escolha subseqüente	1,125, 1,375, 1,75, 2,25, 2,75, 3,5, 4,5, 5,5, 7, 9, 11, 14, 18, 22, 28, 36, 45

Tabela 13-3 Proporções de dimensões de dentes para dentes de engrenagens cônicas de dentes retos de 20°

Item	Fórmula
Profundidade de trabalho	$h_k = 2{,}0/P$
Folga	$c = (0{,}188/P) + 0{,}002$ in
Adendo da engrenagem	$a_G = \dfrac{0{,}54}{P} + \dfrac{0{,}460}{P(m_{90})^2}$
Razão de engrenamento	$m_G = N_G/N_P$
Razão equivalente de 90°	$m_{90} = m_G$ quando $\Gamma = 90°$
	$m_{90} = \sqrt{m_G \dfrac{\cos\gamma}{\cos\Gamma}}$ quando $\Gamma \neq 90°$
Largura de face	$F = 0{,}3A_0$ ou $F = \dfrac{10}{P}$, o que for menor
Número mínimo de dentes	Pinhão 16 15 14 13; Coroa 16 17 20 30

Tabela 13-4 Proporções de dimensões de dentes padronizados para engrenagens helicoidais

Quantidade*	Fórmula	Quantidade*	Fórmula
Adendo	$\dfrac{1{,}00}{P_n}$	Engrenagens externas:	
Dedendo	$\dfrac{1{,}25}{P_n}$	Distância-padrão entre os centros	$\dfrac{D+d}{2}$
Diâmetro primitivo do pinhão	$\dfrac{N_P}{P_n \cos\psi}$	Diâmetro externo da coroa	$D + 2a$
Diâmetro primitivo da coroa	$\dfrac{N_G}{P_n \cos\psi}$	Diâmetro externo do pinhão	$d + 2a$
Espessura de dente no arco normal†	$\dfrac{\pi}{P_n} - \dfrac{B_n}{2}$	Diâmetro de raiz da coroa	$D - 2b$
Diâmetro de base do pinhão	$d \cos\phi_t$	Diâmetro de raiz do pinhão	$d - 2b$
		Engrenagens internas:	
Diâmetro de base da coroa	$D \cos\phi_t$	Distância entre os centros	$\dfrac{D-d}{2}$
Ângulo da hélice de base	$\tan^{-1}(\tan\psi \cos\phi_t)$	Diâmetro interno	$D - 2a$
		Diâmetro de raiz	$D + 2b$

* Todas as dimensões em polegadas e ângulos em graus.
† B_n é a folga normal.

para engrenagens de dentes retos. Ainda que exceções venham a ocorrer, para que se obtenha boa ação de hélice no engrenamento, a largura de face de engrenagens helicoidais deve ser pelo menos duas vezes o passo axial.

As formas de dente para engrenamento de sem-fim não foram altamente padronizadas, talvez porque tenha havido menos necessidade para tal. Os ângulos de pressão dependem dos ângulos de avanço e devem ser suficientemente grandes para evitar adelgaçamento dos dentes do sem-fim no lado em que o contato termina. Uma profundidade de dente satisfatória, que mantenha aproximadamente a proporção correta com o ângulo de avanço, pode ser obtida tornando a profundidade uma proporção do passo circular axial. A Tabela 13-5 resume o que pode ser considerado como boa prática, no que concerne a ângulo de pressão e profundidade de dente.

A *largura de face* F_G de um parafuso sem-fim deve ser feita igual ao comprimento de uma tangente ao círculo primitivo do sem-fim, entre seus pontos de intersecção com o círculo de adendo, como mostra a Figura 13-25.

13-13 Trens de Engrenagens

Considere o pinhão 2 movendo uma coroa 3. A velocidade da engrenagem acionada é

$$n_3 = \left|\frac{N_2}{N_3} n_2\right| = \left|\frac{d_2}{d_3} n_2\right| \tag{13-29}$$

em que n = revoluções ou rpm
N = número de dentes
d = diâmetro primitivo

A Equação (13-29) aplica-se a qualquer par de engrenagens, sejam elas cilíndricas de dentes retos, helicoidais, cônicas ou par sem-fim. Os sinais de valor absoluto são utilizados para permitir liberdade absoluta na escolha das direções positivas e negativas. No caso de engrenagens cilíndricas de dentes retos e engrenagens helicoidais paralelas, as direções geralmente correspondem à regra da mão direita e são positivas para rotação anti-horária.

As direções de rotação são mais difíceis de deduzir quando se trata de pares sem-fim ou mesmo de engrenagens helicoidais cruzadas. A Figura 13-26 será útil em tais situações.

O trem de engrenagens mostrado na Figura 13-27 é constituído de cinco engrenagens. A velocidade da engrenagem 6 é

$$n_6 = -\frac{N_2}{N_3}\frac{N_3}{N_4}\frac{N_5}{N_6} n_2 \tag{a}$$

Tabela 13-5 Ângulos de pressão recomendados e profundidades de dentes para engrenagens sem-fim

Ângulo de avanço λ, deg	Ângulo de pressão ϕ_n, deg	Adendo a	Dedendo b_G
0-15	$14\frac{1}{2}$	$0{,}3683p_x$	$0{,}3683p_x$
15-30	20	$0{,}3683p_x$	$0{,}3683p_x$
30-35	25	$0{,}2865p_x$	$0{,}3314p_x$
35-40	25	$0{,}2546p_x$	$0{,}2947p_x$
40-45	30	$0{,}2228p_x$	$0{,}2578p_x$

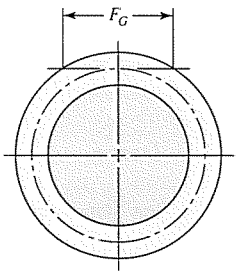


Figura 13-25 Representação gráfica da largura de face de um parafuso de um par sem-fim.

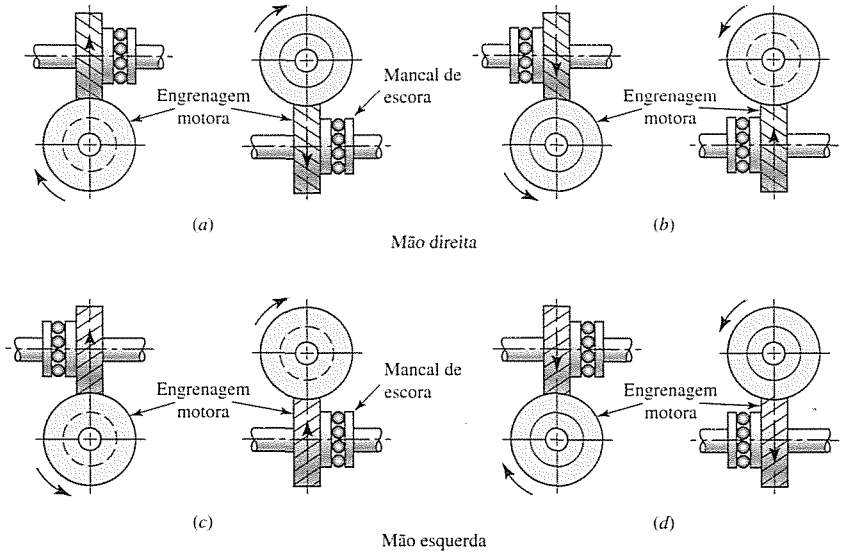


Figura 13-26 Relações de força axial, de rotação e de mão para engrenagens helicoidais cruzadas. Observe que cada par de desenhos refere-se a um único conjunto de engrenagens. Essas relações também se aplicam a pares sem-fim. *(Reproduzida com permissão, Boston Gear Division, Colfax Corp.)*

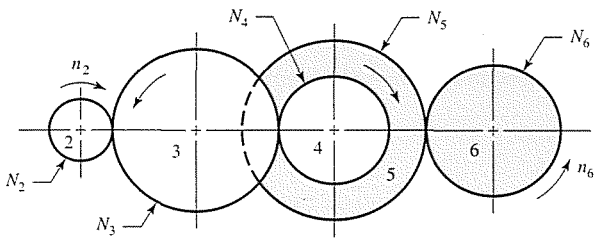


Figura 13-27 Trem de engrenagens.

Assim, percebemos que a engrenagem 3 é intermediária, que seu número de dentes se cancela na Equação (*a*) e que, portanto, ela afeta unicamente a direção de rotação da engrenagem 6. Observamos, além disso, que as engrenagens 2, 3 e 5 são motoras, ao passo que as engrenagens 3, 4 e 6 são movidas. Definimos o *valor de trem e* como

$$e = \frac{\text{produto do número de dentes motores}}{\text{produto do número de dentes movidos}} \tag{13-30}$$

Observe que os diâmetros primitivos também podem ser empregados na Equação (13-30). Quando essa equação é utilizada para engrenagens cilíndricas de dentes retos, e é positivo se a última engrenagem rodar no mesmo sentido que a primeira, e negativo se a última engrenagem rodar no sentido oposto.

Agora, podemos escrever

$$n_L = en_F \tag{13-31}$$

em que n_L é a velocidade da última engrenagem do trem e n_F é a velocidade da primeira.

Efeitos pouco comuns podem ser obtidos em um trem de engrenagens ao se permitir que alguns eixos de engrenagens rodem em relação aos outros. Tais trens são denominados *trens de engrenagens planetárias*, ou *epicicloidais*. Trens planetários sempre incluem uma *engrenagem sol*, um *carregador de planeta* ou *braço* e uma ou mais *engrenagens planetas*, como ilustrado na Figura 13-28. Trens de engrenagens planetárias são mecanismos incomuns, uma vez que têm dois graus de liberdade; isto é, para um movimento restringido, um trem planetário deve dispor de duas entradas. Por exemplo, na Figura 13-28 a essas duas entradas poderiam ser o movimento de qualquer par de elementos do trem. Poderíamos, em tal figura, especificar, digamos, que a engrenagem sol rode a 100 rpm, em sentido horário, e que a engrenagem do anel rode a 50 rpm,

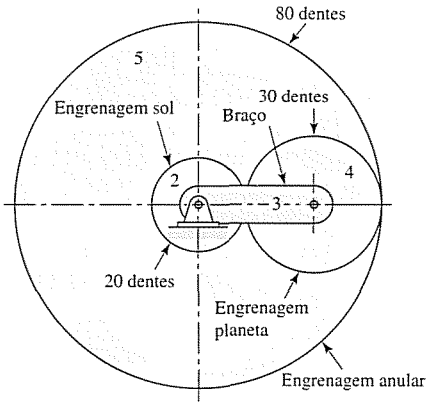


Figura 13-28 Um trem de engrenagens planetárias.

em sentido anti-horário; essas são as entradas. A saída seria o movimento do braço. Na maioria dos trens planetários, um dos elementos é ligado à estrutura e não tem movimento. A Figura 13-29 mostra um trem planetário composto de uma engrenagem sol 2, um braço ou transportador 3 e engrenagens planetas 4 e 5. A velocidade angular da engrenagem 3 relativa ao braço em rpm é

$$n_{23} = n_2 - n_3 \tag{b}$$

Ademais, a velocidade da engrenagem 5 relativa ao braço é

$$n_{53} = n_5 - n_3 \tag{c}$$

Dividindo a Equação (*c*) pela (*b*), obtemos

$$\frac{n_{53}}{n_{23}} = \frac{n_5 - n_3}{n_2 - n_3} \tag{d}$$

A Equação (*d*) expressa a razão da engrenagem 5 relativamente à da engrenagem 2, e ambas as velocidades são tomadas em relação ao braço. Agora, essa razão é a mesma e é proporcional ao número de dentes, quer esteja o braço rodando ou não. Trata-se do valor do trem. Logo, podemos escrever

$$e = \frac{n_5 - n_3}{n_2 - n_3} \tag{e}$$

Essa equação pode ser utilizada para a resolução do movimento de saída do trem planetário. É mais convenientemente escrita na seguinte forma:

$$e = \frac{n_L - n_A}{n_F - n_A} \tag{13-32}$$

em que n_F = rpm da primeira engrenagem no trem planetário
n_L = rpm da última engrenagem no trem planetário
n_A = rpm do braço

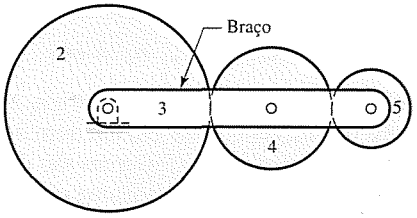


Figura 13-29 Trem de engrenagens no braço de um trem de engrenagens planetárias.

EXEMPLO 13-3

Na Figura 13-28, a engrenagem sol é a engrenagem de entrada, sendo movida, em sentido horário, a 100 rpm. A engrenagem anular é mantida estacionária por meio de fixação à estrutura. Encontre a velocidade em rpm, bem como a direção de rotação do braço e da engrenagem 4.

Solução

Designe $n_F = n_2 = -100$ rpm e $n_L = n_5 = 0$. Desbloqueando a engrenagem 5 e mantendo o braço estacionário, em nossa imaginação, descobrimos que

$$e = -\left(\frac{20}{30}\right)\left(\frac{30}{80}\right) = -0{,}25$$

Substituindo esse valor na Equação (13-32), obtemos

$$-0{,}25 = \frac{0 - n_A}{(-100) - n_A}$$

ou

Resposta

$$n_A = -20 \text{ rpm}$$

Para obter a velocidade da engrenagem 4, seguimos o procedimento estabelecido pelas Equações (*b*), (*c*) e (*d*). Logo,

$$n_{43} = n_4 - n_3 \qquad n_{23} = n_2 - n_3$$

de modo que

$$\frac{n_{43}}{n_{23}} = \frac{n_4 - n_3}{n_2 - n_3} \tag{1}$$

Porém,

$$\frac{n_{43}}{n_{23}} = -\frac{20}{30} = -\frac{2}{3} \tag{2}$$

Substituindo os valores conhecidos na Equação (1), obtemos

$$-\frac{2}{3} = \frac{n_4 - (-20)}{(-100) - (-20)}$$

Cuja solução produz

Resposta

$$n_4 = 33\tfrac{1}{3} \text{ rpm}$$

Um método alternativo, útil para trens de engrenagens planetárias, faz uso dos *centros instantâneos* relativos. Quando duas engrenagens estão engranzadas, em qualquer instante cada uma tem a mesma velocidade no ponto de engranzamento, que é um centro instantâneo relativo de ambas. Se pudermos determinar a velocidade de dois pontos em um corpo, o centro instantâneo de rotação desse corpo poderá ser determinado traçando-se perpendiculares aos dois vetores de velocidade. O centro é localizado na intersecção dessas perpendiculares, e a velocidade angular do corpo é a velocidade de um ponto, nesse corpo, dividida pela distância entre o ponto e o centro instantâneo. Se as perpendiculares dos dois vetores de velocidade são colineares, não há intersecção; no entanto, a velocidade angular do corpo é a diferença das velocidades dividida pela distância entre os dois pontos. O centro instantâneo é determinado traçando-se uma linha entre as pontas dos vetores de velocidade, desenhados em escala, e a intersecção dessa linha com as perpendiculares colineares localiza o centro.

EXEMPLO 13-4

Utilizando centros instantâneos relativos:

(*a*) Repita o Exemplo 13-3, mas desta vez permita a rotação anti-horária da engrenagem anular a 40 rpm.

(*b*) Repita o Exemplo 13-3, como estabelecido, com a engrenagem anular estacionária.

Solução

A engrenagem planeta 4 engranza com duas engrenagens, a engrenagem sol 2 e a engrenagem anular 5. A Figura 13-30 mostra a engrenagem 4. O ponto A é o ponto de contato com a engrenagem 2; portanto, sua velocidade é fornecida por $v_A = r_2 n_2$, sendo r_2 o raio primitivo da engrenagem 2 (não se preocupe com as unidades). O ponto B contata com a engrenagem 5, e sua velocidade é dada por $v_B = r_5 n_5$. Ambas as velocidades da engrenagem 4 são exibidas na Figura 13-30, na qual as direções das velocidades concordam com as rotações das engrenagens 2 e 5. Uma vez que as perpendiculares a v_A e v_B são colineares, a partir da Figura 13-30 a velocidade angular da engrenagem 4 é

$$n_4 = \frac{v_B - v_A}{2r_4} = \frac{r_5 n_5 - (-r_2 n_2)}{2r_4} = \frac{N_5 n_5 + N_2 n_2}{2N_4}$$
$$= \frac{80(40) + 20(100)}{2(30)} = 86\tfrac{2}{3} \text{ rpm} \tag{1}$$

em que os raios primitivos são proporcionais ao número de dentes. O centro instantâneo localiza-se em I, sendo óbvio que a direção de rotação da engrenagem 4 é anti-horária e, portanto, positiva.

O braço roda em relação ao centro da engrenagem 2; a velocidade de C é a média de v_A e v_B. O raio do braço é a soma dos raios das engrenagens 2 e 4. Logo, a velocidade angular do braço é

$$n_A = \frac{v_C}{r_2 + r_4} = \frac{(v_A + v_B)/2}{r_2 + r_4} = \frac{(-N_2 n_2 + N_5 n_5)/2}{N_2 + N_4}$$
$$= \frac{[-20(100) + 80(40)]/2}{20 + 30} = 12 \text{ rpm} \tag{2}$$

e, obviamente, anti-horária; portanto, positiva.

Com a engrenagem anular estacionária, $n_5 = 0$, o centro instantâneo da engrenagem 4 move-se para B e, a partir da Equação (1),

$$n_4 = \frac{N_2 n_2}{2N_4} = \frac{20(100)}{2(30)} = 33\tfrac{1}{3} \text{ rpm}$$

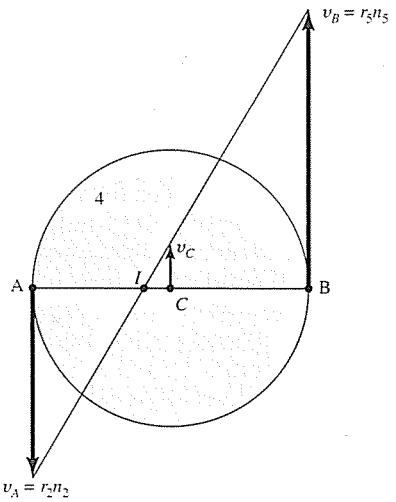


Figura 13-30 Engrenagem planeta do Exemplo 13-4(*a*).

que é anti-horária; portanto, positiva. A partir da Equação (2), com $n_5 = 0$,

$$n_A = \frac{-N_2 n_2/2}{N_2 + N_4} = \frac{-20(100)/2}{20 + 30} = -20 \text{ rpm}$$

Logo, o braço roda em sentido horário.

EXEMPLO 13-5

A Figura 13-31 apresenta um trem de engrenagens consistindo em um par de *engrenagens mitrais* (do mesmo tamanho que as engrenagens cônicas), com 16 dentes cada, um pinhão sem-fim destro de 4 dentes e uma coroa sem-fim de 40 dentes. A velocidade da engrenagem 2 é fornecida por $n_2 = +200$ rpm, o que corresponde à rotação anti-horária em relação ao eixo y. Qual é a velocidade e a direção de rotação da coroa sem-fim?

Solução

Resposta

$$n_5 = -\left(\frac{16}{16}\right)\left(\frac{4}{40}\right)(200) = -20 \text{ rpm}$$

A engrenagem 5 roda, em sentido horário (negativo), a 20 rpm em relação ao eixo z, em um sistema destro de coordenadas.

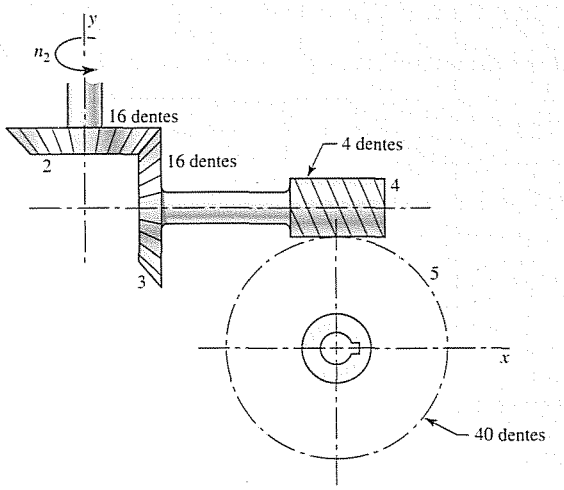


Figura 13-31 Conjunto de engrenagens mitrais e par sem-fim montado em trem.

13-14 Análise de Força – Engrenagens Cilíndricas de Dentes Retos

Antes de iniciar a análise de força em trens de engrenagens, concordemos com a notação a ser utilizada. Começando com o assinalar do numeral 1 para a estrutura de máquina, designaremos a engrenagem de entrada como engrenagem 2 e, a partir daí, numeraremos as engrenagens, sucessivamente, como 3, 4, etc., até chegarmos à última engrenagem do trem. A seguir, poderá haver vários eixos envolvidos, e normalmente uma ou duas engrenagens são montadas em cada eixo, assim como outros elementos. Designaremos os eixos utilizando letras minúsculas do alfabeto – a, b, c, etc.

Com essa notação, podemos agora nos referir à força exercida pela engrenagem 2 sobre a engrenagem 3 como F_{23}. Por sua vez, a força exercida pela engrenagem 2 contra o eixo a é F_{2a}. Podemos também escrever F_{a2} para indicar a força exercida pelo eixo a sobre a engrenagem 2. Infelizmente, faz-se também necessário utilizar sobrescritos para indicar direções. As coordenadas de direção serão geralmente apontadas pe-

las coordenadas x, y e z, e as direções radial e tangencial, pelos sobrescritos r e t. Com essa notação, F_{43}^t é a componente tangencial da força da engrenagem 4 atuando contra a engrenagem 3.

A Figura 13-32(a) mostra um pinhão montado sobre o eixo a, rodando, em sentido horário, a n_2 rpm, enquanto aciona uma engrenagem sobre o eixo b a n_3 rpm. As reações entre dentes engranzados ocorre ao longo da linha de pressão. Na Figura 13-32(b), o pinhão foi separado da coroa e do eixo, e o efeito dessas interações foi substituído por forças. F_{a2} e T_{a2} representam a força e o torque, respectivamente, exercidos pelo eixo a contra o pinhão 2. F_{32} é a força exercida pela engrenagem 3 contra o pinhão. Utilizando um procedimento similar, obtemos o diagrama de corpo livre mostrado na Figura 13-32(c).

Na Figura 13-33, o diagrama de corpo livre do pinhão foi redesenhado e as forças foram resolvidas em termos de componentes radial e tangencial. Definimos agora

$$W_t = F_{32}^t \tag{a}$$

como a *carga transmitida*. Essa carga tangencial é realmente a componente útil, uma vez que a componente radial F_{32}^r não serve a propósito algum, não transmite potência. Podemos verificar que o torque aplicado e a carga transmitida estão relacionados pela equação

$$T = \frac{d}{2} W_t \tag{13-33}$$

na qual usamos $T = T_{a2}$ e $d = d_2$ para obter uma relação geral.

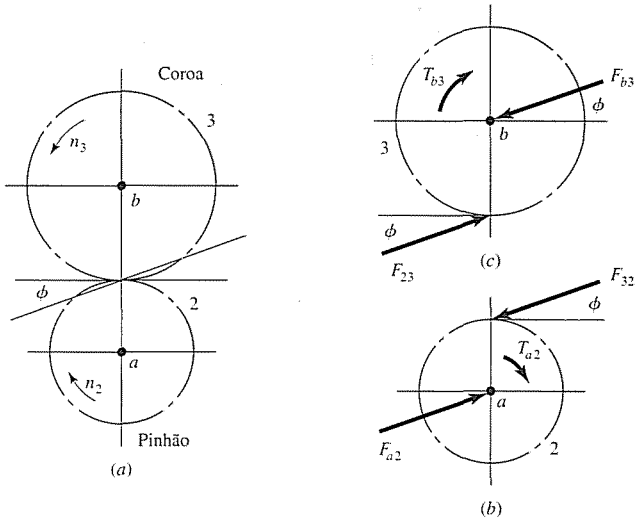


Figura 13-32 Diagramas de corpo livre das forças e momentos atuando sobre duas engrenagens de um trem de engrenagens simples.

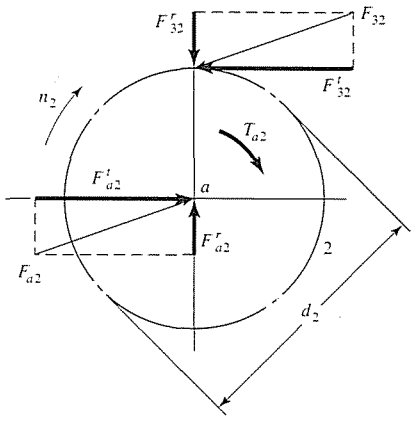


Figura 13-33 Resolução das forças de engrenagem.

Se adiante designarmos a velocidade na linha primitiva como V, em que $V = \pi dn/12$ e apresentada em pés por minuto, a potência H poderá ser computada a partir da equação

$$H = \frac{W_t V}{33\,000} \tag{13-34}$$

A equação correspondente no SI é

$$W_t = \frac{60(10)^3 H}{\pi dn} \tag{13-35}$$

em que: W_t = carga transmitida, kN
H = potência, kW
d = diâmetro da engrenagem, mm
n = velocidade, rpm

EXEMPLO 13-6

O pinhão 2 na Figura 13-34(a) roda a 1750 rpm e transmite 2,5 kW à engrenagem intermediária 3. Os dentes são cortados segundo o sistema de 20° de profundidade completa e têm um módulo de $m = 2{,}5$ mm. Desenhe um diagrama de corpo livre da engrenagem 3 e mostre todas as forças que atuam sobre a mesma.

Solução Os diâmetros primitivos das engrenagens 2 e 3 são

$$d_2 = N_2 m = 20(2{,}5) = 50 \text{ mm}$$

$$d_3 = N_3 m = 50(2{,}5) = 125 \text{ mm}$$

A partir da Equação (13-35), descobrimos que a carga transmitida é

$$W_t = \frac{60(10)^3 H}{\pi d_2 n} = \frac{60(10)^3(2{,}5)}{\pi(50)(1750)} = 0{,}546 \text{ kN}$$

Logo, a força tangencial da engrenagem 2 sobre a engrenagem 3 é $F_{23}^t = 0{,}546$ kN, como mostra a Figura 13-34(b). Portanto,

$$F_{23}^r = F_{23}^t \tan 20° = (0{,}546) \tan 20° = 0{,}199 \text{ kN}$$

e, assim,

$$F_{23} = \frac{F_{23}^t}{\cos 20°} = \frac{0{,}546}{\cos 20°} = 0{,}581 \text{ kN}$$

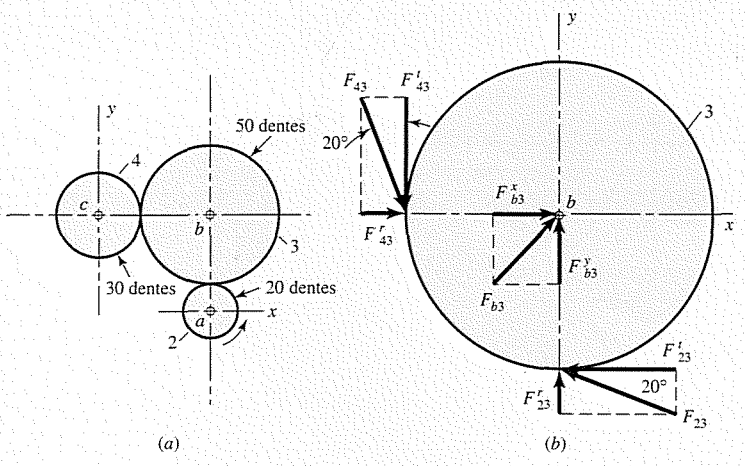


Figura 13-34 Trem de engrenagens contendo uma engrenagem intermediária. (a) Trem de engrenagens. (b) Diagrama de corpo de uma engrenagem intermediária.

Uma vez que a engrenagem 3 é intermediária, não transmite qualquer potência (torque) ao eixo ligado a si; assim, a reação tangencial da engrenagem 4 sobre a engrenagem 3 é também igual a W_t. Portanto,

$$F_{43}^t = 0{,}546 \text{ kN} \qquad F_{43}^r = 0{,}199 \text{ kN} \qquad F_{43} = 0{,}581 \text{ kN}$$

sendo as direções mostradas na Figura 13-34(*b*).

As reações no eixo, nas direções x e y, são

$$F_{b3}^x = -\left(F_{23}^t + F_{43}^r\right) = -(-0{,}546 + 0{,}199) = 0{,}347 \text{ kN}$$

$$F_{b3}^y = -\left(F_{23}^r + F_{43}^t\right) = -(0{,}199 - 0{,}546) = 0{,}347 \text{ kN}$$

A reação resultante sobre o eixo é

$$F_{b3} = \sqrt{(0{,}347)^2 + (0{,}347)^2} = 0{,}491 \text{ kN}$$

Esses esforços são mostrados na figura.

13-15 Análise de Força – Engrenagens Cônicas

Ao determinar as cargas no eixo e nos mancais em aplicações envolvendo engrenagens cônicas, a prática usual consiste em utilizar a carga tangencial ou transmitida que ocorreria se todas as forças fossem concentradas no ponto médio do dente. Embora a resultante real ocorra em algum local entre o ponto médio e a extremidade maior do dente, incorremos em apenas pequeno erro ao aventar essa hipótese. Para a carga transmitida, isso resulta em

$$W_t = \frac{T}{r_{\text{av}}} \tag{13-36}$$

em que T é o torque e r_{av} é o raio primitivo no ponto médio do dente da engrenagem considerada.

As forças atuantes no centro do dente são mostradas na Figura 13-35. A força resultante W tem três componentes: a força tangencial W_t, a força radial W_r e a força axial W_a. A partir da trigonometria da figura,

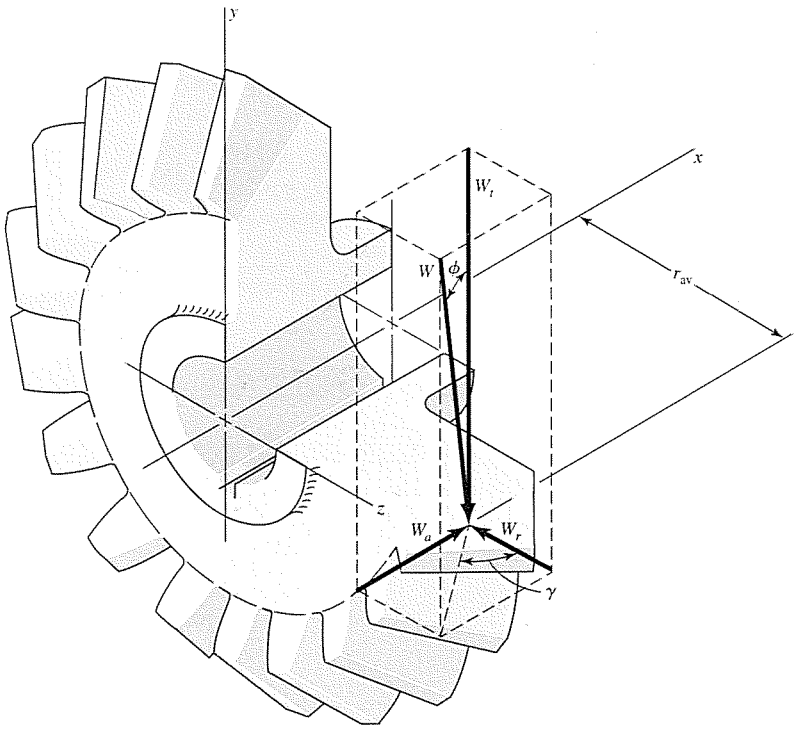


Figura 13-35 Forças entre dentes de engrenagens cônicas de dentes retos.

$$W_r = W_t \tan\phi \cos\gamma \tag{13-37}$$

$$W_a = W_t \tan\phi \operatorname{sen}\gamma \tag{13-38}$$

As três forças, W_t, W_r e W_a, são perpendiculares entre si e podem ser utilizadas para determinar as cargas nos mancais mediante os métodos de estática.

EXEMPLO 13-7

O pinhão cônico na Figura 13-36(*a*) roda a 600 rpm, na direção indicada, e transmite 5 hp à engrenagem. As distâncias de montagem, a localização de todos os mancais e os raios primitivos médios do pinhão e da coroa são exibidos na figura. Por simplicidade, os dentes foram substituídos pelos cones primitivos. Os mancais *A* e *C* devem escorar os esforços axiais. Encontre as forças dos mancais no eixo de engrenagens.

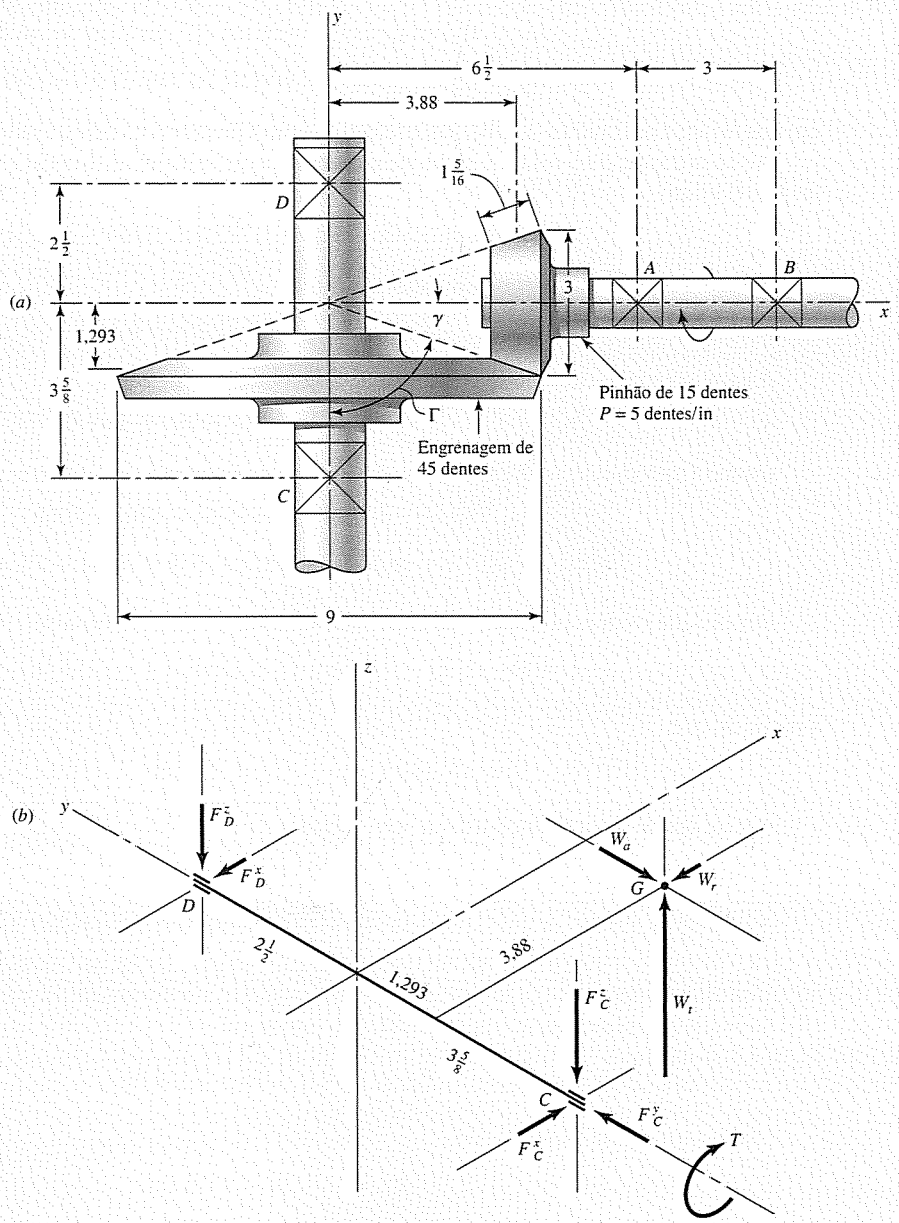


Figura 13-36 (a) Engrenagens cônicas de dentes retos do Exemplo 13-7
(b) Diagrama de corpo livre de eixo CD. Dimensões em polegadas.

Solução Os ângulos primitivos são

$$\gamma = \tan^{-1}\left(\frac{3}{9}\right) = 18{,}4^\circ \qquad \Gamma = \tan^{-1}\left(\frac{9}{3}\right) = 71{,}6^\circ$$

A velocidade no círculo primitivo correspondente ao raio primitivo médio é

$$V = \frac{2\pi r_P n}{12} = \frac{2\pi(1{,}293)(600)}{12} = 406\ \text{ft/min}$$

Portanto, a carga transmitida é

$$W_t = \frac{33\,000H}{V} = \frac{(33\,000)(5)}{406} = 406\ \text{lbf}$$

que atua na direção positiva do eixo z, como mostrado na Figura 13-36(b). A seguir, encontramos

$$W_r = W_t \tan\phi \cos\Gamma = 406 \tan 20^\circ \cos 71{,}6^\circ = 46{,}6\ \text{lbf}$$

$$W_a = W_t \tan\phi \operatorname{sen}\Gamma = 406 \tan 20^\circ \operatorname{sen} 71{,}6^\circ = 140\ \text{lbf}$$

em que W_r atua na direção $-x$ e W_a, na direção $-y$, como ilustrado no esboço isométrico da Figura 13-36(b).

Ao se preparar para tomar a soma de momentos com relação ao mancal D, defina o vetor de posição de D a G como

$$\mathbf{R}_G = 3{,}88\mathbf{i} - (2{,}5 + 1{,}293)\mathbf{j} = 3{,}88\mathbf{i} - 3{,}793\mathbf{j}$$

Também necessitaremos de um vetor de D a C:

$$\mathbf{R}_C = -(2{,}5 + 3{,}625)\mathbf{j} = -6{,}125\mathbf{j}$$

Assim, somando momentos com relação a D, obtemos

$$\mathbf{R}_G \times \mathbf{W} + \mathbf{R}_C \times \mathbf{F}_C + \mathbf{T} = \mathbf{0} \tag{1}$$

Quando introduzimos as expressões detalhadas na Equação (1), obtemos

$$\begin{aligned}(3{,}88\mathbf{i} - 3{,}793\mathbf{j}) \times (-46{,}6\mathbf{i} - 140\mathbf{j} + 406\mathbf{k}) \\ + (-6{,}125\mathbf{j}) \times \left(F_C^x\mathbf{i} + F_C^y\mathbf{j} + F_C^z\mathbf{k}\right) + T\mathbf{j} = \mathbf{0}\end{aligned} \tag{2}$$

Depois que os dois produtos vetoriais são tomados, a equação torna-se

$$(-1540\mathbf{i} - 1575\mathbf{j} - 720\mathbf{k}) + \left(-6{,}125F_C^z\mathbf{i} + 6{,}125F_C^x\mathbf{k}\right) + T\mathbf{j} = \mathbf{0}$$

a partir do que

$$\mathbf{T} = 1575\mathbf{j}\ \text{lbf} \cdot \text{in} \qquad F_C^x = 118\ \text{lbf} \qquad F_C^z = -251\ \text{lbf} \tag{3}$$

Agora, iguale a soma das forças a zero. Logo,

$$\mathbf{F}_D + \mathbf{F}_C + \mathbf{W} = \mathbf{0} \tag{4}$$

Novamente, quando as expressões detalhadas são inseridas, a Equação (4) torna-se

$$\left(F_D^x\mathbf{i} + F_D^z\mathbf{k}\right) + \left(118\mathbf{i} + F_C^y\mathbf{j} - 251\mathbf{k}\right) + (-46{,}6\mathbf{i} - 140\mathbf{j} + 406\mathbf{k}) = \mathbf{0} \tag{5}$$

A princípio, observamos que $F_C^y = 140$ lbf; portanto,

Resposta $$\mathbf{F}_C = 118\mathbf{i} + 140\mathbf{j} - 251\mathbf{k}\ \text{lbf}$$

Assim, a partir da Equação (5),

Resposta $$\mathbf{F}_D = -71{,}4\mathbf{i} - 155\mathbf{k}\ \text{lbf}$$

Todas essas forças são mostradas na Figura 13-36(b), segundo as direções apropriadas. A análise para o eixo do pinhão é muito semelhante.

13-16 Análise de Força – Engrenagens Helicoidais

A Figura 13-37 consiste em uma visão tridimensional das forças atuantes contra um dente de uma engrenagen helicoidal. O ponto de aplicação dessas forças localiza-se no plano de passo primitivo e no centro da face da engrenagem. A partir da geometria da figura, as três componentes da força total (normal) de dente W são

$$\begin{aligned} W_r &= W \operatorname{sen} \phi_n \\ W_t &= W \cos \phi_n \cos \psi \\ W_a &= W \cos \phi_n \operatorname{sen} \psi \end{aligned} \tag{13-39}$$

em que: W = força total
W_r = componente radial
W_t = componente tangencial, também conhecida como força transmitida
W_a = componente axial, também conhecida como carga de empuxo

Normalmente, W_t é dada e as demais forças são requeridas. Nesse caso, não é difícil descobrir que

$$\begin{aligned} W_r &= W_t \tan \phi_t \\ W_a &= W_t \tan \psi \\ W &= \frac{W_t}{\cos \phi_n \cos \psi} \end{aligned} \tag{13-40}$$

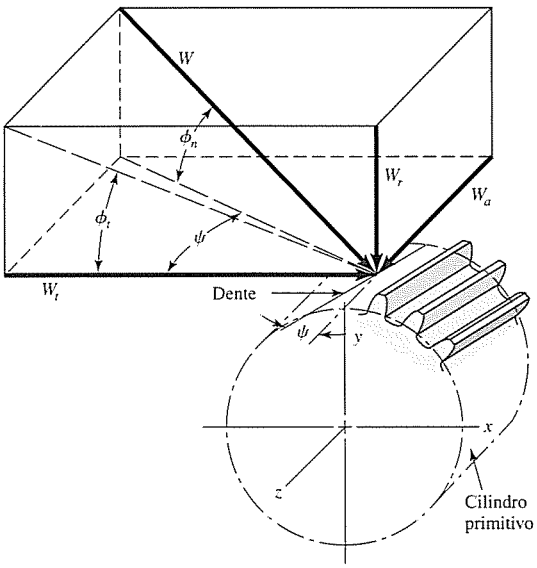


Figura 13-37 Forças entre dentes atuando sobre uma engrenagem cilíndrica de hélice destra.

EXEMPLO 13-8

Na Figura 13-38, um motor elétrico de 1 hp roda a 1800 rpm em sentido horário, como visto a partir do lado positivo do eixo x. Fixado ao eixo do motor por meio de chaveta, há um pinhão helicoidal de 18 dentes com ângulo de pressão normal de 20°, ângulo de hélice de 30° e um passo diametral normal de 12 dentes/polegada. A mão de hélice é mostrada na figura. Faça um esboço tridimensional do eixo do motor e do pinhão e mostre as forças atuantes nesse último, bem como as reações de mancal em A e B. O esforço axial deve ser suportado em A.

Solução

A partir da Equação (13-19), descobrimos que

$$\phi_t = \tan^{-1} \frac{\tan \phi_n}{\cos \psi} = \tan^{-1} \frac{\tan 20^\circ}{\cos 30^\circ} = 22{,}8^\circ$$

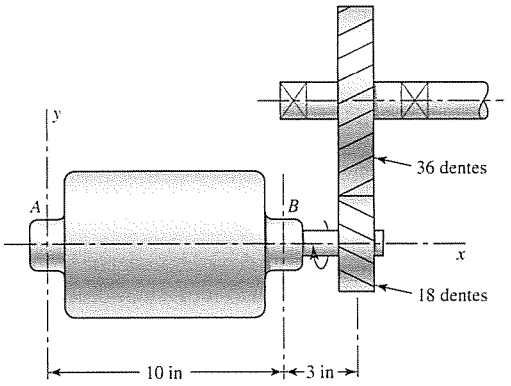


Figura 13-38 Motor e trem de engrenagens do Exemplo 13-8.

Ademais, $P_t = P_n \cos \psi = 12 \cos 30° = 10{,}39$ dentes/in. Por conseguinte, o passo diametral do pinhão é $d_p = 18/10{,}39 = 1{,}732$ in. A velocidade no círculo primitivo é

$$V = \frac{\pi dn}{12} = \frac{\pi(1{,}732)(1800)}{12} = 816 \text{ ft/min}$$

A carga transmitida é

$$W_t = \frac{33\,000H}{V} = \frac{(33\,000)(1)}{816} = 40{,}4 \text{ lbf}$$

A partir da Equação (13-40), determinamos que

$$W_r = W_t \tan \phi_t = (40{,}4) \tan 22{,}8° = 17{,}0 \text{ lbf}$$

$$W_a = W_t \tan \psi = (40{,}4) \tan 30° = 23{,}3 \text{ lbf}$$

$$W = \frac{W_t}{\cos \phi_n \cos \psi} = \frac{40{,}4}{\cos 20° \cos 30°} = 49{,}6 \text{ lbf}$$

Essas três forças – W_r na direção $-y$, W_a na direção $-x$ e W_t na direção $+z$ – são mostradas atuando no ponto C da Figura 13-39. Assumimos reações de mancal em A e B, como mostrado. Assim, $F_A^x = W_a = 23{,}3$ lbf. Tomando os momentos com relação ao eixo z,

$$-(17{,}0)(13) + (23{,}3)\left(\frac{1{,}732}{2}\right) + 10F_B^y = 0$$

ou $F_B^y = 20{,}1$lbf. Somando as forças na direção y, obtemos, então, $F_A^y = 3{,}1$ lbf. Tomando momentos com relação ao eixo y, a seguir,

$$10F_B^z - (40{,}4)(13) = 0$$

ou $F_B^y = 52{,}5$ lbf. Somando forças na direção z e solucionando a equação, obtemos $F_A^z = 12{,}1$ lbf. O torque, igualmente, é $T = W_t d_p/2 = (40{,}4)(1{,}732/2) = 35$ lbf · in.

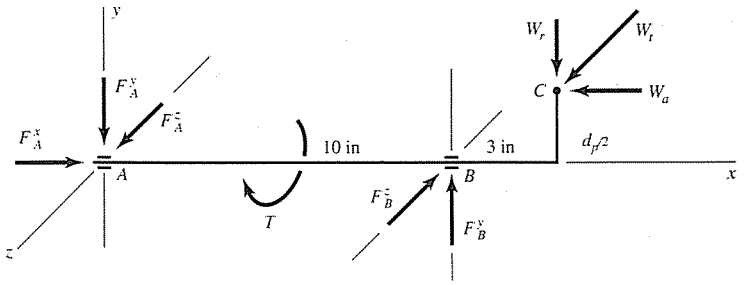


Figura 13-39 Diagrama de corpo livre do eixo do motor do Exemplo 13-8.

EXEMPLO 13-9

Solucione o Exemplo 13-8 utilizando vetores.

Solução A força em C é

$$\mathbf{W} = -23{,}3\mathbf{i} - 17{,}0\mathbf{j} + 40{,}4\mathbf{k} \text{ lbf}$$

Os vetores de posição aos pontos B e C, relativamente à origem A, são

$$\mathbf{R}_B = 10\,\mathbf{i} \qquad \mathbf{R}_C = 13\mathbf{i} + 0{,}866\mathbf{j}$$

Tomando momentos com relação a A, obtemos

$$\mathbf{R}_B \times \mathbf{F}_B + \mathbf{T} + \mathbf{R}_C \times \mathbf{W} = \mathbf{0}$$

Utilizando as direções assumidas para a Figura 13-39 e substituindo valores, obtemos

$$10\,\mathbf{i} \times \left(F_B^y\mathbf{j} - F_B^z\mathbf{k}\right) - T\mathbf{i} + (13\mathbf{i} + 0{,}866\mathbf{j}) \times (-23{,}3\mathbf{i} - 17{,}0\mathbf{j} + 40{,}4\mathbf{k}) = \mathbf{0}$$

Quando os produtos vetoriais são formados, obtemos

$$\left(10F_B^y\mathbf{k} + 10F_B^z\mathbf{j}\right) - T\mathbf{i} + (35\mathbf{i} - 525\mathbf{j} - 201\mathbf{k}) = \mathbf{0}$$

Assim, $T = 35$ lbf · in, $F_B^y = 20{,}1$ lbf e $F_B^z = 52{,}5$ lbf.
A seguir,

$$\mathbf{F}_A = -\mathbf{F}_B - \mathbf{W}, \text{ e assim } \mathbf{F}_A = 23{,}3\mathbf{i} - 3{,}1\mathbf{j} + 12{,}1\mathbf{k} \text{ lbf.}$$

13-17 Análise de Força – Engrenagens Sem-Fim

Se o atrito for desconsiderado, então a única força aplicada pela coroa sem-fim será a força W, mostrada na Figura 13-40, a qual apresenta as três componentes ortogonais W^x, W^y e W^z. A partir da geometria da figura, observamos que

$$\begin{aligned} W^x &= W\cos\phi_n \operatorname{sen}\lambda \\ W^y &= W\operatorname{sen}\phi_n \\ W^z &= W\cos\phi_n\cos\lambda \end{aligned} \tag{13-41}$$

Nós, agora, utilizamos os subscritos W e G para indicar as forças agentes no parafuso (sem-fim) e na coroa, respectivamente. Observamos que W^y é a força separadora, ou radial, do parafuso e da coroa sem-fim. A força tangencial no parafuso é W^x e na coroa, W^z, quando se assume um ângulo entre eixos de 90°. A força axial no parafuso é W^z, ao passo que, na coroa, W^x. Uma vez que as forças nesta são opostas àquelas no parafuso sem-fim, podemos resumir tais relações escrevendo

$$\begin{aligned} W_{Wt} &= -W_{Ga} = W^x \\ W_{Wr} &= -W_{Gr} = W^y \\ W_{Wa} &= -W_{Gt} = W^z \end{aligned} \tag{13-42}$$

É útil, ao utilizar a Equação (13-41) e também a (13-42), observar que *o eixo da coroa é paralelo à direção x e o eixo do parafuso é paralelo à direção z*, e que estamos empregando um sistema manidestro de coordenadas.

Em nosso estudo a respeito de dentes de engrenagens cilíndricas de dentes retos, aprendemos que o movimento de um dente em relação ao dente que lhe é par é, primordialmente, um movimento de rolamento puro. Em contrapartida, o movimento relativo entre os dentes do parafuso e da coroa sem-fim é de deslizamento puro, de modo que devemos esperar que o atrito tenha um importante papel no desempenho de engrenagens sem-fim. Introduzindo o coeficiente de atrito f, podemos desenvolver um outro conjunto de relações similar àquele da Equação (13-41). Na Figura 13-40, vemos que a força W, atuando normal ao perfil de dente do par sem-fim, produz uma força de atrito $W_f = fW$, com uma componente fW cos λ na direção negativa do eixo x e uma outra componente fW sen λ na direção positiva do eixo z. A Equação (13-41) torna-se, portanto,

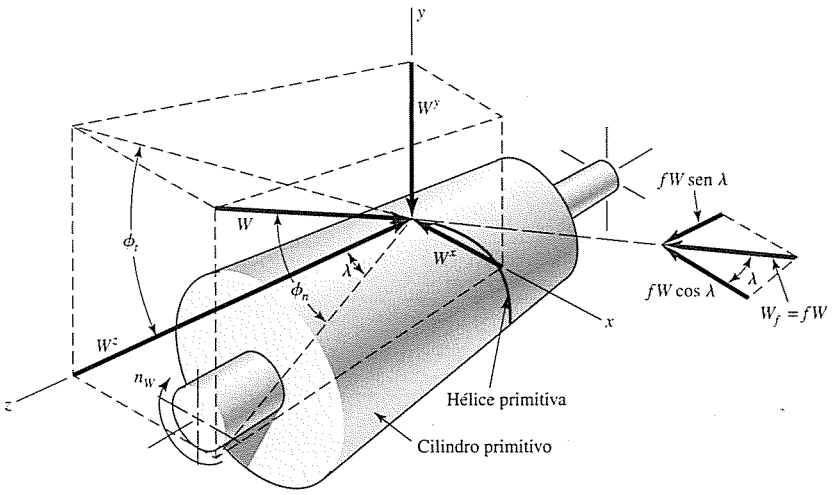


Figura 13-40 Desenho do cilindro primitivo de um parafuso sem-fim, mostrando as forças exercidas sobre o mesmo pela coroa sem-fim.

$$\begin{aligned} W^x &= W(\cos\phi_n \operatorname{sen}\lambda + f\cos\lambda) \\ W^y &= W \operatorname{sen}\phi_n \\ W^z &= W(\cos\phi_n \cos\lambda - f \operatorname{sen}\lambda) \end{aligned} \tag{13-43}$$

A Equação (13-42), obviamente, ainda se aplica.

Inserindo $-W_{Gt}$ da Equação (13-42) no lugar de W^z na Equação (13-43), e multiplicando ambos os lados por f, verificamos que a força de atrito W_f é

$$W_f = fW = \frac{fW_{Gt}}{f \operatorname{sen}\lambda - \cos\phi_n \cos\lambda} \tag{13-44}$$

Uma relação útil entre as duas forças tangenciais, W_{Wt} e W_{Gt}, pode ser obtida ao se igualar a primeira e a terceira partes das Equações (13-42) e (13-43) e ao se eliminar W. O resultado é

$$W_{Wt} = W_{Gt}\frac{\cos\phi_n \operatorname{sen}\lambda + f\cos\lambda}{f \operatorname{sen}\lambda - \cos\phi_n \cos\lambda} \tag{13-45}$$

A *eficiência* η pode ser definida mediante a equação

$$\eta = \frac{W_{Wt}\ (\text{sem fricção})}{W_{Wt}\ (\text{com fricção})} \tag{a}$$

Substitua a Equação (13-45) com $f = 0$ no numerador da Equação (*a*) e a mesma equação no denominador. Após algum rearranjo, você descobrirá que a eficiência é

$$\eta = \frac{\cos\phi_n - f\tan\lambda}{\cos\phi_n + f\cot\lambda} \tag{13-46}$$

Ao selecionar um valor típico do coeficiente de atrito – digamos, $f = 0{,}05$ – e os ângulos de pressão mostrados na Tabela 13-6, podemos utilizar a Equação (13-46) para obter alguma informação útil para projeto. Ao solucionar essa equação para ângulos de hélice entre 1 e 30°, são produzidos os interessantes resultados mostrados na Tabela 13-6.

Muitos experimentos revelaram que o coeficiente de atrito é dependente da velocidade relativa ou de deslizamento. Na Figura 13-41, V_G é a velocidade na linha primitiva da coroa e V_W, a velocidade, nessa mesma linha, para o parafuso. Vetorialmente, $\mathbf{V}_W = \mathbf{V}_G + \mathbf{V}_S$; conseqüentemente, a velocidade de deslizamento é

$$V_S = \frac{V_W}{\cos\lambda} \tag{13-47}$$

Os valores publicados do coeficiente de atrito indicam variações de até 20%, sem dúvida causadas por diferenças no acabamento superficial, nos materiais e na lubrificação. Os valores apresentados no diagrama da Figura 13-42 são representativos e indicam a tendência geral.

Tabela 13-6 Eficiência de pares de engrenagens sem-fim para $f = 0{,}05$

Ângulo de hélice ψ, graus	Eficiência η, %
1,0	25,2
2,5	45,7
5,0	62,0
7,5	71,3
10,0	76,6
15,0	82,7
20,0	85,9
30,0	89,1

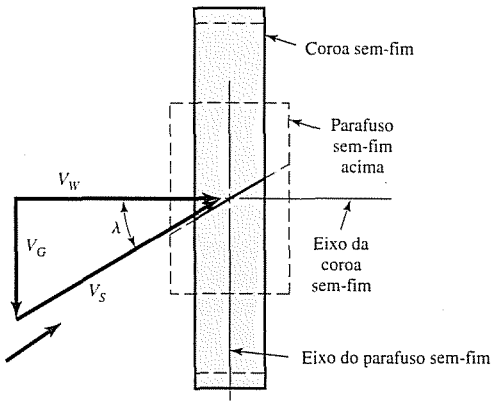


Figura 13-41 Componentes de velocidade em engrenamento de par sem-fim.

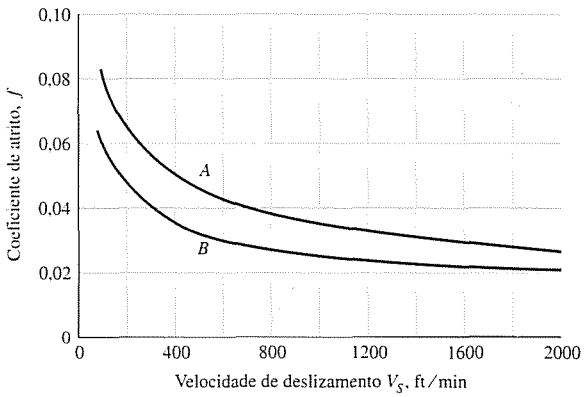


Figura 13-42 Valores representativos do coeficiente de atrito para engrenagens sem-fim. Esses valores são baseados em condições de lubrificação boas. Utilize a curva *B* para materiais de alta qualidade, como um parafuso de aço endurecido engranzando com uma coroa feita de bronze-fósforo. Utilize a curva *A* quando um nível maior de atrito for esperado, como no caso de engranzamento de um parafuso de ferro fundido com uma coroa de ferro fundido.

EXEMPLO 13-10

Um pinhão destro sem-fim de 2 dentes transmite 1 hp, a 1200 rpm, a uma coroa sem-fim com 30 dentes. Tal coroa tem um passo diametral transversal de 6 dentes/in e uma largura de face de 1 in. O pinhão, por sua vez, apresenta um diâmetro primitivo de 2 in e uma largura de face de $2\frac{1}{2}$ in. O ângulo de pressão normal vale $14\frac{1}{2}^{\circ}$. Os materiais e a qualidade do trabalho são tais que a curva *B* da Figura 13-42 deve ser utilizada na obtenção do coeficiente de atrito.

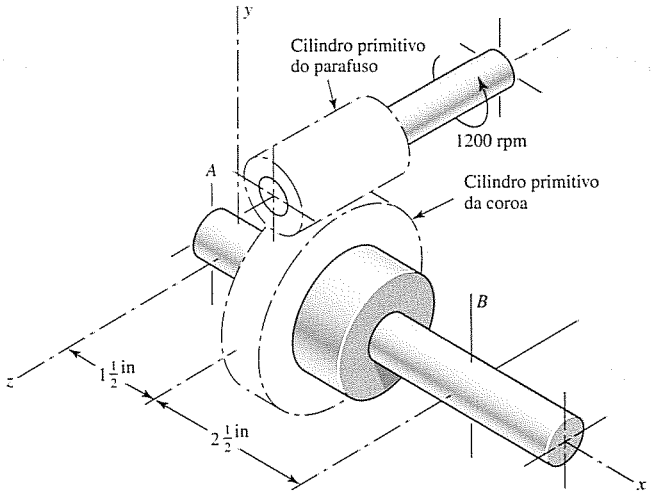


Figura 13-43 Cilindros primitivos do trem sem-fim do Exemplo 13-10.

(*a*) Encontre o passo axial, a distância entre os centros, o avanço e o ângulo de avanço.

(*b*) A Figura 13-43 apresenta um desenho de uma coroa sem-fim orientada relativamente ao sistema de coordenadas descrito no início da seção; a coroa é suportada pelos mancais *A* e *B*. Encontre as forças exercidas pelos mancais contra o eixo da coroa sem-fim, bem como o torque de saída.

Solução (*a*) O passo axial é igual ao passo circular transversal da coroa, que é

Resposta
$$p_x = p_t = \frac{\pi}{P} = \frac{\pi}{6} = 0{,}5236 \text{ in}$$

O diâmetro primitivo da coroa é $d_G = N_G/P = 30/6 = 5$ in. Portanto, a distância entre os centros é

Resposta
$$C = \frac{d_W + d_G}{2} = \frac{2+5}{2} = 3{,}5 \text{ in}$$

A partir da Equação (13-27), o avanço é

Resposta
$$L = p_x N_W = (0{,}5236)(2) = 1{,}0472 \text{ in}$$

Ademais, utilizando a Equação (13-28), determinamos

Resposta
$$\lambda = \tan^{-1}\frac{L}{\pi d_W} = \tan^{-1}\frac{1{,}0472}{\pi(2)} = 9{,}46^\circ$$

Utilizando a regra da mão direita na rotação do pinhão sem-fim, você verá que seu polegar aponta na direção positiva do eixo z. Agora, utilize a analogia parafuso-e-porca (o pinhão sem-fim é destro, tal como a rosca de um parafuso) e rode o parafuso em sentido horário, com a mão direita, enquanto evita a porca de rodar com a mão esquerda. A porca irá se mover axialmente, ao longo do parafuso, em direção à sua mão direita. Portanto, a superfície da coroa (Figura 13-43) em contato com o pinhão irá se mover na direção negativa do eixo z. Dessa forma, a coroa roda em sentido horário relativamente ao eixo x, com seu polegar apontando na direção negativa desse eixo.

A velocidade na linha primitiva do pinhão é

$$V_W = \frac{\pi d_W n_W}{12} = \frac{\pi(2)(1200)}{12} = 628 \text{ ft/min}$$

A velocidade da coroa é $n_G = (\frac{2}{30})(1200) = 80$ rpm. Logo, a velocidade no círculo primitivo da coroa é

$$V_G = \frac{\pi d_G n_G}{12} = \frac{\pi(5)(80)}{12} = 105 \text{ ft/min}$$

Portanto, a partir da Equação (13-47), presume-se que a velocidade de deslizamento V_S seja

$$V_S = \frac{V_W}{\cos\lambda} = \frac{628}{\cos 9{,}46^\circ} = 637 \text{ ft/min}$$

Considerando as forças nesse momento, iniciamos pela fórmula da potência

$$W_{Wt} = \frac{33\,000H}{V_W} = \frac{(33\,000)(1)}{628} = 52{,}5 \text{ lbf}$$

Essa força atua na direção negativa do eixo x, tal como na Figura 13-40. Utilizando a Figura 13-42, determinamos que $f = 0{,}03$. Logo, a primeira equação do grupo (13-42) e (13-43) provê

$$W = \frac{W^x}{\cos\phi_n \operatorname{sen}\lambda + f\cos\lambda}$$

$$= \frac{52{,}5}{\cos 14{,}5^\circ \operatorname{sen} 9{,}46^\circ + 0{,}03\cos 9{,}46^\circ} = 278 \text{ lbf}$$

Ademais, a partir da Equação (13-43),

$$W^y = W \operatorname{sen}\phi_n = 278 \operatorname{sen} 14{,}5^\circ = 69{,}6 \text{ lbf}$$

$$W^z = W(\cos\phi_n \cos\lambda - f \operatorname{sen}\lambda)$$

$$= 278(\cos 14{,}5^\circ \cos 9{,}46^\circ - 0{,}03 \operatorname{sen} 9{,}46^\circ) = 264 \text{ lbf}$$

Identificamos, agora, as componentes de força atuantes na coroa como

$$W_{Ga} = -W^x = 52{,}5 \text{ lbf}$$

$$W_{Gr} = -W^y = -69{,}6 \text{ lbf}$$

$$W_{Gt} = -W^z = -264 \text{ lbf}$$

A essa altura, um desenho tridimensional deve ser realizado para simplificar o trabalho que se segue. Um esboço isométrico, como o da Figura 13-44, é fácil de fazer e irá ajudá-lo a evitar erros.

Assumiremos o mancal B como de escora, a fim de fazer o eixo de engrenagens trabalhar em compressão. Logo, somando forças na direção x, obtemos

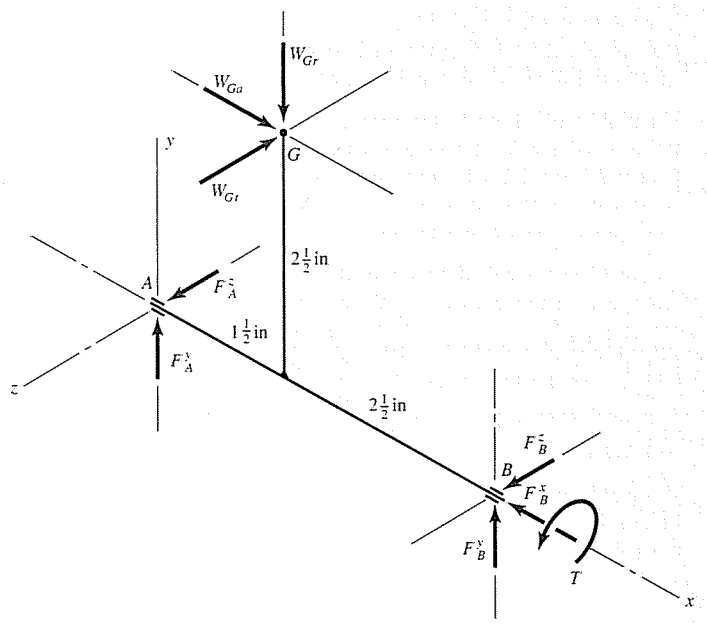


Figura 13-44 Esboço isométrico utilizado no Exemplo 13-10.

Resposta
$$F_B^x = -52{,}5 \text{ lbf}$$

Tomando momentos com relação ao eixo z, obtemos

Resposta
$$-(52{,}5)(2{,}5) - (69{,}6)(1{,}5) + 4F_B^y = 0 \qquad F_B^y = 58{,}9 \text{ lbf}$$

Tomando momentos com relação ao eixo y,

Resposta
$$(264)(1{,}5) - 4F_B^z = 0 \qquad F_B^z = 99 \text{ lbf}$$

Essas três componentes são agora inseridas no esboço, como mostrado em B, na Figura 13-44. Somando forças na direção y,

Resposta
$$-69{,}6 + 58{,}9 + F_A^y = 0 \qquad F_A^y = 10{,}7 \text{ lbf}$$

Similarmente, somando forças na direção z,

Resposta
$$-264 + 99 + F_A^z = 0 \qquad F_A^z = 165 \text{ lbf}$$

Essas duas componentes podem ser agora dispostas em A, no esboço. Ainda temos uma equação adicional a escrever. Somando momentos com relação ao eixo x,

Resposta
$$-(264)(2{,}5) + T = 0 \qquad T = 660 \text{ lbf} \cdot \text{in}$$

Deve-se à perda por atrito o fato de o torque de saída ser menor que o produto da razão de engrenamento e o torque de entrada.

PROBLEMAS

ANÁLISE **13-1** Um pinhão cilíndrico de dentes retos com 17 dentes tem um passo diametral igual a 8, roda a 1120 rpm e aciona uma coroa à velocidade de 544 rpm. Encontre o número de dentes da coroa e a distância teórica de centro a centro.

ANÁLISE **13-2** Um pinhão cilíndrico de dentes retos com 15 dentes tem um módulo igual a 3 mm e roda a 1600 rpm. A coroa dispõe de 60 dentes. Encontre a velocidade da engrenagem acionada, o passo circular e a distância teórica de centro a centro.

ANÁLISE **13-3** Um par de engrenagens cilíndricas de dentes retos apresenta um módulo de 4 mm e uma razão de velocidade igual a 2,80. O pinhão tem 20 dentes. Encontre o número de dentes da engrenagem acionada, os diâmetros primitivos e a distância teórica de centro a centro.

ANÁLISE **13-4** Um pinhão cilíndrico de dentes retos com 21 dentes engranza com uma coroa de 28 dentes. O passo diametral é de 3 dentes/in, e o ângulo de pressão vale 20°. Faça um desenho das engrenagens mostrando um dente de cada uma delas. Encontre e tabule os seguintes resultados: adendo, dedendo, folga, passo circular, espessura dos dentes e diâmetros dos círculos de base; os comprimentos do arco de aproximação, afastamento e ação; além do passo de base e da razão de contato.

ANÁLISE **13-5** Um pinhão cônico de dentes retos de 20° de ângulo de pressão, com 14 dentes e passo diametral de 6 dentes/in, aciona uma coroa de 32 dentes. Os dois eixos formam 90° entre si e estão no mesmo plano. Encontre:

(*a*) A distância de cone
(*b*) Os ângulos primitivos
(*c*) Os diâmetros primitivos
(*d*) A largura de face

ANÁLISE **13-6** Um par de engrenagens cilíndricas helicoidais de eixos paralelos utiliza um pinhão de 17 dentes acionando uma coroa de 34 dentes. O pinhão apresenta um ângulo de hélice destro de 30°, um ângulo de pressão normal de 20° e um passo diametral normal de 5 dentes/in. Encontre:

(*a*) Os passos circulares normal, transversal e axial
(*b*) O passo circular normal de base
(*c*) O passo diametral transversal e o ângulo de pressão transversal
(*d*) O adendo, o dedendo e o diâmetro primitivo de cada engrenagem

ANÁLISE **13-7** Um par de engrenagens helicoidais paralelas consiste em um pinhão de 19 dentes acionando uma coroa de 57 dentes. O pinhão tem um ângulo de hélice sestro de um 20°, um ângulo de pressão normal de $14\frac{1}{2}^\circ$ e um passo diametral normal de 10 dentes/in. Encontre:

(*a*) Os passos circulares normal, transversal e axial

(*b*) O passo diametral transversal e o ângulo de pressão transversal

(*c*) O adendo, o dedendo e o diâmetro primitivo de cada engrenagem

ANÁLISE **13-8** No Exemplo 13-1, encontre:

(*a*) O menor número de dentes de um pinhão que irá engranzar com uma coroa igual a ele próprio

(*b*) O menor número de dentes de pinhão a uma razão $m_G = 2{,}5$

(*c*) O menor pinhão que irá se acoplar a uma cremalheira

(*d*) O maior número possível de dentes de coroa para acoplamento com esse pinhão

ANÁLISE **13-9** No Exemplo 13-2, encontre:

(*a*) O menor número de dentes de um pinhão que irá engranzar com uma coroa igual a ele próprio

(*b*) O menor número de dentes de um pinhão que irá engranzar com uma cremalheira

(*c*) O maior número possível de dentes da coroa que irá engranzar com esse pinhão

ANÁLISE **13-10** Tomou-se a decisão de utilizar $\phi_n = 20°$, $P_t = 6$ dentes/in e $\psi = 30°$ para uma redução de razão 2:1. Escolha um pinhão adequado, bem como o número de dentes da coroa que o acompanha, de modo a evitar interferência.

ANÁLISE **13-11** Repita o Problema 13-10 com uma redução de 6:1.

13-12 Empregando um ângulo de pressão maior que o padrão, é possível utilizar menos dentes no pinhão e, assim, obter engrenagens menores sem adelgaçamento durante a usinagem. Se as engrenagens em questão são cilíndricas e de dentes retos, qual é o menor ângulo de pressão possível ϕ_t de se obter sem adelgaçamento, no caso de um pinhão de 9 dentes que engranza com uma cremalheira?

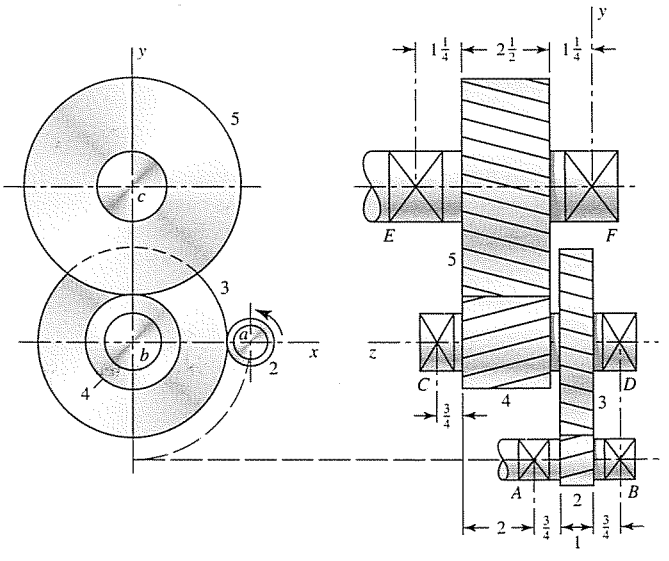
ANÁLISE **13-13** Um par de engrenagens montadas em eixos paralelos consiste em um pinhão helicoidal de 18 dentes acionando uma coroa de 32 dentes. O pinhão apresenta um ângulo de hélice sestro de 25°, um ângulo de pressão normal de 20° e um módulo normal de 3 mm. Encontre:

(*a*) Os passos circulares normal, transversal e axial

(*b*) O módulo transversal e o ângulo de pressão transversal

(*c*) Os diâmetros primitivos das duas engrenagens

ANÁLISE **13-14** O conjunto de engrenagens helicoidais de redução dupla exibido na figura é acionado, a partir do eixo *a*, a uma velocidade de 900 rpm. As engrenagens 2 e 3 têm um passo diametral normal de 10 dentes/in, um ângulo de hélice de 30° e um ângulo de pressão normal de 20°. O segundo par de engrenagens no trem, engrenagens 4 e 5, conta com um passo diametral normal igual a 6 dentes/in, um ângulo de hélice de 25° e um ângulo de pressão normal de 20°. Os números de dentes são os seguintes: $N_2 = 14$, $N_3 = 54$, $N_4 = 16$ e $N_5 = 36$. Determine:



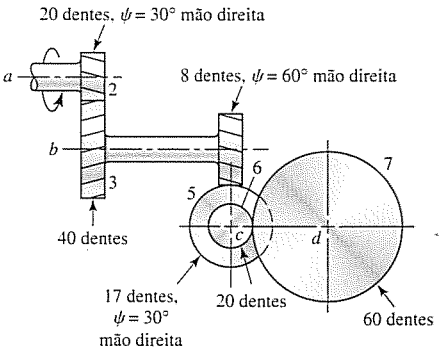
Problema 13-14
Dimensões em polegadas.

(*a*) As direções da força axial exercida por cada grupo de engrenagens sobre o eixo que as suporta

(*b*) A velocidade e a direção de rotação do eixo *c*

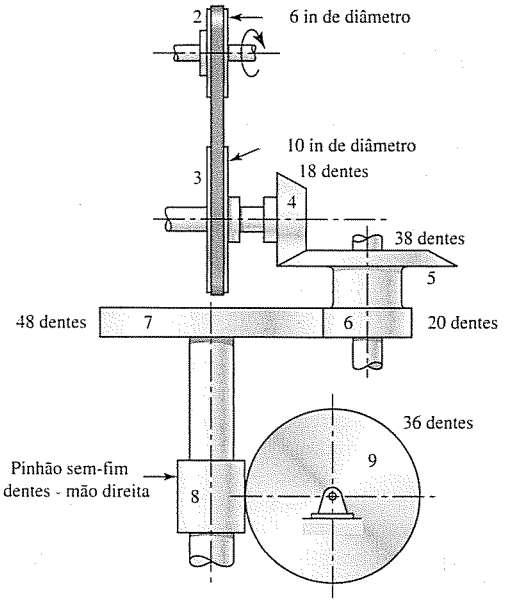
(*c*) A distância entre os centros de eixos

ANÁLISE **13-15** O eixo *a* da figura roda a 600 rpm na direção indicada. Encontre a velocidade e a direção da rotação do eixo *d*.



Problema 13-15

ANÁLISE **13-16** O trem de mecanismos mostrado consiste em diversas engrenagens e polias destinadas a mover a engrenagem 9. A polia 2 roda a 1200 rpm na direção indicada. Determine a velocidade e a direção de rotação da engrenagem 9.



Problema 13-16

ANÁLISE **13-17** A figura apresenta um trem de engrenagens consistindo em um par de engrenagens helicoidais e um par de engrenagens cônicas mitrais. As engrenagens helicoidais têm um ângulo de pressão normal de $17\frac{1}{2}^\circ$ e um ângulo de hélice como indicado. Encontre:

(*a*) A velocidade do eixo *c*

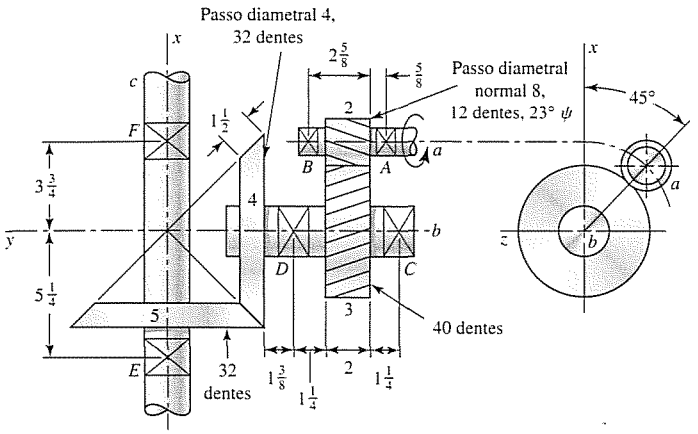
(*b*) A distância entre os eixos *a* e *b*

(*c*) O diâmetro das engrenagens mitrais

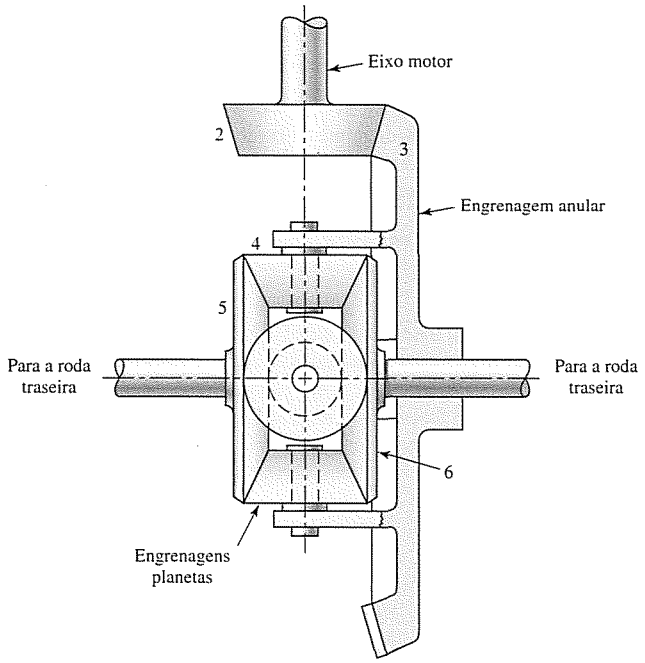
ANÁLISE **13-18** Os números de dentes do diferencial automotivo mostrado na figura são $N_2 = 17$, $N_3 = 54$, $N_4 = 11$, $N_5 = N_6 = 16$. O eixo motor roda a 1200 rpm.

(*a*) Quais são as velocidades das rodas se o carro está se movendo em linha reta, sobre uma estrada de boa superfície?

(*b*) Suponha que a roda direita seja levantada com um macaco e que a esquerda descanse sobre uma estrada de boa superfície. Qual é a velocidade da roda direita?



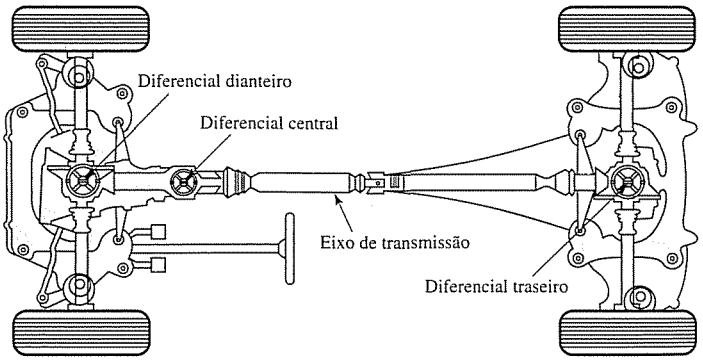
Problema 13-17
Dimensões em polegadas.



Problema 13-18

(*c*) Suponha que um veículo de tração traseira encontra-se estacionado com a roda direita apoiada sobre uma superfície de gelo escorregadio. A resposta a (*b*) lhe dá alguma dica com relação ao que ocorreria se você desse partida no carro e tentasse seguir em frente?

ANÁLISE **13-19** A figura ilustra um conceito de transmissão para todas as rodas utilizando três diferenciais: um para o eixo dianteiro, um outro para o traseiro e um terceiro conectado ao eixo de transmissão.

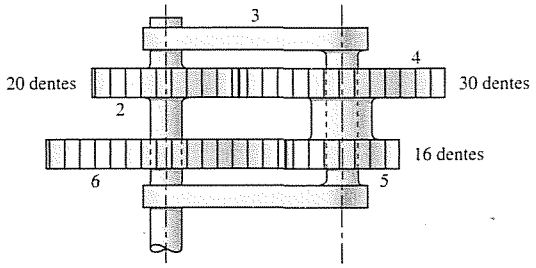


Problema 13-19
O conceito "Quattro" da Audi, mostrando os três diferenciais que proporcionam tração permanente em todas rodas. *(Reimpressão com permissão da Audi of America, Inc.)*

(*a*) Explique por que esse conceito pode permitir uma aceleração maior.

(*b*) Suponha que o diferencial de centro ou o traseiro, ou ambos, possa ser travado para certas condições de estrada. Iriam uma ou ambas as ações proporcionar uma tração maior? Por quê?

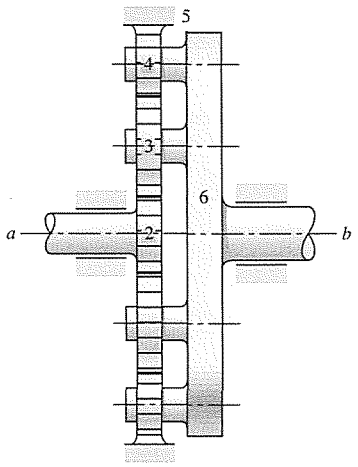
ANÁLISE **13-20** No trem planetário revertido ilustrado, encontre a velocidade e a direção de rotação do braço se a engrenagem 2 é incapaz de rodar e a 6 é movida a 12 rpm em sentido horário.



Problema 13-20

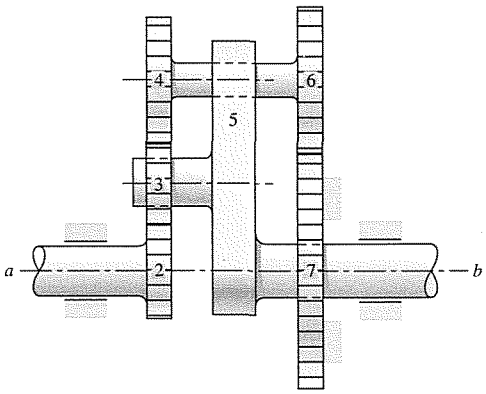
ANÁLISE **13-21** No trem de engrenagens do Problema 13-20, admita que a engrenagem 2 é movida a 180 rpm em sentido anti-horário, enquanto a 6 é mantida parada. Qual é a velocidade e a direção de rotação do braço?

ANÁLISE **13-22** Os números de dentes das engrenagens do trem mostrado na figura são: $N_2 = 12$, $N_3 = 16$ e $N_4 = 12$. Quantos dentes deve ter a engrenagem interna 5? Suponha que a engrenagem 5 seja fixa. Qual é a velocidade do braço se o eixo a roda em sentido anti-horário a 320 rpm?



Problema 13-22

ANÁLISE **13-23** Os números de dentes das engrenagens do trem ilustrado são: $N_2 = 24$, $N_3 = 18$, $N_4 = 30$, $N_6 = 36$ e $N_7 = 54$. A engrenagem 7 é fixa. Se o eixo *b* é rodado 5 voltas, quantas voltas dará o eixo *a*?

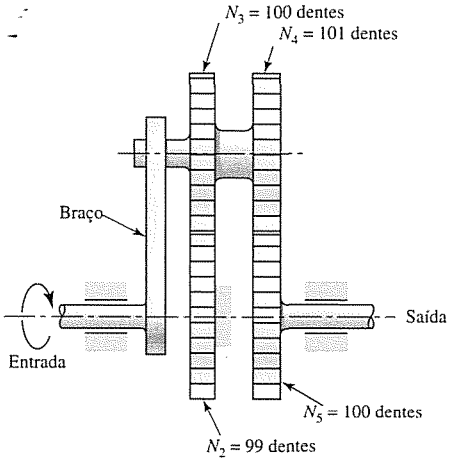


Problema 13-23

ANÁLISE **13-24** Utilizando engrenagens não padronizadas é possível engranzar uma engrenagem de 99 dentes com outra de 100 dentes, usando a mesma distância entre centros que seria requerida para engranzar um pinhão de 100 dentes com uma coroa de 101 dentes. O trem planetário mostrado na figura é baseado nesta idéia.

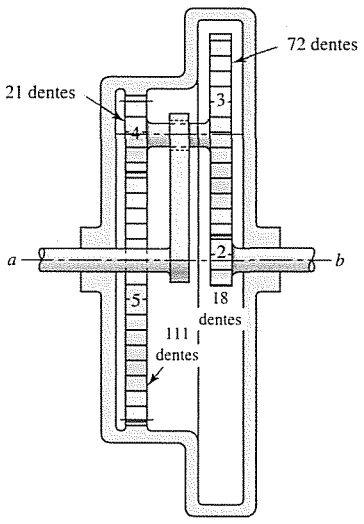
(*a*) Encontre a razão entre a velocidade do eixo de saída e a velocidade do eixo de entrada.

(*b*) A carcaça deste trem planetário é cilíndrica, com o eixo do cilindro coincidente com os eixos de entrada e saída. Se o passo das engrenagens 4 e 5 é de 10 dentes por polegada de diâmetro primitivo, e se essas engrenagens têm adendo padronizado, qual deve ser o diâmetro interno dessa carcaça?



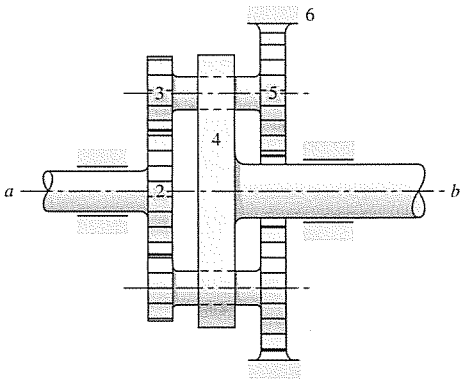
Problema 13-24

ANÁLISE **13-25** O trem de engrenagens epicicloidais mostrado na figura tem o braço ligado ao eixo *a*, e a engrenagem sol ligada ao eixo *b*. A engrenagem 5, com 111 dentes, é uma engrenagem interna e faz parte da estrutura. As duas engrenagens planeta, engrenagens 3 e 4, são ambas fixas ao mesmo eixo planetário. Se esse eixo é utilizado como um redutor de velocidade em linha, qual é o eixo de entrada, *a* ou *b*? Irão rodar então ambos os eixos na mesma direção ou em direções opostas?



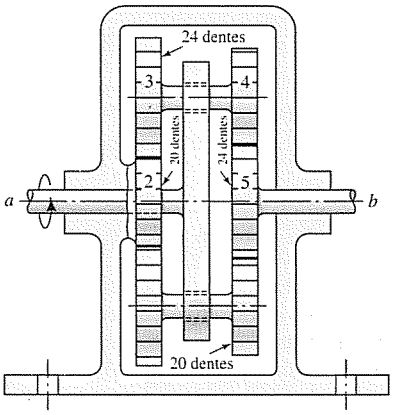
Problema 13-25

ANÁLISE **13-26** A figura mostra um redutor de velocidade no qual o eixo de entrada *a* está em linha com o eixo de saída *b*. Os números de dentes são: $N_2 = 24$, $N_3 = 18$, $N_5 = 22$ e $N_6 = 64$. Encontre a razão entre as velocidades de saída e de entrada. Irão rodar ambos os eixos na mesma direção? Note que a engrenagem 6 é uma engrenagem interna fixa.



Problema 13-26

ANÁLISE **13-27** O redutor de velocidade mostrado na figura tem o pinhão 2 fixo. As engrenagens planetas são a 3 e a 4, ambas fixas ao eixo planetário. A engrenagem 5 é fixa ao eixo de saída. O eixo de entrada *a* move o braço. Encontre a relação de velocidade global desse redutor, bem como a direção de rotação do eixo de saída.

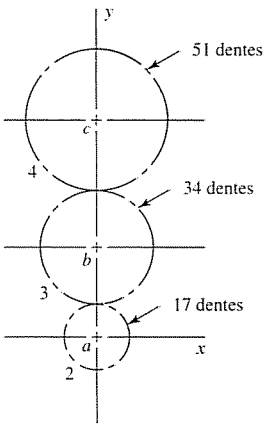


Problema 13-27

ANÁLISE **13-28** O eixo *a* na figura recebe uma potência de 75 kW a 1000 rpm em sentido anti-horário. As engrenagens têm um módulo igual a 5 mm e um ângulo de pressão de 20°. A engrenagem 3 roda livre.

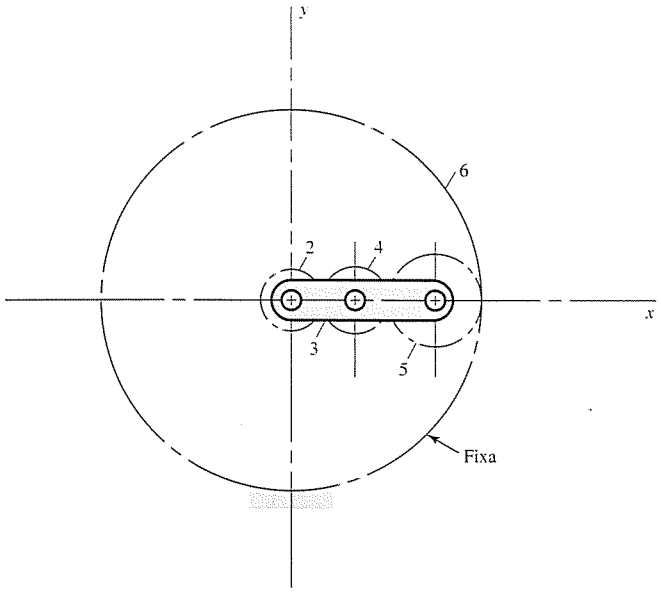
(*a*) Encontre a força F_{3b} que a engrenagem 3 exerce contra o eixo *b*.

(*b*) Encontre o torque T_{4c} que a engrenagem 4 exerce sobre o eixo *c*.



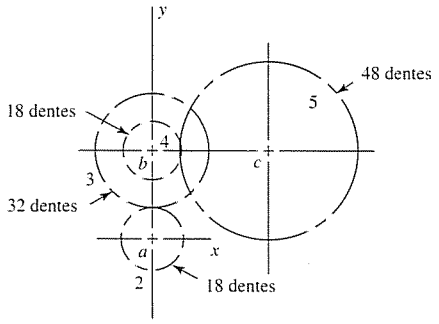
Problema 13-28

ANÁLISE **13-29** O pinhão 2 de 24 dentes, de passo 6 e 20°, mostrado na figura roda em sentido horário a 1000 rpm, sendo movido por meio de uma potência de 25 hp. As engrenagens 4, 5 e 6 têm 24, 36 e 144 dentes, respectivamente. Que torque o braço 3 pode entregar ao seu eixo de saída? Desenhe diagramas de corpo livre do braço e de cada uma das engrenagens e mostre todas as forças que agem sobre as mesmas.



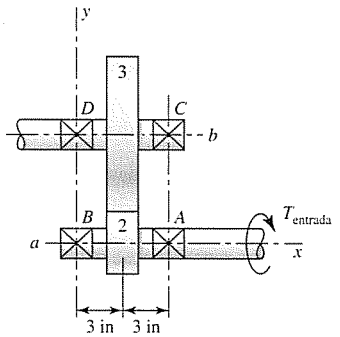
Problema 13-29

ANÁLISE **13-30** As engrenagens mostradas na figura têm um passo diametral de 2 dentes por polegada e um ângulo de pressão de 20°. O pinhão roda a 1800 rpm em sentido horário e transmite 200 hp por meio do par livre à engrenagem 5 no eixo *c*. Que forças as engrenagens 3 e 4 transmitem ao eixo livre?



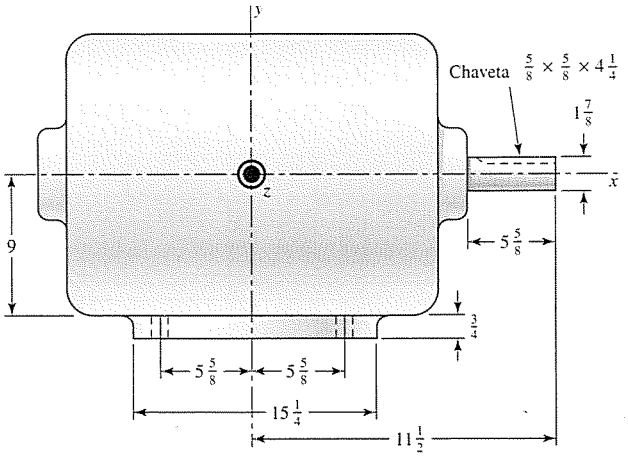
Problema 13-30

PROJETO **13-31** A figura mostra um par de engrenagens cilíndricas de dentes retos montadas em seus eixos, tendo passo diametral de 5 dentes/in, com um pinhão de 18 dentes e 20°, acionando uma coroa de 45 dentes. A potência de entrada máxima vale 32 a 1800 rpm. Encontre a direção e a magnitude das máximas forças que atuam sobre os mancais *A*, *B*, *C* e *D*.



Problema 13-31

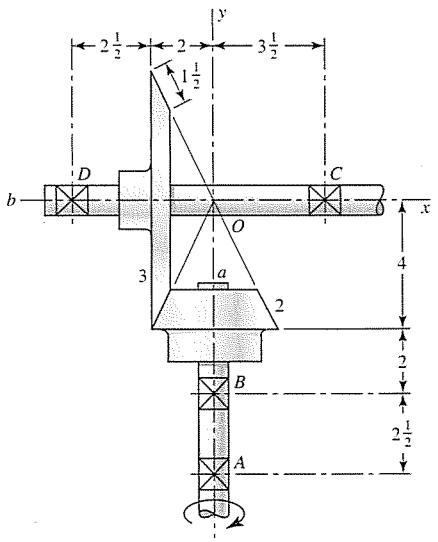
ANÁLISE **13-32** A figura mostra as dimensões de uma carcaça de motor elétrico de 30 hp a 900 rpm de seu eixo. A carcaça é aparafusada à sua estrutura utilizando-se para isso quatro parafusos de $\frac{3}{4}$ in espaçados entre si em 11 $\frac{1}{4}$ in na vista mostrada, e espaçados em 14 in quando vistos da extremidade do motor. Um pinhão cilíndrico de dentes retos de passo diametral 4 e 20°, com 20 dentes e uma largura de face de 2 in é fixado por chaveta ao eixo do motor. Esse pinhão move uma coroa cujo eixo está no mesmo plano *xz*. Determine as máximas for-



Problema 13-32
Carcaça NEMA N° 364; dimensões em polegadas. O eixo *z* está direcionado para fora da página.

ças de cisalhamento e tração nos parafusos de montagem, baseando-se num torque de sobrecarga de 200%. A direção de rotação é importante?

ANÁLISE **13-33** A figura mostra um pinhão cônico de dentes retos de 16 dentes e 20°, acionando uma coroa de 32 dentes, além da localização das linhas de centro dos mancais. O eixo *a*, do pinhão, recebe 2,5 hp a 240 rpm. Determine as reações nos mancais em *A* e *B*, supondo que A responda com ambas as cargas, axial e radial.



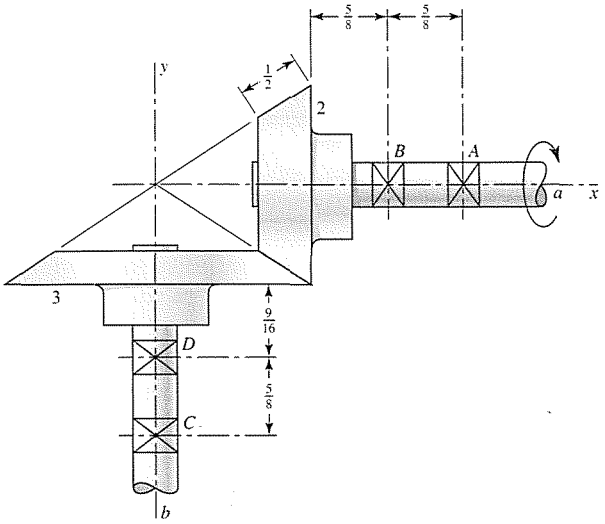
Problema 13-33
Dimensões em polegadas.

ANÁLISE **13-34** A figura mostra um pinhão cônico de dentes retos de passo diametral 10, com 15 dentes e 20°, acionando uma coroa de 25 dentes. A carga transmitida é de 30 lbf. Encontre as reações em *C* e *D* no eixo de saída se supõe que *D* suporte ambas as cargas, axial e radial.

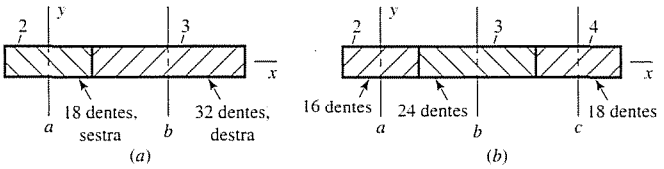
ANÁLISE **13-35** As engrenagens mostradas nos dois trens da figura têm um passo diametral normal de 4, um ângulo de pressão normal de 20° e um ângulo de hélice de 30°. Para ambos os trens, a carga transmitida vale 800 lbf. Na peça *a*, o pinhão roda em sentido anti-horário com relação ao eixo *y*. Encontre a força exercida por cada engrenagem na peça *a* sobre o eixo que a suporta.

ANÁLISE **13-36** Esta é uma continuação do Problema 13-35. Aqui, é requerido encontrar as forças exercidas pelas engrenagens 2 e 3 sobre os eixos que as suportam, como mostrado na peça *b*. A engrenagem 2 roda em sentido horário com relação ao eixo *y*. A engrenagem 3 roda livre.

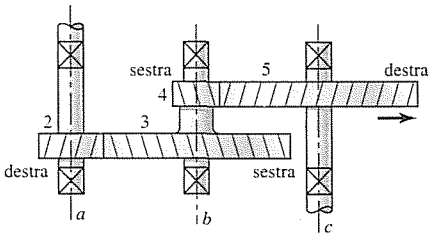
13-37 Um trem de engrenagens é composto de quatro engrenagens helicoidais com os três eixos num único plano, como mostrado na figura. As engrenagens têm um ângulo de pressão normal de 20° e um ângulo de hélice de 30°. O eixo *b* é livre e a carga transmitida, atuando na engrenagem 3, vale 500 lbf. As engrenagens no eixo *b*, ambas, têm um passo diametral normal de 7 dentes/in e 54 e 14 dentes, respectivamente. Determine as forças exercidas pelas engrenagens 3 e 4 no eixo *b*.



Problema 13-34
Dimensões em polegadas.



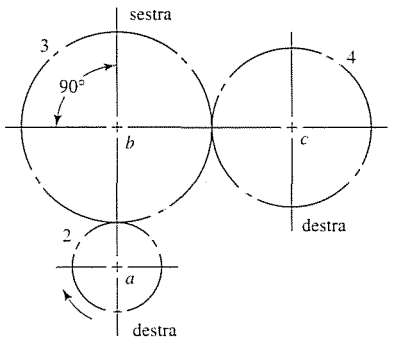
Problema 13-35



Problema 13-37

ANÁLISE **13-38** Na figura do Problema 13-31, o pinhão 2 é uma engrenagem cilíndrica helicoidal com hélice destra com ângulo de 30°, um ângulo de pressão normal de 20°, 16 dentes e um passo diametral normal de 6 dentes/in. Um motor de 25 hp movimenta o eixo *a* na velocidade de 1720 rpm em sentido horário com relação ao eixo *x*. A engrenagem 3 tem 42 dentes. Encontre as reações exercidas pelos mancais *C* e *D* no eixo *b*. Um desses mancais deve suportar ambas as cargas radial e axial. Este mancal deve ser selecionado de forma a pôr o eixo sob compressão.

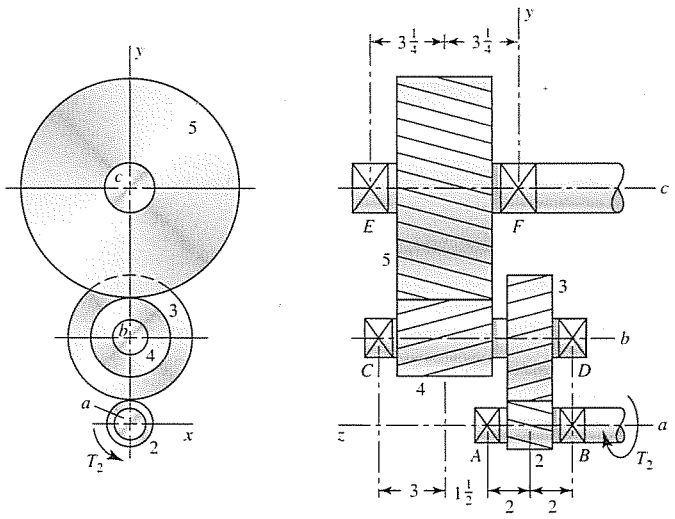
ANÁLISE **13-39** A engrenagem 2, na figura, tem 16 dentes, 20° de ângulo transversal, 15° de ângulo de hélice e um passo diametral normal de 8 dentes/in. A engrenagem 2 roda uma engrenagem livre montada no eixo *b*, que tem 36 dentes. A engrenagem movida no eixo *c* tem 28 dentes. Se o acionador roda a 1720 rpm e transmite $7\frac{1}{2}$ hp, encontre as cargas radial e axial em cada eixo.



Problema 13-39

ANÁLISE **13–40**

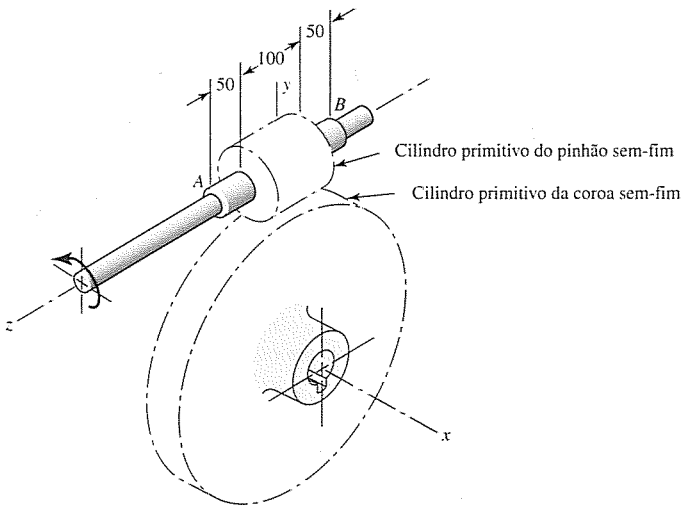
A figura mostra um conjunto de redução dupla envolvendo engrenagens helicoidais. O pinhão 2 é motor, recebendo um torque de 1200 lbf · in do seu eixo na direção mostrada. O pinhão 2 tem um passo diametral normal de 8 dentes/in, 14 dentes, um ângulo de pressão normal de 20°, com hélice destra cortada com ângulo de 30°. A engrenagem par, 3, é montada no eixo *b*, tendo 36 dentes. A engrenagem 4, que é motora para o segundo par de engrenagens no trem, tem um passo diametral normal de 5 dentes/in, 15 dentes e um ângulo de pressão normal de 20°, sendo cortada com hélice sestra de ângulo igual a 15°. A engrenagem par, 5, tem 45 dentes. Encontre a magnitude e a direção da força exercida pelos mancais *C* e *D* sobre o eixo *b*, se o eixo *C* pode suportar apenas cargas radiais, enquanto o mancal *D* pode suportar tanto cargas axiais quanto radiais.



Problema 13-40
Dimensões em polegadas.

ANÁLISE **13–41**

Um pinhão destro sem-fim, de um dente, construído de aço endurecido (dureza não especificada), tem uma capacidade de potência de catálogo igual a 2000 W a 600 rpm, quando engranzado a uma coroa sem-fim de 48 dentes feita de ferro fundido. O passo axial do pinhão vale 25 mm, o ângulo de pressão normal tem $14\frac{1}{2}°$, o diâmetro primitivo do pinhão é de 100 mm, e as larguras de face do pinhão e da coroa são, respectivamente, 100 mm e 50 mm. A figura mostra os mancais *A* e *B* do eixo do pinhão localizados de forma simétrica com relação ao pinhão, e distanciados por 200 mm. Determine qual deve ser o mancal axial, e encontre as magnitudes e as direções das forças exercidas por ambos os mancais.



Problema 13-41
Dimensões em milímetros.

ANÁLISE **13-42** O diâmetro do cubo e a projeção deste para a engrenagem do Problema 13-41 valem 100 e 37,5 mm, respectivamente. A largura de face da coroa vale 50 mm. Localize os mancais *C* e *D* em lados opostos, espaçando *C* em 10 mm da engrenagem no lado da face escondida (ver figura), e *D* em 10 mm da superfície do cubo. Encontre o torque de saída e as magnitudes e direções das forças exercidas pelos mancais sobre o eixo.

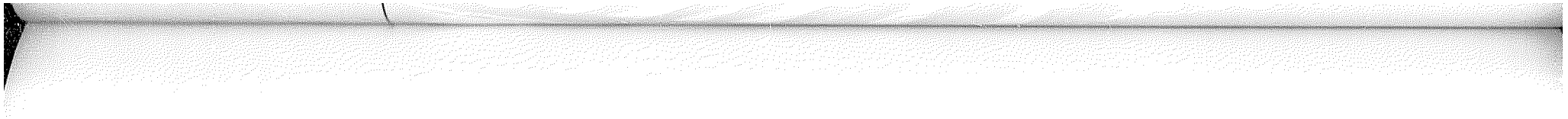
ANÁLISE **13-43** Um pinhão sem-fim de 2 dentes transmite $\frac{1}{2}$ hp a 900 rpm a uma coroa sem-fim de 36 dentes, com um passo diametral transversal de 10 dentes/in. O pinhão tem um ângulo de pressão normal de $14\frac{1}{2}^{\circ}$, um diâmetro primitivo de $1\frac{1}{2}$ in e uma largura de face igual a $1\frac{1}{2}$ in. Use um coeficiente de atrito de 0,05 e encontre a força exercida pela coroa sobre o pinhão, bem como o torque de entrada. Para a mesma geometria mostrada no Problema 13-41, a velocidade do pinhão é horária com relação ao eixo z.

ANÁLISE **13-44** O passo diametral dos dentes de todas as engrenagens cilíndricas de dentes retos do trem de engrenagens epicicloidais do Problema 13-24 é de 48 dentes por polegada. O ângulo de pressão é de 20°. Se o engrenamento de 100:101 for colocado na distância correta de centro a centro, qual será o ângulo de pressão operativo do engranzamento de relação 99:100? Mostre que o ângulo de pressão ϕ' é dado pela equação

$$\phi' = \cos^{-1}\left[\frac{(1 + m_G)N_P \cos\phi}{2PC'}\right]$$

na qual, para o engranzamento de relação 99:100, C' é a distância imposta entre os centros, m_G é a relação de engrenamento e N_P é o número de dentes do pinhão.

13-45 Escreva um programa de computador que irá analisar um engranzamento de engrenagens cilíndricas de dentes retos ou helicoidais, com dados de entrada contendo ϕ_n, ψ, P_t, N_P e N_G; que compute m_G, d_P, d_G, P_t, P_n, P_x e ϕ_t; e que aconselhe quanto ao menor número de dentes que irá permitir a um pinhão engranzar consigo mesmo sem interferência, engranzar com sua coroa e engranzar com uma cremalheira. Faça, também, com que o programa calcule o maior número de dentes possível de engranzar com esse pinhão.



CAPÍTULO

14 Engrenagens Cilíndricas de Dentes Retos e Engrenagens Cilíndricas Helicoidais

14-1 Equação de Flexão de Lewis 682
14-2 Durabilidade Superficial 690
14-3 Equações de Tensão AGMA 692
14-4 Equações de Resistência AGMA 693
14-5 Fatores Geométricos I e J (Z_I e Y_J) 697
14-6 Coeficiente Elástico C_p(Z_E) 701
14-7 Fator Dinâmico K_v 701
14-8 Fator de Sobrecarga K_o 703
14-9 Fator de Condição de Superfície C_f (Z_R) 703
14-10 Fator de Tamanho K_s 704
14-11 Fator de Distribuição de Carga K_m (K_H) 705
14-12 Fator de Razão de Dureza C_H 706
14-13 Fatores de Vida para Ciclagem de Tensão Y_N e Z_N 707
14-14 Fator de Confiabilidade K_R (Y_Z) 708
14-15 Fator de Temperatura K_T (Y_θ) 709
14-16 Fator de Espessura de Borda K_B 709
14-17 Fatores de Segurança S_F e S_H 709
14-18 Análise 710
14-19 Projeto de um Par de Engrenagens 719

Este capítulo destina-se, primordialmente, à análise e ao projeto de engrenagens cilíndricas de dentes retos e de engrenagens helicoidais, com vista a resistir à falha por flexão dos dentes, assim como à falha por formação de cavidades nas superfícies dos mesmos. A falha por flexão ocorrerá quando a tensão significativa nos dentes igualar-se ou exceder à resistência ao escoamento, ou ao limite de resistência à fadiga por flexão. A falha superficial, por sua vez, acontecerá quando a tensão significativa de contato igualar-se ou exceder ao limite de resistência à fadiga superficial. As duas primeiras seções apresentam uma pequena história de análises, a partir da qual a metodologia corrente é desenvolvida.

A American Gear Manufacturers Association[1] (AGMA) tem sido, por vários anos, a autoridade responsável pela disseminação do conhecimento pertinente ao projeto e à análise de engrenagens. Os métodos que ela apresenta são de uso geral nos Estados Unidos, quando resistência e desgaste constituem considerações primordiais. Em vista desse fato, é importante que o procedimento da AGMA para o problema seja aqui apresentado.

O enfoque adotado por essa organização requer muitas cartas e gráficos – em demasia para um único capítulo deste livro. Ao utilizar somente um ângulo de pressão e dentes não-encurtados, muito omitimos desses gráficos e cartas. Tal simplificação reduz a complexidade, embora sem evitar o desenvolvimento de um entendimento básico acerca do procedimento. Mais ainda, essa simplificação torna possível um melhor desenvolvimento dos fundamentos, devendo, assim, constituir uma introdução ideal ao uso do método geral da AGMA.[2] As Seções 14-1 e 14-2 são elementares e servirão como exame das bases do método AGMA. A Tabela 14-1 amplamente estabelece a nomenclatura da organização.

14-1 Equação de Flexão de Lewis

Wilfred Lewis introduziu uma equação para estimar a tensão de flexão em dentes de engrenagens; nela, a forma do dente entrava na formulação. Tal equação, anunciada em 1892, permanece, ainda hoje, como a base para a maioria dos projetos de engrenagens.

Para desenvolver a equação fundamental de Lewis, refira-se à Figura 14-1(*a*), que mostra uma viga em balanço de dimensões transversais F e t, com comprimento l e carga W^t, uniformemente distribuída ao longo da largura de face F. O módulo seccional I/c vale $Ft^2/6$; portanto, a tensão causada pela flexão é

$$\sigma = \frac{M}{I/c} = \frac{6W^t l}{Ft^2} \qquad (a)$$

Os projetistas de engrenagens designam as componentes de força sobre dentes como W_t, W_r, W_a ou W^t, W^r, W^a de forma alternativa. A última notação permite a adição de pós-subscritos, essenciais para diagramas de corpo livre. Por exemplo, para o engranzamento das engrenagens 2 e 3, W^t_{23} representa a força transmitida do corpo 2 para o corpo 3, ao passo que W^t_{32} representa a força do corpo 3 sobre o corpo 2. Quando se trabalha com redutores de velocidade de duplo ou tríplice estágios, essa notação revela-se compacta e essencial para a clareza de pensamento. Uma vez que componentes de força entre engrenagens raramente admitem expoentes, isso não acarreta qualquer complicação. Relações pitagóricas, caso necessário, podem ser tratadas com parênteses ou evitadas, ao se expressarem as relações trigonometricamente.

Referindo-nos agora à Figura 14-1(*b*), assumimos que a máxima tensão em um dente de engrenagem ocorre no ponto a. Por similaridade de triângulos, podemos escrever

$$\frac{t/2}{x} = \frac{l}{t/2} \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{t^2}{4l} \qquad (b)$$

Rearranjando a Equação (*a*),

$$\sigma = \frac{6W^t l}{Ft^2} = \frac{W^t}{F}\,\frac{1}{t^2/6l} = \frac{W^t}{F}\,\frac{1}{t^2/4l}\,\frac{1}{\frac{4}{6}} \qquad (c)$$

[1] 500 Montgomery Street, Suite 350, Alexandria, VA 22314-1560.

[2] As normas ANSI/AGMA 2001-C95 (revisão AGMA 2001-B88) e ANSI/AGMA 2101-C95 (edição métrica da ANSI/AGMA 2001-C95), *Fundamental Rating Factors and Calculation Methods for Involute Spur and Helical Gear Teeth*, são utilizadas neste capítulo. O uso dos American National Standards é completamente voluntário; sua existência não proíbe as pessoas, sob quaisquer circunstâncias, quer tenham aprovado os padrões ou não, de fabricar, vender, comprar ou usar produtos, processos ou procedimentos que não se conformem às padronizações.

O American National Standards Institute não desenvolve normas nem, sob quaisquer circunstâncias, fornece interpretação de qualquer American National Standard. Pedidos para interpretação dessas padronizações devem ser endereçados à American Gear Manufacturers Association. [Tabelas ou outras seções independentes podem ser citadas ou extraídas integralmente. Na linha de crédito deve constar o seguinte: "Extracted from ANSI/AGMA Standard 2001-C95 or 2101-C95 *Fundamental Rating Factors and Calculation Methods for Involute Spur and Helical Gear Teeth*", com a permissão do editor, American Gear Manufacturers Association, 500 Montgomery Street, Suite 350, Alexandria, Virginia 22314-1560.] O anterior é uma adaptação parcial do prefácio da ANSI para essas normas.

Tabela 14-1 Símbolos, nomes e localizações*

Símbolo	Nome	Encontrado em
b	Largura líquida da face do membro mais estreito	Eq. (14-16)
C_e	Fator de correção do alinhamento de engrenamento	Eq. (14-35)
C_f	Fator de condição da superfície	Eq. (14-16)
C_H	Fator de razão de dureza	Eq. (14-18)
C_{ma}	Fator de alinhamento de engrenamento	Eq. (14-34)
C_{mc}	Fator de correção de carga	Eq. (14-31)
C_{mf}	Fator de distribuição de carga na face	Eq. (14-30)
C_P	Coeficiente elástico	Eq. (14-13)
C_{pf}	Fator de proporção do pinhão	Eq. (14-32)
C_{pm}	Modificador da proporção do pinhão	Eq. (14-33)
d	Diâmetro primitivo operacional do pinhão	Eq. (14-1)
d_P	Diâmetro primitivo, pinhão	Eq. (14-22)
d_G	Diâmetro primitivo, coroa	Eq. (14-22)
E	Módulo de elasticidade	Eq. (14-10)
F	Largura líquida de face do membro mais estreito	Eq. (14-15)
f_P	Acabamento superficial do pinhão	Fig. 14-13
H	Potência	Fig. 14-17
H_B	Dureza Brinell	Ex. 14-3
H_{BG}	Dureza Brinell da coroa	Sec. 14-12
H_{BP}	Dureza Brinell do pinhão	Sec. 14-12
hp	Potência em hp	Ex. 14-1
h_t	Profundidade total do dente da coroa	Sec. 14-16
I	Fator geométrico para a resistência à formação de cavidades	Eq. (14-16)
J	Fator geométrico para a resistência à flexão	Eq. (14-15)
K	Fator da carga de contato para a resistência à formação de cavidades	Eq. (7-72)
K_B	Fator de espessura de borda	Eq. (14-40)
K_f	Fator de concentração de tensão para fadiga	Eq. (14-9)
K_m	Fator de distribuição de carga	Eq. (14-30)
K_o	Fator de sobrecarga	Eq. (14-15)
K_R	Fator de confiabilidade	Eq. (14-17)
K_s	Fator de tamanho	Sec. 14-10
K_T	Fator de temperatura	Eq. (14-17)
K_v	Fator dinâmico	Eq. (14-17)
m	Módulo métrico	Eq. (14-15)
m_B	Razão auxiliar	Eq. (14-34)
m_G	Razão de engrenamento (nunca menor que 1)	Eq. (14-22)
m_N	Razão de partilha de carga	Eq. (14-21)
N	Número de ciclos de tensão	Fig. 14-14
N_G	Número de dentes na coroa	Eq. (14-22)
N_P	Número de dentes no pinhão	Eq. (14-22)
n	Velocidade	Ex. 14-1
n_P	Velocidade do pinhão	Ex. 14-4
P	Passo diametral	Eq. (14-2)
P_d	Passo diametral do pinhão	Eq. (14-15)
p_N	Passo normal de base	Eq. (14-24)
P_n	Passo circular normal	Eq. (14-24)
P_x	Passo axial	Eq. (14-19)

(continua...)

Tabela 14-1 Símbolos, nomes e localizações* *(continuação)*

Símbolo	Nome	Encontrado em
Q_v	Valor do nível de precisão de transmissão	Eq. (14-29)
R	Confiabilidade	Eq. (14-38)
R_a	Raiz da média dos quadrados da rugosidade	Fig. 14-13
r_f	Raio do filete de dente	Fig. 14-1
r_G	Raio do círculo primitivo, coroa	Na norma
r_P	Raio do círculo primitivo, pinhão	Na norma
r_{bP}	Raio do círculo de base do pinhão	Eq. (14-25)
r_{bG}	Raio do círculo de base da coroa	Eq. (14-25)
S_C	Resistência à fadiga superficial de Buckingham	Ex. 14-3
S_c	Resistência à fadiga superficial AGMA	Eq. (14-18)
S_t	Resistência à flexão AGMA	Eq. (14-17)
S	Vão entre mancais	Fig. 14-10
S_1	Deslocamento do pinhão do centro do vão	Fig. 14-10
S_F	Fator de segurança – flexão	Eq. (14-41)
S_H	Fator de segurança – formação de cavidades	Eq. (14-42)
W^t ou $W_t^\dagger$	Carga transmitida	Fig. 14-1
Y_N	Fator de ciclagem de tensão para resistência à flexão	Fig. 14-14
Z_N	Fator de ciclagem de tensão para resistência à formação de cavidades	Fig. 14-15
β	Expoente	Eq. (14-44)
σ	Tensão de flexão	Eq. (14-2)
σ_C	Tensão de contato a partir de relações hertzianas	Eq. (14-14)
σ_c	Tensão de contato a partir de relações da AGMA	Eq. (14-16)
σ_{all}	Tensão admissível de flexão	Eq. (14-17)
$\sigma_{c,all}$	Tensão admissível de contato, AGMA	Eq. (14-18)
ϕ	Ângulo de pressão	Eq. (14-12)
ϕ_t	Ângulo de pressão transversal	Eq. (14-23)
ψ	Ângulo de hélice no diâmetro primitivo padronizado	Ex. 14-2

* Como a ANSI/AGMA 2001-C95 introduziu uma quantidade significativa de literatura nova, este resumo e referências é fornecido até que o vocabulário do leitor tenha crescido.

† Veja racional de preferência que se segue à Equação (a), Seção 14-1.

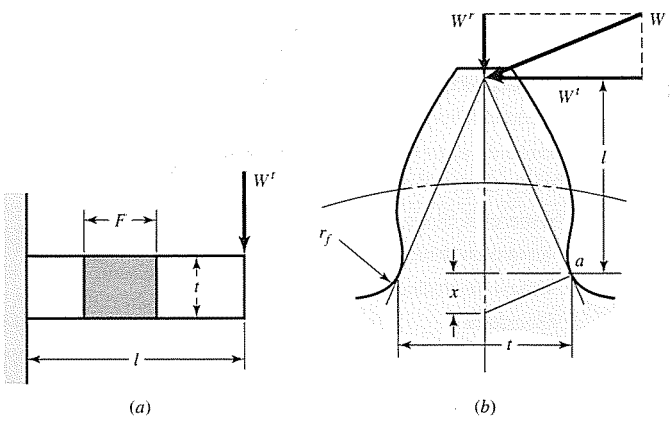


Figura 14-1

Se, agora, substituirmos o valor de x da Equação (b) na Equação (c), e multiplicarmos o numerador e o denominador pelo passo circular p, encontraremos

$$\sigma = \frac{W^t p}{F\left(\frac{2}{3}\right) xp} \qquad (d)$$

Escrevendo $y = 2x/3p$, obtemos

$$\sigma = \frac{W^t}{Fpy} \qquad (14\text{-}1)$$

Isso completa o desenvolvimento da equação original de Lewis. O fator y é conhecido como *fator de forma de Lewis* e pode ser obtido a partir de um desenho do dente de engrenagem ou de computação digital.

Ao empregar essa equação, a maioria dos engenheiros prefere utilizar o passo diametral ao determinar as tensões. Isso é feito por meio da substituição de $P = \pi/p$ e $Y = \pi y$ na Equação (14-1), o que produz

$$\sigma = \frac{W^t P}{FY} \qquad (14\text{-}2)$$

em que

$$Y = \frac{2xP}{3} \qquad (14\text{-}3)$$

O uso dessa equação para determinar Y significa que somente a flexão do dente é considerada e que a compressão, causada pela componente radial de força, é desconsiderada. Valores de Y obtidos a partir de tal equação estão tabulados na Tabela 14-2.

O emprego da Equação (14-3) também implica supor que os dentes não compartem a carga e que a força máxima é exercida na ponta do dente. Todavia, já aprendemos que a razão de contato deve ser um pouco maior que a unidade – digamos, cerca de 1,5 –, para se conseguir um par de engrenagens de qualidade. Se, de fato, as engrenagens são cortadas com precisão suficiente, a condição de carga da ponta não é a pior, uma vez que um outro par de dentes estará em contato quando essa condição ocorrer. O exame dos dentes que se engrenam mostrará que as cargas mais altas ocorrerão próximas ao meio do dente. Portanto, a máxima tensão acontece provavelmente enquanto um único par de dentes está carregando toda a carga, em um ponto no qual um outro par de dentes está prestes a entrar em contato.

Efeitos Dinâmicos

Quando um par de engrenagens é movido a velocidades moderadas ou elevadas, e quando barulho é produzido, seguramente efeitos dinâmicos estão presentes. Um dos primeiros estudos a levar em conta o aumento na

Tabela 14-2 Valores do fator de forma de Lewis Y. (Esses valores correspondem a um ângulo de pressão normal de 20°, a dentes de profundidade completa e a um passo diametral unitário no plano de rotação)

Número de dentes	Y	Número de dentes	Y
12	0,245	28	0,353
13	0,261	30	0,359
14	0,277	34	0,371
15	0,290	38	0,384
16	0,296	43	0,397
17	0,303	50	0,409
18	0,309	60	0,422
19	0,314	75	0,435
20	0,322	100	0,447
21	0,328	150	0,460
22	0,331	300	0,472
24	0,337	400	0,480
26	0,346	Cremalheira	0,485

carga causado pela velocidade empregava engrenagens de mesmo tamanho, material e resistência. Várias dessas engrenagens eram ensaiadas à destruição, ao se engranzá-las e carregá-las à velocidade nula. As engrenagens restantes eram ensaiadas até a destruição, a várias velocidades de círculo primitivo. Por exemplo, se um par de engrenagens falhava a 500 lbf de força tangencial, quando parado, e a 250 lbf, quando à velocidade V_1, então um *fator de velocidade*, designado como Kv, igual a 2 era especificado para engrenagens na velocidade V_1. Assim, poder-se-ia assumir que um outro par, idêntico, de engrenagens rodando à velocidade de círculo primitivo V_1 tinha uma carga igual ao dobro da carga tangencial ou transmitida.

Observe que a definição do fator dinâmico K_v foi alterada. As normas ANSI/AGMA 2110-C95 e 2101-C95, da AGMA, contêm o seguinte aviso:

> O fator dinâmico K_v foi redefinido como sendo o recíproco daquele utilizado nas normas anteriores. Agora, ele resulta maior que 1,0; nas normas AGMA anteriores, era menor que 1,0.

Muito cuidado deve ser tomado ao nos referirmos a trabalho realizado anteriormente a essa mudança nas normas.

No século XIX, Carl G. Barth expressou, pela primeira vez, os fatores de velocidade, e, em termos das normas presentes da AGMA, eles são representados como

$$K_v = \frac{600 + V}{600} \qquad \text{(ferro fundido, perfil fundido)} \tag{14-4a}$$

$$K_v = \frac{1200 + V}{1200} \qquad \text{(perfil cortado ou fresado)} \tag{14-4b}$$

em que V é a velocidade, no círculo primitivo, em pés por minuto. Também é bastante provável, devido à época, que os ensaios tenham sido conduzidos em dentes com um perfil cicloidal, em vez do perfil evolvente. Os dentes cicloidais eram utilizados de forma generalizada no século XIX, pois eram mais fáceis de fundir do que aqueles com perfil evolvente. A Equação (14-4*a*) é conhecida como *equação de Barth*. Ela costuma ser modificada para a forma apresentada na Equação (14-4*b*), para dentes cortados ou fresados. Posteriormente, a AGMA adicionou

$$K_v = \frac{50 + \sqrt{V}}{50} \qquad \text{(perfil de fresa caracol ou moldado)} \tag{14-5a}$$

$$K_v = \sqrt{\frac{78 + \sqrt{V}}{78}} \qquad \text{(perfil rebarbado ou retificado)} \tag{14-5b}$$

Em unidades SI, as Equações (14-4*a*) e (14-5*b*) tornam-se

$$K_v = \frac{3{,}05 + V}{3{,}05} \qquad \text{(ferro fundido, perfil fundido)} \tag{14-6a}$$

$$K_v = \frac{6{,}1 + V}{6{,}1} \qquad \text{(perfil cortado ou fresado)} \tag{14-6b}$$

$$K_v = \frac{3{,}56 + \sqrt{V}}{3{,}56} \qquad \text{(perfil de fresa caracol ou moldado)} \tag{14-6c}$$

$$K_v = \sqrt{\frac{5{,}56 + \sqrt{V}}{5{,}56}} \qquad \text{(perfil rebarbado ou retificado)} \tag{14-6d}$$

em que V está em metros por segundo (m/s).

Introduzindo o fator de velocidade na Equação (14-2), obtemos

$$\sigma = \frac{K_v W^t P}{FY} \tag{14-7}$$

A versão métrica dessa equação é

$$\sigma = \frac{K_v W^t}{FmY} \tag{14-8}$$

na qual a largura de face F e o módulo m são expressos, ambos, em milímetros (mm). Ao se expressar a componente tangencial de carga W^t em newtons (N), obtêm-se tensões em unidades de megapascal (MPa).

Como regra geral, as engrenagens cilíndricas de dentes retos têm uma largura de face F entre 3 e 5 vezes o passo circular p.

As Equações (14-7) e (14-8) são importantes, haja vista formarem a base do procedimento AGMA para a resistência à flexão de dentes de engrenagens. Elas são de uso geral para estimar a capacidade de transmissões de engrenagens quando vida e confiabilidade não constituem considerações importantes. Tais equações podem ser úteis ao se obter uma estimativa preliminar de tamanhos de engrenagens necessários para várias aplicações.

EXEMPLO 14-1

Uma engrenagem cilíndrica de dentes retos disponível em estoque tem um passo diametral de 8 dentes/in, face de $1\frac{1}{2}$ in, 16 dentes e ângulo de pressão de 20°, com dentes de profundidade completa. O material utilizado é aço AISI 1020, na condição de saída da laminação. Utilize um fator de projeto $n_d = 3$ para computar a capacidade em potência na saída da coroa correspondente a uma velocidade de 1200 rpm e aplicações moderadas.

Solução

O termo *aplicações moderadas* parece implicar que a capacidade das engrenagens pode ser aferida utilizando-se a resistência ao escoamento como critério de falha. A partir da Tabela A-20, determinamos que $S_{ut} = 55$ kpsi e $S_y = 30$ kpsi. Um fator de projeto de 3 significa que a tensão de flexão admissível é 30/3 = 10 kpsi. O diâmetro primitivo é $N/P = 16/8 = 2$ in, de modo que a velocidade na linha primitiva é

$$V = \frac{\pi dn}{12} = \frac{\pi(2)1200}{12} = 628 \text{ ft/min}$$

O fator de velocidade, a partir da Equação (14-4*b*), deve ser

$$K_v = \frac{1200 + V}{1200} = \frac{1200 + 628}{1200} = 1{,}52$$

A Tabela 14-2 fornece o fator de forma como $Y = 0{,}296$ para 16 dentes. Arranjamos, agora, e substituímos os valores na Equação (14-7), como segue:

$$W^t = \frac{FY\sigma_{\text{all}}}{K_v P} = \frac{1{,}5(0{,}296)10\,000}{1{,}52(8)} = 365 \text{ lbf}$$

A potência que pode ser transmitida é

Resposta

$$hp = \frac{W^t V}{33\,000} = \frac{365(628)}{33\,000} = 6{,}95 \text{ hp}$$

É importante salientar que essa é uma estimativa grosseira e que tal procedimento não deve ser empregado em aplicações importantes. O exemplo tem por objetivo ajudá-lo a entender alguns dos fundamentos que estarão envolvidos no procedimento da AGMA.

EXEMPLO 14-2

Estime a capacidade em potência da coroa, no exemplo mencionado anteriormente, com base na obtenção de vida infinita sob flexão.

Solução

O limite de resistência à fadiga de uma viga rotativa é estimado a partir da Equação (7-8):

$$S'_e = 0{,}504S_{ut} = 0{,}504(55) = 27{,}7 \text{ kpsi}$$

A fim de obter o fator de acabamento superficial de Marin k_a, referimo-nos à Tabela 7-4 para superfície usinada, encontrando $a = 2{,}70$ e $b = -0{,}265$. Assim, a Equação (7-18) fornece ao fator de acabamento superficial de Marin k_a o valor

$$k_a = aS_{ut}^b = 2{,}70(55)^{-0{,}265} = 0{,}934$$

O próximo passo consiste em estimar o fator de tamanho k_b. A partir da Tabela 13-1, a soma de adendo e dedendo é

$$l = \frac{1}{P} + \frac{1{,}25}{P} = \frac{1}{8} + \frac{1{,}25}{8} = 0{,}281 \text{ in}$$

A espessura de dente t na Figura 14-1(b) é fornecida na Seção 14-1 [Equação (b)] como $t = (4lx)^{1/2}$, quando $x = 3Y(2P)$ a partir da Equação (14-3). Portanto, na medida em que $Y = 0{,}296$ e $P = 8$, a partir do Exemplo 14-1,

$$x = \frac{3Y}{2P} = \frac{3(0{,}296)}{2(8)} = 0{,}0555 \text{ in}$$

então

$$t = (4lx)^{1/2} = [4(0{,}281)0{,}0555]^{1/2} = 0{,}250 \text{ in}$$

Reconhecemos o dente como sendo uma viga em balanço de seção retangular, de modo que o diâmetro equivalente da viga rotativa deve ser obtido a partir da Equação (7-24):

$$d_e = 0{,}808(hb)^{1/2} = 0{,}808(Ft)^{1/2} = 0{,}808[1{,}5(0{,}250)]^{1/2} = 0{,}495 \text{ in}$$

Assim, a Equação (7-19) resulta em k_b como

$$k_b = \left(\frac{d_e}{0{,}30}\right)^{-0{,}107} = \left(\frac{0{,}495}{0{,}30}\right)^{-0{,}107} = 0{,}948$$

O fator de carga k_c da Equação (7-25) é unitário. Sem qualquer informação concernente à temperatura e à confiabilidade, estabeleceremos $k_d = k_e = 1$.

Dois efeitos são utilizados para avaliar o fator de Marin relativo a efeitos mistos. O primeiro deles se refere-se ao efeito da flexão unidirecional. Em geral, um dente de engrenagem é submetido apenas à flexão unidirecional. Exceções incluem engrenagens intermediárias e engrenagens utilizadas em mecanismos de reversão.

Para flexão unidirecional, as componentes de tensão fixa e alternante são $\sigma_a = \sigma_m = \sigma/2$, em que σ é a maior tensão de flexão aplicada de forma repetitiva, como dado na Equação (14-7). Se um material exibiu um *locus* de falha de Goodman,

$$\frac{S_a}{S'_e} + \frac{S_m}{S_{ut}} = 1$$

Uma vez que S_a e S_m são iguais para flexão unidirecional, substituímos S_a, em vez de S_m, e resolvemos a equação supracitada para S_a, obtendo, dessa forma,

$$S_a = \frac{S'_e S_{ut}}{S'_e + S_{ut}}$$

Agora substituímos, em vez de S_a, o valor $\sigma/2$ e, no denominador, substituímos S'_e por $0{,}504S_{ut}$, de modo a obter

$$\sigma = \frac{2S'_e S_{ut}}{0{,}504S_{ut} + S_{ut}} = \frac{2S'_e}{0{,}504 + 1} = 1{,}33S'_e$$

Assim, $k_f = \sigma/S'_e = 1{,}33S'_e/S'_e = 1{,}33$. Contudo, um *locus* de falha de Gerber produz valores médios tais que

$$\frac{S_a}{S'_e} + \left(\frac{S_m}{S_{ut}}\right)^2 = 1$$

Estabelecendo $S_a = S_m$ e solucionando a equação quadrática em S_a, obtemos

$$S_a = \frac{S_{ut}^2}{2S'_e}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4S'^2_e}{S_{ut}^2}}\right)$$

Estabelecendo $S_a = \sigma/2$, $S_{ut} = S'_e/0{,}504$ produz

$$\sigma = \frac{S'_e}{0{,}504^2}\left[-1 + \sqrt{1 + 4(0{,}504)^2}\right] = 1{,}65S'_e$$

e $k_e = \sigma/S'_e = 1{,}65$. Uma vez que o *locus* de falha de Gerber passa entre pontos provenientes de testes de fadiga, ao passo que o de Goodman não o faz, iremos utilizar $k_e = 1{,}65$.

O segundo efeito a ser levado em conta, ao se utilizar o fator de efeitos mistos de Marin k_f, refere-se à concentração de tensão, para a qual iremos fazer uso de nossos fundamentos do Capítulo 7. Para dentes de 20° com profundidade completa, o raio do filete de raiz é denotado por r_f, sendo

$$r_f = \frac{0{,}300}{P} = \frac{0{,}300}{8} = 0{,}0375 \text{ in}$$

A partir da Figura A-15-6,

$$\frac{r}{d} = \frac{r_f}{t} = \frac{0{,}0375}{0{,}250} = 0{,}15$$

Visto que $D/d = \infty$, usamos a aproximação proveniente do valor $D/d = 3$, resultando em $K_t = 1.68$. A partir da Equação (7-35) e da Tabela 7-8 para uma manga de eixo,

$$K_f = \frac{K_t}{1 + \dfrac{2}{\sqrt{r}}\dfrac{K_t - 1}{K_t}\sqrt{a}} = \frac{1{,}68}{1 + \dfrac{2}{\sqrt{0{,}0375}}\dfrac{1{,}68 - 1}{1{,}68}\dfrac{4}{55}} = 1{,}29$$

O fator de efeitos mistos de Marin correspondente à concentração de tensão pode ser expresso como

$$k_f = \frac{1}{K_f} = \frac{1}{1{,}29} = 0{,}775$$

O valor final de k_f é o produto das duas componentes de k_f, isto é, 1,65(0,775) = 1,28. A equação de Marin para a resistência à fadiga com todos os corretores é

$$\begin{aligned} S_e &= k_a k_b k_c k_d k_e k_f S'_e \\ &= 0{,}934(0{,}948)(1)(1)(1)1{,}28(27{,}7) = 31{,}4 \text{ kpsi} \end{aligned}$$

Para um fator de projeto $n_d = 3$, como o utilizado no Exemplo 14-1, aplicado à carga ou à resistência, a tensão de flexão admissível é

$$\sigma_{\text{all}} = \frac{S_e}{n_d} = \frac{31{,}4}{3} = 10{,}47 \text{ kpsi}$$

A carga transmitida W^t é

$$W^t = \frac{FY\sigma_{\text{all}}}{K_v P} = \frac{1{,}5(0{,}296)10\,470}{1{,}52(8)} = 382 \text{ lbf}$$

e a potência, com $V = 628$ ft/min a partir do Exemplo 14-1,

$$hp = \frac{W^t V}{33\,000} = \frac{382(628)}{33\,000} = 7{,}3 \text{ hp}$$

Novamente, deve ser salientado que esses resultados devem ser aceitos tão-somente como estimativas preliminares, como um alerta quanto à natureza da flexão nos dentes de engrenagem. Observe que a tensão admissível relativa à carga aplicada de forma repetitiva ($\sigma_{\text{all}} = 10\,470$ psi) é ligeiramente maior que a tensão admissível no Exemplo 14-1 ($\sigma_{\text{all}} = 10$ kpsi). Tal condição poderia ser corrigida utilizando-se um fator de projeto um pouco maior que três.

No Exemplo 14-2, nossos recursos (Figura A-15-6) não consideraram diretamente a concentração de tensão em dentes de engrenagens. Uma investigação fotoelástica de Dolan e Broghamer, reportada em 1942, constitui uma fonte primordial de informação concernente à concentração de tensões.[3] Mitchiner e Mabie[4] interpretam os resultados, em termos de fator de concentração de tensão sob fadiga K_f, como

$$K_f = H + \left(\frac{t}{r}\right)^L \left(\frac{t}{l}\right)^M \tag{14-9}$$

em que
$$H = 0{,}34 - 0{,}458\,366\,2\phi$$
$$L = 0{,}316 - 0{,}458\,366\,2\phi$$
$$M = 0{,}290 + 0{,}458\,366\,2\phi$$
$$r = \frac{(b - r_f)^2}{(d/2) + b - r_f}$$

Nessas equações, l e t são obtidas do desenho na Figura 14-1, ϕ é o ângulo de pressão, r_f é o raio de filete, b é o dedendo e d é o diâmetro primitivo. Como exercício, deixamos que o leitor compare K_f da Equação (14-9) com os resultados obtidos ao se utilizar a aproximação da Figura A-15-6 no Exemplo 14-2.

14-2 Durabilidade Superficial

Nesta seção, estaremos interessados na falha de superfícies de dentes de engrenagens, geralmente denominada *desgaste*. A *formação de cavidades*, como explicado na Seção 7-16, é uma falha de fadiga de superfície causada por muitas repetições de tensões elevadas de contato. Outras formas de falha superficial incluem o *escoriamento*, que se constitui em falha de lubrificação, e a *abrasão*, que corresponde ao desgaste decorrente da presença de material estranho.

Para obter uma expressão para a tensão de contato superficial, empregaremos a teoria de Hertz. Na Equação (3-78), foi mostrado que a tensão de contato entre dois cilindros pode ser computada a partir da equação:

$$p_{\max} = \frac{2F}{\pi b l} \tag{a}$$

em que: p_{max} = máxima pressão superficial
F = força comprimindo um cilindro contra o outro
l = comprimento dos cilindros

e a semilargura b é calculada a partir da Equação (4-77):

$$b = \left\{ \frac{2F}{\pi l} \frac{\left[\left(1 - \nu_1^2\right)/E_1\right] + \left[\left(1 - \nu_2^2\right)/E_2\right]}{(1/d_1) + (1/d_2)} \right\}^{1/2} \tag{14-10}$$

em que ν_1, ν_2, E_1 e E_2 são as constantes elásticas e d_1 e d_2 são os diâmetros, respectivamente, dos dois cilindros em contato.

A fim de adaptar essas relações à notação utilizada em engrenamento, podemos substituir F por $W^t/\cos\phi$, d por $2r$ e l pela largura de face F. Com tais modificações, podemos substituir o valor de b, como dado na Equação (14-10), na Equação (*a*). Substituindo p_{max} por σ_C, a *tensão superficial de compressão* (*tensão hertziana*) fica determinada pela equação

$$\sigma_C^2 = \frac{W^t}{\pi F \cos\phi} \frac{(1/r_1) + (1/r_2)}{\left[\left(1 - \nu_1^2\right)/E_1\right] + \left[\left(1 - \nu_2^2\right)/E_2\right]} \tag{14-11}$$

em que r_1 e r_2 são os valores instantâneos dos raios de curvatura nos perfis de dente do pinhão e da coroa, respectivamente, no ponto de contato. Levando em conta a partilha de carga no valor utilizado de W^t, a Equação (14-11) pode ser solucionada para a tensão hertziana em qualquer ponto em particular, ou mesmo para todos,

[3] T. J. Dolan e E. I. Broghamer, *A Photoelastic Study of the Stresses in Gear Tooth Fillets*, Bulletin 335, Univ. Ill. Exp. Sta., março de 1942. Ver também R. E. Peterson, *Stress Concentration Factors*, Wiley, New York, 1974, p. 250, 251.

[4] R. G. Mitchiner e H. H. Mabie, "Determination of the Lewis Form Factor and the AGMA Geometry Factor J of External Spur Gear Teeth", *J. Mech. Des.*, vol. 104, nº 1, janeiro de 1982, p. 148-158.

desde o começo até o final do contato entre os dentes. Logicamente, o rolamento puro existe somente no ponto primitivo. Em qualquer outro lugar, o movimento é uma mistura de rolamento e deslizamento. A Equação (14-11) não leva em consideração qualquer ação decorrente do deslizamento sobre o valor da tensão.

Observamos também que a AGMA utiliza μ para a razão de Poisson, em vez de ν, empregado aqui.

Já mencionamos anteriormente que a primeira evidência de desgaste ocorre perto da linha primitiva. Os raios de curvatura dos perfis de dente no ponto primitivo são

$$r_1 = \frac{d_P \operatorname{sen}\phi}{2} \qquad r_2 = \frac{d_G \operatorname{sen}\phi}{2} \tag{14-12}$$

em que ϕ é o ângulo de pressão e d_P e d_G os diâmetros primitivos do pinhão e da coroa, respectivamente.

Observe, na Equação (14-11), que o denominador do segundo grupo de termos contém quatro constantes – duas para o pinhão e duas para a coroa. Como uma maneira simples de combinar e tabular resultados pertinentes a várias combinações de materiais de pinhão e coroa, a AGMA define um *coeficiente elástico* C_p por intermédio da equação

$$C_p = \left[\frac{1}{\pi \left(\dfrac{1-\nu_P^2}{E_P} + \dfrac{1-\nu_G^2}{E_G} \right)} \right]^{1/2} \tag{14-13}$$

Com essa simplificação e a adição do fator de velocidade K_v, a Equação (14-11) pode ser escrita como

$$\sigma_C = -C_p \left[\frac{K_v W^t}{F \cos\phi} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \right]^{1/2} \tag{14-14}$$

em que o sinal é negativo porque σ_C é uma tensão de compressão.

EXEMPLO 14-3

O pinhão dos Exemplos 14-1 e 14-2 deve ser engranzado com uma coroa de 50 dentes feita de ferro fundido ASTM nº 50. Utilizando uma carga tangencial de 382 lbf, estime o fator de segurança da engrenagem motora, com base na possibilidade de falha por fadiga.

Solução

A partir da Tabela A-5, encontramos as constantes elásticas para o pinhão e a coroa, $E_p = 30$ Mpsi, $\nu_P = 0{,}292$, $E_G = 14{,}5$ Mpsi, $V_G = 0{,}211$. Substituímos esses valores na Equação (14-13), para obter o coeficiente elástico na forma

$$C_p = \left\{ \frac{1}{\pi \left[\dfrac{1-(0{,}292)^2}{30(10^6)} + \dfrac{1-(0{,}211)^2}{14{,}5(10^6)} \right]} \right\}^{1/2} = 1817$$

A partir do Exemplo 14-1, o passo diametral do pinhão é $d_P = 2$ in. O valor correspondente para a coroa é $d_G = 50/8 = 6{,}25$ in. Em seguida, a Equação (14-12) é utilizada para obter os raios de curvatura nos pontos primitivos. Logo,

$$r_1 = \frac{2 \operatorname{sen} 20^\circ}{2} = 0{,}342 \text{ in} \qquad r_2 = \frac{6{,}25 \operatorname{sen} 20^\circ}{2} = 1{,}069 \text{ in}$$

A largura de face é dada por $F = 1{,}5$ in. Use $K_v = 1{,}52$ a partir do Exemplo 4-1. Substituindo esses valores na Equação (14-14), com $\phi = 20°$, temos a tensão de contato como

$$\sigma_C = -1817 \left[\frac{1{,}52(380)}{1{,}5 \cos 20^\circ} \left(\frac{1}{0{,}342} + \frac{1}{1{,}069} \right) \right]^{1/2} = -72\,400 \text{ psi}$$

O limite de resistência superficial para o ferro fundido pode ser estimado a partir de

$$S_C = 0{,}32H_B \text{ kpsi}$$

para 10^8ciclos, sendo S_C em kpsi. A Tabela A-24 fornece $H_B = 262$ para o ferro fundido ASTM nº 50. Portanto, $S_C = 0{,}32(262) = 83{,}8$ kpsi. A tensão de contato varia de forma não-linear com a carga transmitida [ver Equação (14-14)]. Se o fator de segurança é definido como a carga de perda de função dividida pela carga imposta, então a razão entre as cargas é a razão entre as tensões ao quadrado. Em outras palavras,

$$n = \frac{\text{carga de perda de função}}{\text{carga imposta}} = \frac{S_C^2}{\sigma_C^2} = \left(\frac{83{,}8}{72{,}4}\right)^2 = 1{,}34$$

A pessoa é livre para definir o fator de segurança como S_C/σ_C. Um fato capaz de causar estranheza provém da comparação do fator de segurança à fadiga sob flexão com o fator de segurança à fadiga superficial para uma engrenagem em particular. Suponha que o fator de segurança para essa engrenagem, sob condições de fadiga flexional, seja 1,20 e que o fator de segurança à fadiga superficial seja 1,34, como mencionado. O risco, uma vez que 1,34 é maior que 1,20, advém da fadiga flexional, uma vez que ambos os números são baseados em razão de cargas. Se o fator de segurança para fadiga superficial é baseado na razão $S_C/\sigma_C = \sqrt{1{,}34} = 1{,}16$, então 1,20 é maior que 1,16 – todavia, o perigo não é a fadiga superficial. O fator de segurança à fadiga superficial pode ser definido de uma forma ou outra. Uma forma requer o trabalho de quadrar o número antes de comparar números que parecem instintivamente comparáveis.

Além do fator dinâmico K_v, já introduzido, há excursões da carga transmitida, não-uniformidade de distribuição da carga transmitida durante o contato entre dentes e influência da espessura da borda sobre a tensão de contato. Os valores tabelados de resistência podem ser médios ou mínimos da ASTM ou de descendência desconhecida. Em se tratando de fadiga superficial, não há limites de resistência. Estes têm de ser qualificados como correspondentes a uma contagem de ciclos, e a inclinação da curva *S-N* necessita ser conhecida. Em fadiga por flexão, há uma mudança definida na inclinação da curva *S-N* próxima aos 10^6 ciclos; entretanto, algumas evidências indicam que um limite de resistência não existe. Experiências com engrenagens levam a contagens de ciclos de 10^{11} ou mais. Evidências relativas à diminuição dos limites de resistência em flexão foram incluídas na metodologia da AGMA.

14-3 Equações de Tensão AGMA

Duas equações fundamentais de tensão são utilizadas na metodologia AGMA – uma para flexão e outra para resistência à formação de cavidades (tensão de contato). Na terminologia da AGMA, elas são conhecidas como *números de tensão* e são designadas pela letra minúscula *s*, em vez da letra minúscula grega σ, que utilizamos neste livro (e que continuaremos utilizando). As equações fundamentais são

$$\sigma = \begin{cases} W^t K_o K_v K_s \dfrac{P_d}{F} \dfrac{K_m K_B}{J} & \text{unidades habituais nos Estados Unidos} \\ W^t K_o K_v K_s \dfrac{1}{bm_t} \dfrac{K_H K_B}{Y_J} & \text{unidades SI} \end{cases} \tag{14-15}$$

em que, para as unidades utilizadas nos Estados Unidos (unidades SI),

W^t é a carga tangencial transmitida, lbf (N)
K_o é o fator de sobrecarga
K_v é o fator dinâmico
K_s é o fator de tamanho
P_d é o passo diametral transversal
$F(b)$ é a largura de face do membro mais estreito, in (mm)
K_m (K_H) é o fator de distribuição de carga
K_B é o fator de espessura de borda
J (Y_J) é o fator geométrico para resistência à flexão (que inclui o fator de concentração de tensão de raiz de filete K_f)

Antes de tentar assimilar o significado de todos esses termos na Equação (14-15), tome o seguinte como conselho da AGMA, no que concerne a itens que o projetista deve considerar – *quer siga a norma de forma voluntária ou não*. Tais itens incluem assuntos como

- Magnitude da carga transmitida
- Sobrecarga
- Aumento dinâmico da carga transmitida
- Tamanho
- Geometria: passo e largura de face
- Distribuição de carga ao longo do dente
- Suporte da borda do dente
- Fator de forma de Lewis e concentração de tensão da raiz do filete

A equação fundamental para a resistência à formação de cavidades (tensão de contato) é

$$\sigma_c = \begin{cases} C_p\sqrt{W^t K_o K_v K_s \dfrac{K_m}{d_P F}\dfrac{C_f}{I}} & \text{(unidades habituais nos Estados Unidos)} \\ Z_E\sqrt{W^t K_o K_v K_s \dfrac{K_H}{d_{w1} b}\dfrac{Z_R}{Z_I}} & \text{(unidades SI)} \end{cases} \tag{14-16}$$

em que W^t, K_o, K_v, K_s, K_m, F e b são os mesmos termos definidos para a Equação (14-15). Para as unidades usadas nos Estados Unidos (unidades SI), os termos adicionais são

C_p (Z_E) é um coeficiente elástico, $\sqrt{\text{lbf/in}^2}$ ($\sqrt{\text{N/mm}^2}$)
C_f (Z_R) é o fator de condição superficial
d_p ($d_{\omega 1}$) é o diâmetro primitivo do *pinhão*, in (mm)
I (Z_I) é o fator geométrico para a resistência à formação de cavidades

A avaliação de todos esses fatores será explicada nas próximas seções. O desenvolvimento da Equação (14-16) será esclarecido na segunda parte da Seção 14-5.

14-4 Equações de Resistência AGMA

Em vez de fazer uso do termo *resistência*, a AGMA utiliza dados denominados *números de tensão admissível* e os designa por S_a. Será menos confuso, aqui, se permanecermos com a prática empregada neste livro de utilizar letras maiúsculas S, para identificar resistência, e letras minúsculas gregas σ e τ, para indicar tensão. Tendo em vista a clareza, empregaremos o termo *resistência AGMA* como um substituto para *números de tensão admissível*, como utilizado pela AGMA.

Seguindo essa convenção, os valores para a *resistência à flexão AGMA*, designados aqui como S_t, são encontrados nas Figuras 14-2 a 14-4, bem como nas Tabelas 14-3 e 14-4. Na medida em que as resistências AGMA não são identificadas com outras resistências, tais como S_{ut}, S_e ou S_y, como o são em outras partes do livro, seu emprego deve ser restrito a problemas de engrenagens.

No procedimento AGMA, as resistências são modificadas por vários fatores que produzem valores-limite da tensão de flexão e da tensão de contato. Utilizando uma notação similar àquela empregada na Equação (1-6), chamaremos as modificações resultantes de tensão admissível de flexão σ_{all} e tensão admissível de contato $\sigma_{c\,all}$. A equação para a tensão admissível de flexão é

$$\sigma_{all} = \begin{cases} \dfrac{S_t}{S_F}\dfrac{Y_N}{K_T K_R} & \text{(unidades habituais nos Estados Unidos)} \\ \dfrac{\sigma_{FP}}{S_F}\dfrac{Y_N}{Y_\theta Y_Z} & \text{(unidades SI)} \end{cases} \tag{14-17}$$

em que, para as unidades utilizadas nos Estados Unidos (unidades SI),

S_t (σ_{FP}) são tensões admissíveis de flexão, lbf/in^2 (N/mm^2)
Y_N é o fator de ciclagem de tensão para tensão de flexão
K_T (Y_θ) são fatores de temperatura
K_R (Y_Z) são fatores de confiabilidade
S_F é o fator AGMA de segurança, uma razão de tensão

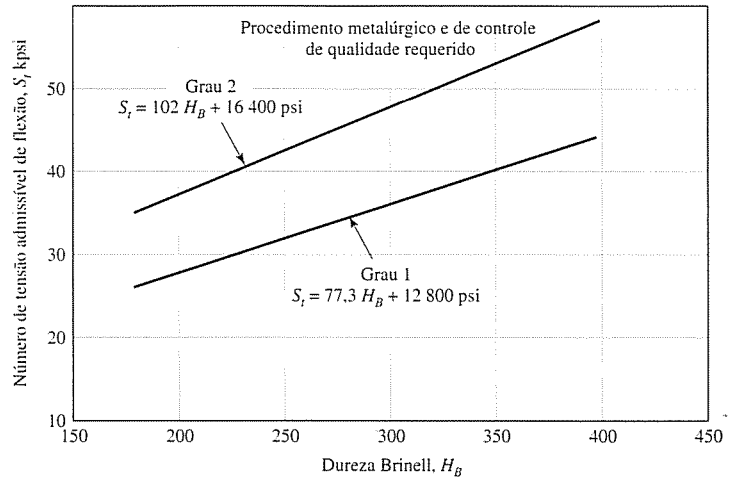


Figura 14-2 Número de tensão admissível de flexão para aços endurecidos por completo. As equações SI são $\sigma_{FP} = 0{,}533H_B + 88{,}3$ MPa, grau 1, e $\sigma_{FP} = 0{,}703H_B + 113$ MPa, grau 2. *(Fonte: ANSI/AGMA 2001-C95 e 2101-C95.)*

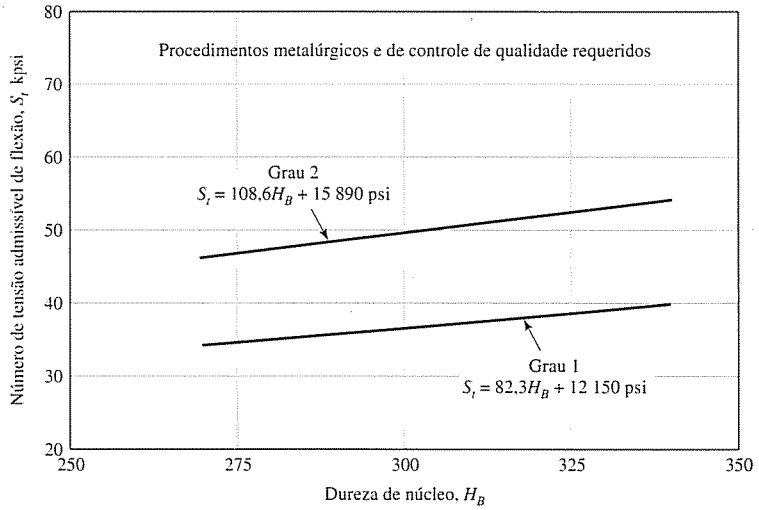


Figura 14-3 Número de tensão admissível de flexão para engrenagens de aço endurecidas completamente por nitretação (isto é, AISI 4140, 4340), S_t. As equações SI são $\sigma_{FP} = 0{,}568H_B + 83{,}8$ MPa, grau 1, e $\sigma_{FP} = 0{,}749H_B + 110$ MPa, grau 2. *(Fonte: ANSI/AGMA 2001-C95 e 2101-C95.)*

A equação para a tensão admissível de contato $\sigma_{c,all}$ é

$$\sigma_{c,\text{all}} = \begin{cases} \dfrac{S_c}{S_H}\dfrac{Z_N C_H}{K_T K_R} & \text{unidades habituais nos Estados Unidos} \\ \dfrac{\sigma_{HP}}{S_H}\dfrac{Z_N Z_W}{Y_\theta Y_Z} & \text{unidades SI} \end{cases} \tag{14-18}$$

Ademais,

S_c (σ_{HP}) são as tensões admissíveis de contato, lbf/in^2 (N/mm^2)
Z_N é o fator de vida da ciclagem de tensão
C_H (Z_W) são os fatores de razão de dureza para a resistência à formação de cavidades

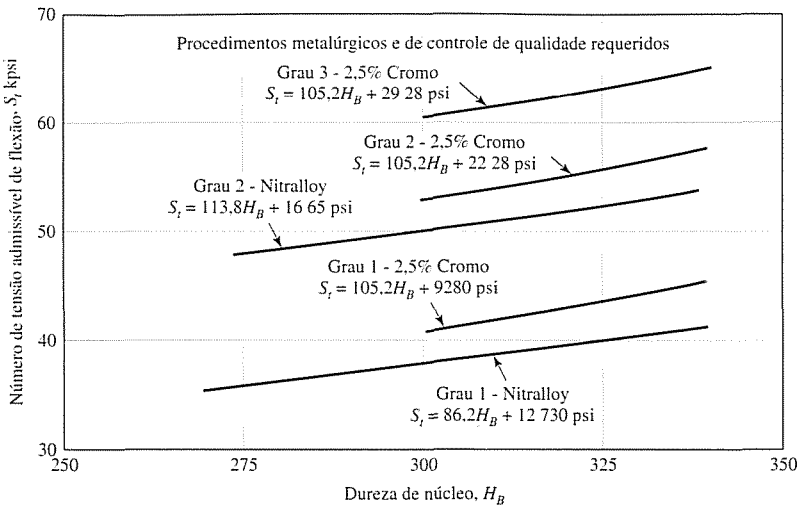


Figura 14-4 Números de tensão admissível de flexão para engrenagens de aço nitretado, S_t. As equações SI são: $\sigma_{FP} = 0{,}594H_B + 87{,}76$ MPa, Nitralloy grau 1, $\sigma_{FP} = 0784H_B + 114{,}81$ MPa, Nitralloy grau 2, $\sigma_{FP} = 0{,}7255H_B + 63{,}89$ MPa, 2,5% de cromo, grau 1, $\sigma_{FP} = 0{,}7255H_B + 153{,}63$ MPa, 2,5% de cromo, grau 2, $\sigma_{FP} = 0{,}7255H_B + 201{,}91$ MPa, 2,5% de cromo, grau 3. *(Fonte: ANSI/AGMA 2001-C95, 2101-C95.)*

Tabela 14-3 Resistência à flexão correspondente a 10^7 ciclos de carga aplicada de forma repetitiva S_t, com confiabilidade de 0,99 para engrenagens de aço

Designação do material	Tratamento térmico	Dureza superficial mínima	Número da tensão admissível de flexão S_t[2] psi		
			Grau 1	Grau 2	Grau 3
Aço[3]	Endurecido por completo	Ver Figura 14-2	Ver Figura 14-2	Ver Figura 14-2	—
	Endurecido[4] por chama[4] ou indução com padrão[5] tipo A	Ver Tabela 8*	45 000	55 000	—
	Endurecido[4] por chama[4] ou indução com padrão[5] tipo B	Ver Tabela 8*	22 000	22 000	—
	Carbonetado e endurecido	Ver Tabela 9*	55 000	65 000 ou 70 000[6]	75 000
	Nitretado[4,7] (aços endurecidos por completo)	83,5 HR15N	Ver Figura 14-3	Ver Figura 14-3	—
Nitralloy 135M, Nitralloy N, e 2,5% de cromo (sem alumínio)	Nitretado[4,7]	87,5 HR15N	Ver Figura 14-4	Ver Figura 14-4	Ver Figura 14-4

Notas: Ver a ANSI/AGMA 2001-C95 para as referências citadas nas notas 1 a 7.
[1] A dureza deve ser equivalente à do diâmetro de raiz no centro do espaçamento entre os dentes e a largura de face.
[2] Ver Tabelas 7 a 10 para fatores metalúrgicos principais para cada grau de tensão de engrenagens de aço.
[3] O aço selecionado deve ser compatível com o processo selecionado de tratamento térmico e dureza requerida.
[4] Os números de tensão admissíveis indicados podem ser utilizados com as profundidades prescritas em 16.1.
[5] Ver Figura 12 para os padrões de dureza tipo A e B.
[6] Se a bainita e as microfissuras estiverem limitadas a níveis de grau 3, 70.000 psi podem ser utilizados.
[7] A capacidade de sobrecarga de engrenagens nitretadas é pequena. Uma vez que a forma da curva efetiva *S-N* é chata, a sensibilidade a choques deve ser investigada antes de se dar prosseguimento ao projeto.[7]
* As Tabelas 8 e 9 da ANSI/AGMA 2001-C95 são tabulações claras dos fatores metalúrgicos principais a afetar S_t e S_c de engrenagens de aço endurecidas por chama e indução (Tabela 8), carbonetadas e endurecidas (Tabela 9).

Tabela 14-4 Resistência de flexão correspondente a 10^7 ciclos de carga aplicada de forma repetida S_t, com 0,99 de confiabilidade para engrenagens de ferro e bronze

Material	Designação do material	Tratamento térmico	Dureza superficial mínima típica	Valor da tensão admissível de flexão, S_t,[3] psi
Ferro fundido cinza ASTM A48	Classe 20	Como fundido	—	5000
	Classe 30	Como fundido	174 HB	8500
	Classe 40	Como fundido	201 HB	13 000
Ferro dúctil (nodular) ASTM A536	Grau 60-40-18	Recozido	140 HB	22 000-33 000
	Grau 80-55-06	Temperado e revenido	179 HB	22 000-33 000
	Grau 100-70-03	Temperado e revenido	229 HB	27 000-40 000
	Grau 120-90-02	Temperado e revenido	269 HB	31 000-44 000
Bronze		Fundido em areia	Resistência mínima à tração 40 000 psi	5700
	ASTM B-148 Liga 954	Tratado termicamente	Resistência mínima à tração 90 000 psi	23 600

Notas:
[1] Ver ANSI/AGMA 2004-B89, *Gear Materials and Heat Treatment Manual*.
[2] A dureza medida deve ser equivalente à que seria medida no diâmetro de raiz, no centro do espaçamento entre os dentes e a largura de face.
[3] Os valores menores devem ser utilizados para propósitos gerais de projeto. Os valores maiores podem ser utilizados quando:
Material de alta qualidade é usado.
O tamanho da seção e o projeto permitem máxima resposta ao tratamento térmico.
Controle de qualidade apropriado é efetuado por meio de inspeção adequada.
A experiência de operação justifica os seus usos.

K_T (Y_θ) são os fatores de temperatura
K_R (Y_Z) são os fatores de confiabilidade
S_H é o fator AGMA de segurança, uma razão de tensão

Os valores da tensão AGMA admissível de contato, aqui designados como S_c, devem ser encontrados na Figura 14-5 e nas Tabelas 14-5 a 14-7.

Os números de tensão admissível AGMA (resistências) para a tensão de contato e flexão destinam-se a

- Carregamento unidimensional
- 10 milhões de ciclos de tensão
- 99% de confiabilidade

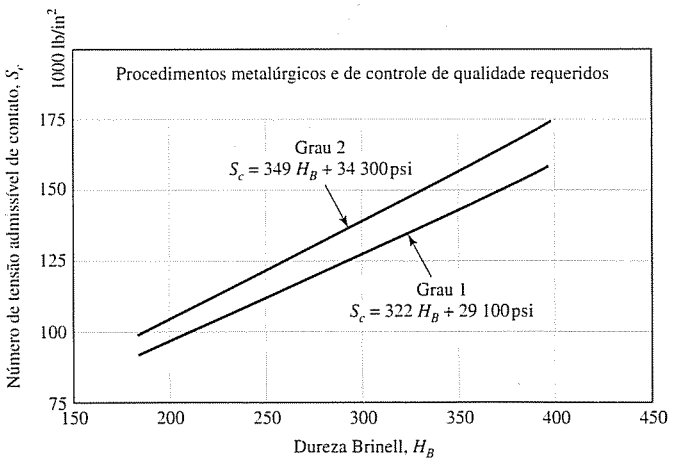


Figura 14-5 Resistência à fadiga de contato S_c a 10^7 ciclos e a 0,99 de confiabilidade para engrenagens de aço endurecidas por completo. As equações SI são $\sigma_{HP} = 2{,}22H_B + 200$ MPa, grau 1, e $\sigma_{HP} = 2{,}41H_B + 237$ MPa, grau 2. *(Fonte: ANSI/AGMA 2001-C95 e 2101-C95.)*

Tabela 14-5 Temperatura nominal utilizada na nitretação e nas durezas obtidas

Aço	Temperatura antes da nitretação, °F	Nitretação °F	Dureza, Escala Rockwell C	
			Superfície	Núcleo
Nitralloy 135*	1150	975	62-65	30-35
Nitralloy 135M	1150	975	62-65	32-36
Nitralloy N	1000	975	62-65	40-44
AISI 4340	1100	975	48-53	27-35
AISI 4140	1100	975	49-54	27-35
31 Cr Mo V 9	1100	975	58-62	27-33

Fonte: Darle W. Dudley, *Handbook of Practical Gear Design*. Edição revisada, McGraw-Hill, New York, 1984.
* Nitralloy é uma marca pertencente à Nitralloy Corp., New York.

Tabela 14-6 Resistência de contato correspondente a 10^7 ciclos de carga aplicada de forma repetitiva S_c, com 0,99 de confiabilidade para engrenagens de aço

Designação do material	Tratamento térmico	Dureza superficial mínima[1]	Número da tensão admissível de contato,[2] S_c, psi		
			Grau 1	Grau 2	Grau 3
Aço[3]	Endurecido[4] por completo	Ver Figura 14-5	Ver Figura 14-5	Ver Figura 14-5	—
	Endurecido[5] por chama[5] ou indução	50 HRC 54 HRC	170 000 175 000	190 000 195 000	— —
	Carbonetado e endurecido[5]	Ver Tabela 9*	180 000	225 000	275 000
	Nitretado[5] (aços endurecidos por completo)	83,5 HR15N 84,5 HR15N	150 000 155 000	163 000 168 000	175 000 180 000
2,5% de cromo (sem alumínio)	Nitretado[5]	87,5 HR15N	155 000	172 000	189 000
Nitralloy 135M	Nitretado[5]	90,0 HR15N	170 000	183 000	195 000
Nitralloy N	Nitretado[5]	90,0 HR15N	172 000	188 000	205 000
2,5% de cromo (sem alumínio)	Nitretado[5]	90,0 HR15N	176 000	196 000	216 000

Notas: Ver ANSI/AGMA 2001-C95 para as referências citadas nas notas 1 a 5.
[1] A dureza deve ser equivalente à de começo do perfil ativo no centro da largura de face.
[2] Ver Tabelas 7 a 10 para fatores metalúrgicos principais para cada grau de tensão de engrenagens de aço.
[3] O aço selecionado deve ser compatível com o processo selecionado de tratamento térmico e com a dureza requerida.
[4] Esses materiais devem ser recozidos ou normalizados no mínimo.
[5] Os números de tensão admissível indicados podem ser utilizados com profundidades de camada prescritas em 16,1.
* A Tabela 9 da ANSI/AGMA 2001-C95 é uma tabulação clara dos principais fatores metalúrgicos afetando S_t e S_c de engrenagens de aço endurecidas e carbonetadas.

Os fatores desta seção serão também avaliados nas seções subseqüentes.

Quando um carregamento bidirecional (inverso) ocorre, tal como com engrenagens intermediárias, a AGMA recomenda que se utilizem 70% dos valores S_t. Isso equivale a 1/0,70 = 1,43, como um valor de k_e no Exemplo 14-2. A recomendação recai entre um valor de k_e = 1,33, para um *locus* de falha de Goodman, e um outro valor de k_e = 1,65, para um *locus* de falha de Gerber.

14-5 Fatores Geométricos *I* e *J* (Z_I e Y_J)

Vimos como o fator Y é utilizado na equação de Lewis para introduzir o efeito da forma de dente na equação de tensão. Os fatores AGMA[5] I e J pretendem atingir o mesmo propósito de uma forma mais elaborada.

A determinação de I e J depende da *razão de contato de face* m_F. Esse termo é definido como

[5] Uma referência útil é a AGMA 908-B89, *Geometry Factors for Determining Pitting Resistance and Bending Strength of Spur, Helical and Herringbone Gear Teeth*.

Tabela 14-7 Resistência de contato correspondente a 10^7 ciclos de carga aplicada de forma repetitiva S_c, com 0,99 de confiabilidade para engrenagens de ferro e bronze

Material	Designação do material[1]	Tratamento térmico	Dureza superficial mínima típica	Valor da tensão de contato admissível,[3] S_c, psi
Ferro fundido cinza ASTM A48	Classe 20	Como fundido	—	50 000-60 000
	Classe 30	Como fundido	174 HB	65 000-75 000
	Classe 40	Como fundido	201 HB	75 000-85 000
Ferro dúctil (nodular) ASTM A536	Grau 60-40-18	Recozido	140 HB	77 000-92 000
	Grau 80-55-06	Temperado e revenido	179 HB	77 000-92 000
	Grau 100-70-03	Temperado e revenido	229 HB	92 000-112 000
	Grau 120-90-02	Temperado e revenido	269 HB	103 000-126 000
Bronze	—	Fundido em areia	Resistência mínima à tração 40 000 psi	30 000
	ASTM B-148 Liga 954	Tratado termicamente	Resistência mínima à tração 90 000 psi	65 000

Fonte: ANSI/AGMA 2001-C95.
Notas:
[1] Ver ANSI/AGMA 2004-B89, *Gear Materials and Heat Treatment Manual*.
[2] A dureza deve ser equivalente à de começo do perfil ativo no centro da largura de face.
[3] Os valores menores devem ser utilizados para propósitos gerais de projeto. Os valores maiores devem ser utilizados quando:
Material de alta qualidade é usado.
O tamanho da seção e o projeto permitem resposta máxima ao tratamento térmico.
O controle de qualidade apropriado é efetuado por meio de inspeção adequada.
A experiência de operação justifica seus usos.

$$m_F = \frac{F}{p_x} \tag{14-19}$$

em que p_x é o passo axial e F é a largura de face. Para engrenagens cilíndricas de dentes retos, $m_F = 0$.

As engrenagens helicoidais de *baixa razão de contato* (LCR), com um ângulo de hélice pequeno ou uma largura esbelta de face, ou ambos, têm razões de contato de face menores que a unidade ($m_F \leq 1$) e, portanto, não serão aqui consideradas. Tais engrenagens têm um nível de ruído não muito diferente daquele de engrenagens cilíndricas de dentes retos. Conseqüentemente, consideraremos aqui somente engrenagens cilíndricas de dentes retos com $m_F = 0$ e engrenagens helicoidais convencionais com $m_F > 1$.

Fator Geométrico da Resistência à Flexão J (Y_J)

O fator J da AGMA emprega um valor modificado do fator de forma de Lewis, também denotado por Y, um *fator de concentração de tensão de fadiga* K_f e uma *razão de partilha de carga* de dente m_N. A equação resultante para J é

$$J = \frac{Y}{K_f m_N} \tag{14-20}$$

É importante observar que o fator de forma Y na Equação (14-20) *não* é, de forma alguma, o fator de Lewis. O valor de Y é aqui obtido a partir de um gabarito construído do perfil de dente no plano normal e baseia-se no ponto mais alto de contato de dente único.

O fator K_f, na Equação (14-20), é denominado pela AGMA *fator de correção de tensão*. Baseia-se em uma fórmula deduzida a partir de uma investigação fotoelástica de concentração de tensão em dentes de engrenagens – investigação essa conduzida há mais de 50 anos.

O fator de razão de partilha de carga m_N é igual à largura de face dividida pelo comprimento total mínimo das linhas de contato. Esse fator depende da razão de contato transversal m_P, da razão de contato de face m_F, de efeitos de quaisquer modificações de perfil e da deflexão de dente. Para engrenagens cilíndricas

de dentes retos, $m_N = 1{,}0$. Para engrenagens helicoidais com uma razão de contato de face $m_F > 2{,}0$, uma aproximação conservadora é dada pela equação

$$m_N = \frac{p_N}{0{,}95Z} \tag{14-21}$$

em que p_N é o passo normal da base e Z é o comprimento da linha de ação no plano transversal (distância L_{ab} na Figura 13-15).

Utilize a Figura 14-6 para obter o fator geométrico J para engrenagens cilíndricas de dentes retos com um ângulo de pressão de 20° e dentes de altura completa. Utilize as Figuras 14-7 e 14-8 para engrenagens helicoidais com um ângulo de pressão normal de 20° e razões de contato de face com $m_F = 2$ ou superiores. Para outras engrenagens, consulte a norma AGMA.

Fator Geométrico da Resistência Superficial I (Z_I)

O fator I é também denominado pela AGMA *fator geométrico de resistência à formação de cavidades*. Iniciamos por observar que a soma dos recíprocos da Equação (14-14), a partir da Equação (14-12), pode ser expressa como

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{2}{\operatorname{sen}\phi_t}\left(\frac{1}{d_P} + \frac{1}{d_G}\right) \tag{a}$$

em que substituímos ϕ por ϕ_t, o ângulo de pressão transversal, de modo que a relação também se aplicará a engrenagens helicoidais. Definamos, agora, a *razão de velocidades* m_G como

$$m_G = \frac{N_G}{N_P} = \frac{d_G}{d_P} \tag{14-22}$$

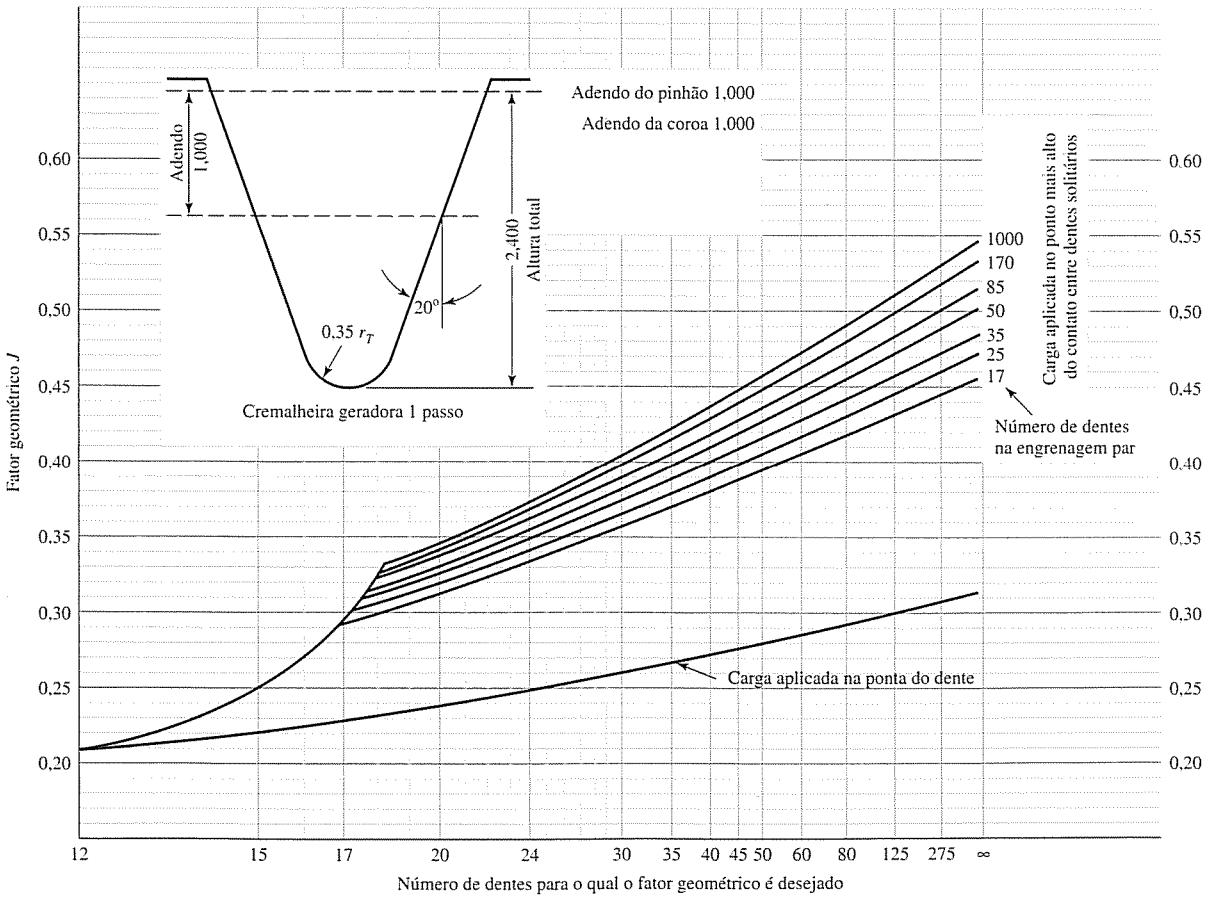
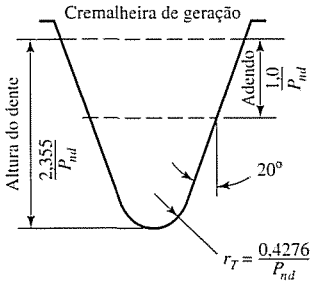


Figura 14-6 Fatores geométricos J de engrenagens cilíndricas de dentes retos. *(Fonte: ANSI/AGMA 218.01.)*

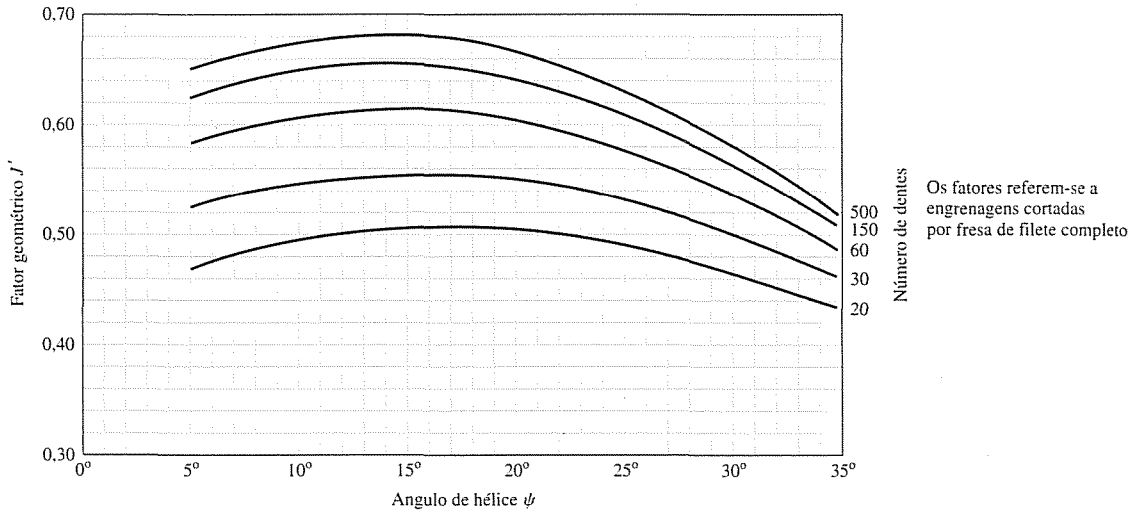


(*a*)

$$m_N = \frac{p_N}{0,95Z}$$

O valor de Z refere-se a um elemento com o número indicado de dentes e a um par de 75 dentes.

Espessura normal dos dentes do pinhão e da coroa reduzida de 0,024 in para proporcionar 0,048 in de folga total para um passo diametral normal



(*b*)

Figura 14-7 Fatores geométricos *J'* para engrenagens helicoidais. *(ANSI/AGMA 218.01.)*

O fator modificador pode ser aplicado ao fator *J* quando outro número de dentes que não 75 é utilizado na engrenagem par

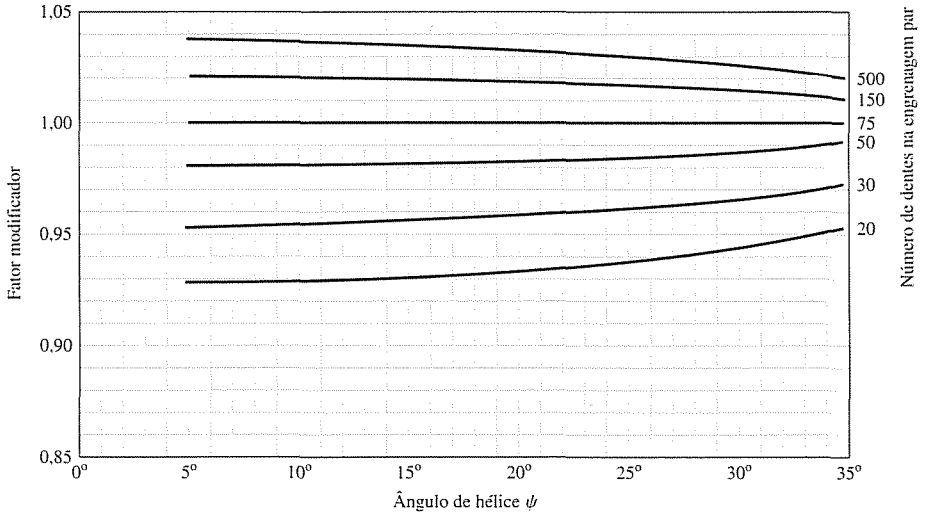


Figura 14-8 Multiplicadores de fatores *J'* para uso com a Figura 14-7 na determinação de *J*. *(ANSI/AGMA 218.01.)*

A Equação (*a*) pode agora ser escrita como

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{2}{d_P \operatorname{sen}\phi_t} \frac{m_G + 1}{m_G} \tag{b}$$

Substituímos, agora, a Equação (*b*) para a soma dos recíprocos na Equação (14-14). O resultado encontrado é

$$\sigma_c = -\sigma_C = C_p \left[\frac{K_V W^t}{d_P F} \frac{1}{\dfrac{\cos\phi_t \operatorname{sen}\phi_t}{2} \dfrac{m_G}{m_G + 1}} \right]^{1/2} \tag{c}$$

O fator geométrico I para engrenagens externas, quer sejam cilíndricas de dentes retos ou então helicoidais, é o denominador do segundo termo nos colchetes da Equação (*c*). Adicionando a razão de partilha de carga m_N, obtemos um fator válido para ambas – engrenagens cilíndricas de dentes retos e engrenagens helicoidais. A equação é então escrita como

$$I = \begin{cases} \dfrac{\cos\phi_t \operatorname{sen}\phi_t}{2m_N} \dfrac{m_G}{m_G + 1} & \text{engrenagens externas} \\ \dfrac{\cos\phi_t \operatorname{sen}\phi_t}{2m_N} \dfrac{m_G}{m_G - 1} & \text{engrenagens internas} \end{cases} \tag{14-23}$$

em que $m_N = 1$ para engrenagens cilíndricas de dentes retos. Ao solucionar a Equação (14-21) para m_N, observe que

$$p_N = p_n \cos\phi_n \tag{14-24}$$

em que p_n é o passo circular normal. Se um gabarito das engrenagens não é construído, a quantidade Z, para uso na Equação (14-21), pode ser calculada a partir da equação

$$Z = \left[(r_P + a)^2 - r_{bP}^2\right]^{1/2} + \left[(r_G + a)^2 - r_{bG}^2\right]^{1/2} - (r_P + r_G)\operatorname{sen}\phi_t \tag{14-25}$$

em que r_P e r_G são os raios primitivos e r_{bP} e r_{bG}, os raios dos círculos de base do pinhão e da coroa, respectivamente.[6] Lembre-se, a partir da Equação (13-6), de que o raio do círculo de base vale

$$r_b = r\cos\phi_t \tag{14-26}$$

Certas precauções podem ser tomadas ao se utilizar a Equação (14-25). Os perfis de dente não são conjugados abaixo do círculo de base; conseqüentemente, se qualquer um dos dois primeiros termos nos colchetes for maior que o terceiro termo, então deverá ser trocado por ele. Ademais, o raio externo efetivo é algumas vezes menor que $r + a$ – a causa da remoção de rebarbas ou do arredondamento das extremidades dos dentes. Quando esse for o caso, sempre utilize o raio externo efetivo, em vez de $r + a$.

14-6 Coeficiente Elástico C_p (Z_E)

Os valores de C_p podem ser computados diretamente da Equação (14-13), ou obtidos da Tabela 14-8.

14-7 Fator Dinâmico K_v

Como observado anteriormente, os fatores dinâmicos são utilizados para levar em conta imprecisões na manufatura e no engranzamento de dentes de engrenagem em ação. O *erro de transmissão* é definido como o desvio da condição de velocidade angular uniforme do par de engrenagens. Alguns dos efeitos que produzem tal erro são os seguintes:

- Imprecisões durante a geração do perfil de dente; entre elas incluem-se os erros no espaçamento de dente, o avanço de perfil e o percurso de saída.
- Vibração do dente durante o engranzamento, devido à rigidez do mesmo.
- Magnitude da velocidade no círculo primitivo.

[6] Para obter o desenvolvimento, ver Joseph E. Shigley e John J. Uicker Jr., *Theory of Machines and Mechanisms*. McGraw-Hill, New York, 1980, p. 262.

Tabela 14-8 Coeficiente elástico C_p (Z_E), $\sqrt{psi}$ ($\sqrt{MPa}$)

Material do pinhão	Módulo de elasticidade do pinhão E_p psi (MPa)*	Material da coroa e módulo de elasticidade E_G, lbf/in² (MPa)*					
		Aço 30×10^6 (2×10^5)	Ferro maleável 25×10^6 $(1{,}7 \times 10^5)$	Ferro nodular 24×10^6 $(1{,}7 \times 10^5)$	Ferro fundido 22×10^6 $(1{,}5 \times 10^5)$	Alumínio-bronze $17{,}5 \times 10^6$ $(1{,}2 \times 10^5)$	Estanho-bronze 16×10^6 $(1{,}1 \times 10^5)$
Aço	30×10^6 (2×10^5)	2300 (191)	2180 (181)	2160 (179)	2100 (174)	1950 (162)	1900 (158)
Ferro maleável	25×10^6 $(1{,}7 \times 10^5)$	2180 (181)	2090 (174)	2070 (172)	2020 (168)	1900 (158)	1850 (154)
Ferro nodular	24×10^6 $(1{,}7 \times 10^5)$	2160 (179)	2070 (172)	2050 (170)	2000 (166)	1880 (156)	1830 (152)
Ferro fundido	22×10^6 $(1{,}5 \times 10^5)$	2100 (174)	2020 (168)	2000 (166)	1960 (163)	1850 (154)	1800 (149)
Alumínio-bronze	$17{,}5 \times 10^6$ $(1{,}2 \times 10^5)$	1950 (162)	1900 (158)	1880 (156)	1850 (154)	1750 (145)	1700 (141)
Estanho-bronze	16×10^6 $(1{,}1 \times 10^5)$	1900 (158)	1850 (154)	1830 (152)	1800 (149)	1700 (141)	1650 (137)

Fonte: AGMA 218.01
Razão de Poisson = 0,30
* Quando valores mais exatos do módulo de elasticidade são obtidos a partir de testes de contato de rolos, eles podem ser utilizados.

- Desbalanceamento dinâmico dos membros rotativos.
- Desgaste e deformação permanente das porções em contato dos dentes.
- Desalinhamento do eixo de engrenagens e deflexão linear e angular do eixo.
- Fricção entre os dentes.

Em uma tentativa de obter algum controle sobre tais efeitos, a AGMA definiu um conjunto de *números de controle de qualidade*.[7] Esses números definem as tolerâncias das engrenagens de vários tamanhos fabricadas segundo uma classe de qualidade especificada. As classes 3 e 7 incluirão a maioria das engrenagens de qualidade comercial. As classes 8 a 12, por sua vez, são de qualidade precisa. O *número de grau de precisão de transmissão* Q_v da AGMA pode ser tido como idêntico ao número de qualidade. As seguintes equações para o fator dinâmico são baseadas nesses números Q_v:

$$K_v = \begin{cases} \left(\dfrac{A + \sqrt{V}}{A}\right)^B & V \text{ em ft/min} \\ \left(\dfrac{A + \sqrt{200V}}{A}\right)^B & V \text{ em m/s} \end{cases} \tag{14-27}$$

em que

$$\begin{aligned} A &= 50 + 56(1 - B) \\ B &= 0{,}25(12 - Q_v)^{2/3} \end{aligned} \tag{14-28}$$

e a máxima velocidade, representando o ponto final da curva Q_v, é dada por

$$(V_t)_{\max} = \begin{cases} [A + (Q_v - 3)]^2 & \text{ft/min} \\ \dfrac{[A + (Q_v - 3)]^2}{200} & \text{m/s} \end{cases} \tag{14-29}$$

A Figura 14-9 é um gráfico de K_v, o fator dinâmico, como uma função da velocidade no círculo primitivo para estimativas gráficas de K_v.

14-8 Fator de Sobrecarga K_o

O fator de sobrecarga K_o tem a função de levar em conta todas as cargas aplicadas externamente que excedem à carga tangencial nominal W^t em uma aplicação particular. Exemplos incluem variações no torque relativamente ao valor médio, devido à explosão interna nos cilindros de um motor de combustão interna, ou reação a variações de torque em uma transmissão de bomba de pistão. Outros chamam um fator similar pelo nome de fator de aplicação ou fator de serviço. Esses valores são estabelecidos após considerável experiência de campo em uma determinada aplicação.[8]

14-9 Fator de Condição de Superfície $C_f(Z_R)$

O fator de condição de superfície C_f ou Z_R é utilizado somente na equação de resistência à formação de cavidades, Equação (14-16). Ele depende de

- Acabamento superficial conforme determinado por fatores como corte, rebarbação, lapidação, retífica, jateamento de esferas (ainda que não limitado a eles).
- Tensões residuais.
- Efeitos plásticos (encruamento plástico).

[7] AGMA 390.01.

[8] Uma lista extensa de fatores de serviço aparece em Howard B. Schwerdlin, "Couplings", Cap. 29 em Joseph E. Shigley e Charles R. Mischke (editores), *Standard Handbook of Machine Design*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1996.

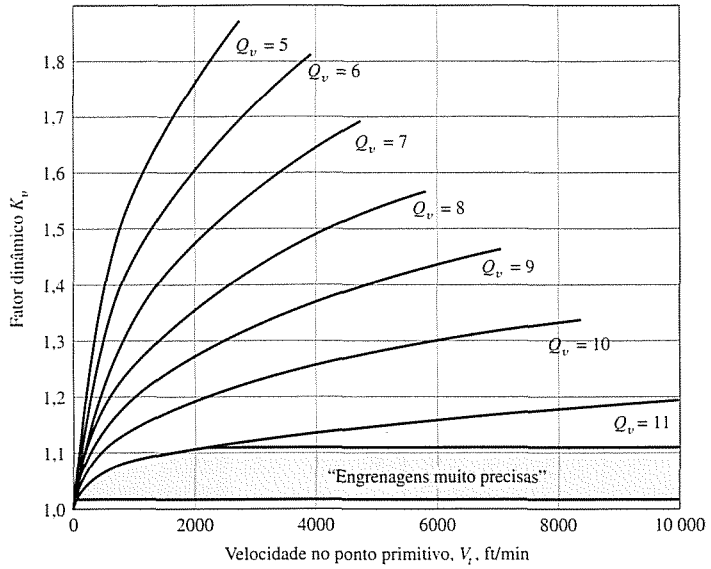


Figura 14-9 Fator dinâmico K_v. As equações para essas curvas são dadas pela Equação (14-27) e os pontos de extremidade, pela Equação (14-29). *(ANSI/AGMA 2001-C95.)*

Condições padronizadas de superfície para dentes de engrenagens ainda não foram estabelecidas. Quando se sabe que um efeito prejudicial causado pelo acabamento superficial está presente, a AGMA sugere que se utilize um valor de C_f maior que a unidade.

14-10 Fator de Tamanho K_s

O fator de tamanho reflete a não-uniformidade das propriedades do material causadas pelo tamanho. Ele depende dos seguintes fatores:

- Tamanho do dente
- Diâmetro da peça
- Razão entre o tamanho do dente e o diâmetro da peça
- Largura de face
- Área do padrão de tensão
- Razão entre a profundidade da camada superficial para o tamanho do dente
- Capacidade de endurecimento e tratamento térmico

Fatores padronizados de tamanho para dentes de engrenagens ainda não foram definidos para casos em que existe um efeito de tamanho prejudicial. Em tais casos, a AGMA recomenda um fator de tamanho maior que a unidade. Se tal efeito prejudicial não ocorrer, utilize o valor unitário.

A AGMA identificou e forneceu um símbolo de localização para o fator de tamanho. Ademais, ela sugere que se utilize $K_s = 1$, o que torna K_s um guarda-lugar nas Equações (14-15) e (14-16), até que mais informação seja coletada. Seguir a norma dessa forma representa uma falha na aplicação do conhecimento de que já dispomos. A partir da Tabela 13-1, $l = a + b = 2{,}25/P$. A espessura de dente t, na Figura 14-6, é fornecida na Seção 14-1, Equação (b), como $t = \sqrt{4lx}$, em que $x = 3Y/(2P)$, de acordo com a Equação (14-3). A partir da Equação (7-24), o diâmetro equivalente d_e de uma secção retangular em flexão vale $d_e = 0{,}808\sqrt{Ft}$. A partir da Equação (7-19), $k_b = (d_e/0{,}3)^{0.107}$. Observando que o fator AGMA K_s é o recíproco de k_b, verificamos que o resultado final de toda a substituição algébrica é

$$K_s = \frac{1}{k_b} = 1{,}192\left(\frac{F\sqrt{Y}}{P}\right)^{0.0535} \qquad (a)$$

O fator AGMA K_s pode ser visto como a geometria de Lewis incorporada ao fator de tamanho de Marin em fadiga. Você pode definir o fator AGMA $K_s = 1$, ou decidir-se por utilizar a Equação (*a*) supracitada. Esse é um ponto a ser discutido com o seu instrutor. Utilizaremos a Equação (*a*) para recordá-lo de que você dispõe de uma alternativa. Se K_s, nessa equação, resulta menor que 1, utilize $K_s = 1$.

14-11 Fator de Distribuição de Carga K_m (K_H)

O fator de distribuição de carga modificou as equações de tensão para refletir a não-uniformidade da distribuição de carga ao longo da linha de contato. O ideal é posicionar a engrenagem "a meia distância" entre mancais, em uma posição de inclinação nula quando a carga é aplicada. Contudo, isso não é sempre possível. O seguinte procedimento é aplicável a

- Razão da largura líquida de face para o diâmetro primitivo do pinhão $F/d \leq 2$
- Engrenagens montadas entre mancais
- Larguras de face até 40 in
- Contato, quando carregado, ao longo da largura total do membro mais estreito

O fator de distribuição de carga sob tais condições é dado por

$$K_m = 1 + C_{mc}(C_{pf}C_{pm} + C_{ma}C_e) \tag{14-30}$$

em que

$$C_{mc} = \begin{cases} 1 & \text{para dentes sem coroamento} \\ 0{,}8 & \text{para dentes com coroamento} \end{cases} \tag{14-31}$$

$$C_{pf} = \begin{cases} \dfrac{F}{10d} - 0{,}025 & F \leq 1 \text{ in} \\ \dfrac{F}{10d} - 0{,}0375 + 0{,}0125F & 1 < F \leq 17 \text{ in} \\ \dfrac{F}{10d} - 0{,}1109 + 0{,}0207F - 0{,}000\,228F^2 & 17 < F \leq 40 \text{ in} \end{cases} \tag{14-32}$$

Observe que, para valores de $F/(10d) < 0{,}05$, $F/(10d) = 0{,}05$ é utilizado.

$$C_{pm} = \begin{cases} 1 & \text{para pinhão montado entre mancais com } S_1/S < 0{,}175 \\ 1{,}1 & \text{para pinhão montado entre mancais com } S_1/S \geq 0{,}175 \end{cases} \tag{14-33}$$

$$C_{ma} = A + BF + CF^2 \text{ (ver Tabela 14-9 para valores de } A, B \text{ e } C) \tag{14-34}$$

$$C_e = \begin{cases} 0{,}8 & \text{para engrenagens ajustadas na montagem, ou quando a compatibilidade é melhorada por lapidação, ou ambas} \\ 1 & \text{para todas as outras condições} \end{cases} \tag{14-35}$$

Veja a Figura 14-10 para definições de S e S_1 com a Equação (14-33), e também a Figura 14-11 para o gráfico de C_{ma}.

Tabela 14-9 Constantes empíricas *A*, *B* e *C* para a Equação (14-34). Largura de face F em polegadas*

Condição	A	B	C
Engrenamento aberto	0,247	0,0167	$-0{,}765(10^{-4})$
Unidades fechadas, comerciais	0,127	0,0158	$-0{,}093(10^{-4})$
Unidades fechadas, de precisão	0,0675	0,0128	$-0{,}926(10^{-4})$
Unidades de engrenagens fechadas, extraprecisas	0,00360	0,0102	$-0{,}822(10^{-4})$

Fonte: ANSI/AGMA 2001-C95.

* Ver ANSI/AGMA 2101-C95, p. 21-22, para formulação SI.

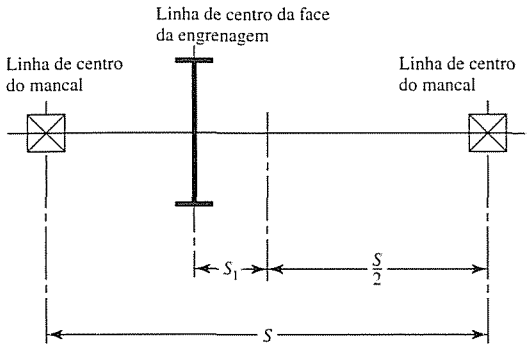


Figura 14-10 Definição das distâncias S e S_1 utilizadas na avaliação de C_{pm}, Equação (14-33). *(ANSI/AGMA 2001-C95.)*

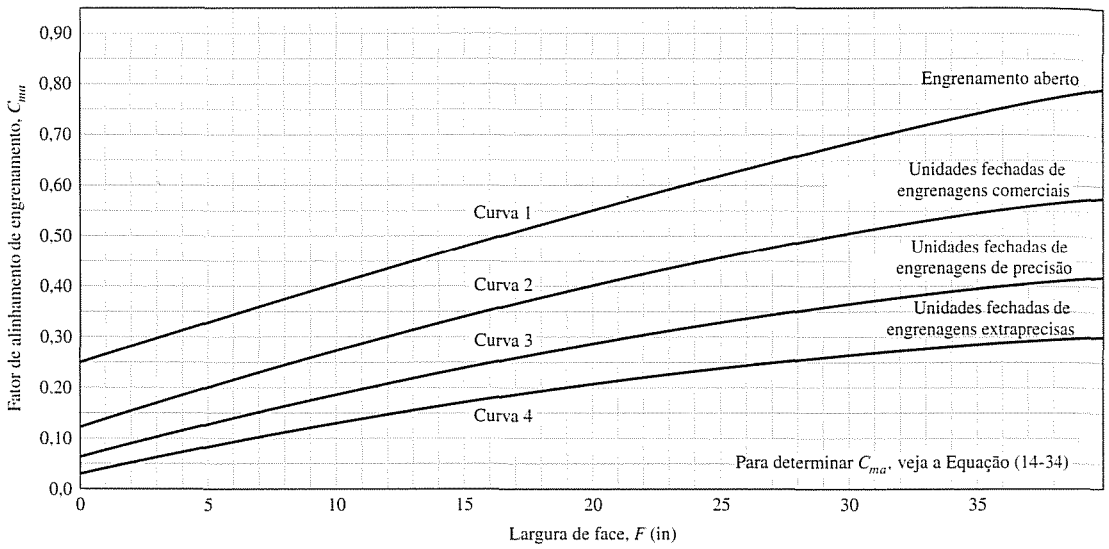


Figura 14-11 Fator de alinhamento de engrenamento C_{ma}. Equações de ajuste de curva na Tabela 14-9. *(ANSI/AGMA 2001-C95.)*

14-12 Fator de Razão de Dureza C_H

O pinhão geralmente tem menos dentes que a coroa e, por isso, é submetido a mais ciclos de tensão de contato. Se ambos, pinhão e coroa, são endurecidos de forma completa, então uma resistência superficial uniforme pode ser obtida ao se fazer o pinhão mais duro que a coroa. Um efeito similar pode ser obtido quando um pinhão de superfície endurecida engranza com uma coroa endurecida por completo. O fator de razão de dureza C_H é utilizado *somente para a coroa*. O propósito disso mesmo é ajustar as resistências superficiais com relação a esse efeito. Os valores de C_H são obtidos a partir da equação

$$C_H = 1{,}0 + A'(m_G - 1{,}0) \tag{14-36}$$

em que

$$A' = 8{,}98(10^{-3})\left(\frac{H_{BP}}{H_{BG}}\right) - 8{,}29(10^{-3})\ 1{,}2 \leq \frac{H_{BP}}{H_{BG}} \leq 1{,}7$$

Os termos H_{BP} e H_{BG} representam as durezas Brinell (esfera de 10 mm sob carga de 3000 kg) do pinhão e da coroa, respectivamente. O termo m_G representa a razão de velocidade e é fornecido pela Equação (14-22). Veja a Figura 14-12 para o gráfico da Equação (14-36). Para

$$\frac{H_{BP}}{H_{BG}} < 1{,}2, \quad A' = 0$$

$$\frac{H_{BP}}{H_{BG}} > 1{,}7, \quad A' = 0{,}006\,98$$

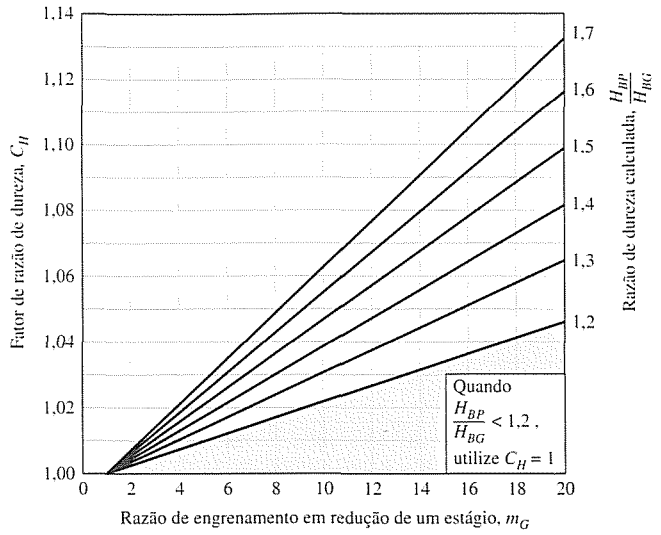


Figura 14-12 Fator de razão de dureza C_H (aço endurecido por completo). *(ANSI/AGMA 2001-C95.)*

Quando pinhões com superfície endurecida, apresentando durezas de 48 na escala Rockwell C (Rockwell C48), ou mais, engranzam com coroas endurecidas por completo (180-400 Brinell), um encruamento ocorre. O fator C_H é uma função do acabamento superficial do pinhão f_P e da dureza da engrenagem par. A Figura 14-13 mostra a relação:

$$C_H = 1 + B'(450 - H_{BG}) \tag{14-37}$$

em que $B' = 0{,}000\,75 \exp[-0{,}0112 f_P]$ e f_P é o acabamento superficial do pinhão expresso como a raiz da média dos quadrados da rugosidade R_a em μ in.

14-13 Fatores de Vida para Ciclagem de Tensão Y_N e Z_N

As resistências AGMA, tais como dadas nas Figuras 14-2 a 14-4, nas Tabelas 14-3 e 14-4 para fadiga flexional e na Figura 14-5 e nas Tabelas 14-5 e 14-6 para fadiga por tensões de contato, são baseadas em 10^7 ciclos de carga aplicada repetidamente. O propósito dos fatores de ciclos de carga Y_N e Z_N consiste em modificar as resistências AGMA para outras vidas que não de 10^7 ciclos. Os valores para tais fatores são apresentados nas Figuras 14-14 e 14-15. Observe que, para 10^7 ciclos, $Y_N = Z_N = 1$ em cada gráfico. Observe, tam-

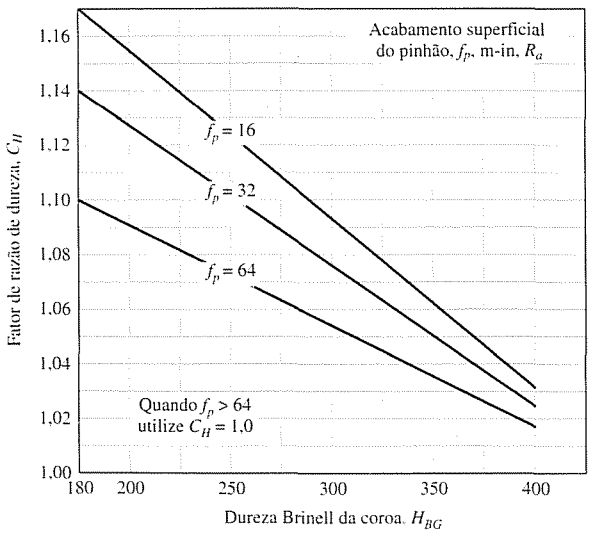


Figura 14-13 Fator de razão de dureza C_H (pinhão de aço com superfície endurecida). *(ANSI/AGMA 2001-C95.)*

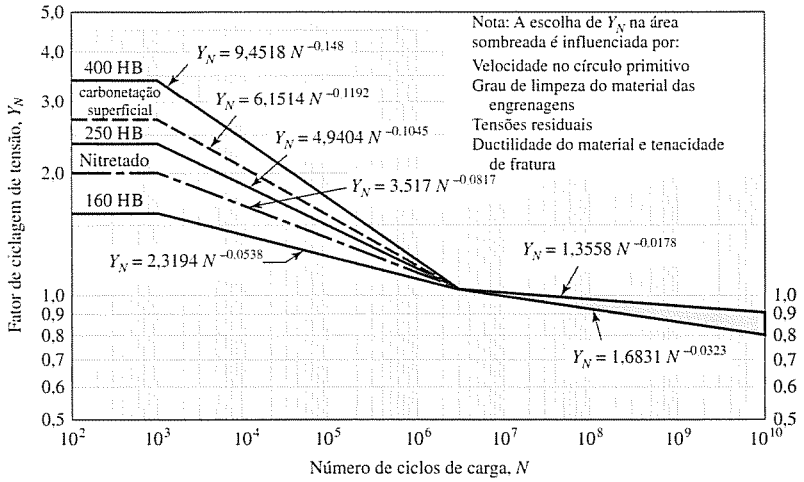


Figura 14-14 Fator de ciclagem de tensão para resistência de flexão sob carregamento aplicado repetidamente Y_N. *(ANSI/AGMA 2001-C95.)*

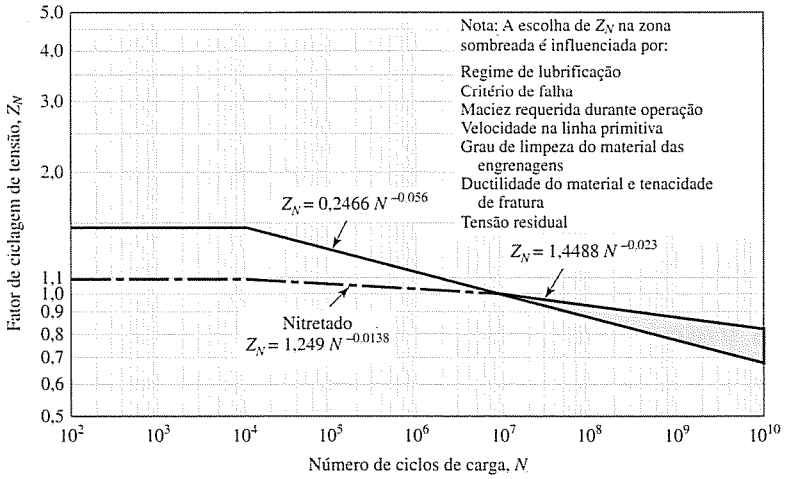


Figura 14-15 Fator de ciclagem de tensão para resistência à formação de cavidades (crateriza̧ção) Z_N. *(ANSI/AGMA 2001-C95.)*

bém, que as equações para Y_N e Z_N modificam-se seja à esquerda ou à direita de 10^7 ciclos. Para propostas de vida ligeiramente maiores que 10^7 ciclos, a engrenagem par pode experimentar menos do que 10^7 ciclos e as equações para $(Y_N)_P$ e $(Y_N)_G$ podem ser diferentes. O mesmo comentário aplica-se a $(Z_N)_P$ e $(Z_N)_G$.

14-14 Fator de Confiabilidade K_R (Y_Z)

O fator de confiabilidade leva em consideração o efeito das distribuições estatísticas das falhas por fadiga do material. A variação de carga não é considerada aqui. As resistências AGMA S_t e S_c são baseadas em uma confiabilidade de 99%. A Tabela 14-10 baseia-se em dados obtidos pela Marinha dos EUA para falhas de fadiga por flexão e por tensão de contato.

A relação funcional entre K_R e a confiabilidade é altamente não-linear. Quando interpolação faz-se necessária, a interpolação linear é demasiadamente pobre. Uma transformação *log* para cada uma das quantidades produz uma relação linear. Um ajuste de regressão pelos mínimos quadrados produz

$$K_R = \begin{cases} 0{,}658 - 0{,}0759 \ln(1 - R) & 0{,}5 < R < 0{,}99 \\ 0{,}50 - 0{,}109 \ln(1 - R) & 0{,}99 \le R \le 0{,}9999 \end{cases} \tag{14-38}$$

Para valores cardeais de R, tome K_R da tabela. De outra forma, utilize a interpolação logarítmica proporcionada pelas Equações (14-38).

Tabela 14-10 Fatores de confiabilidade *KR(YZ)*

Confiabilidade	$K_R(Y_Z)$
0,9999	1,50
0,999	1,25
0,99	1,00
0,90	0,85
0,50	0,70

Fonte: ANSI/AGMA 2001-C95.

14-15 Fator de Temperatura $K_T(Y_\theta)$

Para óleo ou temperaturas de corpo de engrenagens até 250°F (120°C), utilize $K_T = Y_\theta = 1{,}0$. Para temperaturas mais elevadas, o fator deve ser maior que a unidade. Trocadores de calor podem ser empregados para assegurar que as temperaturas de operação fiquem consideravelmente abaixo desse valor, como é desejável para o lubrificante.

14-16 Fator de Espessura de Borda K_B

Quando a espessura da borda não é suficiente para proporcionar suporte completo à raiz do dente, a localização da falha por fadiga flexional pode ocorrer ao longo da borda da engrenagem, e não no filete de dente. Em tais casos, o uso de um fator modificador de tensão K_B ou (t_R) é recomendado. Esse fator, o *fator de espessura de borda* K_B, ajusta a tensão de flexão estimada para engrenagens de borda fina. Trata-se de uma função da razão auxiliar m_B,

$$m_B = \frac{t_R}{h_t} \tag{14-39}$$

na qual t_R iguala-se à espessura de borda abaixo do dente, in, e h_t é igual à altura do dente. A geometria aparece representada na Figura 14-16. O fator de espessura de aro K_B é dado por

$$K_B = \begin{cases} 1{,}6 \ln \dfrac{2{,}242}{m_B} & m_B < 1{,}2 \\ 1 & m_B \geq 1{,}2 \end{cases} \tag{14-40}$$

A Figura 14-16 também apresenta o valor de K_B graficamente. O fator de espessura de borda K_B é aplicado em adição aos 0,70 do fator de carregamento inverso, quando aplicável.

14-17 Fatores de Segurança S_F e S_H

As normas ANSI/AGMA 2001-C95 e 2101-C95 reintroduziram o fator de segurança S_F, protegendo contra falha por fadiga flexional, e o fator S_H, protegendo contra falha por aparecimento de cavidades.

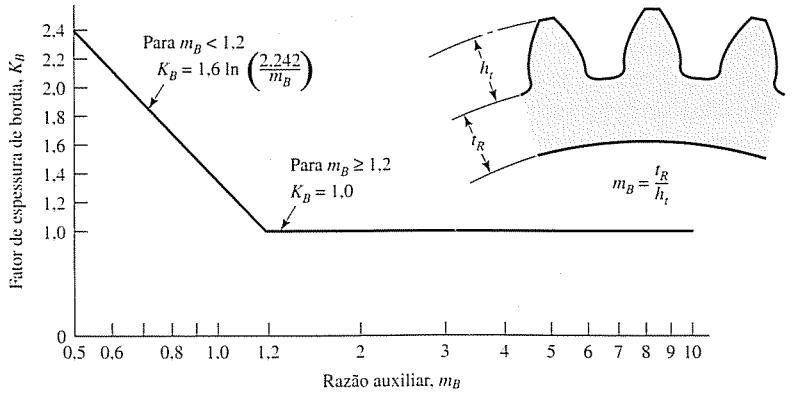


Figura 14-16 Fator de espessura de borda K_B. *(ANSI/AGMA 2001-C95.)*

A definição de S_F, a partir da Equação (14-17), é

$$S_F = \frac{S_t Y_N/(K_T K_R)}{\sigma} = \frac{\text{resistência à flexão corrigida por completo}}{\text{tensão de flexão}} \tag{14-41}$$

em que σ é estimado a partir da Equação (14-15). Trata-se de uma definição de resistência em relação à tensão, em um caso no qual a tensão é linear à carga transmitida.

A definição de S_H, a partir da Equação (14-18), é

$$S_H = \frac{S_c Z_N C_H/(K_T K_R)}{\sigma_c} = \frac{\text{resistência de contato corrigida por completo}}{\text{tensão de contato}} \tag{14-42}$$

quando σ é estimado a partir da Equação (14-16). Essa também é uma definição de resistência em relação à tensão – todavia, em um caso no qual a tensão é *não*-linear à carga transmitida W^t.

Na medida em que a definição de S_H não interfere na sua função pretendida, é necessário cautela ao se compararem S_F e S_H em uma análise que tenta determinar a natureza e a gravidade do perigo de perda de função. Para se ter S_H linear em relação à carga sendo transmitida, W^t poderia ter sido definida como

$$S_H = \left(\frac{\text{resistência de contato corrigida por completo}}{\text{tensão de contato imposta}}\right)^2 \tag{14-43}$$

com o expoente 2 para contato linear ou helicoidal, ou com um expoente 3 para dentes com coroa (contato esférico). Com a definição AGMA, Equação (14-42), compare S_F com S_H^2 (ou S_H^3, para dentes com coroa), quando tiver de identificar o risco de perda de função com confiança.

A função do fator de sobrecarga K_o é a de incluir desvios previsíveis da carga além do valor W^t, com base na experiência. Um fator de segurança pretende levar em consideração elementos não-quantificáveis em adição a K_o. Ao projetar um engrenamento, a quantidade S_F torna-se um fator de projeto $(S_F)_d$, dentro do significado utilizado neste livro. A quantidade S_F computada como parte de uma avaliação de projeto constitui um fator de segurança. Isso aplica-se igualmente bem à quantidade S_H.

14-18 Análise

A descrição do procedimento da AGMA envolve muitos detalhes. A melhor maneira de revê-lo é por meio de um "mapa rodoviário" para a fadiga flexional e para a fadiga de tensão de contato. A Figura 14-17 identifica a equação da tensão de flexão AGMA, o limite de resistência à fadiga na equação de flexão e o fator de segurança S_F. A Figura 14-18, por sua vez, mostra a equação da tensão de contato, a equação para a resistência à fadiga de contato e o fator de segurança S_H. Ao se analisar um problema envolvendo engrenagens, essa última figura constitui-se em uma referência útil.

O seguinte exemplo de uma análise de engranzamento de engrenagens tem por finalidade tornar mais familiares todos os detalhes já apresentados concernentes ao método AGMA.

Há perspectivas a serem alcançadas a partir do Exemplo 14-4. Primeiro, o pinhão é excessivamente forte em flexão, em comparação com o desgaste. O desempenho, quanto ao desgaste, pode ser melhorado por técnicas de endurecimento superficial, tais como endurecimento por chama ou indução, nitretação ou carbonetação e endurecimento em caixa (superficial), assim como por jateamento de esferas. Isso, por sua vez, permite que o conjunto de engrenagens seja feito menor. Segundo, em flexão, a coroa é mais forte que o pinhão, indicando que ambos, a dureza de núcleo da coroa e o tamanho de dente, poderiam ser reduzidos; isto é, podemos aumentar P e reduzir o diâmetro das engrenagens, ou talvez utilizar um material mais barato. Terceiro, sob desgaste, as equações para a resistência superficial têm a razão $(Z_N)/K_R$. Os valores de $(Z_N)_P$ e $(Z_N)_G$ são afetados pela razão de engrenamento m_G. O projetista pode controlar a resistência ao especificar a dureza superficial. Esse ponto será elaborado mais adiante.

Tendo seguido uma análise de engrenagens cilíndricas de dentes retos detalhadamente no Exemplo 14-4, faz-se oportuno analisar um conjunto de engrenagens helicoidais sob circunstâncias similares, a fim de observar semelhanças e diferenças.

É importante comparar os Exemplos 14-4 e 14-5. Os conjuntos de engrenagens de dentes retos e de dentes helicoidais foram postos sob condições aproximadamente idênticas. Os dentes da engrenagem helicoidal têm comprimento maior por causa da hélice e das larguras de face idênticas. Os diâmetros primitivos das engrenagens helicoidais são maiores. Os fatores J e o fator I são maiores, reduzindo, portanto, as tensões. O resultado são fatores de segurança maiores. Na fase de projeto, os conjuntos de engrenagens nos Exemplos 14-4 e 14-5 podem ser feitos menores com o controle dos materiais e das durezas relativas.

Flexão de Engrenagem de Dentes Retos
ANSI/AGMA 2001-C95

$$d_P = \frac{N_P}{P_d}$$

$$V = \frac{\pi d n}{12}$$

$$W^t = \frac{33\,000\,\mathrm{H}}{V}$$

Equação de tensão de flexão AGMA, Equação (14-15)

$$\sigma = W^t K_o K_v K_s \frac{P_d}{F} \frac{K_m K_B}{J}$$

1 (ou Eq.(a) Sec. 14-10); Eq. (14-30); Eq. (14-40); Fig. 14-6; Eq. (14-27); Tabela abaixo

Equação AGMA para o limite de resistência à fadiga de flexão, Equação (14-17)

$$\sigma_{all} = \frac{S_t}{S_F} \frac{Y_N}{K_T K_R}$$

$S_t = {}_{0.99}(S_t)_{10^7}$ Tab. 14-3, 14-4; Y_N: Fig. 14-14; K_T, K_R: Tab. 14-10, Eq. (14-38); 1 se $T < 250°F$

Fator de segurança de flexão, Equação (14-41)

$$S_F = \frac{S_t Y_N / (K_T K_R)}{\sigma}$$

Lembre-se de comparar S_F com S_H^2 ao decidir se a flexão ou o desgaste é o fator de risco para funcionamento. Para engrenagens coroadas, compare S_F com S_H^3.

Tabela de fatores de sobrecarga, K_o

	Máquina acionada		
Fonte de potência	Uniforme	Choques moderados	Choques intensos
Uniforme	1,00	1,25	1,75
Choque leve	1,25	1,50	2,00
Choque médio	1,50	1,75	2,25

Figura 14-17 Mapa das equações de flexão AGMA. *(ANSI/AGMA 2001-C95.)*

Desgaste de Engrenagens de Dentes Retos
ANSI/AGMA 2001-C95

$$d_P = \frac{N_P}{P_d}$$

$$V = \frac{\pi d n}{12}$$

$$W^t = \frac{33\,000\,\mathrm{H}}{V}$$

Equação para a tensão de contato AGMA, Equação (14-16)

$$\sigma_c = C_p \left(W^t K_o K_v K_s \frac{K_m}{d_P F} \frac{C_f}{I} \right)^{1/2}$$

1 (ou Eq. (a) Sec. 14-10); Eq. (14-30); 1; Eq. (14-23); Eq. (14-27); Eq. (14-13), Tab. 14-8; Tabela abaixo

Resistência à fadiga de contato AGMA, Equação (14-18)

$$\sigma_{c,\mathrm{all}} = \frac{S_c Z_N C_H}{S_H K_T K_R}$$

$_{0,99}(S_c)_{10^7}$ Tabs. 14-6, 14-7; Fig. 14-15; Seção 14-12, somente engrenagens; Tab. 14-10, Eqs. (14-38); 1 se $T < 250°\mathrm{F}$

Fator de segurança de desgaste Eq. (14-42)

$$S_H = \frac{S_c Z_N C_H / (K_T K_R)}{\sigma_c}$$

somente engrenagens

Lembre-se de comparar S_F com S_H^2 ao decidir se a flexão ou o desgaste é o fator de risco para funcionamento. Para engrenagens coroadas, compare S_F com S_H^3.

Tabela de fatores de sobrecarga, K_o

	Máquina acionada		
Fonte de potência	Uniforme	Choques moderados	Choques intensos
Uniforme	1,00	1,25	1,75
Choque leve	1,25	1,50	2,00
Choque médio	1,50	1,75	2,25

Figura 14-18 Mapa das equações AGMA para desgaste. *(ANSI/AGMA 2001-C95.)*

EXEMPLO 14-4

Um pinhão cilíndrico de dentes retos, com 17 dentes e 20° de ângulo de pressão, roda a 1800 rpm e transmite 4 hp a uma engrenagem de disco com 52 dentes. O passo diametral é de 10 dentes/in; a largura de face, de 1,5 in; e o padrão de qualidade é o nº 6. As engrenagens são montadas bastante abertas, com os mancais ficando imediatamente adjacentes. O pinhão é feito de aço de grau 1, com dureza na superfície dos dentes de 240 Brinell e endurecimento completo até seu interior. A coroa é de aço, também endurecida por completo, material de grau 1, com dureza Brinell igual a 200, para a superfície dos dentes e para o interior. A razão de Poisson é 0,30, $J_P = 0{,}30$, $J_G = 0{,}40$ e o módulo de Young é $30(10^6)$ psi. O carregamento é suave em decorrência do tipo de motor e da carga. Assuma uma vida para o pinhão de 10^8 ciclos, uma confiabilidade de 0,90 e utilize $Y_N = 1{,}3558N^{-0{,}0178}$, $Z_N = 1{,}4488N^{-0{,}023}$. O perfil de dente está sem coroamento. Essa é uma unidade redutora comercial fechada.

(*a*) Encontre o fator de segurança das engrenagens sob flexão.

(*b*) Encontre o fator de segurança das engrenagens com relação ao desgaste.

(*c*) Examinando os fatores de segurança, identifique o risco relativo a cada engrenagem e à unidade.

Solução

Haverá muitos termos a obter; portanto, utilize as Figuras 14-17 e 14-18 como guias para o que for necessário.

$$d_P = N_P/P_d = 17/10 = 1{,}7 \text{ in} \qquad d_G = 52/10 = 5{,}2 \text{ in}$$

$$V = \frac{\pi d_P n_P}{12} = \frac{\pi(1{,}7)1800}{12} = 801{,}1 \text{ ft/min}$$

$$W^t = \frac{33\,000\,H}{V} = \frac{33\,000(4)}{801{,}1} = 164{,}8 \text{ lbf}$$

Assumindo um carregamento uniforme, $K_o = 1$. Para avaliar K_v, a partir da Equação (14-28), com um número de qualidade $Q_v = 6$,

$$B = 0{,}25(12 - 6)^{2/3} = 0{,}8255$$

$$A = 50 + 56(1 - 0{,}8255) = 59{,}77$$

Assim, a partir da Equação (14-27), o fator dinâmico resulta em

$$K_v = \left(\frac{59{,}77 + \sqrt{801{,}1}}{59{,}77}\right)^{0{,}8255} = 1{,}377$$

Para determinar o fator de tamanho, K_s, o fator de forma de Lewis é requerido. A partir da Tabela 14-2, com $N_P = 17$ dentes, $Y_P = 0{,}303$. A interpolação para a coroa com $N_G = 52$ dentes produz $Y_G = 0{,}412$. Logo, a partir da Equação (*a*) da Seção 14-10, com $F = 1{,}5$ in,

$$(K_s)_P = 1{,}192\left(\frac{1{,}5\sqrt{0{,}303}}{10}\right)^{0{,}0535} = 1{,}043$$

$$(K_s)_G = 1{,}192\left(\frac{1{,}5\sqrt{0{,}412}}{10}\right)^{0{,}0535} = 1{,}052$$

O fator de distribuição de carga K_m é determinado a partir da Equação (14-30), na qual cinco termos se fazem necessários. São eles, onde $F = 1{,}5$ in, quando necessário:

Dentes não-encurvados, Equação (14-30): $C_{mc} = 1$,
Equação (14-32): $C_{pf} = 1{,}5[10(1{,}7)] - 0{,}0375 + 0{,}0125(1{,}5) = 0{,}0695$
Mancais imediatamente adjacentes, Equação (14-33): $C_{pm} = 1$
Unidades redutoras comerciais fechadas (Figura 14-11): $C_{ma} = 0{,}15$
Equação (14-35): $C_e = 1$

Logo,

$$K_m = 1 + C_{mc}(C_{pf}C_{pm} + C_{ma}C_e) = 1 + (1)[0{,}0695(1) + 0{,}15(1)] = 1{,}22$$

Assumindo engrenagens de espessura constante, o fator de espessura de borda $K_B = 1$. A razão de velocidades é $m_G = N_G/N_P = 52/17 = 3{,}059$. Os fatores de ciclagem de carga apresentados no enunciado do problema, com N(pinhão)=10^8ciclos e N(coroa) = $10^8/m_G = 10^8/3{,}059$ ciclos, são

$$(Y_N)_P = 1{,}3558(10^8)^{-0.0178} = 0{,}977$$

$$(Y_N)_G = 1{,}3558(10^8/3{,}059)^{-0.0178} = 0{,}996$$

A partir da Tabela 14-10, com uma confiabilidade de 0,9, $K_R = 0{,}85$. A partir da Figura 14-18, os fatores de temperatura e condição superficial são $K_T = 1$ e $C_f = 1$. A partir da Equação (14-23), com $m_N = 1$, para engrenagens cilíndricas de dentes retos,

$$I = \frac{\cos 20^\circ \operatorname{sen} 20^\circ}{2}\frac{3{,}059}{3{,}059 + 1} = 0{,}121$$

A partir da Tabela 14-8, $C_P = 2300\sqrt{\text{psi}}$.

A seguir, necessitamos dos termos constantes das equações de resistência à fadiga da AGMA. A partir da Tabela 14-3, para aço de grau 1 com $H_{BP} = 240$ e $H_{BG} = 200$, utilizamos a Figura 14-2, que produz

$$(S_t)_P = 77{,}3(240) + 12\,800 = 31\,350 \text{ psi}$$

$$(S_t)_G = 77{,}3(200) + 12\,800 = 28\,260 \text{ psi}$$

Similarmente, a partir da Tabela 14-6, utilizamos a Figura 14-5, que resulta em

$$(S_c)_P = 322(240) + 29\,100 = 106\,400 \text{ psi}$$

$$(S_c)_G = 322(200) + 29\,100 = 93\,500 \text{ psi}$$

A partir da Figura 14-15,

$$(Z_N)_P = 1{,}4488(10^8)^{-0.023} = 0{,}948$$

$$(Z_N)_G = 1{,}4488(10^8/3{,}059)^{-0.023} = 0{,}973$$

Para o fator de razão de dureza C_H, a razão de dureza é $H_{BP}/H_{BG} = 240/200 = 1{,}2$. Logo, a partir da Seção 14-12,

$$A' = 8{,}98(10^{-3})(H_{BP}/H_{BG}) - 8{,}29(10^{-3})$$

$$= 8{,}98(10^{-3})(1{,}2) - 8{,}29(10^{-3}) = 0{,}002\,49$$

Logo, a partir da Equação (14-36),

$$C_H = 1 + 0{,}002\,49(3{,}059 - 1) = 1{,}005$$

(*a*) **Flexão dos dentes do pinhão.** Substituindo os termos apropriados referentes ao pinhão na Equação (14-15), obtemos

$$(\sigma)_P = \left(W^t K_o K_v K_s \frac{P_d}{F}\frac{K_m K_B}{J}\right)_P = 164{,}8(1)1{,}377(1{,}043)\frac{10}{1{,}5}\frac{1{,}22\,(1)}{0{,}30}$$

$$= 6417 \text{ psi}$$

Substituindo os termos apropriados referentes ao pinhão na Equação (14-41), obtemos

Resposta

$$(S_F)_P = \left(\frac{S_t Y_N/(K_T K_R)}{\sigma}\right)_P = \frac{31\,350(0{,}977)/[1(0{,}85)]}{6417} = 5{,}62$$

Flexão dos dentes da coroa. A substituição dos termos apropriados referentes à coroa na Equação (14-15) produz

$$(\sigma)_G = 164{,}8(1)1{,}377(1{,}052)\frac{10}{1{,}5}\frac{1{,}22(1)}{0{,}40} = 4854 \text{ psi}$$

Substituindo os termos apropriados referentes à coroa na Equação (14-41), obtemos

Resposta
$$(S_F)_G = \frac{28\,260(0{,}996)/[1(0{,}85)]}{4854} = 6{,}82$$

(*b*) **Desgaste dos dentes do pinhão.** A substituição dos termos apropriados ao pinhão na Equação (14-16) produz

$$(\sigma_c)_P = C_p\left(W^t K_o K_v K_s \frac{K_m}{d_P F}\frac{C_f}{I}\right)_P^{1/2}$$

$$= 2300\left[164{,}8(1)1{,}377(1{,}043)\frac{1.22}{1{,}7(1{,}5)}\frac{1}{0{,}121}\right]^{1/2} = 70\,360 \text{ psi}$$

Substituindo os termos apropriados ao pinhão na Equação (14-42), obtemos

Resposta
$$(S_H)_P = \left[\frac{S_c Z_N/(K_T K_R)}{\sigma_c}\right]_P = \frac{106\,400(0{,}948)/[1(0{,}85)]}{70\,360} = 1{,}69$$

Desgaste dos dentes da coroa. O único termo na Equação (14-16) que muda no caso da coroa é K_s. Logo,

$$(\sigma_c)_G = \left[\frac{(K_s)_G}{(K_s)_P}\right]^{1/2}(\sigma_c)_P = \left(\frac{1{,}052}{1{,}043}\right)^{1/2} 70\,360 = 70\,660 \text{ psi}$$

Substituindo os termos apropriados à coroa na Equação (14-42), com $C_H = 1{,}005$, obtemos

Resposta
$$(S_H)_G = \frac{93\,500(0{,}973)1{,}005/[1(0{,}85)]}{70\,660} = 1{,}52$$

(*c*) Para o pinhão, comparamos $(S_F)_P$ com $(S_H)_P^2$, ou 5,73 com $1{,}69^2 = 2{,}86$, de modo que o risco para o pinhão provém do desgaste. Para a coroa, comparamos $(S_F)_G$ com $(S_H)_G^2$, ou 6,96 com $1{,}52^2 = 2{,}31$, de forma que o risco, nesse caso, também provém do desgaste.

EXEMPLO 14-5

Um pinhão cilíndrico helicoidal de 17 dentes e 20° de ângulo de pressão normal, com hélice de mão direita de ângulo de 30°, roda a 1800 rpm enquanto transmite 4 hp a uma coroa helicoidal de 52 dentes. O passo diametral normal é de 10 dentes/in; a largura de face é igual a 1,5 in; e o conjunto apresenta um número de qualidade de 6. As engrenagens são montadas entre mancais, estando estes imediatamente adjacentes àquelas. O pinhão e a coroa são feitos de aço endurecido por completo, com durezas superficial e interior de 240 Brinell para o pinhão e 200 Brinell para a coroa. A transmissão é suave, conectando um motor elétrico e uma bomba centrífuga. Assuma uma vida para o pinhão de 10^8 ciclos, uma confiabilidade de 0,9 e utilize as curvas superiores das Figuras 14-14 e 14-15.

(*a*) Encontre os fatores de segurança das engrenagens sob flexão.

(*b*) Encontre os fatores de segurança das engrenagens com relação ao desgaste.

(*c*) Examinando os fatores de segurança, identifique o risco relativo a cada engrenagem e à unidade.

Solução

Todos os parâmetros neste problema são os mesmos do Exemplo 14-4, à exceção do fato de estarmos utilizando engrenagens helicoidais. Dessa forma, vários termos serão idênticos àqueles do Exemplo 14-4. O leitor deve verificar que os seguintes termos permanecem sem alteração: $K_o = 1$, $Y_P = 0{,}303$, $Y_G =$

0,412, $m_G = 3{,}059$, $(K_s)_P = 1{,}043$, $(K_s)_G = 1{,}052$, $(Y_N)_P = 0{,}977$, $(Y_N)_G = 0{,}996$, $K_R = 0{,}85$, $K_T = 1$, $C_f = 1$, $C_p = 2300\ \sqrt{\text{psi}}$, $(S_t)_P = 31\ 350$ psi, $(S_t)_G = 28\ 260$ psi, $(S_c)_P = 106\ 380$ psi, $(S_c)_G = 93\ 500$ psi, $(Z_N)_P = 0{,}948$, $(Z_N)_G = 0{,}973$ e $C_H = 1{,}005$.

Para engrenagens helicoidais, o passo diametral transversal, dado pela Equação (13-18), é

$$P_t = P_n \cos \psi = 10 \cos 30^\circ = 8{,}660 \text{ dentes/in}$$

Logo, os diâmetros primitivos são $d_P = N_p/P_t = 17/8{,}660 = 1{,}963$ in e $d_G = 52/8{,}660 = 6{,}005$ in. A velocidade no ponto primitivo e a força transmitida são

$$V = \frac{\pi d_P n_P}{12} = \frac{\pi(1{,}963)1800}{12} = 925 \text{ ft/min}$$

$$W^t = \frac{33\,000H}{V} = \frac{33\,000(4)}{925} = 142{,}7 \text{ lbf}$$

Como no Exemplo 14-4, para o fator dinâmico, $B = 0{,}8255$ e $A = 59{,}77$. Logo, a Equação (14-27) produz

$$K_v = \left(\frac{59{,}77 + \sqrt{925}}{59{,}77}\right)^{0.8255} = 1{,}404$$

O fator geométrico I para engrenagens helicoidais requer um pouco de trabalho. Primeiro, o ângulo de pressão transversal é fornecido pela Equação (13-19)

$$\phi_t = \tan^{-1}\left(\frac{\tan \phi_n}{\cos \psi}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\tan 20^\circ}{\cos 30^\circ}\right) = 22{,}80^\circ$$

Os raios do pinhão e da coroa são $r_P = 1{,}963/2 = 0{,}9815$ in e $r_G = 6{,}004/2 = 3{,}002$ in, respectivamente. O adendo é $a = 1/P_n = 1/10 = 0{,}1$, e os raios de base do pinhão e da coroa são fornecidos pela Equação (13-6), com $\phi = \phi t$:

$$(r_b)_P = r_P \cos \phi_t = 0{,}9815 \cos 22{,}80^\circ = 0{,}9048 \text{ in}$$

$$(r_b)_G = 3{,}002 \cos 22{,}80^\circ = 2{,}767 \text{ in}$$

A partir da Equação (14-25), o fator geométrico da resistência de superfície

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{(0{,}9815 + 0{,}1)^2 - 0{,}9048^2} + \sqrt{(3{,}004 + 0{,}1)^2 - 2{,}769^2} \\ &\quad - (0{,}9815 + 3{,}004) \operatorname{sen} 22{,}80^\circ \\ &= 0{,}5924 + 1{,}4027 - 1{,}544\,4 = 0{,}4507 \text{ in} \end{aligned}$$

Na medida em que os dois primeiros termos são menores que 1,544 4, a equação para Z não requer alteração. A partir da Equação (14-24), o passo circular normal p_N é

$$p_N = p_n \cos \phi_n = \frac{\pi}{P_n} \cos 20^\circ = \frac{\pi}{10} \cos 20^\circ = 0{,}2952 \text{ in}$$

A partir da Equação (14-21), a razão de distribuição de carga

$$m_N = \frac{p_N}{0{,}95Z} = \frac{0{,}2952}{0{,}95(0{,}4507)} = 0{,}6895$$

Substituindo na Equação (14-23), o fator geométrico I torna-se

$$I = \frac{\operatorname{sen} 22{,}80^\circ \cos 22{,}80^\circ}{2(0{,}6895)} \frac{3{,}06}{3{,}06 + 1} = 0{,}195$$

A partir da Figura 14-7, os fatores geométricos $J'_P = 0{,}45$ e $J'_G = 0{,}54$. Também a partir da Figura 14-8, os fatores multiplicadores de J são 0,94 e 0,98, corrigindo, assim, J'_P e J'_G para

$$J_P = 0{,}45(0{,}94) = 0{,}423$$

$$J_G = 0{,}54(0{,}98) = 0{,}529$$

O fator de distribuição de carga K_m é estimado com base na Equação (14-32):

$$C_{pf} = \frac{1,5}{10(1,963)} - 0,0375 + 0,0125(1,5) = 0,0577$$

com $C_{mc} = 1$, $C_{pm} = 1$, $C_{ma} = 0,15$, a partir da Figura 14-11, e $C_e = 1$. Portanto, da Equação (14-30),

$$K_m = 1 + (1)[0,0577(1) + 0,15(1)] = 1,208$$

(*a*) **Flexão dos dentes do pinhão.** Substituindo os termos apropriados na Equação (14-15), mediante o uso de P_t, obtemos

$$(\sigma)_P = \left(W^t K_o K_v K_s \frac{P_t}{F}\frac{K_m K_B}{J}\right)_P = 142,7(1)1,404(1,043)\frac{8,66}{1,5}\frac{1,208(1)}{0,423}$$

$$= 3445 \text{ psi}$$

Substituindo os termos apropriados ao pinhão na Equação (14-41), obtemos

Resposta

$$(S_F)_P = \left(\frac{S_t Y_N/(K_T K_R)}{\sigma}\right)_P = \frac{31\,350(0,977)/[1(0,85)]}{3445} = 10,5$$

Flexão dos dentes da coroa. Substituindo os termos apropriados à coroa na Equação (14-15), obtemos

$$(\sigma)_G = 142,7(1)1,404(1,052)\frac{8,66}{1,5}\frac{1,208(1)}{0,529} = 2779 \text{ psi}$$

Substituindo os termos apropriados à coroa na Equação (14-41), obtemos

Solução

$$(S_F)_G = \frac{28\,260(0,996)/[1(0,85)]}{2779} = 11,9$$

(*b*) **Desgaste dos dentes do pinhão.** Substituindo os termos apropriados ao pinhão na Equação (14-16), obtemos

$$(\sigma_c)_P = C_p\left(W^t K_o K_v K_s \frac{K_m}{d_P F}\frac{C_f}{I}\right)_P^{1/2}$$

$$= 2300\left[142,7(1)1,404(1,043)\frac{1,208}{1,963(1,5)}\frac{1}{0,195}\right]^{1/2} = 48\,230 \text{ psi}$$

Substituindo os termos apropriados ao pinhão na Equação (14-42), obtemos

Resposta

$$(S_H)_P = \left(\frac{S_c Z_N/(K_T K_R)}{\sigma_c}\right)_P = \frac{106\,400(0,948)/[1(0,85)]}{48\,230} = 2,46$$

Desgaste dos dentes. O único termo na Equação (14-16) que sofre modificação, no caso da coroa, é K_s. Logo,

$$(\sigma_c)_G = \left[\frac{(K_s)_G}{(K_s)_P}\right]^{1/2}(\sigma_c)_P = \left(\frac{1,052}{1,043}\right)^{1/2} 48\,230 = 48\,440 \text{ psi}$$

Substituindo os termos apropriados à coroa na Equação (14-42), com $C_H = 1,005$, obtemos

Resposta

$$(S_H)_G = \frac{93\,500(0,973)1,005/[1(0,85)]}{48\,440} = 2,22$$

(*c*) Para o pinhão, comparamos S_F com S_H^2, ou 10,5 com $2,46^2 = 6,05$, de modo que o risco para ele provém do desgaste. Para a coroa, comparamos S_F com S_H^2, ou 11,9 com $2,22^2 = 4,93$, de modo que o risco, aqui, também provém do desgaste da coroa. Para o engranzamento do conjunto, o desgaste, portanto, tem o controle.

Agora que os exemplos conferiram aos parâmetros da AGMA substância, é hora de examinar algumas relações desejáveis (e necessárias) entre as propriedades materiais de engrenagens de dentes retos engranzadas. Sob flexão, as equações AGMA são dispostas lado a lado:

$$\sigma_P = \left(W^t K_o K_v K_s \frac{P_d}{F} \frac{K_m K_B}{J}\right)_P \qquad \sigma_G = \left(W^t K_o K_v K_s \frac{P_d}{F} \frac{K_m K_B}{J}\right)_G$$

$$(S_F)_P = \left(\frac{S_t Y_N/(K_T K_R)}{\sigma}\right)_P \qquad (S_F)_G = \left(\frac{S_t Y_N/(K_T K_R)}{\sigma}\right)_G$$

Igualando os fatores de segurança, realizando a substituição dos termos de tensão e resistência, cancelando termos idênticos (K_s virtual ou exatamente igual) e solucionando para $(S_t)_G$, temos

$$(S_t)_G = (S_t)_P \frac{(Y_N)_P}{(Y_N)_G} \frac{J_P}{J_G} \tag{a}$$

O fator de ciclagem de tensão Y_N provém da Figura 14-14, na qual, para uma dureza particular, $Y_N = \alpha N^\beta$. Para o pinhão, $(Y_N)_P = \alpha N_P^\beta$ e, para a coroa, $(Y_N)_G = \alpha(N_P/m_G)^\beta$. Ao substituir esses termos na Equação (*a*) e simplificando, chegamos a

$$(S_t)_G = (S_t)_P m_G^\beta \frac{J_P}{J_G} \tag{14-44}$$

Normalmente, $m_G > 1$ e $J_G > J_P$, de modo que a Equação (14-44) mostra que a coroa pode ser menos forte (menor dureza Brinell) que o pinhão para o mesmo fator de segurança.

EXEMPLO 14-6

Em um conjunto de engrenagens cilíndricas de dentes retos, um pinhão de 18 dentes, com passo 16, 20° e profundidade completa, engranza com uma coroa de 64 dentes. Ambos, coroa e pinhão, são feitos de aço grau 1 endurecido por completo. Usando $\beta = -0{,}023$, que dureza pode ter a coroa para o mesmo fator de segurança?

Solução

Para um aço de grau 1 endurecido por completo, a resistência do pinhão $(S_t)_P$ é apresentada na Figura 14-2:

$$(S_t)_P = 77{,}3(300) + 12\,800 = 35\,990 \text{ psi}$$

A partir da Figura 14-6, os fatores de forma são $J_P = 0{,}32$ e $J_G = 0{,}41$. A Equação (14-44) resulta em

$$(S_t)_G = 35\,990\left(\frac{64}{18}\right)^{-0{,}023} \frac{0{,}32}{0{,}41} = 27\,280 \text{ psi}$$

Utilize novamente a equação na Figura 14-2.

Resposta

$$(H_B)_G = \frac{27\,280 - 12\,800}{77{,}3} = 187 \text{ Brinell}$$

As equações de tensão de contato AGMA também são dispostas lado a lado:

$$(\sigma_c)_P = C_p \left(W^t K_o K_v K_s \frac{K_m}{d_P F} \frac{C_f}{I}\right)_P^{1/2} \qquad (\sigma_c)_G = C_p \left(W^t K_o K_v K_s \frac{K_m}{d_P F} \frac{C_f}{I}\right)_G^{1/2}$$

$$(S_H)_P = \left(\frac{S_c Z_N/(K_T K_R)}{\sigma_c}\right)_P \qquad (S_H)_G = \left(\frac{S_c Z_N C_H/(K_T K_R)}{\sigma_c}\right)_G$$

Igualando os fatores de segurança, substituindo as relações de tensão e cancelando termos idênticos, incluindo K_s, temos, após solucionarmos para $(S_c)_G$,

$$(S_c)_G = (S_c)_P \frac{(Z_N)_P}{(Z_N)_G}\left(\frac{1}{C_H}\right)_G = (S_C)_P m_G^{\beta}\left(\frac{1}{C_H}\right)_G$$

em que, tal como no desenvolvimento da Equação (14-44), $(Z_N)_P/(Z_N)_G = m_G^{\beta}$, sendo que o valor de β para desgaste provém da Figura 14-15. Uma vez que C_H está tão próximo da unidade, é geralmente desconsiderado; logo,

$$(S_c)_G = (S_c)_P m_G^{\beta} \tag{14-45}$$

EXEMPLO 14-7

Para $\beta = -0{,}056$ para um aço endurecido por completo de grau 1, continue o Exemplo 14-6, visando considerar o desgaste.

Solução

A partir da Figura 14-5,

$$(S_c)_P = 322(300) + 29\,100 = 125\,700 \text{ psi}$$

A partir da Figura (14-45),

$$(S_c)_G = (S_c)_P\left(\frac{64}{18}\right)^{-0.056} = 125\,700\left(\frac{64}{18}\right)^{-0.056} = 117\,100 \text{ psi}$$

Resposta

$$(H_B)_G = \frac{117\,100 - 29\,200}{322} = 273 \text{ Brinell}$$

que é ligeiramente menor que a dureza do pinhão de 300 Brinell.

As Equações (14-44) e (14-45) também podem ser aplicadas a engrenagens helicoidais.

14-19 Projeto de um Par de Engrenagens

Um conjunto de decisões úteis para engrenagens cilíndricas de dentes retos e helicoidais inclui

- Função: carga, velocidade, confiabilidade, vida, K_o
- Risco não-quantificável: fator de projeto n_d
- Sistema de dentes: ϕ, ψ, adendo, dedendo, raio do filete de raiz
- Razão de engrenamento m_G, N_p, N_G
- Número de qualidade Q_v

} decisões *a priori*

- Passo diametral P_d
- Largura de face F
- Material do pinhão, dureza de núcleo, dureza de superfície
- Material da coroa, dureza de núcleo, dureza de superfície

} decisões de projeto

O primeiro item a ser observado é a dimensão do conjunto de decisões. Há quatro categorias de decisões de projeto – oito decisões diferentes, se você contá-las separadamente. Esse é um número maior que o que encontramos antes. É importante utilizar uma estratégia de projeto que seja conveniente tanto do ponto de vista de implementação manual quanto do computacional. As decisões de projeto foram dispostas segundo sua ordem de importância (impacto na quantidade de trabalho a ser refeito via iterações). Os passos são, depois que as decisões *a priori* forem tomadas:

- Escolha de um passo diametral.

- Exame das implicações relativas a fatores como largura de face, diâmetros primitivos e propriedades de materiais. Caso isso não seja satisfatório, retorne à decisão referente ao passo, para modificação.
- Escolha de um material para o pinhão e exame dos requerimentos de dureza interna e superficial. Caso isso não seja satisfatório, deve-se retornar à decisão referente ao passo e iterar até que mais nenhuma decisão tenha de ser modificada.
- Escolha de um material para a coroa e exame dos requerimentos de dureza de núcleo e superfície. Caso isso não seja satisfatório, deve-se retornar à decisão referente ao passo e iterar até que mais nenhuma decisão tenha de ser modificada.

Com esses passos de plano em mente, podemos considerá-los detalhadamente.
A princípio, selecione um passo diametral tentativo.

Flexão do pinhão:

- Selecione uma largura de face mediana para este passo, $4\pi/P$
- Encontre o intervalo de limites de resistência necessários
- Escolha um material e uma dureza de núcleo
- Encontre uma largura de face que satisfaça ao fator de segurança em flexão
- Escolha uma largura de face
- Verifique o fator de segurança sob flexão

Flexão da coroa:

- Encontre a dureza de núcleo necessária
- Escolha um material e uma dureza de núcleo
- Verifique o fator de segurança sob flexão

Desgaste do pinhão:

- Encontre a resistência S_c necessária e a dureza superficial correspondente
- Escolha uma dureza superficial
- Verifique o fator de segurança sob desgaste

Desgaste da coroa:

- Encontre a dureza superficial correspondente
- Escolha uma dureza superficial
- Verifique o fator de segurança sob desgaste

Completar esse conjunto de passos produzirá um projeto satisfatório. Projetos adicionais, com passos diametrais adjacentes ao primeiro projeto satisfatório, produzirão vários outros projetos que poderemos escolher. Uma figura de mérito é necessária para que possamos escolher o melhor. Infelizmente, tal figura no projeto de engrenagens é complexa em um meio acadêmico, uma vez que custos de material e processamento variam. A possibilidade de utilizar um processo depende das instalações de fabricação quando as engrenagens são produzidas em casa.

Após examinar os Exemplos 14-4 e 14-5 e observar o grande intervalo de fatores de segurança, pode-se considerar a noção de estabelecer todos os fatores de segurança iguais.[9] Em engrenagens de aço, o desgaste normalmente exerce o controle e $(S_H)_P$ e $(S_H)_G$ podem ser feitos aproximadamente unitários. O uso de núcleos menos duros pode diminuir $(S_F)_P$ e $(S_F)_G$; no entanto, é importante mantê-los maiores. Um dente quebrado por fadiga flexional não apenas pode destruir um conjunto de engrenagens, como também fletir eixos, danificar mancais e produzir tensões inerciais para trás e para a frente no trem de transmissão, acarretando dano em outro ponto, caso a caixa de engrenagens emperre.

[9] Ao projetar engrenagens, faz sentido definir o fator de segurança ao desgaste como $(S)_H^2$ para dentes não-encurvados, de modo que não haja chance de confusão. A ANSI, no prefácio à ANSI/AGMA 2001-C95 e 2101-C95, declara: "o uso é totalmente voluntário (...) não proíbe qualquer pessoa de empregar (...) procedimentos (...) que não se conformem às normas".

EXEMPLO 14-8

Projete uma redução de 4:1 envolvendo engrenagens cilíndricas de dentes retos para um motor trifásico de indução com gaiola de esquilo de 100 hp de potência rodando a 1120 rpm. A carga é suave, proporcionando uma confiabilidade de 0,95 a 10^9 revoluções do pinhão. O espaço para as engrenagens é pequeno. Utilize, como material, Nitralloy 135M de grau 1, para manter pequeno o tamanho das engrenagens. Estas sofrem tratamento térmico antes da nitretação.

Solução

Tome as seguintes decisões iniciais:

- Função: 100 hp, 1120 rpm, $R = 0{,}95$, $N = 10^9$ ciclos, $K_o = 1$
- Fator de projeto para exigências não-quantificadas: $n_d = 2$
- Sistema de dentes: $\phi = 20°$
- Número de dentes: $N_P = 18$ dentes, $N_G = 72$ dentes (sem interferência)
- Número de qualidade: $Q_v = 6$, utilize material de grau 1
- Assuma $m_B \geq 1{,}2$ na Equação (14-40), $K_B = 1$

Passo: Selecione um diâmetro primitivo tentativo de $P_d = 4$ dentes/in. Assim, $d_P = 18/4 = 4{,}5$ in e $d_G = 72/4 = 18$ in. A partir da Tabela 14-2, $Y_P = 0{,}309$, $Y_G = 0{,}4324$ (interpolado). A partir da Figura 14-6, $J_P = 0{,}32$, $J_G = 0{,}415$.

$$V = \frac{\pi d_P n_P}{12} = \frac{\pi(4{,}5)1120}{12} = 1319 \text{ ft/min}$$

$$W^t = \frac{33\,000H}{V} = \frac{33\,000(100)}{1319} = 2502 \text{ lbf}$$

A partir das Equações (14-28) e (14-27),

$$B = 0{,}25(12 - Q_v)^{2/3} = 0{,}25(12 - 6)^{2/3} = 0{,}8255$$

$$A = 50 + 56(1 - 0{,}8255) = 59{,}77$$

$$K_v = \left(\frac{59{,}77 + \sqrt{1319}}{59{,}77}\right)^{0{,}8255} = 1{,}480$$

A partir da Equação (14-38), $K_R = 0{,}658 - 0{,}0759\ln(1 - 0{,}95) = 0{,}885$. A partir da Figura 14-4,

$$(Y_N)_P = 1{,}3558(10^9)^{-0{,}0178} = 0{,}938$$

$$(Y_N)_G = 1{,}3558(10^9/4)^{-0{,}0178} = 0{,}961$$

A partir da Figura 14-15,

$$(Z_N)_P = 1{,}4488(10^9)^{-0{,}023} = 0{,}900$$

$$(Z_N)_G = 1{,}4488(10^9/4)^{-0{,}023} = 0{,}929$$

A partir da recomendação subseqüente à Equação (14-8), $3p \leq F \leq 5p$. Tente $F = 4p = 4\pi/P = 4\pi/4 = 3{,}14$ in. A partir da Equação (a), Seção 14-10,

$$K_s = 1{,}192\left(\frac{F\sqrt{Y}}{P}\right)^{0{,}0535} = 1{,}192\left(\frac{3{,}14\sqrt{0{,}309}}{4}\right)^{0{,}0535} = 1{,}140$$

A partir das Equações (14-31), (14-33), (14-35), $C_{mc} = C_{pm} = C_e = 1$. A partir da Figura 14-11, $C_{ma} = 0{,}175$ para unidades de engrenagens comerciais fechadas. A partir da Equação (14-32), $F/(10d_P) = 3{,}14/[10(4{,}5)] = 0{,}0698$. Logo,

$$C_{pf} = 0{,}0698 - 0{,}0375 + 0{,}0125(3{,}14) = 0{,}0715$$

A partir da Equação (14-30),

$$K_m = 1 + (1)[0{,}0715(1) + 0{,}175(1)] = 1{,}247$$

A partir da Tabela 14-8, para engrenagens de aço, $C_P = 2300\sqrt{\text{psi}}$. A partir da Equação (14-23), com $m_G = 4$ e $m_N = 1$,

$$I = \frac{\cos 20^\circ \operatorname{sen} 20^\circ}{2} \frac{4}{4+1} = 0{,}1286$$

Flexão dos dentes do pinhão Com as estimativas supramencionadas para K_s e K_m, geradas pelo passo diametral primitivo, verificamos se o engranzamento com F é controlado por considerações de flexão ou desgaste. Igualando as Equações (14-15) e (14-17), substituindo $n_d W^t$ por W^t e solucionando a equação para a largura de face $(F)_{\text{bend}}$ necessária para resistir à fadiga, obtemos

$$(F)_{\text{bend}} = n_d W^t K_o K_v K_s P_d \frac{K_m K_B}{J_P} \frac{K_T K_R}{S_t Y_N} \tag{1}$$

Igualando as Equações (14-16) e (14-18), substituindo $n_d W^t$ por W^t e solucionando a equação para a largura de face $(F)_{\text{wear}}$ necessária para resistir à fadiga, obtemos

$$(F)_{\text{wear}} = \left(\frac{C_p Z_N}{S_c K_T K_R}\right)^2 n_d W^t K_o K_v K_s \frac{K_m C_f}{d_P I} \tag{2}$$

A partir da Tabela 14-5, o intervalo de durezas do Nitralloy 135M é o Rockwell C32-36 (302-335 Brinell). Considerando possível de ser obtida uma dureza de meio de intervalo, utilizamos 320 Brinell. A partir da Figura 14-4,

$$S_t = 86{,}2(320) + 12\,730 = 40\,310 \text{ psi}$$

Inserindo o valor numérico de S_t na Equação (1), para estimar a largura de face, obtemos

$$(F)_{\text{bend}} = 2(2502)(1)1{,}48(1{,}14)4\frac{1{,}247(1)(1)0{,}885}{0{,}32(40\,310)0{,}938} = 3{,}08 \text{ in}$$

A partir da Tabela 14-6 para o Nitralloy 135M, $S_c = 170\,000$ psi. Inserindo este na Equação (2), encontramos

$$(F)_{\text{wear}} = \left(\frac{2300(0{,}900)}{170\,000(1)0{,}885}\right)^2 2(2502)1(1{,}48)1{,}14\frac{1{,}247(1)}{4{,}5(0{,}1286)} = 3{,}44 \text{ in}$$

Decisão Torne a largura da face 3,50 in. Corrija K_s e K_m:

$$K_s = 1{,}192\left(\frac{3{,}50\sqrt{0{,}309}}{4}\right)^{0.0535} = 1{,}147$$

$$\frac{F}{10d_P} = \frac{3{,}50}{10(4{,}5)} = 0{,}0778$$

$$C_{pf} = 0{,}0778 - 0{,}0375 + 0{,}0125(3{,}50) = 0{,}0841$$

$$K_m = 1 + (1)[0{,}0841(1) + 0{,}175(1)] = 1{,}259$$

A tensão de flexão induzida por W^t sob flexão, a partir da Equação (14-15), é

$$(\sigma)_P = 2502(1)1{,}48(1{,}147)\frac{4}{3{,}50}\frac{1{,}259(1)}{0{,}32} = 19\,100 \text{ psi}$$

O fator de segurança sob flexão do pinhão, a partir da Equação (14-41), é

$$(S_F)_P = \frac{40\,310(0{,}938)/[1(0{,}885)]}{19\,100} = 2{,}24$$

Decisão

Flexão do dente da coroa Utilize uma coroa fundida em razão do diâmetro primitivo de 18 in. Utilize o mesmo material, tratamento térmico e nitretação. A tensão de flexão induzida pela carga está na razão de J_P/J_G. Então,

$$(\sigma)_G = 19\,100\frac{0{,}32}{0{,}415} = 14\,730 \text{ psi}$$

O fator de segurança da coroa sob flexão é

$$(S_F)_G = \frac{40\,310(0{,}961)/[1(0{,}885)]}{14\,730} = 2{,}97$$

Desgaste do dente do pinhão A tensão de contato, fornecida pela Equação (14-46), é

$$(\sigma_c)_P = 2300\left[2502(1)1{,}48(1{,}147)\frac{1{,}259}{4{,}5(3{,}5)}\frac{1}{0{,}129}\right]^{1/2} = 118\,000 \text{ psi}$$

O fator de segurança, a partir da Equação (14-42), é

$$(S_H)_P = \frac{170\,000(0{,}900)/[1(0{,}885)]}{118\,000} = 1{,}465$$

Pela nossa definição de fator de segurança, a flexão do pinhão é $(S_F)_P = 2{,}24$ e o desgaste, $(S_H)_P^2 = (1{,}465)^2 = 2{,}15$.

Desgaste do dente da coroa A dureza da coroa e do pinhão é a mesma. Logo, a partir da Figura 14-12, $C_H = 1$, a tensão de contato na coroa é a mesma que no pinhão, $(\sigma_c)_G = 118\,000$ psi. A resistência ao desgaste é também a mesma, $S_c = 170\,000$ psi. O fator de segurança da coroa em desgaste é

$$(S_H)_G = \frac{170\,000(0{,}929)/[1(0{,}885)]}{118\,000} = 1{,}51$$

Assim, para a coroa sob flexão, $(S_F)_G = 2{,}97$ e o desgaste $(S_H)_G^2 = (1{,}51)^2 = 2{,}29$.

Borda Mantenha $m_B \geq 1{,}2$. A profundidade total é h_t = adendo + dedendo = $1/P_d + 1{,}25/P_d = 2{,}25/P_d$ = 2,25/4 = 0,5625 in. A espessura de borda t_R é

$$t_R \geq m_B h_t = 1{,}2(0{,}5625) = 0{,}675 \text{ in}$$

No projeto do material bruto da coroa, esteja certo de que a espessura da borda exceda a 0,675 in; do contrário, reveja e modifique esse projeto de engrenamento.

Esse exemplo mostrou um projeto satisfatório para um engrenamento de quatro passos. O material poderia ter mudado, assim como o passo. Há vários outros projetos satisfatórios; portanto, uma figura de mérito faz-se necessária para identificar o melhor.

Pode-se apreciar o fato de o projeto de engrenagens ser uma das aplicações iniciais dos computadores digitais na engenharia mecânica. Um programa de projeto deve ser iterativo, apresentando os resultados dos cálculos, pausando para uma decisão por parte do projetista e mostrando as conseqüências da decisão, com um elo de retorno para mudar uma decisão para melhor. O programa pode ser estruturado na forma de um sobre o outro, com a decisão de máxima influência no topo, depois percorrendo para baixo, decisão após decisão, terminando com a habilidade de se mudar a decisão corrente ou de se começar de novo. Tal programa seria um excelente projeto de aula. A eliminação de problemas na codificação reforçará seu conhecimento, adicionando flexibilidade, bem como sinais de alerta em termos subseqüentes.

As engrenagens padronizadas podem não ser o projeto mais econômico que satisfaz aos requerimentos funcionais, uma vez que nenhuma aplicação é padrão em todos os aspectos.[10] Os métodos para projetar engrenagens específicas são bem conhecidos e freqüentemente utilizados em equipamentos móveis, visando a proporcionar um bom índice peso-desempenho. Os cálculos requeridos, incluindo otimizações, estão dentro da capacidade de um computador pessoal.

[10] Ver H. W. Van Gerpen, C. K. Reece e J. K. Jensen, *Computer Aided Design of Custom Gears*, Van Gerpen-Reece Engineering, Cedar Falls, Iowa, 1996.

PROBLEMAS

Seção 14-1

ANÁLISE **14-1** Um pinhão cilíndrico de dentes retos, feito de aço, tem um passo de 6 dentes/in, 22 dentes de profundidade completa e um ângulo de pressão de 20°. Ele roda a uma velocidade de 1200 rpm e transmite 15 hp a uma coroa de 60 dentes. Se a largura de face vale 2 in, estime a tensão de flexão.

ANÁLISE **14-2** Um pinhão cilíndrico de dentes retos, feito de aço, tem um passo diametral de 12 dentes/in, 16 dentes cortados de profundidade completa, com um ângulo de pressão de 20° e uma largura de face de $\frac{3}{4}$ in. Espera-se que ele transmita 1,5 hp a uma velocidade de 700 rpm. Determine a tensão de flexão.

ANÁLISE **14-3** Um pinhão cilíndrico de dentes retos, feito de aço, tem um módulo de 1,25 mm, 18 dentes cortados em um sistema de 20° com profundidade completa e uma largura de face de 12 mm. A uma velocidade de 1800 rpm, espera-se que ele carregue uma carga fixa de 0,5 kW. Determine a tensão de flexão resultante.

ANÁLISE **14-4** Um pinhão cilíndrico de dentes retos, feito de aço, tem 15 dentes cortados em um sistema de 20° com profundidade completa, módulo de 5 mm e uma largura de face de 60 mm. Ele roda a 200 rpm e transmite 5 kW à engrenagem par, também de aço. Qual é a tensão de flexão resultante?

ANÁLISE **14-5** Um pinhão cilíndrico de dentes retos, feito de aço, um módulo de 1 mm e 16 dentes cortados a 20° em um sistema de profundidade completa, devendo suportar 0,15 kW a 400 rpm. Determine uma largura de face adequada, com base em uma tensão admissível de flexão de 150 MPa.

ANÁLISE **14-6** Um pinhão cilíndrico de aço tem 17 dentes retos cortados a 20° em profundidade completa e um módulo de 1,5 mm, devendo transmitir 0,25 kW a uma velocidade de 400 rpm. Encontre uma largura de face apropriada, se a tensão de flexão não estiver para exceder a 75 MPa.

ANÁLISE **14-7** Um pinhão cilíndrico de aço, com dentes retos cortados a 20° em profundidade completa, dispõe de passo diametral de 5 dentes/in e 24 dentes e transmite 6 hp a uma velocidade de 50 rpm. Encontre uma largura de face apropriada, se a tensão admissível de flexão for de 20 kpsi.

ANÁLISE **14-8** Um pinhão cilíndrico de aço com dentes retos deve transmitir 15 hp a uma velocidade de 600 rpm. Ele é cortado a 20° no sistema de profundidade completa, com um passo diametral de 5 dentes/in e 16 dentes. Encontre uma largura de face adequada, se a tensão admissível for de 10 kpsi.

PROJETO **14-9** Um pinhão cilíndrico de aço com dentes retos cortados a 20° em profundidade completa, e com 18 dentes, deve transmitir 2,5 hp a uma velocidade de 600 rpm. Determine os valores apropriados da largura de face e do passo diametral, com base em uma tensão admissível de flexão de 10 kpsi.

PROJETO **14-10** Um pinhão de aço com dentes retos cortados a 20° em profundidade completa deve transmitir 1,5 kW a uma velocidade de 900 rpm. Se o pinhão tiver 18 dentes, determine os valores adequados do módulo e da largura de face do mesmo. A tensão de flexão não deve exceder a 75 MPa.

Seção 14-2

ANÁLISE **14-11** Um redutor de velocidade tem dentes cortados a 20° em profundidade completa e consiste em um pinhão cilíndrico de dentes retos com 22 dentes, de aço, acionando uma coroa de ferro fundido com 60 dentes. A potência transmitida é de 15 hp, a uma velocidade de 1200 rpm do pinhão. Para um passo diametral de 6 dentes/in e uma largura de face de 2 in, encontre a tensão de contato.

ANÁLISE **14-12** Uma transmissão por engrenagens consiste em um pinhão cilíndrico com 16 dentes retos, a 20°, feito de aço, e uma coroa de 48 dentes, de ferro fundido, com um passo diametral de 12 dentes/in. Para uma potência de entrada de 1,5 hp a uma velocidade do pinhão de 700 rpm, selecione uma largura de face com base em uma tensão de contato admissível de 100 kpsi.

ANÁLISE **14-13** Um par de engrenagens tem um passo diametral de 5 dentes/in, um ângulo de pressão de 20° e um pinhão cilíndrico com 24 dentes retos acionando uma coroa de ferro fundido com 48 dentes. O pinhão deve rodar a 50 rpm. Que potência de entrada pode ser utilizada com esse conjunto de engrenagens, se a tensão de contato está limitada a 100 kpsi e $F = 2{,}5$ in?

ANÁLISE **14-14** Um pinhão cilíndrico de ferro fundido, com 20 dentes retos, a 20°, e com um módulo de 4 mm move uma coroa de ferro fundido com 32 dentes. Encontre a tensão de contato, se a velocidade do pinhão for de 1000 rpm, se a largura de face for de 50 mm e se 10 kW de potência estiverem sendo transmitidos.

ANÁLISE **14-15** Um pinhão e uma coroa de aço têm um passo diametral de 12 dentes/in, dentes fresados, 17 e 30 dentes, respectivamente, e um ângulo de pressão de 20°, sendo a velocidade do pinhão igual a 525 rpm. As propriedades dos dentes são $S_{ut} = 76$ kpsi, $S_y = 42$ kpsi e a dureza Brinell é 149. Para um fator de projeto de 2,25, com uma largura de face de $\frac{7}{8}$ in, qual é a capacidade de potência do conjunto de engrenagens?

ANÁLISE **14-16** Um par de pinhão e coroa de aço com dentes fresados tem S_{ut} = 113 kpsi, S_y = 86 kpsi e uma dureza na superfície da evolvente igual a 262 Brinell. O passo diametral é de 3 dentes/in, a largura de face, de 2,5 in; e a velocidade do pinhão é de 870 rpm. Os números de dentes são 20 e 100. Para um fator de projeto de 1,5, estime a capacidade de potência do conjunto considerando tanto a flexão como o desgaste.

ANÁLISE **14-17** Um pinhão cilíndrico de dentes retos, cortados a 20° em profundidade completa, feito de aço, roda a 1145 rpm. Ele tem um módulo de 6 mm, uma largura de face de 75 mm e 16 dentes fresados. O limite de resistência à tração na evolvente é de 900 MPa, exibindo uma dureza de 260 Brinell. A coroa é feita de aço, com 30 dentes, e tem resistência material idêntica. Para um fator de projeto de 1,3, encontre a capacidade de potência do conjunto considerando a resistência do pinhão e da coroa à fadiga por flexão e desgaste.

ANÁLISE **14-18** Um pinhão cilíndrico de dentes retos, feito de aço, tem um passo de 6 dentes/in, 17 dentes fresados em altura completa e um ângulo de pressão de 20°. Tal pinhão tem um limite de resistência à tração, na superfície da evolvente, igual a 116 kpsi, uma dureza Brinell de 232 e uma resistência ao escoamento igual a 90 kpsi. A velocidade do seu eixo é de 1120 rpm; sua largura de face é de 2 in; e sua engrenagem par tem 51 dentes. Estime a capacidade de transmitir a potência desse pinhão, se o fator de projeto valer 2.

(*a*) Que limitação impõe a fadiga flexional do pinhão?

(*b*) Que limitação impõe a fadiga superficial do pinhão? A coroa apresenta resistências idênticas às do pinhão, no que diz respeito às propriedades do material.

(*c*) Considere as limitações de potência referentes à flexão e ao desgaste da coroa.

(*d*) Estime a capacidade do conjunto de engrenagens.

Seções 14-3 a 14-19

ANÁLISE **14-19** Uma transmissão comercial fechada consiste em um pinhão cilíndrico de dentes retos cortados a 20°, com 16 dentes acionando uma coroa de 48 dentes. A velocidade do pinhão é de 300 rpm; a largura de face, de 2 in; e o passo diametral, de 6 dentes/in. As engrenagens são feitas de aço grau 1, endurecidas por completo a 200 Brinell, feitas para cumprir os padrões de qualidade nº 6, sem coroamento, devendo ser precisa e rigidamente montadas. Considere uma vida de 10^8 ciclos para o pinhão e uma confiabilidade de 0,90. Determine as tensões de flexão e contato AGMA, bem como os fatores de segurança correspondentes, se 5 hp for a potência a ser transmitida.

ANÁLISE **14-20** Um pinhão cilíndrico com 20 dentes cortados a 20° e um módulo de 2,5 mm transmite 120 W a uma coroa de 36 dentes. A velocidade do pinhão é de 100 rpm e as engrenagens são de aço grau 1, com 18 mm de largura de face, endurecidas por completo a 200 Brinell, sem coroamento, manufaturadas a um padrão de qualidade nº 6 e consideradas de qualidade aberta com relação à instalação. Encontre as tensões de flexão e contato, bem como os correspondentes fatores de segurança para uma vida do pinhão de 10^8 ciclos e confiabilidade de 0,95.

ANÁLISE **14-21** Repita o Problema 14-19 utilizando engrenagens helicoidais, cada qual com um ângulo de pressão normal de 20° e um ângulo de hélice de 30°, além de um passo diametral normal de 6 dentes/in.

ANÁLISE **14-22** Um par de engrenagens cilíndricas de dentes retos consiste em um pinhão de 17 dentes e uma coroa de 51 dentes. O ângulo de pressão é de 20° e o fator de sobrecarga, K_o = 1. O passo diametral é de 6 dentes/in e a largura de face, de 2 in. A velocidade do pinhão é de 1120 rpm, e sua vida em ciclos deve ser de 10^8 revoluções, com confiabilidade R = 0,99. O número de qualidade é 5. O material é aço grau 1, endurecido por completo, com dureza interior e de superfície igual a 232 Brinell – tanto para o pinhão quanto para a coroa. Para um fator de projeto igual a 2, estime a capacidade desse conjunto de engrenagens para tais condições utilizando o método AGMA.

ANÁLISE **14-23** Na Seção 14-10, a Equação (*a*) é apresentada para K_s, com base no procedimento do Exemplo 14-2. Derive essa equação.

14-24 Um redutor de velocidade tem dentes de profundidade completa, com 20°, um estágio de redução envolvendo um pinhão cilíndrico com 22 dentes retos e uma coroa com 60 dentes. O passo diametral é de 4 dentes/in e a largura de face, de $3\frac{1}{4}$ in. A velocidade do eixo do pinhão é de 1145 rpm. A vida pretendida de cinco anos, com turnos de 24 horas diárias de trabalho, corresponde a cerca de $3(10^9)$ revoluções do pinhão. O valor absoluto da variação de passo é tal que o número de nível de precisão da transmissão é 6. O material de ambas as engrenagens, interior e de superfície, consiste em aço 4340 grau 1, endurecido por completo, tratado termicamente para atingir a dureza de 250 Brinell. A carga envolve choques moderados, e a potência é suave. Para uma confiabilidade de 0,99, estime a capacidade do redutor de velocidades quanto à potência.

ANÁLISE **14-25** O redutor de velocidade do Problema 14-24 deve ser utilizado em uma aplicação que requer 40 hp a 1145 rpm. Estime as tensões de flexão e desgaste no pinhão e na coroa, bem como os fatores de segurança AGMA associados às mesmas, $(S_F)_P$, $(S_F)_G$, $(S_H)_P$ e $(S_H)_G$. Para o redutor, qual é o fator de segurança referente a variações não-quantificáveis de W^t? Que modo de falha oferece maior risco?

ANÁLISE **14-26** O conjunto de engrenagens do Problema 14-24 requer melhorias quanto ao desgaste. Nesse sentido, as engrenagens são nitretadas de modo que os materiais grau 1 passam a ter as seguintes durezas: a dureza interior do pinhão é de 250 e a dureza superficial, de 390 Brinell; ao passo que a dureza interior da coroa é de 250 e a dureza superficial, de 390. Estime a capacidade de potência desse novo conjunto de engrenagens.

ANÁLISE **14-27** O conjunto de engrenagens do Problema 14-24 teve suas especificações modificadas para incluir carbonetação 9310 e endurecimento superficial, resultando, portanto, em uma dureza Brinell interior do pinhão igual a 285, ficando a dureza superficial do mesmo no intervalo 580-600, ao passo que, no caso da coroa, a dureza interior ficou em 285 e a de superfície, no intervalo 580-600. Estime a capacidade de potência desse novo conjunto.

ANÁLISE **14-28** O conjunto de engrenagens do Problema 14-27 deve ser melhorado com relação ao seu material, para alcançar uma qualidade de aço grau 2 9310. Estime a capacidade de potência do novo conjunto de engrenagens.

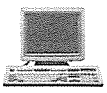
14-29 Questões envolvendo escala sempre melhoram a percepção e a perspectiva. Reduza o tamanho físico do conjunto de engrenagens no Problema 14-24 pela metade e observe o resultado das estimativas de força transmitida W^t e de potência.

ANÁLISE **14-30** Os procedimentos AGMA com pares de engrenagens de ferro fundido diferem daqueles com aço, já que prever a vida nessas circunstâncias é difícil; conseqüentemente, $(Y_N)_P$, $(Y_N)_G$, $(Z_N)_P$ e $(Z_N)_G$ são tidos como unitários. Como resultado disso, as resistências à fadiga dos materiais de pinhão e coroa são as mesmas. A confiabilidade é de 0,99 e a vida, de 10^7 revoluções do pinhão ($K_R = 1$). Para vidas mais longas, a estimativa de capacidade é diminuída. Para o pinhão e a coroa do Problema 14-24, utilize ferro fundido grau 40 para ambas as engrenagens ($H_B = 201$ Brinell). Estime a capacidade de potência do redutor com S_F e S_H unitários.

ANÁLISE **14-31** Engrenagens cilíndricas de dentes retos têm contato envolvendo rolamento e deslizamento (freqüentemente, cerca de 8% desse último). Tais engrenagens, testadas à falha por contato, são reportadas à ocasião de 10^8 ciclos por meio do fator carga-tensão para fadiga superficial de Buckingham K. Esse fator é relacionado à resistência de contato hertziana S_C mediante

$$S_C = \sqrt{\frac{1{,}4K}{(1/E_1 + 1/E_2)\operatorname{sen}\phi}}$$

em que ϕ é o ângulo de pressão normal. Engrenagens de ferro fundido de grau 20, com $\phi = 14\frac{1}{2}^\circ$ e 20° de ângulo de pressão, exibem um valor mínimo de K de 81 e 112 psi, respectivamente. Como isso se compara a $S_C = 0{,}32H_B$ kpsi?



14-32 Você deve provavelmente ter notado que, embora o método AGMA seja baseado em somente duas equações, os detalhes relativos à composição de todos os fatores são computacionalmente intensos. A fim de reduzir erros e omissões, um programa de computador seria útil. Escreva um programa para desenvolver a estimativa de capacidade em potência de um conjunto de engrenagens existente; então, utilize os Problemas 14-24 e 14-26 a 14-29 para testar seu programa, comparando os resultados do mesmo com as suas extensas soluções desenvolvidas à mão.

ANÁLISE **14-33** No Exemplo 14-5, utilize aço nitretado grau 1 (4140), que produz durezas Brinell interiores de 250 e de superfície iguais a 500. Utilize as curvas superiores de fadiga das Figuras 14-14 e 14-15. Estime a capacidade de potência do engranzamento com fatores de segurança de $S_F = S_H = 1$.

ANÁLISE **14-34** No Exemplo 14-5, utilize engrenagens de grau 1 carbonetadas e endurecidas superficialmente. A carbonetação e o endurecimento superficial podem produzir uma dureza superficial de 550 Brinell. As durezas interiores são de 200 Brinell. Estime a capacidade em potência do engranzamento com fatores de segurança de $S_F = S_H = 1$, utilizando as curvas inferiores de fadiga nas Figuras 14-14 e 14-15.

ANÁLISE **14-35** No Exemplo 14-5, utilize engrenagens de aço grau 2 carbonetadas e endurecidas superficialmente. As durezas interiores são de 200 Brinell, ao passo que as superficiais são de 600 Brinell. Utilize as curvas inferiores de fadiga nas Figuras 14-14 e 14-15. Estime a capacidade em potência do engranzamento empregando $S_F = S_H = 1$. Compare a capacidade em potência com os resultados do Problema 14-34.

CAPÍTULO

15 Engrenagens Cônicas e Sem-Fim

15-1 Engrenagens Cônicas – Geral 728
15-2 Tensões e Resistências em Engrenagens Cônicas 729
15-3 Fatores para Equação AGMA 733
15-4 Análise de Engrenagens Cônicas de Dentes Retos 744
15-5 Projeto de um Conjunto de Engrenagens Cônicas de Dentes Retos 747
15-6 Engrenagens Sem-Fim – Equação AGMA 750
15-7 Análise de Engrenagens Sem-Fim 753
15-8 Projeto de um Par Sem-Fim 757
15-9 Carga de Desgaste de Buckingham 760

A American Gear Manufacturers Association (AGMA) estabeleceu padrões destinados à análise e ao projeto dos vários tipos de engrenagens cônicas e sem-fim. O Capítulo 14 constituiu-se em uma introdução aos métodos utilizados, por essa organização, para engrenagens cilíndricas de dentes retos e engrenagens helicoidais. A AGMA estabeleceu métodos similares para outros tipos de engrenagens, os quais seguem o mesmo procedimento geral.

15-1 Engrenagens Cônicas – Geral

As engrenagens cônicas podem ser classificadas como segue:

- Engrenagens cônicas de dentes retos
- Engrenagens cônicas espirais
- Engrenagens cônicas zerol
- Engrenagens hiperbolóides (ou, abreviadamente, hipóides)
- Engrenagens espiróides

Uma engrenagem cônica de dentes retos foi ilustrada na Figura 13-35. Tais engrenagens são utilizadas geralmente para velocidades na linha primitiva de até 1000 ft/min (5 m/s), quando o nível de ruído não constitui uma consideração importante. Elas estão disponíveis em muitos tamanhos comerciais e apresentam um custo de produção menor que o de outras engrenagens cônicas, especialmente se em pequenas quantidades.

Uma *engrenagem cônica espiral* é mostrada na Figura 15-1; a definição do *ângulo de espiral*, por sua vez, é mostrada na Figura 15-2. Essas engrenagens são recomendadas para velocidades maiores e para onde o nível de barulho for importante. As engrenagens cônicas espirais são a contraparte cônica da engrenagem helicoidal; pode-se verificar, na Figura 15-1, que as superfícies primitivas e a natureza do contato são as mesmas que aquelas que ocorrem com engrenagens cônicas de dentes retos, exceto pelas diferenças trazidas pelos dentes com forma espiral.

A *engrenagem cônica zerol* é uma engrenagem patenteada com dentes curvos, mas com ângulo de espiral nulo. Os esforços axiais permissíveis, em se tratando de engrenagens cônicas zerol, não são tão altos quanto aqueles das engrenagens cônicas espirais; portanto, elas são freqüentemente utilizadas em lugar das engrenagens cônicas de dentes retos. A engrenagem cônica zerol é gerada pela mesma ferramenta empregada para engrenagens cônicas de espiral regular. Para propósitos de projeto, utilize o mesmo procedimento indicado para engrenagens cônicas de dentes retos, substituindo, ao final, a engrenagem por uma zerol.

Costuma ser desejável, como ocorre no caso de aplicações envolvendo diferenciais automotivos, utilizar engrenagens como as cônicas, mas com os eixos deslocados, inversos. Tais engrenagens são conhecidas como *engrenagens hiperbolóides*, uma vez que suas superfícies primitivas são hiperbolóides de revolução. A interação entre os dentes de tais engrenagens consiste em uma combinação de rolamento com deslizamen-

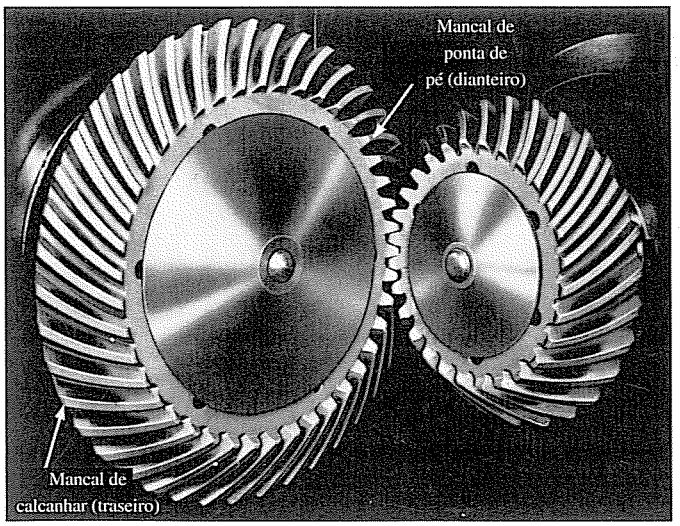


Figura 15-1 Engrenagens cônicas espirais. (*Cortesia de Gleason Works, Rochester, N.Y.*)

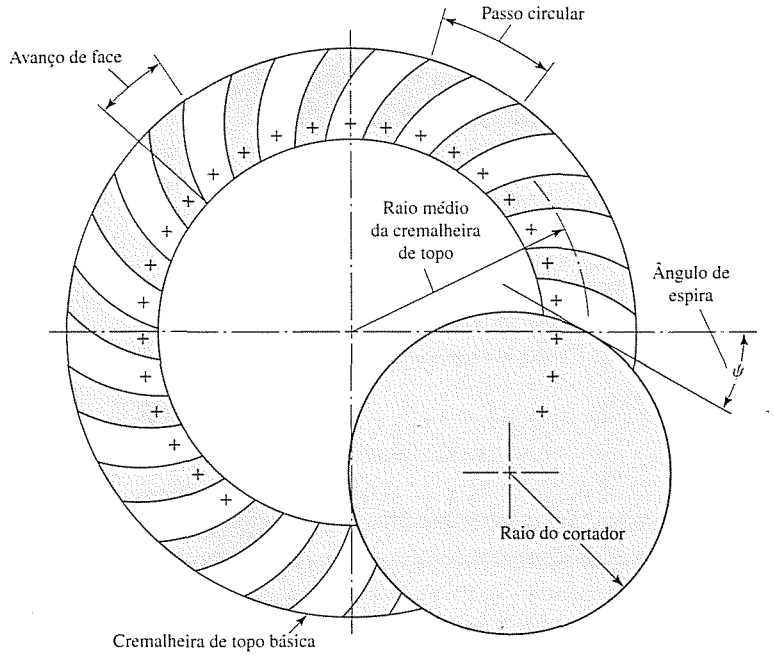


Figura 15-2 Corte de dentes de engrenagens cônicas espirais sobre a cremalheira de topo (coroa) básica.

to ao longo de uma linha reta e tem muito em comum com o que ocorre no caso de engrenagens sem-fim. A Figura 15-3 mostra um par de engrenagens hiperbolóides engranzadas.

A Figura 15-4, por sua vez, é incluída para auxiliar na classificação de engrenagens cônicas em espiral. Pode-se observar que a engrenagem hiperbolóide tem um deslocamento de centro de eixo relativamente pequeno. Para deslocamentos maiores, o pinhão começa a parecer com um parafuso sem-fim em cone, e o conjunto, nesse caso, é conhecido como *engrenagens espiróides.*

15-2 Tensões e Resistências em Engrenagens Cônicas

Em uma montagem de engrenagens cônicas típica, Figura 13-36, por exemplo, uma das engrenagens é com freqüência montada em balanço. Isso significa que as deflexões do eixo podem ser mais pronunciadas e ter um maior efeito na natureza do contato entre os dentes. Uma outra dificuldade que ocorre ao se preverem as

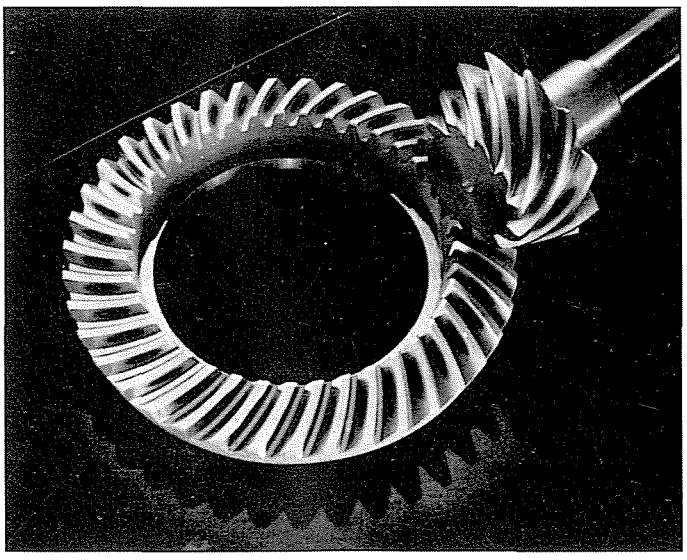


Figura 15-3 Engrenagens hiperbolóides. (*Cortesia de Gleason Works, Rochester, N.Y.*)

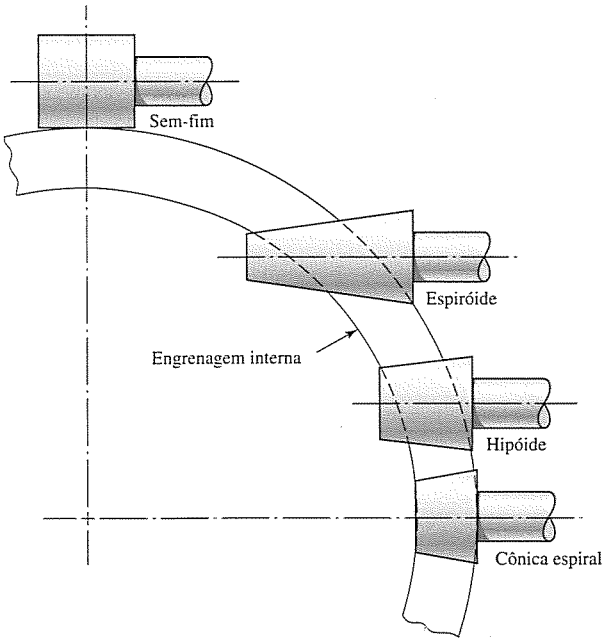


Figura 15-4 Comparação de engrenagens entre eixos interceptantes e inversos do tipo cônico. *(Extraída de* Gear Handbook, *de Darle W. Dudley, 1962, p. 2-24.)*

tensões em dentes de engrenagens cônicas de dentes retos está no fato de que os dentes são afunilados. Assim, para atingir um contato perfeito de linha passando pelo centro do cone, os dentes têm de defletir mais na extremidade maior do que na menor. Para se obter tal condição, é necessário que a carga seja proporcionalmente maior na extremidade maior. Devido a esse caráter variável da carga ao longo da face do dente, é desejável uma largura de face razoavelmente pequena.

Em razão da complexidade das engrenagens cônicas de dentes retos, espirais, zerol, hiperbolóides e espiróides, assim como por causa de limitações de espaço, apenas uma parte da padronização aplicável, aquela referente a engrenagens cônicas de dentes retos, será apresentada aqui.[1] A Tabela 15-1 lista os símbolos utilizados na ANSI/AGMA 2003-B97.

Equação Fundamental para Tensão de Contato

$$s_c = \sigma_c = C_p \left(\frac{W^t}{F d_P I} K_o K_v K_m C_s C_{xc} \right)^{1/2} \qquad \text{(unidades habituais nos EUA)}$$

$$\sigma_H = Z_E \left(\frac{1000 W^t}{b d Z_1} K_A K_v K_{H\beta} Z_x Z_{xc} \right)^{1/2} \qquad \text{(unidades SI)} \tag{15-1}$$

Utilizaremos σ_c e σ_H para designar a tensão de contato, a fim de permanecermos de acordo com nossa notação.

Equação para Valor (Resistência) Permissível de Contato

$$s_{wc} = (\sigma_c)_{\text{all}} = \frac{s_{ac} C_L C_H}{S_H K_T C_R} \qquad \text{(unidades habituais nos EUA)}$$

$$\sigma_{HP} = \frac{\sigma_{H\,\text{lim}} Z_{NT} Z_W}{S_H K_\theta Z_Z} \qquad \text{(unidades SI)} \tag{15-2}$$

[1] As Figuras 15-5 a 15-13 e as Tabelas 15-1 a 15-7 foram extraídas da ANSI/AGMA 2003-B97, *Rating the Pitting Resistance and Bending Strength of Generated Straight Bevel, Zerol Bevel and Spiral Bevel Gear Teeth*, com permissão da editora, American Gear Manufacturers Association, 500 Montgomery Street, Suite 350, Alexandria, VA, 22314-1560.

Tabela 15-1 Símbolos utilizados nas equações de capacidade de engrenagens, padronização ANSI/AGMA 2003-B97

Símbolo AGMA	Símbolo ISO	Descrição	Unidades
A_m	R_m	Distância média de cone	in (mm)
A_0	R_e	Distância externa de cone	in (mm)
C_H	Z_W	Fator de razão de dureza para a resistência à formação de cavidades (crateramento)	
C_i	Z_i	Fator de inércia para a resistência à formação de cavidades	
C_L	Z_{NT}	Fator de ciclagem de tensão para a resistência à formação de cavidades	
C_p	Z_E	Coeficiente elástico	$[lbf/in^2]^{0,5}$ $([N/mm^2]^{0,5})$
C_R	Z_Z	Fator de confiabilidade para a resistência à formação de cavidades	
C_{SF}		Fator de serviço para a resistência à formação de cavidades	
C_S	Z_x	Fator de tamanho para a resistência à formação de cavidades	
C_{xc}	Z_{xc}	Fator de coroamento para a resistência à formação de cavidades	
D, d	d_{e2}, d_{e1}	Diâmetros primitivos externos de coroa e pinhão, respectivamente	in (mm)
E_G, E_P	E_2, E_1	Módulo de elasticidade de Young dos materiais do pinhão e da coroa, respectivamente	lbf/in^2 (N/mm^2)
e	e	Base de logaritmos naturais (Napier)	
F	b	Largura líquida de face	in (mm)
F_{eG}, F_{eP}	b'_2, b'_1	Larguras efetivas de face do pinhão e da coroa, respectivamente	in (mm)
f_P	R_{a1}	Rugosidade superficial do pinhão	μin (μm)
H_{BG}	H_{B2}	Valor da dureza mínima Brinell do material da coroa	HB
H_{BP}	H_{B1}	Valor da dureza mínima Brinell do material do pinhão	HB
h_c	$E_{ht\,min}$	Profundidade total mínima da camada superficial a meia profundidade de dente	in (mm)
h_e	h'_c	Profundidade efetiva mínima da camada superficial	in (mm)
$h_{e\,lim}$	$h'_{c\,lim}$	Limite da profundidade efetiva máxima sugerida da camada superficial a meia profundidade do dente	in (mm)
I	Z_I	Fator geométrico para a resistência à formação de cavidades	
J	Y_J	Fator geométrico para a resistência à flexão	
J_G, J_P	Y_{J2}, Y_{J1}	Fator geométrico para a resistência à flexão de coroa e pinhão, respectivamente	
K_F	Y_F	Corretor de tensão e fator de concentração	
K_i	Y_i	Fator de inércia para a resistência à flexão	
K_L	Y_{NT}	Fator de ciclagem de tensão para a resistência à flexão	
K_m	$K_{H\beta}$	Fator de distribuição de carga	
K_o	K_A	Fator de sobrecarga	
K_R	Y_z	Fator de confiabilidade da resistência à flexão	
K_S	Y_X	Fator de tamanho para a resistência à flexão	
K_{SF}		Fator de serviço para a resistência à flexão	
K_T	K_θ	Fator de temperatura	
K_v	K_v	Fator dinâmico	
K_x	Y_β	Fator de curvatura ao longo do comprimento para a resistência à flexão	
	m_{et}	Módulo transversal externo	(mm)
	m_{mt}	Módulo transversal médio	(mm)
	m_{mn}	Módulo normal médio	(mm)

(continua...)

Tabela 15-1 Símbolos utilizados nas equações de capacidade de engrenagens, padronização ANSI/AGMA 2003-B97 (*continuação*)

Símbolo AGMA	Símbolo ISO	Descrição	Unidades
m_{NI}	ε_{NI}	Razão de distribuição de carga, cavitação	
m_{NJ}	ε_{NJ}	Razão de distribuição de carga, flexão	
N	z_2	Número de dentes da coroa	
N_L	n_L	Número de ciclos de carga	
n	z_1	Número de dentes do pinhão	
n_P	n_1	Velocidade do pinhão	rpm
P	P	Potência de projeto transmitida pelo par de engrenagens	hp(kW)
P_a	P_a	Potência transmitida admissível	hp(kW)
P_{ac}	P_{az}	Potência transmitida admissível para a resistência à formação de cavidades	hp(kW)
P_{acu}	P_{azu}	Potência transmitida admissível para a resistência à formação de cavidades com fator de serviço unitário	hp(kW)
P_{at}	P_{ay}	Potência transmitida admissível para a resistência à flexão	hp(kW)
P_{atu}	P_{ayu}	Potência transmitida admissível para a resistência à flexão com fator de serviço unitário	hp(kW)
P_d		Passo diametral transversal externo	in^{-1}
P_m		Passo diametral transversal médio	in^{-1}
P_{mn}		Passo diametral normal médio	in^{-1}
Q_v	Q_v	Número de precisão da transmissão	
q	q	Expoente utilizado na fórmula do fator de curvatura ao longo do comprimento	
R, r	r_{mpt2}, r_{mpt1}	Raios primitivos transversais médios para pinhão e coroa, respectivamente	in (mm)
R_t, r_t	r_{mya2}, r_{mya1}	Raios transversais médios no ponto de aplicação de carga para a coroa e o pinhão, respectivamente	in (mm)
r_c	r_{c0}	Raio do cortador utilizado para a produção de engrenagens cônicas Zerol e de engrenagens cônicas espirais	in (mm)
s	g_c	Comprimento da linha instantânea de contato entre superfícies de dentes engranzados	in (mm)
s_{ac}	$\sigma_{H\,lim}$	Valor da tensão de contato admissível	lbf/in^2 (N/mm^2)
s_{at}	$\sigma_{F\,lim}$	Valor da tensão de flexão admissível	lbf/in^2 (N/mm^2)
s_c	σ_H	Valor calculado da tensão de contato	lbf/in^2 (N/mm^2)
s_F	s_F	Fator de segurança à flexão	
s_H	s_H	Fator de segurança ao contato	
s_t	σ_F	Valor calculado da tensão de flexão	lbf/in^2 (N/mm^2)
s_{wc}	σ_{HP}	Valor permissível da tensão de contato	lbf/in^2 (N/mm^2)
s_{wt}	σ_{FP}	Valor permissível de tensão de flexão	lbf/in^2 (N/mm^2)
T_P	T_1	Torque de operação do pinhão	lbf in (Nm)
T_T	θ_T	Temperatura de operação da engrenagem	°F (°C)
t_0	s_{ai}	Espessura normal de topo de dente em ponto mais estreito	in (mm)
U_c	U_c	Coeficiente de dureza de núcleo para engrenagem	lfb/in^2

(*continua...*)

Tabela 15-1 Símbolos utilizados nas equações de capacidade de engrenagens, padronização ANSI/AGMA 2003-B97 (*continuação*)

Símbolo AGMA	Símbolo ISO	Descrição	Unidades
			(N/mm^2)
U_H	U_H	Fator de processo de endurecimento para aço	lbf/in^2
			(N/mm^2)
v_t	v_{et}	Velocidade da linha primitiva no círculo primitivo mais externo	ft/min (m/s)
Y_{KG}, Y_{KP}	Y_{K2}, Y_{K1}	Fatores de forma de dentes, incluindo o fator de concentração de tensão para a coroa e o pinhão, respectivamente	
μ_G, μ_P	v_2, v_1	Razão de Poisson para os materiais da coroa e do pinhão, respectivamente	
ρ_o	ρ_{yo}	Raio relativo da curvatura de perfil no ponto de máxima tensão de contato entre superfícies de dentes pares	in (mm)
ϕ	α_n	Ângulo normal de pressão na superfície primitiva	
ϕ_t	α_{wt}	Ângulo transversal de pressão no ponto primitivo	
ψ	β_m	Ângulo médio de espiral na superfície primitiva	
ψ_b	β_{mb}	Ângulo médio de espiral de base	

Fonte: ANSI/AGMA 2003-B97.

Tensão de Flexão

$$s_t = \frac{W^t}{F} P_d K_o K_v \frac{K_s K_m}{K_x J} \qquad \text{(unidades habituais nos EUA)}$$

$$\sigma_F = \frac{1000 W^t}{b} \frac{K_A K_v}{m_{et}} \frac{Y_x K_{H\beta}}{Y_\beta Y_J} \qquad \text{(unidades SI)} \tag{15-3}$$

Equação para Tensão de Flexão Permissível

$$s_{wt} = \frac{s_{at} K_L}{S_F K_T K_R} \qquad \text{(unidades habituais nos EUA)}$$

$$\sigma_{FP} = \frac{\sigma_{F\,\lim} Y_{NT}}{S_F K_\theta Y_z} \qquad \text{(unidades SI)} \tag{15-4}$$

15-3 Fatores para Equação AGMA

Fator de Sobrecarga $K_o(K_A)$

O fator de sobrecarga leva em conta quaisquer cargas externas aplicadas que excedam à caga nominal transmitida. A Tabela 15-2, do Apêndice A de 2003-B97, é incluída para servir de guia.

Fatores de Segurança S_H e S_F

Os fatores de segurança S_H e S_F, como definidos na 2003-B97, são ajustes de resistência, não de carga, e conseqüentemente não podem ser utilizados como tais para determinar (por comparação) se o risco de falha decorre de fadiga de contato ou de flexão. Uma vez que W^t é o mesmo para o pinhão e a coroa, a comparação entre $\sqrt{S_H}$ e S_F permite uma comparação direta.

Fator Dinâmico K_v

Na 2003-C87, a AGMA modificou a definição de K_v para utilizar o seu recíproco, mantendo, porém, o mesmo símbolo. Outros padrões têm ainda de seguir essa alteração. O fator dinâmico K_v leva em consideração o efeito da qualidade dos dentes de engrenagem na velocidade e na carga, bem como o aumento de tensão

Tabela 15-2 Fatores de sobrecarga $K_o(K_A)$. *Fonte: ANSI/AGMA 2003-B97*

Caráter do acionador principal	Caráter da carga na máquina acionada			
	Uniforme	Choques leves	Choques médios	Choques intensos
Uniforme	1,00	1,25	1,50	1,75 ou maior
Choques leves	1,10	1,35	1,60	1,85 ou maior
Choques médios	1,25	1,50	1,75	2,00 ou maior
Choques intensos	1,50	1,75	2,00	2,25 ou maior

Nota: Esta tabela destina-se a engranzamentos com redução de velocidade. Para engranzamentos com multiplicação de velocidade, adicione $0{,}01(N/n)^2$ ou $0{,}01(z_2/z_1)^2$ aos fatores supracitados.

que se segue. A AGMA faz uso de um *número de precisão de transmissão* Q_v para descrever a acurácia com que perfis de dentes são espaçados ao longo do círculo primitivo. A Figura 15-5 exibe graficamente como a velocidade nesse círculo e o número de precisão de transmissão se relacionam com o fator dinâmico K_v. Os ajustes de curvas correspondem a

$$K_v = \left(\frac{A + \sqrt{v_t}}{A}\right)^B \qquad \text{(unidades habituais nos EUA)}$$
$$K_v = \left(\frac{A + \sqrt{200 v_{et}}}{A}\right)^B \qquad \text{(unidades SI)} \tag{15-5}$$

em que

$$A = 50 + 56(1 - B)$$
$$B = 0{,}25(12 - Q_v)^{2/3} \tag{15-6}$$

sendo $v_t = (v_{et})$ a velocidade no círculo primitivo externo, expressa em ft/min (m/s):

$$v_t = \pi d_P n_P / 12 \qquad \text{(unidades habituais nos EUA)}$$
$$v_{et} = 5{,}236(10^{-5}) d_1 n_1 \qquad \text{(unidades SI)} \tag{15-7}$$

A máxima velocidade recomendada no círculo primitivo está associada à abscissa dos pontos terminais da curva da Figura 15-5:

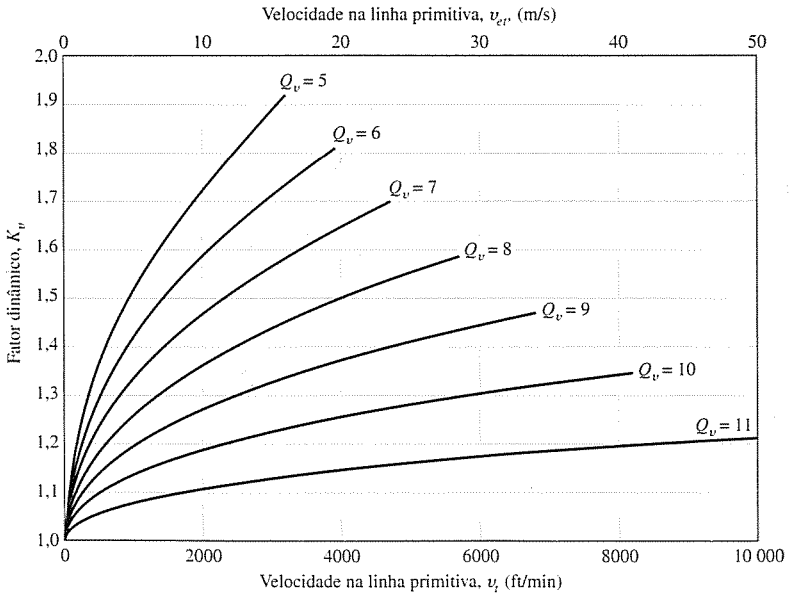


Figura 15-5 Fator dinâmico K_v. *(Fonte: ANSI/AGMA 2003-B97.)*

$$v_{t\,\max} = [A + (Q_v - 3)]^2 \qquad \text{(unidades habituais nos EUA)}$$
$$v_{te\,\max} = \frac{[A + (Q_v - 3)]^2}{200} \qquad \text{(unidades SI)} \tag{15-8}$$

em que $v_{t\,max}$ e $v_{et\,max}$ estão em ft/min e m/s, respectivamente.

Fator de Tamanho para Resistência à Formação de Cavidades (Crateramento) $C_s(Z_x)$

$$C_s = \begin{cases} 0{,}5 & F < 0{,}5 \text{ in} \\ 0{,}125F + 0{,}4375 & 0{,}5 \le F \le 4{,}5 \text{ in} \\ 1 & F > 4{,}5 \text{ in} \end{cases} \qquad \text{(unidades habituais nos EUA)}$$
$$Z_x = \begin{cases} 0{,}5 & b < 12{,}7 \text{ mm} \\ 0{,}004\,92b + 0{,}4375 & 12{,}7 \le b \le 114{,}3 \text{ mm} \\ 1 & b > 114{,}3 \text{ mm} \end{cases} \qquad \text{(unidades métricas SI)} \tag{15-9}$$

Fator de Tamanho para Flexão $K_s(Y_x)$

$$K_s = \begin{cases} 0{,}4867 + 0{,}2132/P_d & 0{,}5 \le P_d \le 16 \text{ in}^{-1} \\ 0{,}5 & P_d > 16 \text{ in}^{-1} \end{cases} \qquad \text{(unidades habituais nos EUA)}$$
$$Y_x = \begin{cases} 0{,}5 & m_{et} < 1{,}6 \text{ mm} \\ 0{,}4867 + 0{,}008\,339m_{et} & 1{,}6 \le m_{et} \le 50 \text{ mm} \end{cases} \qquad \text{(unidades métricas SI)} \tag{15-10}$$

Fator de Distribuição de Carga $K_m(K_{H\beta})$

$$K_m = K_{mb} + 0{,}0036F^2 \qquad \text{(unidades habituais nos EUA)}$$
$$K_{H\beta} = K_{mb} + 5{,}6(10^{-6})b^2 \qquad \text{(unidades SI)} \tag{15-11}$$

em que

$$K_{mb} = \begin{cases} 1{,}00 & \text{ambos os membros são montados entre mancais} \\ 1{,}10 & \text{um membro é montado entre mancais} \\ 1{,}25 & \text{nenhum membro é montado entre mancais} \end{cases}$$

Fator de Coroamento para Resistência à Formação de Cavidades $C_{xc}(Z_{xc})$

Os dentes da maioria das engrenagens cônicas apresentam coroamento na direção do comprimento, imposto, durante o processo de manufatura, para acomodar a deflexão de montagem.

$$C_{xc} = Z_{xc} = \begin{cases} 1{,}5 & \text{dentes coroados apropriadamente} \\ 2{,}0 & \text{ou dentes maiores não-coroados} \end{cases} \tag{15-12}$$

Fator de Curvatura ao Longo do Comprimento para Resistência à Flexão $K_x(Y_\beta)$

Para engrenagens cônicas de dentes retos,

$$K_x = Y_\beta = 1 \tag{15-13}$$

Fator Geométrico para Resistência à Formação de Cavidades $I(Z_I)$

A Figura 15-6 mostra o fator geométrico $I(Z_I)$ para engrenagens cônicas de dentes retos com um ângulo de pressão de 20° e um ângulo entre eixos de 90°. Entre no eixo das ordenadas com o número de dentes do pi-

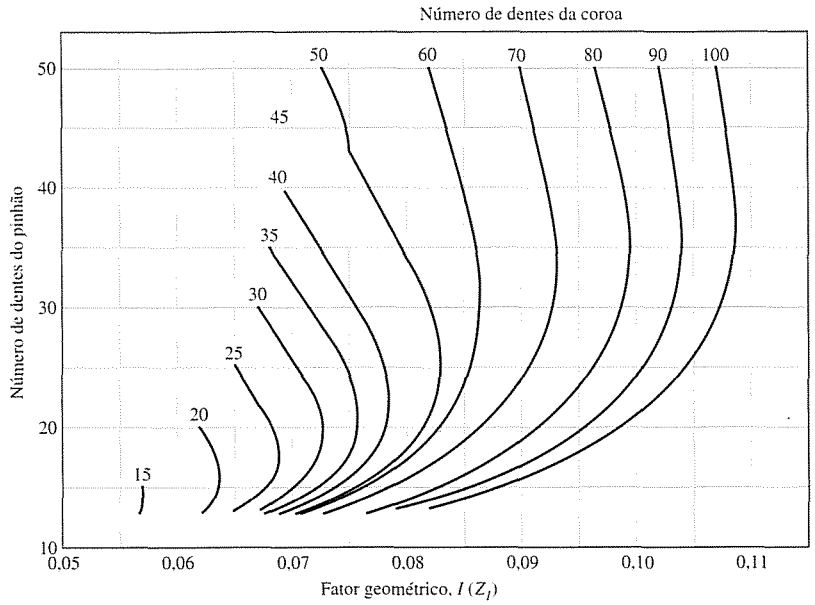


Figura 15-6 Fator de geometria de contato $I(Z_I)$ para engrenagens cônicas de dentes retos *coniflex*, com um ângulo de pressão de 20° e um ângulo entre eixos de 90°. *(Fonte: ANSI/AGMA 2003-B97.)*

nhão, procure à direita, para encontrar a linha de contorno contendo o número de dentes da coroa, e leia o fator geométrico no eixo das abscissas.

Fator Geométrico para Resistência à Flexão $J(Y_J)$

A Figura 15-7 apresenta o fator geométrico J para engrenagens cônicas de dentes retos com um ângulo de pressão de 20° e um ângulo entre eixos de 90°.

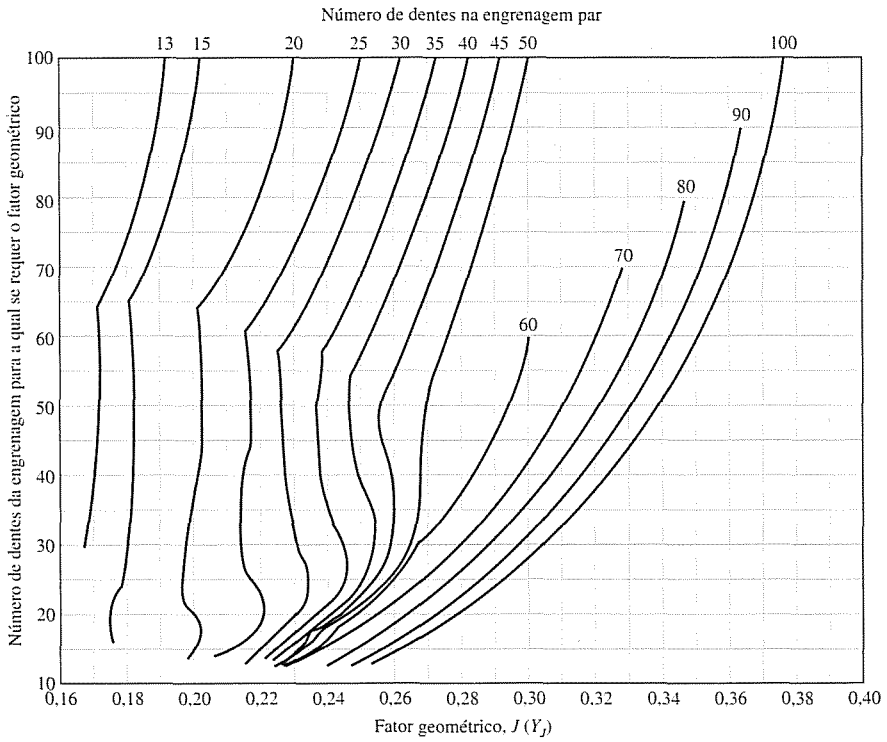


Figura 15-7 Fator de flexão $J(Y_J)$ para engrenagens cônicas de dentes retos *coniflex*, com um ângulo de pressão normal de 20° e um ângulo entre eixos de 90°. *(Fonte: ANSI/AGMA 2003-B97.)*

Fator de Ciclagem de Tensão para Resistência à Formação de Cavidades $C_L(Z_{NT})$

$$C_L = \begin{cases} 2 & 10^3 \le N_L < 10^4 \\ 3{,}4822 N_L^{-0.0602} & 10^4 \le N_L \le 10^{10} \end{cases}$$
$$Z_{NT} = \begin{cases} 2 & 10^3 \le n_L < 10^4 \\ 3{,}4822 n_L^{-0.0602} & 10^4 \le n_L \le 10^{10} \end{cases} \qquad (15\text{-}14)$$

Veja a Figura 15-8 para uma representação gráfica das Equações (15-14).

Fator de Ciclagem de Tensão para Resistência à Flexão $K_L(Y_{NT})$

$$K_L = \begin{cases} 2{,}7 & 10^2 \le N_L < 10^3 \\ 6{,}1514 N_L^{-0.1182} & 10^3 \le N_L < 3(10^6) \\ 1{,}6831 N_L^{-0.0323} & 3(10^6) \le N_L \le 10^{10} \quad \text{geral} \\ 1{,}3558 N_L^{-0.0178} & 3(10^6) \le N_L \le 10^{10} \quad \text{crítico} \end{cases} \qquad (15\text{-}15)$$

$$Y_{NT} = \begin{cases} 2{,}7 & 10^2 \le n_L < 10^3 \\ 6{,}1514 n_L^{-0.1182} & 10^3 \le n_L < 3(10^6) \\ 1{,}6831 n_L^{-0.0323} & 3(10^6) \le n_L \le 10^{10} \quad \text{geral} \\ 1{,}3558 n_L^{-0.0323} & 3(10^6) \le n_L \le 10^{10} \quad \text{crítico} \end{cases}$$

Veja a Figura 15-9 para um gráfico das Equações (15-15).

Fator de Razão de Dureza $C_H(Z_W)$

$$C_H = 1 + B_1(N/n - 1) \qquad B_1 = 0{,}008\,98(H_{BP}/H_{BG}) - 0{,}008\,29$$
$$Z_W = 1 + B_1(z_1/z_2 - 1) \qquad B_1 = 0{,}008\,98(H_{B1}/H_{B2}) - 0{,}008\,29 \qquad (15\text{-}16)$$

As equações precedentes são válidas quando $1{,}2 \le H_{BP}/H_{BG} \le 1{,}7$ ($1{,}2 \le H_{B1}/H_{B2} \le 1{,}7$). A Figura 15-10 exibe graficamente as Equações (15-16). Quando um pinhão endurecido superficialmente (48

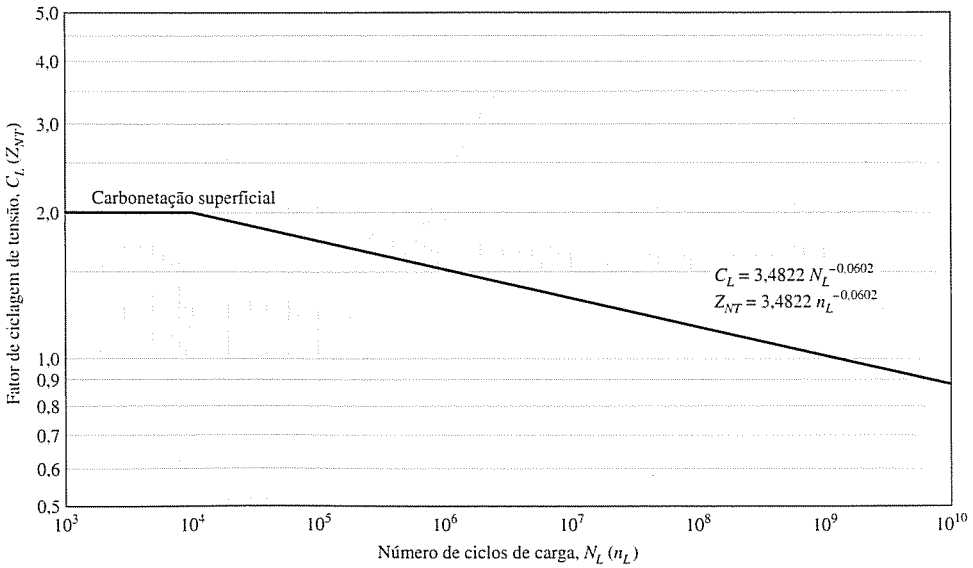


Figura 15-8 Fator de ciclagem de tensão de contato para a resistência à formação de cavidades $C_L(Z_{NT})$ em engrenagens cônicas de aço endurecido superficialmente, por carbonetação. *(Fonte: ANSI/AGMA 2003-B97.)*

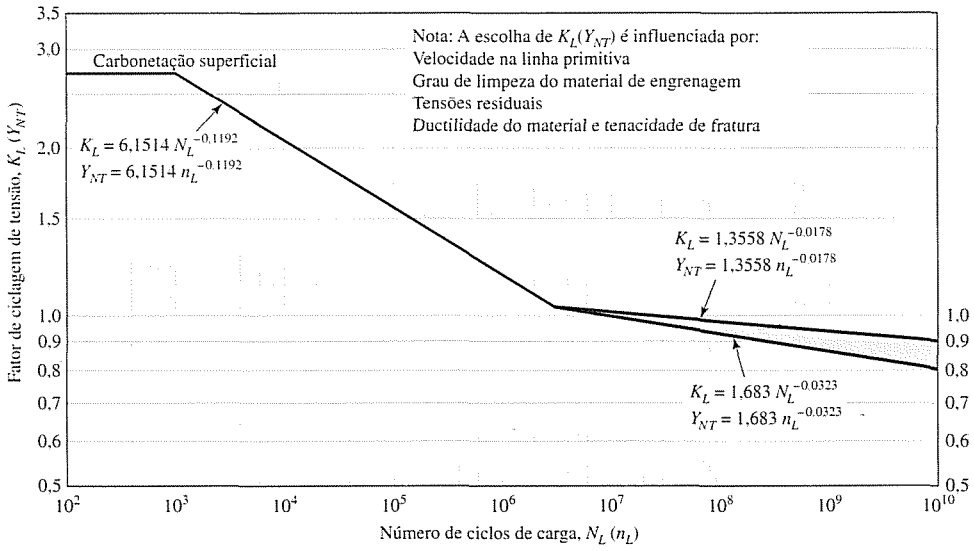


Figura 15-9 Fator de ciclagem de tensão para a resistência à flexão $K_L(Y_{NT})$ de engrenagens cônicas de aço endurecido superficialmente, por carbonetação. *(Fonte: ANSI/AGMA 2003-B97.)*

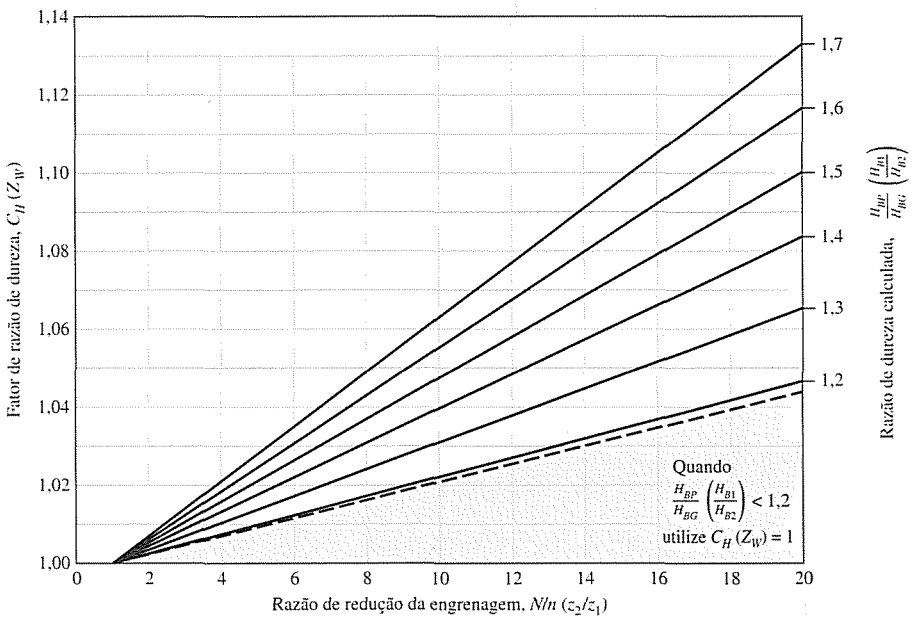


Figura 15-10 Fator de razão de dureza $C_H(Z_W)$ para pinhão e coroa endurecidos por completo. *(Fonte: ANSI/AGMA 2003-B97.)*

HRC ou mais) roda com uma coroa endurecida inteiramente ($180 \le H_B \le 400$), um efeito de encruamento ocorre. O fator $C_H(Z_W)$ varia com a rugosidade superficial do pinhão $f_P(R_{a1})$ e com a dureza da engrenagem par:

$$C_H = 1 + B_2(450 - H_{BG}) \qquad B_2 = 0{,}000\,75\exp(-0{,}0122 f_P)$$
$$Z_W = 1 + B_2(450 - H_{B2}) \qquad B_2 = 0{,}000\,75\exp(-0{,}52 f_P) \tag{15-17}$$

em que $f_P\ (R_{a1})$ = dureza superficial do pinhão, μin (μm)
$H_{BG}\ (H_{B2})$ = dureza Brinell mínima

Veja a Figura 15-11 para pares de engrenagens de aço carbonetados de dureza $C_H = Z_W = 1$ aproximadamente igual.

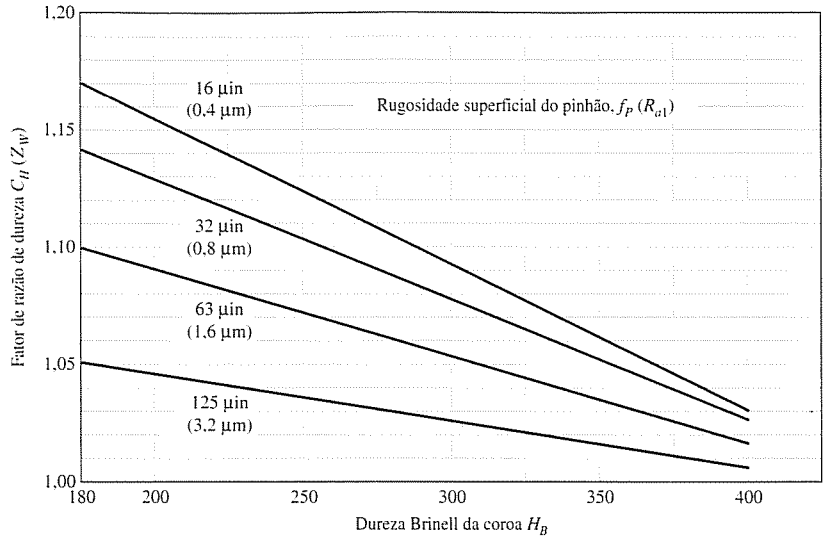


Figura 15-11 Fator de razão de dureza $C_H(Z_W)$ para pinhões endurecidos superficialmente. *(Fonte: ANSI/AGMA 2003-B97.)*

Fator de Temperatura $K_T(K_\theta)$

$$K_T = \begin{cases} 1 & 32°\text{F} \le t \le 250°\text{F} \\ (460 + t)/710 & t > 250°\text{F} \end{cases}$$
$$K_\theta = \begin{cases} 1 & 0°\text{C} \le \theta \le 120°\text{C} \\ (273 + \theta)/393 & \theta > 120°\text{C} \end{cases} \qquad (15\text{-}18)$$

Fatores de Confiabilidade $C_R(Z_Z)$ e $K_R(Y_Z)$

A Tabela 15-3 apresenta os fatores de confiabilidade. Observe que $C_R = \sqrt{K_R}$ e $Z_Z = \sqrt{Y_Z}$. As equações de interpolação logarítmica são

$$Y_Z = K_R = \begin{cases} 0{,}50 - 0{,}25\ \log(1 - R) & 0{,}99 \le R \le 0{,}999 \qquad (15\text{-}19) \\ 0{,}70 - 0{,}15\ \log(1 - R) & 0{,}90 \le R < 0{,}99 \qquad (15\text{-}20) \end{cases}$$

O valor admissível de confiabilidade de tensão (fadiga) nas Tabelas 15-4 a 15-7 é de 0,99.

Tabela 15-3 Fatores de confiabilidade

Requerimentos da aplicação	Fatores de confiabilidade para o aço* $C_R(Z_Z)$	$K_R(Y_Z)$†
Menos de uma falha a cada 10 000	1,22	1,50
Menos de uma falha a cada 1000	1,12	1,25
Menos de uma falha a cada 100	1,00	1,00
Menos de uma falha a cada 10	0,92	0,85‡
Menos de uma falha a cada 2	0,84	0,70§

Fonte: ANSI/AGMA 2003-B97.

* No momento, não há dados suficientes relativos à confiabilidade de engrenagens cônicas feitas de outros materiais.

† A quebra de dente é, algumas vezes, considerada um perigo maior que a falha por formação de cavidades. Em tais casos, um valor maior de $K_R(Y_Z)$ é selecionado, em se tratando de flexão.

‡ Para esse valor, o fluxo plástico pode ocorrer, em vez da formação de cavidades.

§ A partir de extrapolação de dados experimentais.

Tabela 15-4 Valor de tensão de contato admissível para engrenagens de aço, s_{ac} ($\sigma_{H\,lim}$)

Designação do material	Tratamentos térmicos	Dureza superficial mínima*	Valor admissível da tensão de contato $S_{ac}(\sigma_{H\,lim})$ lbf/in² (N/mm²) Grau 1†	Grau 2†	Grau 3†
Aço	Endurecimento completo‡	Figura 15-12	Figura 15-12	Figura 15-12	
	Endurecimento por chama ou indução§	50 HRC	175 000 (1210)	190 000 (1310)	
	Carbonização e endurecimento superficial§	2003-B97 Tabela 8	200 000 (1380)	225 000 (1550)	250 000 (1720)
AISI 4140	Nitretação§	84,5 HR15N		145 000 (1000)	
Nitralloy 135M	Nitretação§	90,0 HR15N		160 000 (1100)	

Fonte: ANSI/AGMA 2003-B97.

* A dureza deve ser equivalente à da meia-altura do dente no centro da largura de face.

† Ver ANSI/AGMA 2003-B97, Tabelas 8 a 11, para os fatores metalúrgicos para cada grau de tensão de engrenagens de aço.

‡ Esses materiais devem ser recozidos ou normalizados, pelo menos.

§ Os valores indicados de tensão admissíveis podem ser usados com as profundidades da camada endurecida prescritas em 21.1, ANSI/AGMA 2003-B97.

Tabela 15-5 Valor da tensão de contato admissível para engrenagens de ferro, s_{ac} ($\sigma_{H\,lim}$)

Material	Designação do material ASTM	ISO	Tratamento térmico	Mínimo típico Dureza superficial	Valor da tensão de contato admissível ($\sigma_{H\,lim}$) lbf/in² (N/mm²)
Ferro fundido	ASTM A48	ISO/DR 185			
	Classe 30	Grau 200	Como fundido	175 HB	50 000 (345)
	Classe 40	Grau 300	Como fundido	200 HB	65 000 (450)
Ferro dúctil (nodular)	ASTM A536	ISO/DIS 1083			
	Grau 80-55-06	Grau 600-370-03	Temperado	180 HB	94 000 (650)
	Grau 120-90-02	Grau 800-480-02	e revenido	300 HB	135 000 (930)

Fonte: ANSI/AGMA 2003-B97.

Tabela 15-6 Valores admissíveis de tensão de flexão para engrenagens de aço, s_{at} ($\sigma_{F\,lim}$)

Designação do material	Tratamento térmico	Dureza superficial mínima	Valor da tensão de flexão (admissível), s_{at} ($\sigma_{F\,lim}$) lbf/in² (N/mm²) Grau 1*	Grau 2*	Grau 3*
Aço	Endurecimento por completo	Figura 15-13	Figura 15-13	Figura 15-13	
	Endurecimento por chama ou indução				
	Raízes não-endurecidas	50 HRC	15 000 (85)	13 500 (95)	
	Raízes endurecidas		22 500 (154)		
	Carbonização e endurecimento superficial†	2003-B97 Tabela 8	30 000 (205)	35 000 (240)	40 000 (275)
AISI 4140	Nitretação†, ‡	84,5 HR15N		22 000 (150)	
Nitralloy 135M	Nitretação†, ‡	90,0 HR15N		24 000 (165)	

Fonte: ANSI/AGMA 2003-B97.

* Ver ANSI/AGMA 2003-B97, Tabelas 8-11, para fatores metalúrgicos para cada grau de tensão de engrenagens de aço.

† Os valores de tensão admissíveis indicados podem ser utilizados com as profundidades de endurecimento prescritas em 21.1, ANSI/AGMA 2003-B97.

‡ A capacidade de sobrecarga de engrenagens nitretadas é pequena. Uma vez que a forma da curva *S-N* efetiva é plana, a sensibilidade a choques deve ser investigada antes de se seguir com o projeto.

Tabela 15-7 Valor da tensão de flexão admissível para engrenagens de ferro, s_{at} ($\sigma_{F\,lim}$)

Designação do material			Tratamento térmico	Dureza superficial mínima típica	Valor da tensão de flexão (admissível), s_{at} ($\sigma_{F\,lim}$) lbf/in² (N/mm²)
Material	ASTM	ISO			
Ferro fundido	ASTM A48	ISO/DR 185			
	Classe 30	Grau 200	Como fundido	175 HB	4500 (30)
	Classe 40	Grau 300	Como fundido	200 HB	6500 (45)
Ferro	ASTM A536	ISO/DIS 1083			
dúctil	Grau 80-55-06	Grau 600-370-03	Temperado	180 HB	10 000 (70)
(nodular)	Grau 120-90-02	Grau 800-480-02	e revenido	300 HB	13 500 (95)

Fonte: ANSI/AGMA 2003-B97.

Coeficiente Elástico para Resistência à Formação de Cavidades $C_p(Z_E)$

$$C_p = \sqrt{\frac{1}{\pi\left[\left(1-\nu_P^2\right)/E_P + \left(1-\nu_G^2\right)/E_G\right]}}$$

$$Z_E = \sqrt{\frac{1}{\pi\left[\left(1-\nu_1^2\right)/E_1 + \left(1-\nu_2^2\right)/E_2\right]}} \qquad (15\text{-}21)$$

em que C_p = coeficiente elástico, 2290 $\sqrt{\text{psi}}$ para o aço

Z_E = coeficiente elástico, 190 $\sqrt{\text{N/mm}^2}$ para o aço

E_P e E_G = módulos de Young para o pinhão e a coroa, respectivamente, psi

E_1 e E_2 = módulos de Young para o pinhão e a coroa, respectivamente, N/mm²

Tensão de Contato Admissível

As Tabelas 15-4 e 15-5 fornecem valores de $s_{ac}(\sigma_H)$ para engrenagens de aço e de ferro, respectivamente. A Figura 15-12 exibe graficamente a tensão admissível para materiais de grau 1 e 2.

As equações são

$$\begin{aligned} s_{ac} &= 341H_B + 23\,620 \text{ psi} && \text{grau 1} \\ \sigma_{H\,\text{lim}} &= 2{,}35H_B + 162{,}89 \text{ MPa} && \text{grau 1} \\ s_{ac} &= 363{,}6H_B + 29\,560 \text{ psi} && \text{grau 2} \\ \sigma_{H\,\text{lim}} &= 2{,}51H_B + 203{,}86 \text{ MPa} && \text{grau 2} \end{aligned} \qquad (15\text{-}22)$$

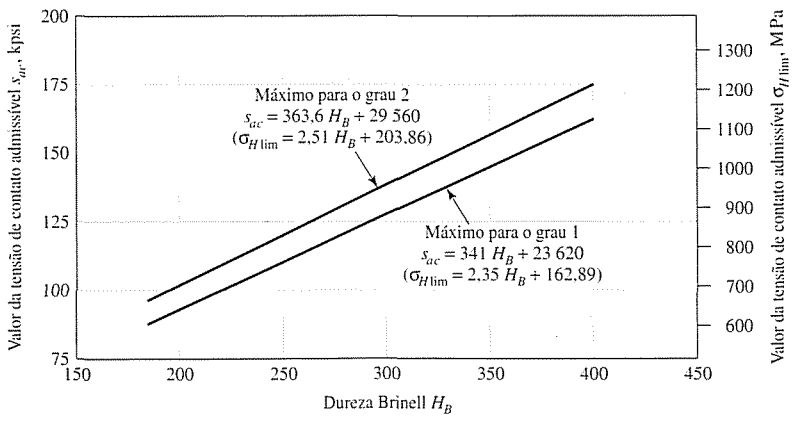


Figura 15-12 Valor da tensão de contato admissível para engrenagens de aço endurecidas por completo, s_{ac} ($\sigma_{H\,\text{lim}}$). *(Fonte: ANSI/AGMA 2003-B97.)*

Valores de Tensão de Flexão Admissíveis

As Tabelas 15-6 e 15-7 fornecem valores de $s_{at}(\sigma_{F\,\text{lim}})$ para engrenagens de aço e de ferro, respectivamente. A Figura 15-13 exibe graficamente a tensão de flexão admissível $s_{at}(\sigma_{H\,\text{lim}})$ para aços endurecidos por inteiro. As equações são

$$\begin{aligned} s_{at} &= 44H_B + 2100 \text{ psi} && \text{grau 1} \\ \sigma_{F\,\text{lim}} &= 0{,}30H_B + 14{,}48 \text{ MPa} && \text{grau 1} \\ s_{at} &= 48H_B + 5980 \text{ psi} && \text{grau 2} \\ \sigma_{H\,\text{lim}} &= 0{,}33H_B + 41{,}24 \text{ MPa} && \text{grau 2} \end{aligned} \tag{15-23}$$

Carregamento Reverso

A AGMA recomenda utilizar 70% da resistência admissível nos casos em que a carga é completamente reversa, como em engrenagens loucas ou em mecanismos de reversão.

Resumo

A Figura 15-14 é um "mapa" para as relações de desgaste de engrenagens cônicas de dentes retos utilizando a 2003-B97. A Figura 15-15, por sua vez, é um guia similar para a flexão de engrenagens cônicas de dentes retos usando a 2003-B97.

A norma não menciona um aço específico, mas sim a dureza atingível por tratamentos térmicos, tais como endurecimento por inteiro, carbonetação e endurecimento superficial, endurecimento por chama e nitretação. Os resultados do endurecimento por inteiro dependem do tamanho (passo diametral). Os materiais endurecidos por inteiro e a correspondente escala de dureza Rockwell C a 90% de martensita, exibida nos parênteses que seguem, incluem 1045 (50), 1060 (54), 1335 (46), 2340 (49), 3140 (49), 4047 (52), 4130 (44), 4140 (49), 4340 (49), 5145 (51), E52100 (60), 6150 (53), 8640 (50) e 9840 (49). Para materiais endurecidos superficialmente (em caixa), por carbonetação, as durezas aproximadas de núcleo são 1015 (22), 1025 (37), 1118 (33), 1320 (35), 2317 (30), 4320 (35), 4620 (35), 4820 (35), 6120 (35), 8620 (35) e E9310 (30). A conversão de HRC a H_B (carga de 300 kg, esfera de 10 mm) é

HRC	42	40	38	36	34	32	30	28	26	24	22	20	18	16	14	12	10
H_B	388	375	352	331	321	301	285	269	259	248	235	223	217	207	199	192	187

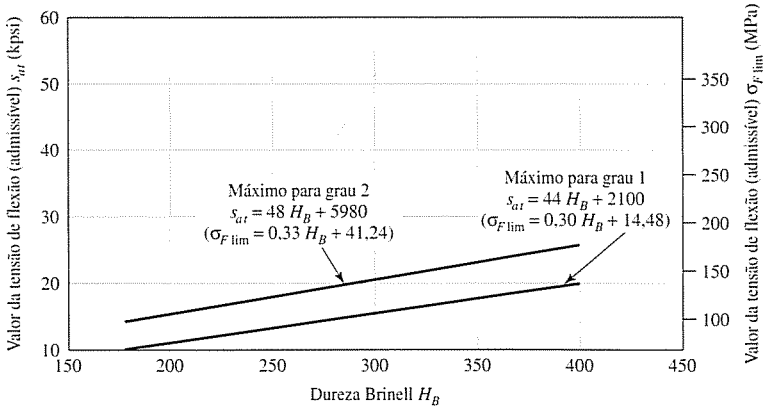


Figura 15-13 Valor da tensão de contato admissível para engrenagens de aço endurecidas por completo, s_{at} $(\sigma_{F\,\text{lim}})$. *(Fonte: ANSI/AGMA 2003-B97.)*

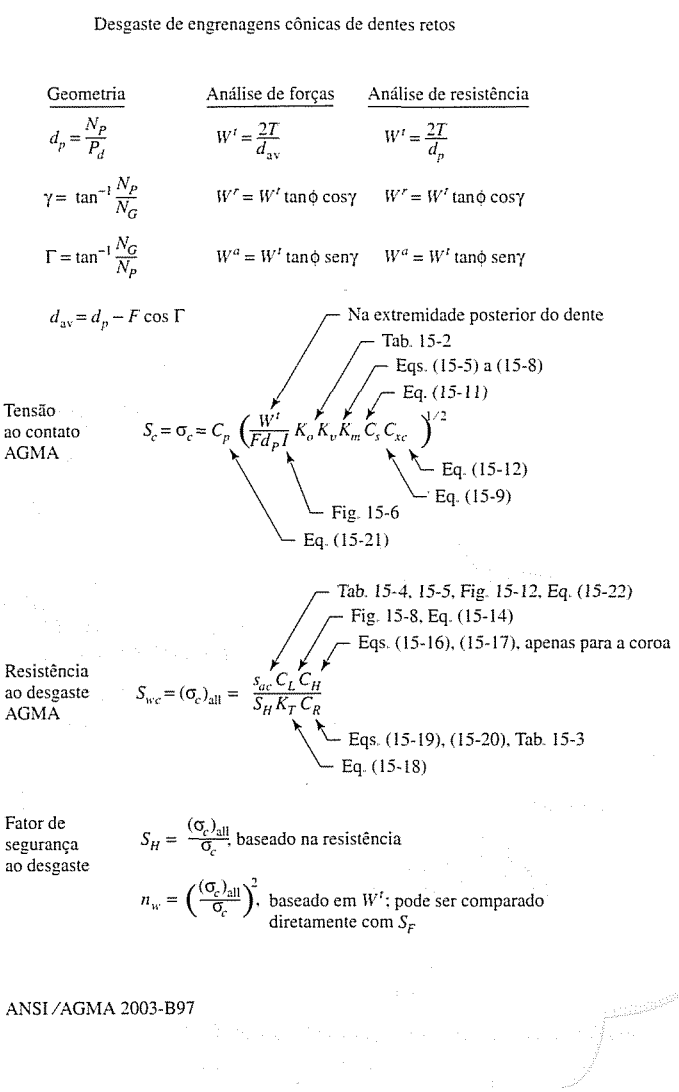


Figura 15-14 Resumo, em forma de "guia", para as principais equações de desgaste de engrenagens cônicas de dentes retos e seus parâmetros.

A maioria dos conjuntos de engrenagens cônicas é feita de aço endurecido superficialmente, por carbonetação, e os fatores incorporados na 2003-B97, em grande medida, consideram essas engrenagens de alto rendimento. Para engrenagens endurecidas por completo, a 2003-B97 silencia no que se refere a K_L e C_L, devendo as Figuras 15-8 e 15-9 ser, prudentemente, consideradas como aproximações.

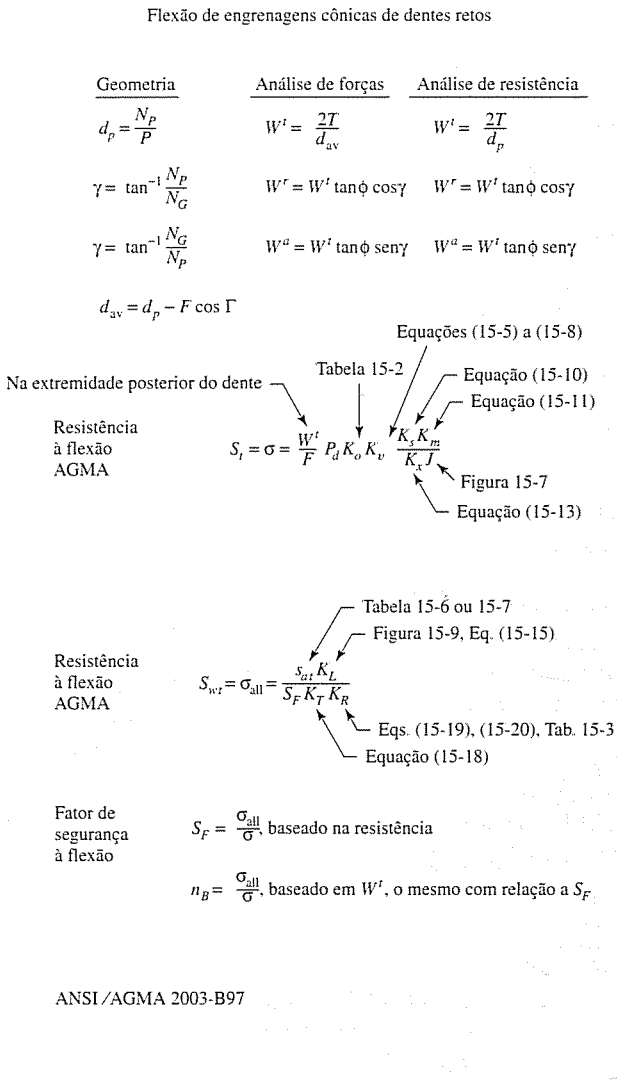


Figura 15-15 Resumo, em forma de "guia", para as principais equações de flexão de engrenagens cônicas de dentes retos e seus parâmetros.

15-4 Análise de Engrenagens Cônicas de Dentes Retos

EXEMPLO 15-1

Um par de engrenagens mitrais de dentes retos idênticas, listadas em um catálogo, tem um passo diametral de 5 na extremidade posterior, uma largura de face de 1,10 in e um ângulo de pressão normal de 20°; as engrenagens são feitas de aço grau 1, endurecidas por inteiro, com dureza de núcleo e superfície de 180 Brinell. Tais engrenagens não têm coroamento e são pretendidas para uso industrial em geral. Elas têm um número de qualidade $Q_v = 7$. É provável que a aplicação pretendida venha a requerer montagem externa das mesmas. Utilize um fator de segurança igual a 1, a 10^7 ciclos de vida, com confiabilidade de 0,99.

(*a*) Para uma velocidade de 600 rpm, encontre a capacidade desse par de engrenagens de transmitir potência, com base na resistência à flexão AGMA.

(*b*) Para as mesmas condições (*a*), encontre a capacidade desse mesmo par de engrenagens de transmitir potência, com base na resistência ao desgaste AGMA.

(*c*) Para uma confiabilidade de 0,995, uma vida da coroa de 10^9 revoluções e um fator de segurança $S_F = S_H = 1{,}5$, determine a capacidade de transmitir potência, para esse conjunto de engrenagens, utilizando as resistências AGMA.

Solução

A partir das Figuras 15-14 e 15-15,

$$d_P = N_P/P = 25/5 = 5{,}000 \text{ in}$$

$$v_t = \pi d_P n_P/12 = \pi(5)600/12 = 785{,}4 \text{ ft/min}$$

Fator de sobrecarga: carregamento uniforme-uniforme, Tabela 15-2, K_o=1,00.
Fator de segurança: $S_F = 1$, $S_H = 1$.
Fator dinâmico K_v: a partir da Equação (15-6).

$$B = 0{,}25(12 - 7)^{2/3} = 0{,}731$$

$$A = 50 + 56(1 - 0{,}731) = 65{,}06$$

$$K_v = \left(\frac{65{,}06 + \sqrt{785{,}4}}{65{,}06}\right)^{0.731} = 1{,}299$$

A partir da Equação (15-8),

$$v_{t\max} = [65{,}06 + (7 - 3)]^2 = 4769 \text{ ft/min}$$

$v_t < v_{t\max}$, isto é, 785,4 < 4769 ft/min; portanto, K_v é válido. A partir da Equação (15-10),

$$K_s = 0{,}4867 + 0{,}2132/5 = 0{,}529$$

A partir da Equação (15-11),

$$K_{mb} = 1{,}25 \quad \text{e} \quad K_m = 1{,}25 + 0{,}0036(1{,}10)^2 = 1{,}254$$

A partir da Equação (15-13), $K_x = 1$. A partir da Figura 15-6, $I = 0{,}065$; a partir da Figura 15-7, $J_P = 0{,}216$, $J_G = 0{,}216$. A partir da Equação (15-15),

$$K_L = 1{,}683(10^7)^{-0{,}0323} = 0{,}999\,96 \doteq 1$$

A partir da Equação (15-14),

$$C_L = 3{,}4822(10^7)^{-0{,}0602} = 1{,}32$$

Uma vez que $H_{BP}/H_{BG} = 1$, então, a partir da Figura 15-10, $C_H = 1$. A partir das Equações (15-13) e (15-18), $K_x = 1$ e $K_T = 1$, respectivamente. A partir da Equação (15-20),

$$K_R = 0{,}70 - 0{,}15\log(1 - 0{,}99) = 1, \qquad C_R = \sqrt{K_R} = \sqrt{1} = 1$$

(*a*) *Flexão*: A partir da Equação (15-23),

$$s_{at} = 44(180) + 2100 = 10\,020 \text{ psi}$$

A partir da Equação (15-3),

$$s_t = \sigma = \frac{W^t}{F} P_d K_o K_v \frac{K_s K_m}{K_x J} = \frac{W^t}{1{,}10}(5)(1)1{,}299\frac{0{,}529(1{,}254)}{(1)0{,}216}$$

$$= 18{,}13 W^t$$

A partir da Equação (15-4),

$$s_{wt} = \frac{s_{at} K_L}{S_F K_T K_R} = \frac{10\,020(1)}{(1)(1)(1)} = 10\,020 \text{ psi}$$

Igualando s_t e s_{wt},

$$18{,}13W^t = 10\,020 \qquad W^t = 552{,}6 \text{ lbf}$$

Resposta

$$H = \frac{W^t v_t}{33\,000} = \frac{552{,}6(785{,}4)}{33\,000} = 13{,}2 \text{ hp}$$

(*b*) *Desgaste*: A partir da Figura 15-12,

$$s_{ac} = 341(180) + 23\,620 = 85\,000 \text{ psi}$$

A partir da Equação (15-2),

$$\sigma_{c.\text{all}} = \frac{s_{ac} C_L C_H}{S_H K_T C_R} = \frac{85\,000(1{,}32)(1)}{(1)(1)(1)} = 112\,200 \text{ psi}$$

Agora, $C_p = 2290\sqrt{\text{psi}}$, de acordo com as definições que se seguem à Equação (15-21). A partir da Equação (15-9),

$$C_s = 0{,}125(1{,}1) + 0{,}4375 = 0{,}575$$

A partir da Equação (15-12), $C_{xc} = 2$. Substituindo na Equação (15-1), obtemos

$$\sigma_c = C_p \left(\frac{W^t}{F d_P I} K_o K_v K_m C_s C_{xc} \right)^{1/2}$$

$$= 2290 \left[\frac{W^t}{1{,}10(5)0{,}065}(1)1{,}299(1{,}254)0{,}575(2) \right]^{1/2} = 5242\sqrt{W^t}$$

Igualando σ_c e $\sigma_{c.all}$, obtemos

$$5242\sqrt{W^t} = 112\,200, \qquad W^t = 458{,}1 \text{ lbf}$$

$$H = \frac{458{,}1(785{,}4)}{33\,000} = 10{,}9 \text{ hp}$$

A potência estimada para o par de engrenagens é

Resposta

$$H = \min(12{,}9,\ 10{,}9) = 10{,}9 \text{ hp}$$

(*c*) Para uma vida de 10^9 ciclos, $R = 0{,}995$, $S_F = S_H = 1{,}5$ e, a partir da Equação (15-15),

$$K_L = 1{,}683(10^9)^{-0{,}0323} = 0{,}8618$$

A partir da Equação (15-19),

$$K_R = 0{,}50 - 0{,}25\log(1 - 0{,}995) = 1{,}075, \qquad C_R = \sqrt{K_R} = \sqrt{1{,}075} = 1{,}037$$

A partir da Equação (15-14),

$$C_L = 3{,}4822(10^9)^{-0{,}0602} = 1$$

Flexão: A partir da Equação (15-23) e da parte (*a*), $s_{at} = 10\,020$ psi. A partir da Equação (15-3),

$$s_t = \sigma = \frac{W^t}{1{,}10} 5(1)1{,}299 \frac{0{,}529(1{,}254)}{(1)0{,}216} = 18{,}13W^t$$

A partir da Equação (15-4),

$$s_{wt} = \frac{s_{at} K_L}{S_F K_T K_R} = \frac{10\,020(0{,}8618)}{1{,}5(1)1{,}075} = 5355 \text{ psi}$$

Igualando s_t e s_{wt}, obtemos

$$18{,}13W^t = 5355 \qquad W^t = 295{,}4 \text{ lbf}$$

$$H = \frac{295{,}4(785{,}4)}{33\,000} = 7{,}0 \text{ hp}$$

Desgaste: A partir da Equação (15-22) e da parte (*b*), $s_{ac} = 85\,000$ psi. Substituindo na Equação (15-2), obtemos

$$\sigma_{c,all} = \frac{s_{ac} C_L C_H}{S_H K_T C_R} = \frac{85\,000(1)(1)}{1{,}5(1)1{,}037} = 54\,640 \text{ psi}$$

Substituindo na Equação (15-1), obtemos, a partir da parte (*b*), $\sigma_c = 5242\sqrt{W^t}$. Igualando σ_c a $\sigma_{c,all}$, obtemos

$$\sigma_c = \sigma_{c,all} = 54\,640 = 5242\sqrt{W^t} \qquad W^t = 108{,}6 \text{ lbf}$$

A potência, com base no desgaste, é

$$H = \frac{108{,}6(785{,}4)}{33\,000} = 2{,}58 \text{ hp}$$

Solução A potência estimada do par é $H = \min(7{,}0,\ 2{,}58) = 2{,}6$ hp.

15-5 Projeto de um Conjunto de Engrenagens Cônicas de Dentes Retos

Um conjunto de decisões útil para o projeto de engrenagens cônicas de dentes retos inclui

- Função
- Fator de projeto
- Sistema de dentes
- Número de dentes

} Decisões *a priori*

- Passo e largura de face
- Número de qualidade
- Material da coroa, dureza de núcleo e superfície
- Material do pinhão, dureza de núcleo e superfície

} Variáveis de projeto

Em engrenagens cônicas, o número de qualidade está ligado à resistência ao desgaste. O fator *J* para a coroa pode ser menor que aquele para o pinhão. A resistência à flexão não varia de forma linear com a largura de face, já que o material adicionado está posicionado na extremidade pequena dos dentes. Conseqüentemente, a largura de face é, *grosso modo*, prescrita como

$$F = \min(0{,}3A_0,\ 10/P_d) \tag{15-24}$$

em que A_0 é a distância de cone (ver Figura 13-20), fornecida por

$$A_0 = \frac{d_P}{2 \operatorname{sen} \gamma} = \frac{d_G}{2 \operatorname{sen} \Gamma} \tag{15-25}$$

EXEMPLO 15-2

Projete um par de engrenagens cônicas de dentes retos para eixos cujas linhas de centro são perpendiculares, de modo a transmitir 6,85 hp a 900 rpm, com uma razão de engrenamento de 3:1, temperatura de 300°F, ângulo de pressão normal de 20°, utilizando um fator de projeto igual a 2. A carga é uniforme-uniforme. Apesar de o número mínimo de dentes no pinhão ser 13 – o que irá engranzar com 31 ou mais dentes, sem interferência –, utilize um pinhão de 20 dentes. O material a ser empregado deve ser de grau 1 AGMA, e os dentes devem ter coroamento. A confiabilidade desejável é de 0,995, com uma vida do pinhão de 10^9 revoluções.

Solução A princípio, listamos as decisões *a priori*, bem como suas conseqüências imediatas.

Função: 6,85 hp a 900 rpm, razão de engrenamento $m_G = 3$, 300°F de temperatura de meio ambiente, nenhuma engrenagem montada em balanço, $K_{mb} = 1{,}25$ [Equação (15-11)], $R = 0{,}995$ para 10^9 revoluções do pinhão,

Equação (15-14): $(C_L)_G = 3{,}4822(10^9/3)^{-0.0602} = 1{,}068$

$(C_L)_P = 3{,}4822(10^9)^{-0.0602} = 1$

Equação (15-15): $(K_L)_G = 1{,}683(10^9/3)^{-0.0323} = 0{,}8929$

$(K_L)_P = 1{,}683(10^9)^{-0.0323} = 0{,}8618$

Equação (15-19): $K_R = 0{,}50 - 0{,}25\log(1 - 0{,}995) = 1{,}075$

$C_R = \sqrt{K_R} = \sqrt{1{,}075} = 1{,}037$

Equação (15-18): $K_T = C_T = (460 + 300)/710 = 1{,}070$

Fator de projeto: $n_d = 2$, $S_F = 2$, $S_H = \sqrt{2} = 1{,}414$.

Sistema de denteado: engrenagens cônicas coroadas de dentes retos, ângulo de pressão normal de 20°,

Equação (15-13): $K_x = 1$

Equação (15-12): $C_{xc} = 1{,}5$

Com $N_P = 20$ dentes, $N_G = (3)\,20 = 60$ dentes e, a partir da Figura 15-14,

$$\gamma = \tan^{-1}(N_P/N_G) = \tan^{-1}(20/60) = 18{,}43° \qquad \Gamma = \tan^{-1}(60/20) = 71{,}57°$$

A partir das Figuras 15-6 e 15-7, $I = 0{,}0825$, $J_P = 0{,}248$ e $J_G = 0{,}202$. Observe que $J_P > J_G$.
Decisão 1: Passo diametral tentativo, $P_d = 8$ dentes/in.

Equação (15-10): $K_s = 0{,}4867 + 0{,}2132/8 = 0{,}5134$

$d_P = N_P/P_d = 20/8 = 2{,}5$ in

$d_G = 2{,}5(3) = 7{,}5$ in

$v_t = \pi d_P n_P/12 = \pi(2{,}5)900/12 = 589{,}0$ ft/min

$W^t = 33\,000$ hp$/v_t = 33\,000(6{,}85)/589{,}0 = 383{,}8$ lbf

Equação (15-25): $A_0 = d_P/(2\,\text{sen}\,\gamma) = 2{,}5/(2\,\text{sen}\,18{,}43°) = 3{,}954$ in

Equação (15-24):

$$F = \min(0{,}3A_0,\ 10/P_d) = \min[0{,}3(3{,}954),\ 10/8] = \min(1{,}186,\ 1{,}25) = 1{,}186 \text{ in}$$

Decisão 2: Considere $F = 1{,}25$ in. Assim,

Equação (15-9): $C_s = 0{,}125(1{,}25) + 0{,}4375 = 0{,}5937$

Equação (15-11): $K_m = 1{,}25 + 0{,}0036(1{,}25)^2 = 1{,}256$

Decisão 3: Suponha que o número de precisão de transmissão valha 6. Então, a partir da Equação (15-6),

$$B = 0{,}25(12 - 6)^{2/3} = 0{,}8255$$

$$A = 50 + 56(1 - 0{,}8255) = 59{,}77$$

Equação (15-5): $$K_v = \left(\frac{59{,}77 + \sqrt{589{,}0}}{59{,}77}\right)^{0.8255} = 1{,}325$$

Decisão 4: Materiais do pinhão e da coroa e tratamentos. Grau ASTM 1320 carbonetado e endurecido superficialmente para

Núcleo 21 HRC (H_B equivale a 229 Brinell)

Núcleo 55-64 HRC (H_B equivale a 515 Brinell)

A partir da Tabela 15-4, $s_{ac} = 200\,000$ psi e, da Tabela 15-6, $s_{at} = 30\,000$ psi.

Flexão da coroa: A partir da Equação (15-3), a tensão de flexão é

$$(s_t)_G = \frac{W^t}{F} P_d K_o K_v \frac{K_s K_m}{K_x J_G} = \frac{383{,}8}{1{,}25} 8(1)1{,}325 \frac{0{,}5134(1{,}256)}{(1)0{,}202}$$

$$= 10\,390 \text{ psi}$$

A resistência à flexão, a partir da Equação (15-4), é fornecida por

$$(s_{wt})_G = \left(\frac{s_{at} K_L}{S_F K_T K_R}\right)_G = \frac{30\,000(0{,}8929)}{2(1{,}070)1{,}075} = 11\,640 \text{ psi}$$

A resistência excede à tensão por um fator de 11640/10390 = 1,12, produzindo um fator de segurança real de $(S_F)_G = 2(1{,}12) = 2{,}24$.

Flexão do pinhão: A tensão de flexão pode ser determinada a partir de

$$(s_t)_P = (s_t)_G \frac{J_G}{J_P} = 10\,390 \frac{0{,}202}{0{,}248} = 8463 \text{ psi}$$

A resistência à flexão, novamente a partir da Equação (15-4), é fornecida por

$$(s_{wt})_P = \left(\frac{s_{at} K_L}{S_F K_T K_R}\right)_P = \frac{30\,000\,(0{,}8618)}{2(1{,}070)1{,}075} = 11\,240 \text{ psi}$$

A resistência excede à tensão por um fator de 11 240/8463 = 1,33, produzindo um fator de segurança real de $(S_F)_P = 2(1{,}33) = 2{,}66$.

Desgaste da coroa: A tensão de contato induzida pela carga tanto no pinhão quanto na coroa, obtida a partir da Equação (15-1), é

$$s_c = C_p \left(\frac{W^t}{F d_P I} K_o K_v K_m C_s C_{xc}\right)^{1/2}$$

$$= 2290 \left[\frac{383{,}8}{1{,}25(2{,}5)0{,}0825}(1)1{,}325(1{,}256)0{,}5937(1{,}5)\right]^{1/2}$$

$$= 107\,560 \text{ psi}$$

A partir da Equação (15-2), a resistência ao contato da coroa é

$$(s_{wc})_G = \left(\frac{s_{ac} C_L C_H}{S_H K_T C_R}\right)_G = \frac{200\,000(1{,}068)(1)}{\sqrt{2}(1{,}070)1{,}037} = 136\,120 \text{ psi}$$

A resistência excede à tensão por um fator de 136 120/107 560 = 1,266, produzindo um fator de segurança real de $(S_H)_G^2 = 1{,}266^2(2) = 3{,}21$.

Desgaste do pinhão: A partir da Equação (15-2), a resistência ao contato do pinhão é

$$(s_{wc})_P = \left(\frac{s_{ac} C_L C_H}{S_H K_T C_R}\right)_P = \frac{200\,000(1)(1)}{\sqrt{2}(1{,}070)1{,}037} = 127\,450 \text{ psi}$$

A resistência excede à tensão por um fator de 136 120/127 450 = 1,068, produzindo um fator de segurança real de $(S_H)_P^2 = 1{,}068^2(2) = 2{,}28$.

Os fatores de segurança reais são 2,24, 2,66, 3,21 e 2,28. Fazendo uma comparação direta dos fatores, observamos que os riscos de falha por flexão da coroa e de falha por desgaste do pinhão são praticamente idênticos, assim como praticamente o são três das razões. Nosso objetivo, no que tange às decisões de projeto, seria o de operar mudanças que trouxessem os fatores a algo próximo de 2. O passo seguinte seria ajustar as variáveis de projeto. É óbvio que um processo iterativo está envolvido. Necessitamos de uma figura de mérito para ordenar os projetos. Um programa de computador é, claramente, um item desejável.

15-6 Engrenagens Sem-Fim – Equação AGMA

Haja vista serem essencialmente engrenagens sem-fim sem envoltório, as engrenagens *helicoidais cruzadas*, ilustradas na Figura 15-16, podem ser consideradas juntamente com outras engrenagens sem-fim. Uma vez que os dentes de engrenagens sem-fim apresentam *contato pontual* mudando para *contato em linha* à medida que as engrenagens são usadas, diz-se que as engrenagens sem-fim "desgastam dentro", ao passo que outros tipos de engrenagens "desgastam fora".

As engrenagens helicoidais cruzadas, assim como as engrenagens sem-fim, geralmente têm um ângulo de 90° entre os eixos, embora isso não tenha necessariamente de ser assim. A relação entre os ângulos de eixo e hélice é

$$\sum = \psi_P \pm \psi_G \tag{15-26}$$

sendo Σ o ângulo entre os eixos. O sinal positivo é utilizado quando ambos os ângulos de hélice são de mesma mão; o sinal negativo, quando são de mão oposta. O subscrito P, na Equação (15-26), refere-se ao pinhão (sem-fim); o subscrito W é empregado com o mesmo propósito. O subscrito G, por sua vez, refere-se à coroa, também conhecida como *roda de engrenagem*, *roda sem-fim*, ou simplesmente *roda*. A Tabela 15-8 fornece as dimensões de sem-fins cilíndricos comuns ao pinhão e à coroa.

A Seção 13-11 introduziu engrenagens sem-fim, e a Seção 13-17 desenvolveu a análise de força e eficiência de engrenamento sem-fim, à qual iremos nos referir. Aqui, nosso interesse está voltado para a resistência e a durabilidade. Boas proporções indicam um valor de diâmetro médio do pinhão sem-fim d_m dentro do intervalo

$$\frac{C^{0.875}}{3} \leq d_m \leq \frac{C^{0.875}}{1{,}6} \tag{15-27}$$

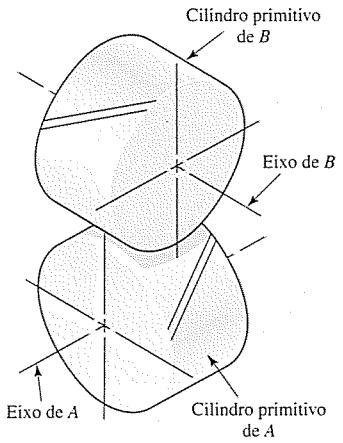


Figura 15-16 Vista dos cilindros primitivos de um par de engrenagens cônicas cruzadas.

Tabela 15-8 Dimensões comuns a pinhão e coroa cilíndricos sem-fim*

Quantidade	Símbolo	ϕ_n 14,5° $N_W \leq 2$	ϕ_n 20° $N_W \leq 2$	25° $N_W > 2$
Adendo	a	$0{,}3183p_x$	$0{,}3183p_x$	$0{,}286p_x$
Dedendo	b	$0{,}3683p_x$	$0{,}3683p_x$	$0{,}349p_x$
Altura completa	h_t	$0{,}6866p_x$	$0{,}6866p_x$	$0{,}635p_x$

* As entradas da tabela referem-se a um passo diametral primitivo da coroa de $P_t = 1$.

em que C é a distância entre os centros.[2] A AGMA relaciona a força tangencial admissível no dente da coroa sem-fim $(W^t)_{all}$ a outros parâmetros mediante

$$(W^t)_{\text{all}} = C_s D_m^{0,8} (F_e)_G C_m C_v \tag{15-28}$$

em que C_s = fator material
D_m = diâmetro médio da coroa, in (mm)
F_e = largura efetiva de face da coroa (largura de face real, mas sem exceder a $0{,}67d_m$, o diâmetro médio da coroa), in (mm)
C_m = fator de correção da razão de velocidades
C_v = fator de velocidade

A força de atrito W_f é dada por

$$W_f = \frac{f W^t}{\cos\lambda \cos\phi_n} \tag{15-29}$$

em que f = coeficiente de atrito
λ = ângulo de avanço no diâmetro médio do pinhão sem-fim
ϕ_n = ângulo de pressão normal

A velocidade de deslizamento V_s é

$$V_s = \frac{\pi n_W d_m}{12 \cos\lambda} \tag{15-30}$$

em que n_W = velocidade de rotação do pinhão sem-fim e d_m = diâmetro médio do pinhão sem-fim. O torque na coroa sem-fim é

$$T_G = \frac{W^t D_m}{2} \tag{15-31}$$

em que D_m é o diâmetro médio da coroa sem-fim.

Os parâmetros na Equação (15-28) são, quantitativamente,

$$C_s = 270 + 10{,}37C^3 \qquad C \le 3 \text{ in} \tag{15-32}$$

Para engrenagens fundidas em areia,

$$C_s = \begin{cases} 1000 & C > 3 \quad d_G \le 2{,}5 \text{ in} \\ 1190 - 477 \log d_G & C > 3 \quad d_G > 2{,}5 \text{ in} \end{cases} \tag{15-33}$$

Para engrenagens fundidas com resfriamento,

$$C_s = \begin{cases} 1000 & C > 3 \quad d_G \le 8 \text{ in} \\ 1412 - 456 \log d_G & C > 3 \quad d_G > 8 \text{ in} \end{cases} \tag{15-34}$$

Para engrenagens fundidas em centrifugadora,

$$C_s = \begin{cases} 1000 & C > 3 \quad d_G \le 25 \text{ in} \\ 1251 - 180 \log d_G & C > 3 \quad d_G > 25 \text{ in} \end{cases} \tag{15-35}$$

O fator de correção da razão de velocidades C_m é obtido a partir de

$$C_m = \begin{cases} 0{,}02\sqrt{-m_G^2 + 40m_G - 76} + 0{,}46 & 3 < m_G \le 20 \\ 0{,}0107\sqrt{-m_G^2 + 56m_G + 5145} & 20 < m_G \le 76 \\ 1{,}1483 - 0{,}006\,58 m_G & m_G > 76 \end{cases} \tag{15-36}$$

O fator de velocidade C_v é fornecido por

$$C_v = \begin{cases} 0{,}659 \exp(-0{,}0011 V_s) & V_s < 700 \text{ ft/min} \\ 13{,}31 V_s^{-0{,}571} & 700 \le V_s < 3000 \text{ ft/min} \\ 65{,}52 V_s^{-0{,}774} & V_s > 3000 \text{ ft/min} \end{cases} \tag{15-37}$$

[2] ANSI/AGMA 6034-A87, março de 1988, *Practice for Enclosed Cylindrical Wormgear Speed-Reducers and Gear Motors*; ANSI/AGMA 6030-C87, março de 1988, *Design of Industrial Double-Enveloping Wormgears*; e ANSI/AGMA 6022-C93, dezembro de 1993, *Design Manual for Cylindrical Wormgearing*, bem como referências úteis.

A AGMA reporta o coeficiente de atrito f como

$$f = \begin{cases} 0{,}15 & V_s = 0 \\ 0{,}124\ \exp\left(-0{,}074 V_s^{0{,}645}\right) & 0 < V_s \leq 10 \text{ ft/min} \\ 0{,}103\ \exp\left(-0{,}110 V_s^{0{,}450}\right) + 0.012 & V_s > 10 \text{ ft/min} \end{cases} \tag{15-38}$$

Agora, examinemos algo da geometria de engrenagens sem-fim engranzadas. O adendo a e o dedendo b são

$$a = \frac{p_x}{\pi} = 0{,}3183 p_x \tag{15-39}$$

$$b = \frac{1{,}157 p_x}{\pi} = 0{,}3683 p_x \tag{15-40}$$

A profundidade completa h_t é

$$h_t = \begin{cases} \dfrac{2{,}157 p_x}{\pi} = 0{,}6866 p_x & p_x \geq 0{,}16 \text{ in} \\ \dfrac{2{,}200 p_x}{\pi} + 0{,}002 = 0{,}7003 p_x + 0{,}002 & p_x < 0{,}16 \text{ in} \end{cases} \tag{15-41}$$

O diâmetro externo d_o do pinhão sem-fim é

$$d_0 = d + 2a \tag{15-42}$$

O diâmetro de raiz d_r do pinhão sem-fim é

$$d_r = d - 2b \tag{15-43}$$

O diâmetro de garganta da coroa sem-fim D_t vale

$$D_t = D + 2a \tag{15-44}$$

O diâmetro de raiz D_r da coroa sem-fim é

$$D_r = D - 2b \tag{15-45}$$

A folga c é

$$c = b - a \tag{15-46}$$

A largura de face (máxima) do pinhão sem-fim $(F_W)_{\max}$ é

$$(F_W)_{\max} = 2\sqrt{\left(\frac{D_t}{2}\right)^2 - \left(\frac{D}{2} - a\right)^2} \tag{15-47}$$

A largura de face da coroa sem-fim F_G é

$$F_G = \begin{cases} 2d_m/3 & p_x > 0{,}16 \text{ in} \\ 1{,}125\sqrt{(d_0 + 2c)^2 - (d_0 - 4a)^2} & p_x \leq 0{,}16 \text{ in} \end{cases} \tag{15-48}$$

A razão de perda de calor H_{perda} da carcaça da coroa sem-fim em ft · lbf/min é

$$H_{\text{perda}} = 33\,000(1 - e)H_{\text{in}} \tag{15-49}$$

em que e identifica a eficiência, dada pela Equação (13-46), e H_{in} é a potência de entrada proveniente do pinhão sem-fim. A eficiência geral h_{CR} para a combinação de transferência de calor por convecção e radiação, a partir da caixa da coroa sem-fim em ft · lbf/(min · in^2 · °F), é

$$h_{\text{CR}} = \begin{cases} \dfrac{n_W}{6494} + 0{,}13 & \text{sem ventilador em eixo sem-fim} \\ \dfrac{n_W}{3939} + 0{,}13 & \text{ventilador em eixo sem-fim} \end{cases} \tag{15-50}$$

Quando a área lateral da carcaça A é expressa em in^2, a temperatura do reservatório de óleo t_s é dada por

$$t_s = t_a + \frac{H_{\text{perda}}}{\hbar_{\text{CR}} A} = \frac{33\,000(1-e)(H)_{\text{in}}}{\hbar_{\text{CR}} A} + t_a \tag{15-51}$$

Desconsiderando as Equações (15-49), (15-50) e (15-51), podem-se aplicar as recomendações da AGMA para a área lateral mínima A_{min} em in^2 utilizando-se

$$A_{\text{min}} = 43{,}20C^{1.7} \tag{15-52}$$

Visto que os dentes do pinhão sem-fim são inerentemente mais fortes que os da coroa sem-fim, eles não são considerados. Os dentes em coroas sem-fim são curtos e espessos nas extremidades da face; a meio plano eles são mais finos, assim como curvados. Buckingham[3] adaptou a equação de Lewis para este caso:

$$\sigma_a = \frac{W_G^t}{p_n (F_e)_G y} \tag{15-53}$$

em que $p_n = p_x \cos\lambda$ e y é o fator de forma de Lewis, relacionado ao passo circular. Para $\phi_n = 14{,}5°$, $y = 0{,}100$; $\phi_n = 20°$, $y = 0{,}125$; $\phi_n = 25°$, $y = 0{,}150$; $\phi_n = 30°$, $y = 0{,}175$.

15-7 Análise de Engrenagens Sem-Fim

Comparados a outros sistemas de engrenamento, os pares de engrenagens sem-fim apresentam uma eficiência mecânica muito menor. O resfriamento, para benefício do lubrificante, torna-se, algumas vezes, uma restrição de projeto, resultando em carcaças que parecem ser muito grandes em relação ao que contêm. Se o calor puder ser dissipado por esfriamento natural, ou simplesmente por meio de um soprador no eixo do sem-fim, deve-se optar pela simplicidade. Uma serpentina de água no interior da carcaça de engrenagem ou o bombeamento do lubrificante para um resfriadouro externo representam o próximo grau de complexidade. Logo, a determinação da área de carcaça constitui uma decisão de projeto.

Para reduzir a carga de resfriamento, utilize sem-fins de múltiplas roscas. Além disso, mantenha o diâmetro primitivo do sem-fim o menor possível.

Sem-fins de múltiplas roscas podem remover o característico autotravamento de muitas transmissões por par sem-fim. Quando o pinhão governa o conjunto de engrenagens, a eficiência mecânica e_W é dada por

$$e_W = \frac{\cos\phi_n - f\tan\lambda}{\cos\phi_n + f\cot\lambda} \tag{15-54}$$

Com a coroa governando o conjunto, a eficiência mecânica e_G é fornecida por

$$e_G = \frac{\cos\phi_n - f\cot\lambda}{\cos\phi_n + f\tan\lambda} \tag{15-55}$$

Para garantir que a coroa irá governar o pinhão,

$$f_{\text{stat}} < \cos\phi_n \tan\lambda \tag{15-56}$$

sendo que os valores de f_{stat} podem ser obtidos na ANSI/AGMA 6034-B92. Para evitar que a coroa governe o pinhão, refira-se à cláusula 9 da 6034-B92, para uma discussão acerca do autotravamento na condição estática.

É importante encontrar uma forma de relacionar a componente tangencial da força na coroa sem-fim W_G^t à componente tangencial da força no pinhão sem-fim W_W^t – componente essa que inclui o papel do atrito e os ângulos ϕ_n e λ. Refira-se à Equação (13-45), solucionada para W_W^t:

$$W_W^t = W_G^t \frac{\cos\phi_n \operatorname{sen}\lambda + f\cos\lambda}{\cos\phi_n \cos\lambda - f\operatorname{sen}\lambda} \tag{15-57}$$

Na ausência de atrito

$$W_W^t = W_G^t \tan\lambda$$

A eficiência mecânica da maioria dos engrenamentos é muito alta, o que permite às potências entrante e sainte poderem ser utilizadas quase que de forma intercambiável. Pares sem-fim têm uma eficiência tão pobre que trabalhamos com, e falamos de, potência de saída. A magnitude da força transmitida pela coroa W_G^t pode ser relacionada à potência de saída H_0, ao fator de aplicação K_a, à eficiência e e ao fator de projeto n_d por

[3] Earle Buckingham, *Analytical Mechanics of Gears*, McGraw-Hill, New York, 1949, p. 495.

$$W_G^t = \frac{33\,000 n_d H_0 K_a}{V_G e} \tag{15-58}$$

Utilizamos a Equação (15-57) para obter a força correspondente no pinhão, W_W^t. Segue-se que

$$H_W = \frac{W_W^t V_W}{33\,000} = \frac{\pi d_W n_W W_W^t}{12(33\,000)} \text{ hp} \tag{15-59}$$

$$H_G = \frac{W_G^t V_G}{33\,000} = \frac{\pi d_G n_G W_G^t}{12(33\,000)} \text{ hp} \tag{15-60}$$

A partir da Equação (13-44),

$$W_f = \frac{f W_G^t}{f \operatorname{sen}\lambda - \cos\phi_n \cos\lambda} \tag{15-61}$$

A velocidade de deslizamento do pinhão no cilindro primitivo V_s é

$$V_s = \frac{\pi d_W n_W}{12 \cos\lambda} \tag{15-62}$$

e a potência de atrito H_f é dada por

$$H_f = \frac{|W_f| V_s}{33\,000} \text{ hp} \tag{15-63}$$

A Tabela 15-9 fornece o maior ângulo de avanço λ_{max} associado ao ângulo de pressão normal ϕ_n.

Tabela 15-9 Máximo ângulo de avanço associado com um ângulo de pressão normal ϕ_n para engrenagens sem-fim

ϕ_n	Ângulo de avanço máximo λ_{max}
14,5°	16°
20°	25°
25°	35°
30°	45°

EXEMPLO 15-3

Um sem-fim de aço com uma rosca roda a 1800 rpm, engranzando com uma coroa sem-fim de 24 dentes transmitindo 3 hp ao eixo de saída. O diâmetro do sem-fim é de 3 in, e o passo diametral tangencial da coroa é de 4 dentes/in. O ângulo de pressão normal é de 14,5°. A temperatura ambiente é de 70°F. O fator de aplicação vale 1,25 e o de projeto, 1; a largura da face da coroa é igual a 2 in, a área lateral vale 600 in^2, sendo tal coroa de bronze fundido com resfriamento.

(*a*) Encontre a geometria da coroa.

(*b*) Encontre as forças transmitidas à coroa e a eficiência do engrenamento.

(*c*) O par é suficiente para suportar a carga?

(*d*) Estime a temperatura no tanque de óleo lubrificante.

Solução

(*a*) $m_G = N_G/N_W = 24/1 = 24$, $d_G = N_G/P_t = 24/4 = 6{,}000$ in, $d_P = 3{,}000$ in. O passo circular axial p_x é tal que $p_x = \pi/P_t = \pi/4 = 0{,}7854$ in. $C = (3 + 6)/2 = 4{,}5$ in.

Equação (15-39): $a = p_x/\pi = 0{,}7854/\pi = 0{,}250$ in

Equação (15-40): $h = 0{,}3683 p_x = 0{,}3683(0{,}7854) = 0{,}289$ in

Equação (15-41): $h_t = 0{,}6866 p_x = 0{,}6866(0{,}7854) = 0{,}539$ in

Equação (15-42): $d_0 = 3 + 2(0{,}250) = 3{,}500$ in

Equação (15-43): $d_r = 3 - 2(0{,}289) = 2{,}422$ in

Equação (15-44): $D_t = 6 + 2(0{,}250) = 6{,}500$ in

Equação (15-45): $D_r = 6 - 2(0{,}289) = 5{,}422$ in

Equação (15-46): $c = 0{,}289 - 0{,}250 = 0{,}039$ in

Equação (15-47): $$(F_W)_{\max} = 2\sqrt{\left(\frac{6{,}5}{2}\right)^2 - \left(\frac{6}{2} - 0{,}250\right)^2} = 3{,}464 \text{ in}$$

As velocidades tangenciais do pinhão, V_W, e da coroa, V_G, são, respectivamente,

$$V_W = \pi(3)1800/12 = 1414 \text{ ft/min} \qquad V_G = \frac{\pi(6)1800/24}{12} = 117{,}8 \text{ ft/min}$$

O avanço do pinhão, a partir da Equação (13-27), é $p_x N_W = 0{,}7854(1) = 0{,}7854$ in. O ângulo de avanço λ, a partir da Equação (13-28), é

$$\lambda = \tan^{-1}\frac{L}{\pi d_W} = \tan^{-1}\frac{0{,}7854}{\pi(3)} = 4{,}764^\circ$$

O passo diametral normal para uma coroa sem-fim é o mesmo que aquele para uma coroa helicoidal, o qual, a partir da Equação (13-18), com $\psi = \lambda$, é

$$P_n = \frac{P_t}{\cos\lambda} = \frac{4}{\cos 4{,}764^\circ} = 4{,}014$$

$$p_n = \frac{\pi}{P_n} = \frac{\pi}{4{,}014} = 0{,}7827 \text{ in}$$

A velocidade de deslizamento, a partir da Equação (15-62), é

$$V_s = \frac{\pi d_W n_W}{12\cos\lambda} = \frac{\pi(3)1800}{12\cos 4{,}764^\circ} = 1419 \text{ ft/min}$$

(*b*) O coeficiente de atrito, a partir da Equação (15-38), é

$$f = 0{,}103\exp[-0{,}110(1419)^{0{,}450}] + 0{,}012 = 0{,}0178$$

A eficiência e, a partir da Equação (15-46), é

Solução
$$e = \frac{\cos\phi_n - f\tan\lambda}{\cos\phi_n + f\cot\lambda} = \frac{\cos 14{,}5^\circ - 0{,}0178\tan 4{,}764^\circ}{\cos 14{,}5^\circ + 0{,}0178\cot 4{,}764^\circ} = 0{,}818$$

O projetista utilizou $n_d = 1$, $K_a = 1{,}25$ e uma potência de saída $H_0 = 3$ hp. A componente de força tangencial da coroa W_G^t, a partir da Equação (15-58), é

Solução
$$W_G^t = \frac{33\,000 n_d H_0 K_a}{V_G e} = \frac{33\,000(1)3(1{,}25)}{117{,}8(0{,}818)} = 1284 \text{ lbf}$$

Solução A força tangencial no pinhão é fornecida pela Equação (15-57):

$$W_W^t = W_G^t \frac{\cos\phi_n \operatorname{sen}\lambda + f\cos\lambda}{\cos\phi_n\cos\lambda - f\operatorname{sen}\lambda}$$

$$= 1284\frac{\cos 14{,}5^\circ \operatorname{sen} 4{,}764^\circ + 0{,}0178\cos 4{,}764^\circ}{\cos 14{,}5^\circ\cos 4{,}764^\circ - 0{,}0178\operatorname{sen} 4{,}764^\circ} = 131 \text{ lbf}$$

(*c*)

Equação (15-34): $C_s = 1000$

Equação (15-36): $C_m = 0{,}0107\sqrt{-24^2 + 56(24) + 5145} = 0{,}823$

Equação (15-37): $C_v = 13{,}31(1419)^{-0{,}571} = 0{,}211$

Equação (15-38): $(W^t)_{\text{all}} = C_s d_G^{0{,}8}(F_e)_G C_m C_v$

$= 1000(6)^{0{,}8}(2)0{,}823(0{,}211) = 1456 \text{ lbf}$

Na medida em que $W_G^t < (W^t)_{\text{all}}$, o par irá sobreviver por pelo menos 25 000 h. A força de atrito W_f é fornecida pela Equação (15-61):

$$W_f = \frac{f W_G^t}{f \operatorname{sen}\lambda - \cos\phi_n \cos\lambda} = \frac{0{,}0178(1284)}{0{,}0178 \operatorname{sen} 4{,}764^\circ - \cos 14{,}5^\circ \cos 4{,}764^\circ}$$

$$= -23{,}7 \text{ lbf}$$

A potência dissipada H_f pela força de atrito é fornecida pela Equação (15-63):

$$H_f = \frac{|W_f| V_s}{33\,000} = \frac{|-23{,}7|1419}{33\,000} = 1{,}02 \text{ hp}$$

As potências no pinhão e na coroa, H_W e H_G, são fornecidas por

$$H_W = \frac{W_W^t V_W}{33\,000} = \frac{131(1\,414)}{33\,000} = 5{,}61 \text{ hp} \qquad H_G = \frac{W_G^t V_G}{33\,000} = \frac{1284(117{,}8)}{33\,000} = 4{,}58 \text{ hp}$$

Resposta A potência da coroa é satisfatória. Agora,

$$P_n = P_t / \cos\lambda = 4/\cos 4{,}764^\circ = 4{,}014$$

$$p_n = \pi / P_n = \pi / 4{,}014 = 0{,}7827 \text{ in}$$

A tensão de flexão em um dente de coroa é fornecida pela adaptação de Buckingham da equação de Lewis, Equação (15-53), como

$$(\sigma)_G = \frac{W_G^t}{p_n F_G y} = \frac{1284}{0{,}7827(2)(0{,}1)} = 8200 \text{ psi}$$

Resposta A tensão na coroa é satisfatória.

(*d*)

Equação (15-52): $A_{min} = 43{,}2C^{1{,}7} = 43{,}2(4{,}5)^{1{,}7} = 557 \text{ in}^2$

A carcaça da coroa tem uma área lateral de 600 in^2.

Equação (15-49): $H_{\text{perda}} = 33\,000(1 - e)H_{in} = 33\,000(1 - 0{,}818)5{,}61$

$= 33\,690 \text{ ft} \cdot \text{lbf/min}$

Equação (15-50): $h_{CR} = \frac{n_W}{3939} + 0{,}13 = \frac{1800}{3939} + 0{,}13 = 0{,}587 \text{ ft} \cdot \text{lbf}/(\text{min} \cdot \text{in}^2 \cdot {}^\circ\text{F})$

Resposta Equação (15-51): $t_s = t_a + \frac{H_{\text{perda}}}{h_{CR} A} = 70 + \frac{33\,690}{0{,}587(600)} = 166^\circ\text{F}$

15-8 Projeto de um Par Sem-Fim

Um conjunto útil de decisões para o projeto de um par sem-fim inclui

- Função: potência, velocidade, m_G, K_a
- Fator de projeto: n_d
- Sistema de dentes
- Materiais e processos
- Número de roscas no pinhão: N_W

} Decisões *a priori*

- Passo axial do pinhão: p_x
- Diâmetro primitivo do pinhão: d_W
- Largura de face da coroa: F_G
- Área lateral da carcaça: A

} Variáveis de projeto

A informação concernente à confiabilidade de engrenagens sem-fim ainda não está desenvolvida de maneira satisfatória. O uso da Equação (15-28) da AGMA, assim como dos fatores C_s, C_m e C_v, para um pinhão de aço liga endurecido na superfície, juntamente com os materiais não-ferrosos comuns a coroas sem-fim, irá resultar em vidas excedendo a 25 000 horas. Os materiais de engrenagens sem-fim na base experimental são principalmente bronzes:

- Ligas estanho-bronze e níquel-bronze (a fundição com resfriamento produz superfícies mais duras)
- Chumbo-bronze (aplicações de alta velocidade)
- Alumínio-bronze e silício-bronze (cargas elevadas, aplicações envolvendo baixas velocidades)

O fator C_s para o bronze – nos casos de fundição com areia, fundição resfriada e fundição centrífuga – aumenta na mesma ordem desses processos.

A padronização de sistemas de dentes não está tão avançada quanto em outros tipos de engrenamento. Para o projetista, isso significa liberdade de ação, embora a aquisição de ferramentas para a formação de dentes mais constitua um problema de manufatura interna. Ao utilizar um subcontratador, o projetista deve estar ciente do que o fornecedor é capaz de prover com as ferramentas de que dispõe.

Os passos axiais para o pinhão sem-fim costumam ser inteiros, e os quocientes de inteiros são comuns. Passos típicos são: $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{16}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 1, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{4}$, $\frac{7}{4}$ e 2; todavia, outros também são possíveis. A Tabela 15-8 mostra dimensões comuns à coroa sem-fim e ao sem-fim cilíndrico, para as proporções comumente utilizadas. Os dentes costumam ser encurtados quando os ângulos de avanço são de 30° ou mais.

O projeto de engrenagens sem-fim sofre as restrições do ferramental disponível, do espaço, das distâncias entre os centros de eixos, das razões de engrenamento necessárias e da experiência do projetista. A ANSI/AGMA 6022-C93, *Design Manual for Cylindrical Wormgearing*, oferece o seguinte guia. Ângulos de pressão normal são escolhidos entre 14,5°, 17,5°, 20°, 22,5°, 25°, 27,5° e 30°. O número de dentes mínimo recomendado para a coroa é fornecido na Tabela 15-10. O intervalo normal do número de roscas no pinhão sem-fim vai de 1 a 10. O diâmetro primitivo médio desse pinhão é geralmente escolhido no intervalo estabelecido na Equação (15-27).

Um elemento de decisão no projeto envolve o passo axial do pinhão sem-fim. Uma vez que proporções aceitáveis estão abrigadas em termos da distância de centro a centro, que ainda não é conhecida, escolhe-se, por tentativa, um passo axial p_x. Tendo N_W e um diâmetro do pinhão estabelecido por tentativa d_W,

Tabela 15-10 Número mínimo de dentes de coroa em função do ângulo de pressão ϕ_n

ϕ_n	$(N_G)_{min}$
14,5	40
17,5	27
20	21
22,5	17
25	14
27,5	12
30	10

$$N_G = m_G N_W \qquad P_t = \frac{\pi}{p_x} \qquad d_G = \frac{N_G}{P_t}$$

Assim,

$$(d_W)_{lo} = C^{0.875}/3 \qquad (d_W)_{hi} = C^{0.875}/1{,}6$$

Examine se $(d_W)_{lo} \le d_W \le (d_W)_{hi}$ e refine a seleção do diâmetro primitivo médio do pinhão para d_{W1}, se necessário. Recalcule a distância entre os centros, com base em $C = (d_{W1} + d_G)/2$. Há, inclusive, a oportunidade de tornar C um número inteiro. Escolha-o e estabeleça

$$d_{W2} = 2C - d_G$$

As Equações (15-39) a (15-48) aplicam-se a um conjunto usual de proporções.

EXEMPLO 15-4

Projete um redutor de engrenagens sem-fim de relação de redução de 11:1, com 10 hp, para uma transmissão de alimentador de plaina de serraria com 3 a 10 horas de uso diário. Um motor de indução de gaiola rodando a 1720 rpm move o alimentador da plaina ($K_a = 1{,}25$), sendo a temperatura ambiente de 70°F.

Solução

Função: $H_0 = 10$ hp, $m_G = 11$, $n_W = 1720$ rpm.
Fator de projeto: $n_d = 1{,}2$
Materiais e processos: pinhão de aço liga endurecido superficialmente, coroa de bronze fundida em areia.
Roscas do pinhão: dupla, $N_W = 2$, $N_G = m_G N_W = 11(2) = 22$ dentes para a coroa, aceitável para $\phi_n = 20°$, de acordo com a Tabela 15-10.
Decisão 1: Escolha um passo axial para a coroa, $p_x = 1{,}5$ in. Então,

$$P_t = \pi/p_x = \pi/1{,}5 = 2{,}0944$$

$$d_G = N_G/P_t = 22/2{,}0944 = 10{,}504 \text{ in}$$

Equação (15-39): $a = 0{,}3183 p_x = 0{,}3183(1{,}5) = 0{,}4775$ in (adendo)

Equação (15-40): $b = 0{,}3683(1{,}5) = 0{,}5525$ in (dedendo)

Equação (15-41): $h_t = 0{,}6866(1{,}5) = 1{,}030$ in

Decisão 2: Escolha um diâmetro médio para o pinhão, $d_W = 2{,}000$ in. Então,

$$C = (d_W + d_G)/2 = (2{,}000 + 10{,}504)/2 = 6{,}252 \text{ in}$$

$$(d_W)_{lo} = 6{,}252^{0.875}/3 = 1{,}657 \text{ in}$$

$$(d_W)_{hi} = 6{,}252^{0.875}/1{,}6 = 3{,}107 \text{ in}$$

O intervalo, fornecido pela Equação (15-27), é de $1{,}657 \le d_W \le 3{,}107$ in, o que é satisfatório. Tente $d_W = 2{,}500$ in. Recalcule C:

$$C = (2{,}5 + 10{,}504)/2 = 6{,}502 \text{ in}$$

O intervalo é, agora, de $1{,}715 \le d_W \le 3{,}216$ in, o que é satisfatório. *Decisão*: $d_W = 2{,}500$ in. Assim,

Equação (13-27): $L = p_x N_W = 1{,}5(2) = 3{,}000$ in

Equação (13-28):

$$\lambda = \tan^{-1}[L/(\pi d_W)] = \tan^{-1}[3/(\pi 2{,}5)] = 20{,}905° \quad \text{(a partir da Tabela 15-9, o ângulo de avanço é aceitável)}$$

Equação (15-62): $$V_s = \frac{\pi d_W n_W}{12 \cos \lambda} = \frac{\pi(2{,}5)1720}{12 \cos 20{,}905°} = 1205{,}1 \text{ ft/min}$$

$$V_W = \frac{\pi d_W n_W}{12} = \frac{\pi(2{,}5)1720}{12} = 1125{,}7 \text{ ft/min}$$

$$V_G = \frac{\pi d_G n_G}{12} = \frac{\pi(10{,}504)1720/11}{12} = 430{,}0 \text{ ft/min}$$

Equação (15-33): $C_s = 1190 - 477 \log 10{,}504 = 702{,}8$

Equação (15-36): $C_m = 0{,}02\sqrt{-11^2 + 40(11) - 76} + 0{,}46 = 0{,}772$

Equação (15-37): $C_v = 13{,}31(1205{,}1)^{-0{,}571} = 0{,}232$

Equação (15-38): $f = 0{,}103 \exp[-0{,}11(1205{,}1)^{0{,}45}] + 0{,}012 = 0{,}0191$

Equação (15-54): $e_W = \dfrac{\cos 20° - 0{,}0191 \tan 20{,}905°}{\cos 20° + 0{,}0191 \cot 20{,}905°} = 0{,}942$

Equação (15-54): $e_W = \dfrac{\cos 20° - 0{,}0191 \tan 20{,}905°}{\cos 20° + 0{,}0191 \cot 20{,}905°} = 0{,}942$

(Se a coroa é utilizada como motora, $e_G = 0{,}939$). Para assegurar uma potência nominal de saída de 10 hp, realizando ajustes para K_a, n_d e e,

Equação (15-57): $W^t_W = 1222\dfrac{\cos 20° \operatorname{sen} 20{,}905° + 0{,}0191 \cos 20{,}905°}{\cos 20° \cos 20{,}905° - 0{,}0191 \operatorname{sen} 20{,}905°} = 495{,}4 \text{ lbf}$

Equação (15-58): $W^t_G = \dfrac{33\,000(1{,}2)10(1{,}25)}{430(0{,}942)} = 1222 \text{ lbf}$

Equação (15-59): $H_W = \dfrac{\pi(2{,}5)1720(495{,}4)}{12(33\,000)} = 16{,}9 \text{ hp}$

Equação (15-60): $H_G = \dfrac{\pi(10{,}504)1720/11(1222)}{12(33\,000)} = 15{,}92 \text{ hp}$

Equação (15-61): $W_f = \dfrac{0{,}0191(1222)}{0{,}0191 \operatorname{sen} 20{,}905° - \cos 20° \cos 20{,}905°} = -26{,}8 \text{ lbf}$

Equação (15-63): $H_f = \dfrac{|-26{,}8|1205{,}1}{33\,000} = 0{,}979 \text{ hp}$

Com $C_s = 702{,}8$, $C_m = 0{,}772$ e $C_v = 0{,}232$,

$$(F_e)_{\text{req}} = \frac{W^t_G}{C_s d_G^{0{,}8} C_m C_v} = \frac{1222}{702{,}8(10{,}504)^{0{,}8}0{,}772(0{,}232)} = 1{,}479 \text{ in}$$

Decisão 3: O intervalo disponível para $(F_e)_G$ é de $1{,}479 \le (F_e)_G \le 2d_W/3$, ou de $1{,}479 \le (F_e)_G \le 1{,}667$ in. Considere $(F_e)_G = 1{,}5$ in.

Equação (15-28): $W^t_{\text{all}} = 702{,}8(10{,}504)^{0{,}8}1{,}5(0{,}772)0{,}232 = 1239 \text{ lbf}$

Esse valor supera 1222 lbf. Há um pequeno excesso de capacidade. A análise de força realizadamantém-se.

Decisão 4:

Equação (15-50): $h_{\text{CR}} = \dfrac{n_W}{6494} + 0{,}13 = \dfrac{1720}{6494} + 0{,}13 = 0{,}395 \text{ ft} \cdot \text{lbf}/(\text{min} \cdot \text{in}^2 \cdot °\text{F})$

Equação (15-49): $H_{\text{perda}} = 33\,000(1 - e)H_W = 33\,000(1 - 0{,}942)16{,}9 = 32\,347 \text{ ft} \cdot \text{lbf/min}$

A área AGMA, a partir da Equação (15-52), é $A_{\text{min}} = 43{,}2C^{1{,}7} = 43{,}2(6{,}502)^{1{,}7} = 1041{,}5 \text{ in}^2$. Eis uma estimativa grosseira da área lateral com folga de 6 in:

Vertical: $d_W + d_G + 6 = 2{,}5 + 10{,}5 + 6 = 19$ in

Largura: $d_G + 6 = 10{,}5 + 6 = 16{,}5$ in

Espessura: $d_W + 6 = 2{,}5 + 6 = 8{,}5$ in

Área: $2(19)16{,}5 + 2(8{,}5)19 + 16{,}5(8{,}5) \doteq 1090$ in^2

Espere uma área de 1100 in^2. Escolha: resfriamento a ar, sem qualquer soprador utilizado, com temperatura ambiente de 70°F.

$$t_s = t_a + \frac{H_{\text{perda}}}{h_{\text{CR}} A} = 70 + \frac{32\,350}{0{,}395(1100)} = 70 + 74{,}5 = 144{,}5^\circ\text{F}$$

O lubrificante funciona com segurança, com alguma margem para uma área menor.

Equação (13-18):
$$P_n = \frac{P_t}{\cos\lambda} = \frac{2{,}094}{\cos 20{,}905^\circ} = 2{,}242$$

$$p_n = \frac{\pi}{P_n} = \frac{\pi}{2{,}242} = 1{,}401 \text{ in}$$

A tensão de flexão da coroa, para referência, é

Equação (15-53):
$$\sigma = \frac{W_G^t}{p_n (F_e)_G y} = \frac{1222}{1{,}401(1{,}5)0{,}125} = 4652 \text{ psi}$$

O risco provém do desgaste, que é considerado pelo método AGMA, o qual provê $(W_G^t)_{all}$.

15-9 Carga de Desgaste de Buckingham

Um precursor do método AGMA foi o de Buckingham, que identificou uma carga admissível de desgaste em engrenamento sem-fim. Buckingham mostrou que a carga admissível para o dente de engrenagem com relação ao desgaste pode ser estimada a partir de

$$(W_G^t)_{\text{all}} = K_w d_G F_e \tag{15-64}$$

em que K_w = fator de carga para a coroa sem-fim
d_G = diâmetro primitivo da coroa
F_e = largura efetiva de face da coroa sem-fim

A Tabela 15-11 fornece valores de K_w para pares de sem-fim, como uma função do par de materiais e do ângulo de pressão normal.

EXEMPLO 15-5

Estime a carga de desgaste admissível de uma coroa sem-fim $(W_G^t)_{\text{all}}$, para o conjunto do Exemplo 15-4, utilizando a equação de desgaste de Buckingham.

Solução

A partir da Tabela 15-11, para uma coroa de aço endurecido e um suporte de bronze, K_w vale 80 para $\phi_n = 20°$. A Equação (15-64) fornece

$$(W_G^t)_{\text{all}} = 80(10{,}504)1{,}5 = 1260 \text{ lbf}$$

o que é maior que os 1239 lbf do método AGMA. O método de Buckingham não conta com os refinamentos do método AGMA. [Varia $(W_G^t)_{\text{all}}$ de forma linear com o diâmetro da coroa?]

Tabela 15-11 Fator de desgaste K_W para engrenagens sem-fim

Material		Ângulo de rosca ϕ_n			
Pinhão	Coroa	$14\frac{1}{2}°$	20°	25°	30°
Aço endurecido*	Bronze resfriado	90	125	150	180
Aço endurecido*	Bronze	60	80	100	120
Aço, 250 BHN (min.)	Bronze	36	50	60	72
Ferro fundido de alto rendimento	Bronze	80	115	140	165
Ferro fundido†	Alumínio	10	12	15	18
Ferro fundido de alto rendimento	Ferro cinza	90	125	150	180
Ferro fundido de alto rendimento	Aço fundido	22	31	37	45
Ferro fundido de alto rendimento	Ferro fundido de alto rendimento	135	185	225	270
Aço 250 BHN (min.)	Fenólico laminado	47	64	80	95
Ferro cinza	Fenólico laminado	70	96	120	140

Fonte: Earle Buckingham, Design of Worm and Spiral Gears, *Industrial Press, New York, 1981.*

* Acima de 500 BHN superficial.

† Para sem-fins de aço, multiplique os valores dados por 0,6.

Para combinações de materiais não consideradas pela AGMA, o método de Buckingham permite um tratamento quantitativo.

PROBLEMAS

ANÁLISE **15-1** Um pinhão cônico de dentes retos sem coroamento tem 20 dentes, um passo diametral de 6 dentes/in e um número de precisão de transmissão igual a 6. Ambos, o pinhão e a coroa, são feitos de aço endurecido por completo, com uma dureza Brinell de 300. A coroa tem 60 dentes. A vida pretendida para o conjunto corresponde a 10^9 revoluções do pinhão, com confiabilidade de 0,999. O ângulo entre os eixos é de 90°; a velocidade do pinhão vale 900 rpm. A largura de face é de 1,25 in e o ângulo de pressão normal, de 20°. O pinhão é montado em balanço, relativamente aos mancais do seu eixo, ao passo que a coroa é montada em meio aos mancais. Com base na resistência à flexão AGMA, qual é a potência transmissível pelo conjunto? Utilize $K_0 = 1$, $S_F = 1$ e $S_H = 1$.

ANÁLISE **15-2** Para o conjunto de engrenagens e as condições do Problema 15-1, encontre a capacidade de transmitir potência com base na durabilidade superficial da AGMA.

15-3 Um pinhão cônico de dentes retos sem coroamento tem 30 dentes, um passo diametral igual a 6 e um número de precisão de transmissão igual a 6. A coroa tem 60 dentes. Ambos, o pinhão e a coroa, são feitos de ferro fundido nº 30. O ângulo entre os eixos é de 90°. A largura de face é de 1,25 in, a velocidade do pinhão é de 900 rpm e o ângulo de pressão normal vale 20°. O pinhão é montado em balanço, relativamente aos mancais do seu eixo; os mancais da coroa, por sua vez, localizam-se em ambos os lados da mesma. Qual é a capacidade de transmissão de potência quanto à resistência à flexão AGMA? (Para conjuntos de engrenagens feitas de ferro fundido, uma informação concernente à confiabilidade ainda não foi desenvolvida. Dizemos que a vida é maior que 10^7 revoluções; considere $K_L = 1$, $C_L = 1$, $C_R = 1$, $K_R = 1$ e aplique um fator de segurança. Utilize $S_F = 2$ e $S_H = \sqrt{2}$.)

ANÁLISE **15-4** Para o conjunto de engrenagens e as condições do Problema 15-3, encontre a capacidade de transmitir potência com base na durabilidade superficial AGMA. Para as soluções dos Problemas 15-3 e 15-4, qual a capacidade de transmitir potência do conjunto?

ANÁLISE **15-5** Um pinhão cônico de dentes retos sem coroamento tem 22 dentes, um módulo de 4 mm e um número de precisão de transmissão igual a 5. O pinhão e a coroa são feitos de aço endurecido por completo, ambos com uma dureza de núcleo e superfície iguais a 180 Brinell. O pinhão move uma coroa cônica de 24 dentes. O ângulo entre eixos é de 90°, a velocidade do pinhão corresponde a 1800 rpm, a largura de face vale 25 mm e o ângulo de pressão normal é igual a 20°. Ambas as engrenagens são montadas em balanço. Encontre a capacidade de transmitir potência com base na resistência à formação de cavidades da AGMA, supondo uma vida de 10^9 revoluções do pinhão, com confiabilidade igual a 0,999.

ANÁLISE **15-6** Para o conjunto de engrenagens e as condições do Problema 15-5, encontre a capacidade de transmitir potência com base na resistência à flexão AGMA.

15-7 Em uma engrenagem cônica de dentes retos, há alguns fatos análogos aos expressos pelas Equações (14-44) e (14-45). Se tivermos um núcleo de pinhão com uma dureza $(H_B)_{11}$ e tentarmos igualar as capacida-

des de transmissão de potência, a carga transmitida W^t poderá ser feita igual em todos os quatro casos possíveis. Podem-se encontrar as seguintes relações:

	Núcleo	Superfície
Pinhão	$(H_B)_{11}$	$(H_B)_{12}$
Engrenagem	$(H_B)_{21}$	$(H_B)_{22}$

(*a*) Para uma coroa de aço com endurecimento superficial por carbonetação, apresentando resistência à flexão AGMA de núcleo $(s_{at})_G$ engrenada em um pinhão com resistência de núcleo $(s_{at})_P$, mostre que a relação é

$$(s_{at})_G = (s_{at})_P \frac{J_P}{J_G} m_G^{-0.0323}$$

Isso permite que $(H_B)_{21}$ seja relacionado a $(H_B)_{11}$.

(*b*) Mostre que a resistência ao contato AGMA da superfície da coroa $(s_{ac})_G$ pode ser relacionada à resistência à flexão de núcleo AGMA do núcleo do pinhão $(s_{ac})_P$ mediante

$$(s_{ac})_G = \frac{C_p}{(C_L)_G C_H} \sqrt{\frac{S_H^2}{S_F} \frac{(s_{at})_P (K_L)_P K_x J_P K_T C_s C_{xc}}{N_P I K_s}}$$

Se fatores de segurança são aplicados à carga transmitida W_t, então $S_H = \sqrt{S_F}$ e S_H^2 / S_F é unitário. O resultado permite que se relacione $(H_B)_{22}$ a $(H_B)_{11}$.

(*c*) Mostre que a resistência de contato AGMA da coroa $(S_{ac})_G$ está relacionada à resistência de contato do pinhão $(s_{ac})_P$ mediante

$$(s_{ac})_P = (s_{ac})_G m_G^{0.0602} C_H$$

15-8 Refira-se à solução dos Problemas 15-1 e 15-2, que supõe um pinhão de dureza de núcleo igual a 300 Brinell. Utilize as relações provenientes do Problema 15-7 para estabelecer a dureza de núcleo da coroa e as durezas superficiais de ambas as engrenagens.

15-9 Repita os Problemas 15-1 e 15-2 com o protocolo de dureza,

	Núcleo	Superfície
Pinhão	300	372
Engrenagem	352	344

que pode ser estabelecido pelas relações no Problema 15-7, e verifique se o resultado iguala as cargas transmitidas W^t em todos os quatro casos.

15-10 Um catálogo de engrenagens cônicas de estoque lista uma capacidade de transmitir potência igual a 5,2 hp, a 1200 rpm de velocidade do pinhão, para um par de engrenagens cônicas de dentes retos consistindo em um pinhão de 20 dentes movendo uma coroa de 40 dentes. Esse par de engrenagens tem um ângulo de pressão normal de 20°, uma largura de face de 0,71 in e um passo diametral de 10 dentes/in, sendo endurecido por inteiro a 300 BHN. Assuma que as engrenagens são para uso industrial generalizado, sendo geradas para um número de precisão de transmissão igual a 5 e não tendo coroamento. Dados esses valores, o que você pensa a respeito da capacidade de transmissão de potência anunciada no catálogo?

15-11 Aplique, no Exemplo 15-1, as relações apresentadas no Problema 15-7 e encontre a dureza superficial Brinell das engrenagens para uma carga admissível W^t igual para flexão e desgaste. Verifique seu trabalho refazendo o Exemplo 15-1, de modo a verificar se você está correto. O que você faria com relação ao tratamento térmico das engrenagens?

15-12 Sua experiência com o Exemplo 15-1, bem como com problemas nele baseados, lhe permitirá escrever um programa de computação interativo para calcular a capacidade de transmissão de potência de engrenagens de aço endurecidas por completo. Teste seu conhecimento de análise de engrenagens cônicas observando a facilidade com que o código se desenvolve. O protocolo de dureza desenvolvido no Problema 15-7 pode ser incorporado na extremidade do seu código – primeiro, para mostrá-lo e, então, como uma opção para o retorno e a verificação das conseqüências do mesmo.

15-13 Faça uso de sua experiência com o Problema 15-11 e com o Exemplo 15-2 para desenvolver um programa iterativo de projeto por computador para engrenagens cônicas de dentes retos, implementando o padrão ANSI/AGMA 2003-B97. Será útil seguir o conjunto de decisões da Seção 15-5, permitindo o retorno a decisões anteriores – a título de revisão –, à medida que as conseqüências destas se desenvolvem.

15-14 Um pinhão sem-fim de aço com uma rosca roda a 1725 rpm, engranzando com uma coroa de 56 dentes transmitindo 1 hp de potência para o eixo de saída. O diâmetro primitivo do sem-fim vale 1,50. O passo diametral tangencial da coroa é de 8 dentes por polegada, e o ângulo de pressão normal vale 20°. A temperatura ambiente corresponde a 70°F, o fator de aplicação é de 1,25, o fator de projeto vale 1, a largura da coroa é de 0,5 in, a área lateral da carcaça vale 850 in^2 e a coroa é de bronze fundido em areia.

(*a*) Determine e avalie as propriedades geométricas das engrenagens.

(*b*) Determine as forças transmitidas pelas engrenagens e a eficiência do engrenamento.

(*c*) Esse conjunto é suficiente para carregar a carga?

(*d*) Estime a temperatura do reservatório do óleo lubrificante.

15-15 ao 15-22 Como no Exemplo 15-4, projete um engranzamento de engrenagens cilíndricas sem-fim para conectar um motor de indução de gaiola a um agitador de líquido. A velocidade do motor é de 1125 rpm, e a razão de velocidade deve ser de 10:1. A potência requerida de saída é de 25 hp. Os eixos formam 90° de ângulo entre si. Um fator de sobrecarga K_o (ver Tabela 15-2) faz concessão a excursões dinâmicas externas da carga a partir da carga nominal ou média W^t. Para esse serviço, $K_o = 1{,}25$ revela-se apropriado. Ademais, um fator de projeto n_d igual a 1,1 deve ser incluído para levar em conta riscos não-quantificados. Para os Problemas 15-15 a 15-17, utilize o método AGMA para $(W_G^t)_{all}$, ao passo que, para os Problemas 15-18 a 15-22, utilize o método de Buckingham. Veja a Tabela 15-12.

Tabela 15-12 Tabela de dados para os Problemas 15-15 a 15-22

Problema nº	Método	Materiais	
		Pinhão	Coroa
15-15	AGMA	Aço, HRC 58	Bronze fundido em areia
15-16	AGMA	Aço, HRC 58	Bronze fundido com resfriamento
15-17	AGMA	Aço, HRC 58	Bronze fundido por centrifugação
15-18	Buckingham	Aço, 500 Bhn	Bronze fundido com resfriamento
15-19	Buckingham	Aço, 500 Bhn	Bronze fundido
15-20	Buckingham	Aço, 250 Bhn	Bronze fundido
15-21	Buckingham	Ferro fundido de alto rendimento	Bronze fundido
15-22	Buckingham	Ferro fundido de alto rendimento	Ferro fundido de alto rendimento

CAPÍTULO

16 Embreagens, Freios, Acoplamentos e Volantes

16-1 Análise Estática de Embreagens e Freios 766
16-2 Embreagens e Freios de Aro Interno Expansível 771
16-3 Embreagens e Freios de Aro Externo Contrátil 779
16-4 Embreagens e Freios de Cinta 783
16-5 Embreagens Axiais de Contato Friccional 784
16-6 Freios de Disco 787
16-7 Embreagens de Cone e Freios 791
16-8 Considerações de Energia 793
16-9 Elevação de Temperatura 795
16-10 Materiais de Fricção 798
16-11 Embreagens Variadas e Acoplamentos 800
16-12 Volantes 802

Este capítulo diz respeito a um grupo de elementos geralmente associados à rotação, o qual tem em comum a função de armazenagem e/ou transferência de energia de rotação. Devido a essa similaridade de função, embreagens, freios, acoplamentos e volantes serão tratados conjuntamente neste livro.

Uma representação dinâmica simplificada de uma embreagem de fricção ou freio é mostrada na Figura 16-1(*a*). Duas inércias, I_1 e I_2, girando nas respectivas velocidades angulares ω_1 e ω_2 – uma das quais podendo ser zero, em se tratando de freios –, devem ser trazidas à mesma velocidade engatando-se a embreagem ou freio. Ocorre escorregamento porque os dois elementos estão girando a diferentes velocidades e energia é dissipada durante o acionamento, resultando em uma elevação de temperatura. Analisando o desempenho desses dispositivos, estaremos interessados no seguinte:

1. Força de acionamento
2. Torque transmitido
3. Perda de energia
4. Elevação de temperatura

O torque transmitido está relacionado à força atuante, ao coeficiente de fricção e à geometria da embreagem ou do freio. Isso constitui um problema em estática, o que terá de ser estudado, separadamente, para cada configuração geométrica. Contudo, a elevação de temperatura está relacionada à perda de energia e pode ser estudada sem se levar em consideração o tipo de freio ou embreagem, pois a geometria de interesse é aquela das superfícies dissipando calor.

Os vários tipos de dispositivos a serem estudados podem ser classificados da seguinte maneira:

1. Aro com sapatas internas expansíveis
2. Aro com sapatas externas contráteis
3. Banda ou cinta
4. Disco ou axial
5. Tipo cônico
6. Tipos diversos

Um volante é um dispositivo inercial de armazenagem de energia. Ele absorve energia mecânica ao aumentar sua velocidade angular e transmite energia ao decrescer sua velocidade. A Figura 16-1(*b*) é uma representação matemática de um volante. Um torque de entrada T_i, correspondente a uma coordenada θ_i, fará com que a velocidade do volante aumente, e uma carga ou um torque de saída T_o, com uma coordenada θ_o, absorverá energia do volante e o motivará a diminuir a velocidade. Estaremos interessados em projetar volantes para obter uma quantidade especificada de regulagem de velocidade.

16-1 Análise Estática de Embreagens e Freios

Muitos tipos de embreagens e freios podem ser analisados seguindo um procedimento geral, que requer as seguintes tarefas:

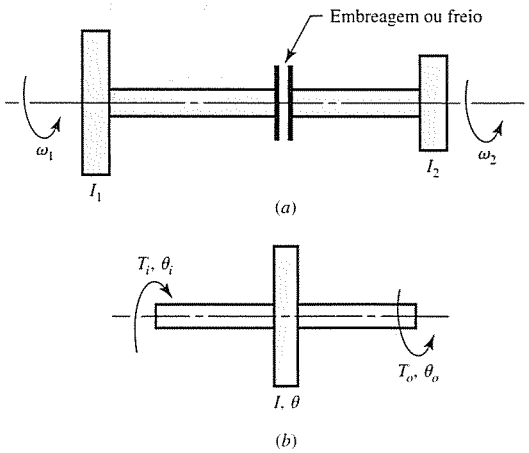


Figura 16-1 (*a*) Representação dinâmica de uma embreagem ou freio; (*b*) representação matemática de um volante.

- Estimar, modelar ou medir a distribuição de pressão nas superfícies de fricção.
- Encontrar uma relação entre a maior pressão e a pressão em qualquer ponto.
- Utilizar as condições de equilíbrio estático para encontrar a força de frenagem ou torque e as reações de suporte.

Apliquemos tais tarefas ao retentor de porta ilustrado na Figura 16-2(*a*). A parada é articulada no pino *A*. Uma distribuição de pressão normal $p(u)$ é mostrada sob a pastilha de fricção como função da posição u, medida a partir da extremidade direita da pastilha. Uma distribuição similar da componente de cisalhamento por atrito atua na superfície, com intensidade $fp(u)$, na direção de movimento do chão relativamente à pastilha, sendo f o coeficiente de atrito. A largura da pastilha papel adentro é w_2. A força resultante na direção y e o momento com relação a C, causado pela pressão, são, respectivamente,

$$N = w_2 \int_0^{w_1} p(u)\,du = p_{av} w_1 w_2 \tag{a}$$

$$\int_0^{w_1} p(u)u\,du = \bar{u} \int_0^{w_1} p(u)\,du = p_{av} w_1 \bar{u} \tag{b}$$

Somamos as forças na direção x para obter

$$\sum F_x = R_x \mp \int_0^{w_1} f w_2 p(u)\,du = 0$$

em que – ou + se aplicam ao movimento relativo para a direita ou para a esquerda do chão, respectivamente. Considerando f e w_2 constantes, e solucionando para R_x, obtemos

$$R_x = \pm \int_0^{w_1} f w_2 p(u)\,du = \pm f w_1 w_2 p_{av} \tag{c}$$

Somando as forças na direção y, obtemos

$$\sum F_y = -F + \int_0^{w_1} p(u) w_2\,du + R_y = 0$$

a partir do que

$$R_y = F - w_2 \int_0^{w_1} p(u)\,du = F - p_{av} w_1 w_2 \tag{d}$$

Somando momentos ao redor do pino localizado em A, obtemos

$$\sum M_A = Fb - \int_0^{w_1} w_2 p(u)(c+u)\,du \mp af w_2 \int_0^{w_1} p(u)\,du = 0$$

Uma sapata de freio é *auto-energizante* se seu sentido de momento ajuda a travar o freio, e *autodenergizante* se o momento resiste em travá-lo. Continuando,

$$F = \frac{w_2}{b}\left[\int_0^{w_1} p(u)(c+u)\,du \mp af \int_0^{w_1} p(u)\,du\right] \tag{e}$$

Pode F ser igual a ou menor que zero? Somente durante o movimento para a direita do chão, quando a expressão entre colchetes na Equação (*e*) é igual a ou menor que zero. Estabelecemos o termo entre colchetes como zero ou menos:

$$\int_0^{w_1} p(u)(c+u)\,du - af \int_0^{w_1} p(u)\,du \le 0$$

a partir do que

$$f_{cr} \ge \frac{1}{a}\frac{\int_0^{w_1} p(u)(c+u)\,du}{\int_0^{w_1} p(u)\,du} = \frac{1}{a}\frac{c\int_0^{w_1} p(u)\,du + \int_0^{w_1} p(u)u\,du}{\int_0^{w_1} p(u)\,du}$$

$$f_{cr} \ge \frac{c+\bar{u}}{a} \tag{f}$$

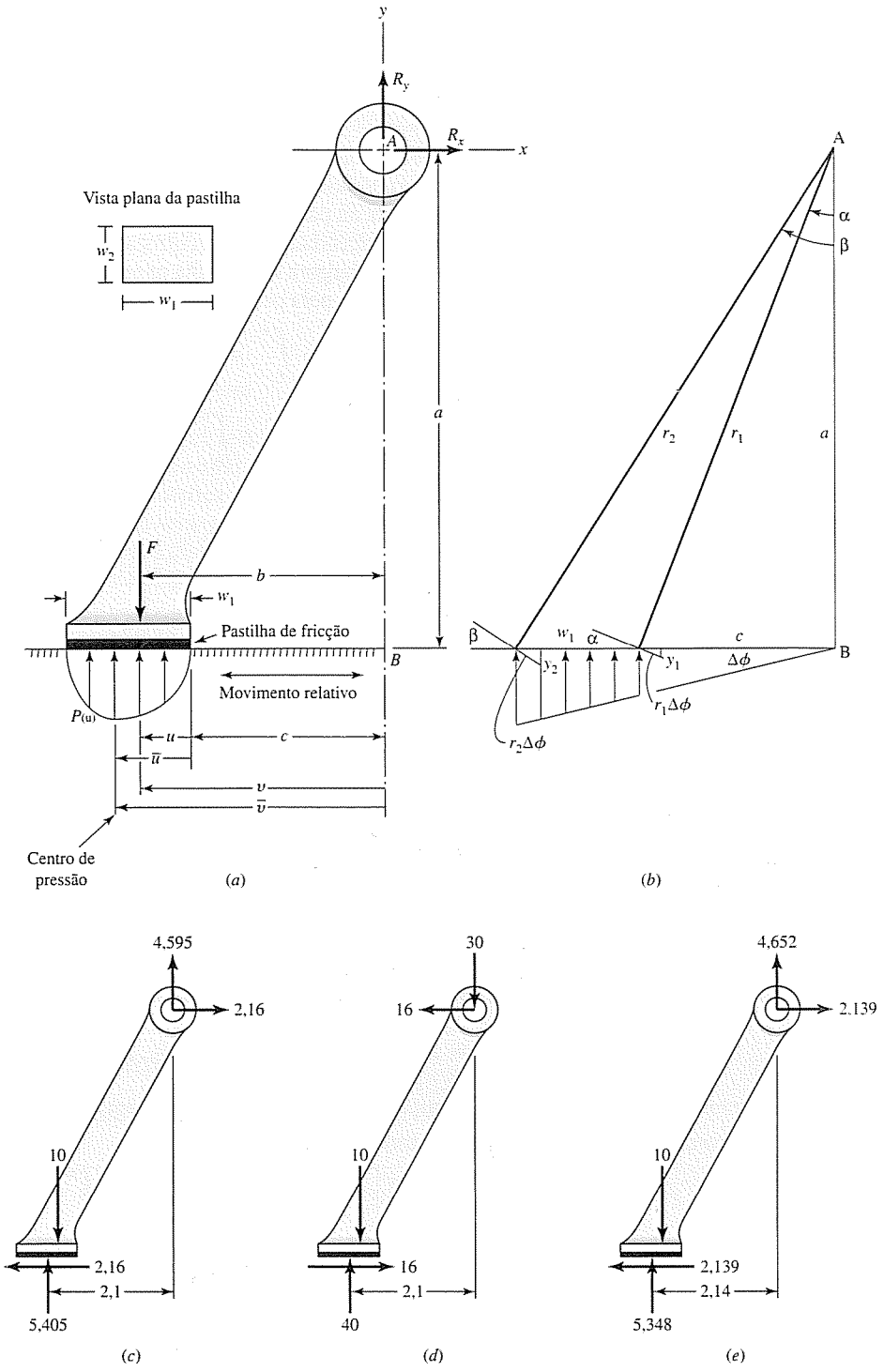


Figura 16-2 Um retentor de porta comum. (*a*) Corpo livre do retentor de porta. (*b*) Distribuição trapezoidal de pressão na almofada de chão baseada na deformação linear da mesma. (*c*) Diagrama de corpo livre para movimento em direção à esquerda do chão, pressão uniforme, Exemplo 16-1. (*d*) Diagrama de corpo livre para movimento em direção à direita do chão, pressão uniforme, Exemplo 16-1. (*e*) Diagrama de corpo livre para movimento em direção à esquerda do chão, pressão trapezoidal, Exemplo 16-1.

em que $\bar{u}$ é a distância do centro de pressão, medida a partir da extremidade direita da almofada. A conclusão de que um fenômeno de *auto-acionamento* ou *autotravamento* está ocorrendo independe de nosso conhecimento acerca da distribuição de pressão normal $p(u)$. Nossa habilidade em *encontrar* o valor crítico do coeficiente de atrito f_{cr} depende de nosso conhecimento de $p(u)$, de onde derivamos $\bar{u}$.

EXEMPLO 16-1

O retentor de porta representado na Figura 16-2(*a*) tem as seguintes dimensões: $a = 4$ in, $b = 2$ in, $c = 1{,}6$ in, $w_1 = 1$ in, $w_2 = 0{,}75$ in, em que w_2 é a profundidade da almofada no plano do papel.

(*a*) Para um movimento direcionado à esquerda do chão, uma força atuante F de 10 lbf e um coeficiente de fricção de 0,4, utilize uma distribuição uniforme de pressão p_{av}, encontre R_x, R_y, p_{av} e a pressão maior p_a.

(*b*) Repita (*a*) para um movimento direcionado à direita do chão.

(*c*) Modele a pressão normal para corresponder ao "esmagamento" da almofada, tanto quanto se esta fosse composta de muitas molas espirais helicoidais pequenas. Encontre R_x, R_y, p_{av} e p_a para um movimento direcionado à esquerda do chão, bem como condições outras como em (*a*).

(*d*) Para um movimento direcionado à direita do chão, o retentor de porta é um freio de auto-acionamento?

Solução

(*a*)

Equação (*c*): $$R_x = fp_{av}w_1w_2 = 0{,}4(1)(0{,}75)p_{av} = 0{,}3p_{av}$$

Equação (*d*): $$R_y = F - p_{av}w_1w_2 = 10 - p_{av}(1)(0{,}75) = 10 - 0{,}75p_{av}$$

Equação (*e*): $$F = \frac{w_2}{b}\left[\int_0^1 p_{av}(c+u)\,du + af\int_0^1 p_{av}\,du\right]$$

$$= \frac{w_2}{b}\left(p_{av}c\int_0^1 du + p_{av}\int_0^1 u\,du + afp_{av}\int_0^1 du\right)$$

$$= \frac{w_2p_{av}}{b}(c + 0{,}5 + af) = \frac{0{,}75}{2}[1{,}6 + 0{,}5 + 4(0{,}4)]p_{av}$$

$$= 1{,}3875p_{av}$$

Solucionando para p_{av}, obtemos

$$p_{av} = \frac{F}{1{,}3875} = \frac{10}{1{,}3875} = 7{,}207 \text{ psi}$$

Avaliamos R_x e R_y como

Resposta $$R_x = 0{,}3(7{,}207) = 2{,}162 \text{ lbf}$$

Resposta $$R_y = 10 - 0{,}75(7{,}207) = 4{,}595 \text{ lbf}$$

A força normal N na almofada é $F - R_y = 10 - 4{,}595 = 5{,}405$ lbf, para cima. A linha de ação se dá através do centro de pressão, que está no centro da almofada. A força de fricção é $fN = 0{,}4(5{,}405) = 2{,}162$ lbf dirigida para a esquerda. Uma verificação dos momentos ao redor de A resulta em

$$\sum M_A = Fb - fNa - N(w_1/2 + c)$$

$$= 10(2) - 0{,}4(5{,}405)4 - 5{,}405(1/2 + 1{,}6) \doteq 0$$

Resposta A máxima pressão $p_a = p_{av} = 7{,}207$ psi.

(*b*)

Equação (*c*): $$R_x = -fp_{av}w_1w_2 = -0{,}4(1)(0{,}75)p_{av} = -0{,}3p_{av}$$

Equação (*d*): $$R_y = F - p_{av}w_1w_2 = 10 - p_{av}(1)(0{,}75) = 10 - 0{,}75p_{av}$$

Equação (*e*):
$$F = \frac{w_2}{b}\left[\int_0^1 p_{av}(c+u)\,du + af\int_0^1 p_{av}\,du\right]$$
$$= \frac{w_2}{b}\left(p_{av}c\int_0^1 du + p_{av}\int_0^1 u\,du + afp_{av}\int_0^1 du\right)$$
$$= \frac{0{,}75}{2}p_{av}[1{,}6 + 0{,}5 - 4(0{,}4)] = 0{,}1875p_{av}$$

a partir da qual

$$p_{av} = \frac{F}{0{,}1875} = \frac{10}{0{,}1875} = 53{,}33 \text{ psi}$$

que faz

Resposta
$$R_x = -0{,}3(53{,}33) = -16 \text{ lbf}$$

Resposta
$$R_y = 10 - 0{,}75(53{,}33) = -30 \text{ lbf}$$

A força normal N na almofada é 10 + 30 = 40 lbf, para cima. A força de cisalhamento por atrito é $fN = 0.4(40) = 16$ lbf, para a direita. Verificamos, agora, os momentos ao redor de A:

$$M_A = fNa + Fb - N(c + 0{,}5) = 16(4) + 10(2) - 40(1{,}6 + 0{,}5) = 0$$

Observe a mudança na pressão média de 7,207 psi, em (*a*), para 53,3 psi. Observe, também, como as direções das forças mudaram. A pressão máxima p_a é a mesma de p_{av}, que mudou de 7,207 psi para 53,3 psi.

(*c*) Modelaremos a deformação da almofada como segue. Se o retentor de porta rodar $\Delta\phi$ em sentido anti-horário, as bordas direita e esquerda da almofada deformarão para baixo y_1 e y_2, respectivamente (Figura 16-2 (*b*)). A partir de triângulos semelhantes, $y_1/(r_1\Delta\phi) = c/r_1$ e $y_2/(r_2\Delta\phi) = (c + w_1)/r_2$.

Assim, $y_1 = c\Delta\phi$ e $y_2 = (c + w_1)\Delta\phi$. Isso significa que y é diretamente proporcional à horizontal a partir do ponto de pivô A; isto é, $y = C_1 v$ em que C_1 é uma constante (ver figura 16-2(*b*)). Assumindo que a pressão seja diretamente proporcional à deformação, então $p(v) = C_2 v$, em que C_2 é uma constante. Em termos de u, a pressão é $p(u) = C_2(c + u) = C_2(1{,}6 + u)$.

Equação (*e*)

Eq. (*e*):
$$F = \frac{w_2}{b}\left[\int_0^{w_1} p(u)c\,du + \int_0^{w_1} p(u)u\,du + af\int_0^{w_1} p(u)\,du\right]$$
$$= \frac{0{,}75}{2}\left[\int_0^1 C_2(1{,}6+u)1{,}6\,du + \int_0^1 C_2(1{,}6+u)\,u\,du + af\int_0^1 C_2(1{,}6+u)\,du\right]$$
$$= 0{,}375C_2[(1{,}6+0{,}5)1{,}6 + (0{,}8+0{,}3333) + 4(0{,}4)(1{,}6+0{,}5)] = 2{,}945C_2$$

Visto que $F = 10$ lbf, então $C_2 = 10/2{,}945 = 3{,}396$ psi/in e $p(u) = 3{,}396(1{,}6 + u)$. A pressão média é dada por

Resposta
$$p_{av} = \frac{1}{w_1}\int_0^{w_1} p(u)\,du = \frac{1}{1}\int_0^1 3{,}396(1{,}6+u)\,du = 3{,}396(1{,}6+0{,}5) = 7{,}132 \text{ psi}$$

A pressão máxima ocorre em $u = 1$ in, e é

Resposta
$$p_a = 3{,}396(1{,}6 + 1) = 8{,}83 \text{ psi}$$

As equações (c) e (d) da Seção 16-1 ainda são válidas. Assim,

Resposta
$$R_x = 0{,}3p_{av} = 0{,}3(7{,}131) = 2{,}139 \text{ lbf}$$
$$R_y = 10 - 0{,}75p_{av} = 10 - 0{,}75(7{,}131) = 4{,}652 \text{ lbf}$$

A pressão média é $p_{av} = 7{,}13$ psi e a pressão máxima, $p_{av} = 8{,}83$ psi, a qual é aproximadamente 24% maior que a pressão média. A presunção de que a pressão era uniforme (*a*) (porque a almofada era pequena ou porque a aritmética seria mais fácil?) subestimou o pico de pressão. Modelar a almofada como um conjunto de molas unidimensional é melhor, mas a almofada é realmente um contínuo tridimensional. Uma abordagem usando a teoria da elasticidade ou uma modelagem por elemento finito pode ser exagerada, dadas as incertezas inerentes deste problema, mas ainda assim representa uma melhor modelagem.

(d) Para avaliar $\bar{u}$, necessitamos avaliar duas integrações

$$\int_0^c p(u)u\,du = \int_0^1 3{,}396(1{,}6 + u)u\,du = 3{,}396(0{,}8 + 0{,}3333) = 3{,}849$$

$$\int_0^c p(u)\,du = \int_0^1 3{,}396(1{,}6 + u)\,du = 3{,}396(1{,}6 + 0{,}5) = 7{,}132$$

Assim, $\bar{u} = 3{,}849/7{,}132 = 0{,}5397$ in. Então, a partir da Equação (*f*) da Secção 16-1, o coeficiente de fricção crítico é

Resposta

$$f_{cr} \geq \frac{c + \bar{u}}{a} = \frac{1{,}6 + 0{,}5397}{4} = 0{,}535$$

A almofada retentora de fricção não tem um coeficiente de fricção elevado o suficiente para fazer do retentor um freio de autoacionamento. A configuração deve mudar e/ou a especificação do material deve ser mudada para suster a função de um retentor de porta.

16-2 Embreagens e Freios de Aro Interno Expansível

A embreagem de aro com sapata interna exibida na Figura 16-3 consiste essencialmente em três elementos: a superfície par de atrito, os meios de transmissão de torque provenientes das e para as superfícies e o mecanismo de atuação. Dependendo do mecanismo de operação, tais embreagens serão classificadas adiante como *de anel expansível*, *centrífugas*, *magnéticas*, *hidráulicas* e *pneumáticas*.

A embreagem de anel expansível é freqüentemente utilizada em maquinaria têxtil, escavadoras e máquinas-ferramenta nas quais a embreagem pode estar localizada dentro da polia motora. As embreagens de

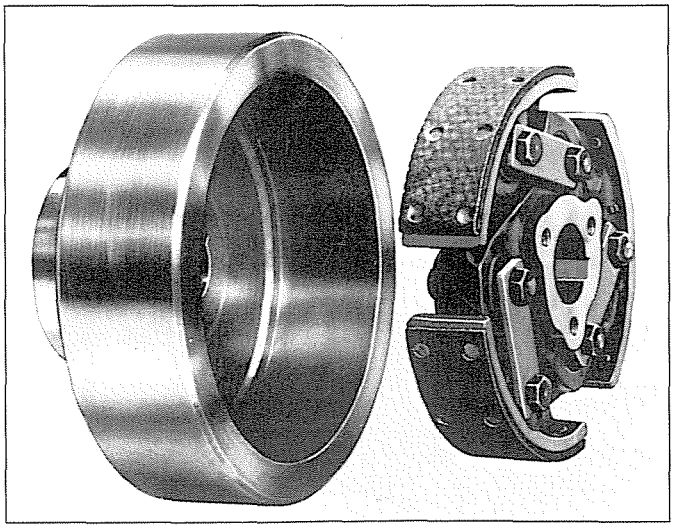


Figura 16-3 Uma embreagem de aro com dilatador interno de atuador centrífugo. *(Cortesia da Hilliard Corporation.)*

anel dilatador beneficiam-se dos efeitos centrífugos, transmitem torque elevado, mesmo a baixas velocidades, e requerem tanto acoplamento positivo como força de liberação ampla.

A embreagem centrífuga é empregada principalmente para operações automáticas. Se nenhuma mola for utilizada, o torque transmitido será proporcional ao quadrado da velocidade. Isso é particularmente útil para acionamento por motor elétrico em que, durante o arranque, a máquina movida aumenta de velocidade sem choque. Molas também podem ser usadas para prevenir acoplamento, até que uma certa velocidade de motor tenha sido alcançada, no entanto, algum choque pode ocorrer.

As embreagens magnéticas são particularmente úteis para sistemas automáticos e de controle remoto. São também úteis em comandos sujeitos a ciclos complexos de carga (ver Secção 11-7).

As embreagens hidráulicas e pneumáticas são também de utilidade em acionamentos com ciclos complexos de carregamento e em maquinaria automática, ou em robôs. Aqui, o fluxo de fluido pode ser controlado remotamente, mediante o uso de válvulas solenóides. Essas embreagens encontram-se também disponíveis como disco, cone e embreagens de múltiplas placas.

Em sistemas de frenagem, o freio *de sapata interna* ou *de tambor* é usado mormente para aplicações automotivas.

Para analisar um dispositivo de sapata interna, veja a Figura 16-4, que apresenta uma sapata pivotada no ponto A, com uma força atuante agindo na outra extremidade dela. Na medida em que a sapata é longa, não podemos supor que a distribuição de forças normais seja uniforme. O arranjo mecânico faz com que pressão nenhuma seja aplicada no calcanhar; portanto, assumiremos que a pressão nesse ponto é zero.

É prática usual omitir o material de fricção por uma pequena distância além do calcanhar (ponto A). Isso elimina interferência, sendo que, de qualquer maneira, o material contribuiria pouco para o desempenho, como será mostrado. Em alguns projetos, o pino de articulação é feito móvel para prover pressão adicional de calcanhar. Isso produz o efeito de uma sapata flutuante. (Sapatas flutuantes não serão tratadas neste livro, embora seus projetos sigam os mesmos princípios gerais.)

Consideremos a pressão p agindo sobre um elemento de área de material friccional localizado a um ângulo θ do pino de articulação (Figura 16-4). Designaremos a pressão máxima p_a situada a um ângulo θ_a desse pino. Para encontrar a distribuição de pressão na periferia da sapata interna, considere o ponto B da sapata (Figura 16-5). Como no Exemplo 16-1, se a sapata se deforma devido a uma rotação infinitesimal $\Delta\phi$ em relação ao ponto de pivô A, a deformação perpendicular a AB é $h\,\Delta\phi$. A partir do triângulo isósceles AOB, $h = 2r\,\text{sen}(\theta/2)$, de modo que

$$h\,\Delta\phi = 2r\,\Delta\phi\,\text{sen}(\theta/2)$$

A deformação perpendicular ao aro é $h\,\Delta\phi\cos(\theta/2)$, que é

$$h\,\Delta\phi\cos(\theta/2) = 2r\,\Delta\phi\,\text{sen}(\theta/2)\cos(\theta/2) = r\,\Delta\phi\,\text{sen}\,\theta$$

Logo, a deformação e, conseqüentemente, a pressão são proporcionais a *sen* θ. Em termos da pressão em B e onde a pressão é máxima, isso significa que

$$\frac{p}{\text{sen}\,\theta} = \frac{p_a}{\text{sen}\,\theta_a} \qquad (a)$$

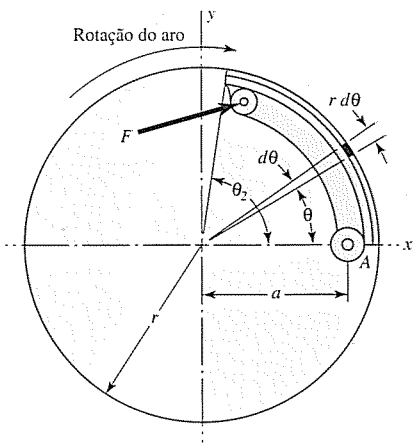


Figura 16-4 Geometria de sapata de fricção interna.

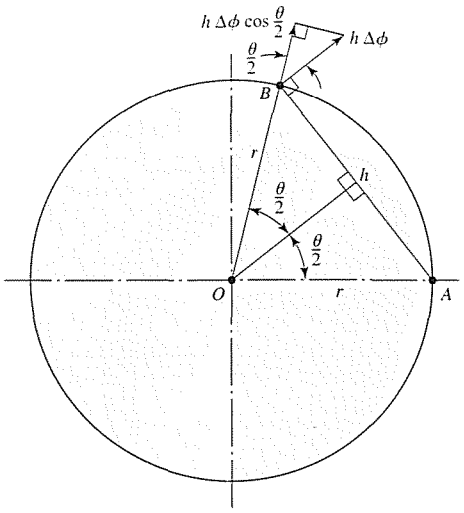


Figura 16-5 Geometria associada a um ponto arbitrário na sapata.

Rearranjando, obtemos

$$p = \frac{p_a}{\operatorname{sen}\theta_a}\operatorname{sen}\theta \tag{16-1}$$

Essa forma de distribuição de pressão dispõe de atributos interessantes e úteis, a saber:

- A distribuição de pressão é senoidal com respeito ao ângulo central θ.
- Se a sapata for curta, como mostrado na Figura 16-6(*a*), a maior pressão *nela* será p_a, ocorrendo em sua extremidade, θ_2.
- Se a sapata for longa, como mostrado na Figura 16-6(*b*), a maior pressão nela será p_a, ocorrendo em $\theta_a = 90°$.

Uma vez que as limitações nos materiais de fricção são expressas em termos da maior pressão admissível no forro, o projetista pensará em termos de p_a, e não acerca da amplitude da distribuição senoidal referente a lugares fora da sapata.

Quando $\theta = 0$, a Equação (16-1) indica que a pressão é zero. O material de fricção localizado no calcanhar, por tal motivo, contribui muito pouco para a ação de frenagem, podendo, dessa forma, ser omitido. Um bom projeto concentraria tanto material friccional quanto possível em torno do ponto de máxima pressão. Um projeto desse tipo é mostrado na Figura 16-7. Nela, o material friccional inicia em um ângulo θ_1,

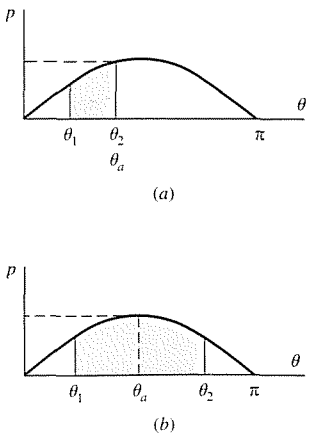


Figura 16-6 Definição do ângulo θ_a, sob o qual a máxima pressão p_a ocorre quando (*a*) a sapata existe na zona $\theta_1 \le \theta_2 \le \pi/2$ e (*b*) na zona $\theta_1 \le \pi/2 \le \theta_2$.

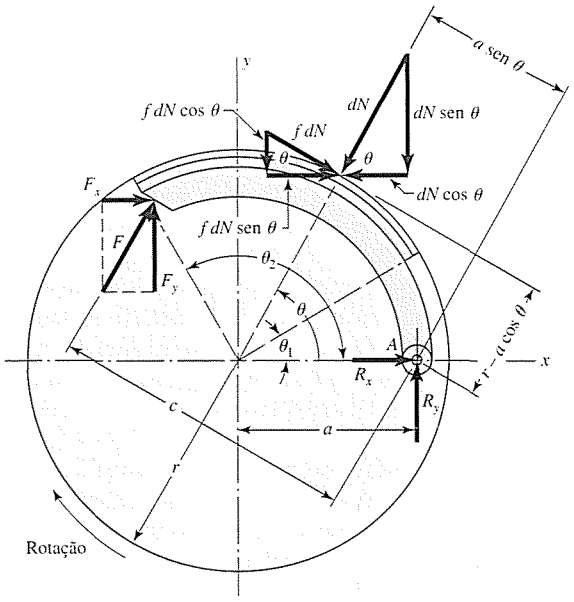


Figura 16-7 Forças na sapata.

medido a partir do pino de articulação A, e termina em um ângulo θ_2. Qualquer arranjo como esse fornecerá uma boa distribuição de material friccional.

Prosseguindo agora (Figura 16-7), as reações do pino de articulação são R_x e R_y. A força atuante F tem componentes F_x e F_y e opera à distância c do pino de articulação. Em qualquer ângulo θ, a partir do pino de articulação, atua uma força diferencial normal dN, cuja magnitude é

$$dN = pbr\,d\theta \tag{b}$$

em que b é a largura de face (perpendicular ao papel) do material de fricção. Substituindo o valor da pressão da Equação (16-1), a força normal é

$$dN = \frac{p_a br \operatorname{sen}\theta\,d\theta}{\operatorname{sen}\theta_a} \tag{c}$$

A força normal dN tem componentes horizontal e vertical $dN\cos\theta$ e $dN\operatorname{sen}\theta$, como exibido na figura. A força friccional $f\,dN$ apresenta componentes horizontal e vertical cujas magnitudes são $f\,dN\operatorname{sen}\theta$ e $f\,dN\cos\theta$, respectivamente. Aplicando as condições de equilíbrio estático, podemos encontrar a força atuante F, o torque T e as reações de pino R_x e R_y.

Encontraremos a força atuante F, utilizando a condição conforme a qual a soma dos momentos ao redor do pino de articulação é zero. As forças friccionais têm um braço de momento ao redor do pino de $r - a\cos\theta$. O momento M_f dessas forças friccionais é

$$M_f = \int f\,dN(r - a\cos\theta) = \frac{f p_a br}{\operatorname{sen}\theta_a}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \operatorname{sen}\theta(r - a\cos\theta)\,d\theta \tag{16-2}$$

que é obtido ao substituirmos o valor de dN da Equação (c). É conveniente integrar a Equação (16-2) para cada problema, e por isso nós a conservaremos nessa forma. O braço de momento da força normal dN ao redor do pino é $a\operatorname{sen}\theta$. Designando o momento das forças normais por M_N e somando-os ao redor do pino da articulação, obtemos

$$M_N = \int dN(a\operatorname{sen}\theta) = \frac{p_a brа}{\operatorname{sen}\theta_a}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \operatorname{sen}^2\theta\,d\theta \tag{16-3}$$

A força atuante F deve balancear esses momentos. Logo,

$$F = \frac{M_N - M_f}{c} \tag{16-4}$$

Observamos aqui a existência de uma condição para zero força atuante. Em outras palavras, se estabelecemos $M_N = M_f$, um autotravamento é obtido e nenhuma força atuante é requerida. Isso nos fornece um

método para obter as dimensões para alguma ação auto-energizante. Dessa forma, a dimensão a na Figura 16-7 deve ser tal que

$$M_N > M_f \tag{16-5}$$

O torque T aplicado ao tambor pela sapata do freio é a soma das forças friccionais $f\,dN$ vezes o raio do tambor:

$$\begin{aligned} T &= \int f r\,dN = \frac{f p_a b r^2}{\operatorname{sen}\theta_a}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \operatorname{sen}\theta\,d\theta \\ &= \frac{f p_a b r^2(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)}{\operatorname{sen}\theta_a} \end{aligned} \tag{16-6}$$

As reações do pino de articulação são encontradas efetuando-se uma soma das forças horizontais e verticais. Logo, para R_x, temos

$$\begin{aligned} R_x &= \int dN\cos\theta - \int f\,dN\operatorname{sen}\theta - F_x \\ &= \frac{p_a b r}{\operatorname{sen}\theta_a}\left(\int_{\theta_1}^{\theta_2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,d\theta - f\int_{\theta_1}^{\theta_2}\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta\right) - F_x \end{aligned} \tag{d}$$

A reação vertical é encontrada da mesma maneira:

$$\begin{aligned} R_y &= \int dN\operatorname{sen}\theta + \int f\,dN\cos\theta - F_y \\ &= \frac{p_a b r}{\operatorname{sen}\theta_a}\left(\int_{\theta_1}^{\theta_2}\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta + f\int_{\theta_1}^{\theta_2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,d\theta\right) - F_y \end{aligned} \tag{e}$$

A direção das forças friccionais será invertida se a rotação também o for. Assim, para a rotação anti-horária, a força atuante é

$$F = \frac{M_N + M_f}{c} \tag{16-7}$$

e visto que ambos os momentos têm o mesmo sentido, o efeito auto-energizante é perdido. Além disso, para a rotação anti-horária, os sinais dos termos friccionais na equação para as reações do pino mudam, e as Equações (d) e (e) transformam-se em

$$R_x = \frac{p_a b r}{\operatorname{sen}\theta_a}\left(\int_{\theta_1}^{\theta_2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,d\theta + f\int_{\theta_1}^{\theta_2}\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta\right) - F_x \tag{f}$$

$$R_y = \frac{p_a b r}{\operatorname{sen}\theta_a}\left(\int_{\theta_1}^{\theta_2}\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta - f\int_{\theta_1}^{\theta_2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,d\theta\right) - F_y \tag{g}$$

As Equações (d), (e), (f) e (g) podem ser simplificadas para facilitar os cálculos. Logo, considere

$$\begin{aligned} A &= \int_{\theta_1}^{\theta_2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,d\theta = \left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\theta\right)_{\theta_1}^{\theta_2} \\ B &= \int_{\theta_1}^{\theta_2}\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta = \left(\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen}2\theta\right)_{\theta_1}^{\theta_2} \end{aligned} \tag{16-8}$$

Assim, para rotação horária, como mostrado na Figura 16-7, as reações do pino da articulação são

$$\begin{aligned} R_x &= \frac{p_a b r}{\operatorname{sen}\theta_a}(A - fB) - F_x \\ R_y &= \frac{p_a b r}{\operatorname{sen}\theta_a}(B + fA) - F_y \end{aligned} \tag{16-9}$$

Para rotação anti-horária, as Equações (f) e (g) transformam-se em

$$R_x = \frac{p_a br}{\operatorname{sen}\theta_a}(A + fB) - F_x$$
$$R_y = \frac{p_a br}{\operatorname{sen}\theta_a}(B - fA) - F_y \qquad (16\text{-}10)$$

Ao utilizar essas equações, o sistema de referência sempre tem sua origem no centro do tambor. O eixo x positivo é tirado através do pino de articulação. O eixo y positivo, por sua vez, acha-se sempre na direção da sapata, mesmo que isso deva resultar em um sistema de mão esquerda.

As seguintes hipóteses estão implícitas na análise precedente:

1. A pressão em qualquer ponto na sapata deve ser proporcional à distância do pino de articulação, sendo zero no calcanhar. Isso deve ser considerado na perspectiva de que pressões especificadas por fabricantes são médias, em vez de máximas.
2. O efeito da força centrífuga foi desprezado. No caso de freios, as sapatas não estão rodando, e não existe força centrífuga. No projeto de embreagem, o efeito de tal força deve ser considerado ao se escreverem as equações de equilíbrio estático.
3. A sapata deve ser rígida. Na medida em que isso pode não ser verdadeiro, alguma deflexão ocorrerá, dependendo da carga, da pressão e da rigidez da sapata. A distribuição resultante de pressão pode ser diferente daquela que foi considerada.
4. A análise completa foi baseada em um coeficiente de fricção que não varia com a pressão. De fato, tal coeficiente pode variar com determinadas condições, incluindo temperatura, desgaste e ambiente.

EXEMPLO 16-2

O freio exibido na Figura 16-8 tem 300 mm de diâmetro e é acionado por um mecanismo que exerce a mesma força F em cada sapata. As sapatas são idênticas e apresentam uma largura de face de 32 mm. O forro é um asbesto moldado tendo um coeficiente de fricção de 0,32 e uma limitação de pressão de 1000 kPa. Estime o máximo dos seguintes itens:

(*a*) Força acionadora F.

(*b*) Capacidade de frenagem.

(*c*) Reações de pino de articulação.

Solução

(*a*) A sapata direita é auto-energizante; assim, a força F é encontrada na base em que a pressão máxima ocorrerá nessa sapata. Aqui, $\theta_1 = 0^0$, $\theta_2 = 126^0$, $\theta_a = 90^0$ e sen $\theta_a = 1$. Ademais,

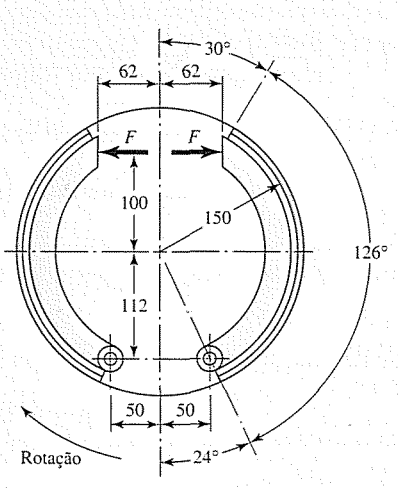


Figura 16-8 Freio com sapatas internas expansíveis; dimensões em milímetros.

$$a = \sqrt{(112)^2 + (50)^2} = 122{,}7 \text{ mm}$$

Integrando a Equação (16-2) de 0 a θ_2, obtemos

$$M_f = \frac{f p_a b r}{\operatorname{sen}\theta_a}\left[\left(-r\cos\theta\right)_0^{\theta_2} - a\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\theta\right)_0^{\theta_2}\right]$$

$$= \frac{f p_a b r}{\operatorname{sen}\theta_a}\left(r - r\cos\theta_2 - \frac{a}{2}\operatorname{sen}^2\theta_2\right)$$

Mudando todos os comprimentos para metros, obtemos

$$M_f = (0{,}32)[1000(10)^3](0{,}032)(0{,}150) \times \left[0{,}150 - 0{,}150\cos 126^\circ - \left(\frac{0{,}1227}{2}\right)\operatorname{sen}^2 126^\circ\right]$$

$$= 304 \text{ N} \cdot \text{m}$$

O momento das forças normais é obtido a partir da Equação (16-3). Integrando de 0 a θ_2, obtemos

$$M_N = \frac{p_a b r a}{\operatorname{sen}\theta_a}\left(\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen}2\theta\right)_0^{\theta_2}$$

$$= \frac{p_a b r a}{\operatorname{sen}\theta_a}\left(\frac{\theta_2}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen}2\theta_2\right)$$

$$= [1000(10)^3](0{,}032)(0{,}150)(0{,}1227)\left\{\frac{\pi}{2}\frac{126}{180} - \frac{1}{4}\operatorname{sen}[(2)(126^\circ)]\right\}$$

$$= 788 \text{ N} \cdot \text{m}$$

A partir da Equação (16-4), a força acionadora é

Resposta
$$F = \frac{M_N - M_f}{c} = \frac{788 - 304}{100 + 112} = 2{,}28 \text{ kN}$$

(*b*) A partir da Equação (16-6), o torque aplicado pela sapada da direita é

$$T_R = \frac{f p_a b r^2(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)}{\operatorname{sen}\theta_a}$$

$$= \frac{0{,}32[1000(10)^3](0{,}032)(0{,}150)^2(\cos 0^\circ - \cos 126^\circ)}{\operatorname{sen} 90^\circ} = 366 \text{ N} \cdot \text{m}$$

O torque contribuído pela sapata esquerda não pode ser obtido até que aprendamos sua pressão máxima operacional. As Equações (16-2) e (16-3) indicam que os momentos friccional e normal são proporcionais a essa pressão. Logo, para a sapata esquerda,

$$M_N = \frac{788 p_a}{1000} \qquad M_f = \frac{304 p_a}{1000}$$

Assim, a partir da Equação (16-7),

$$F = \frac{M_N + M_f}{c}$$

ou

$$2{,}28 = \frac{(788/1000)p_a + (304/1000)p_a}{100 + 112}$$

Solucionando, obtemos $p_a = 443$ kPa. Logo, a partir da Equação (16-6), o torque na sapata esquerda é

$$T_L = \frac{f p_a b r^2 (\cos\theta_1 - \cos\theta_2)}{\operatorname{sen}\theta_a}$$

Visto que $\operatorname{sen}\theta_a = \operatorname{sen} 90^\circ = 1$, temos

$$T_L = 0{,}32[443(10)^3](0{,}032)(0{,}150)^2(\cos 0^\circ - \cos 126^\circ) = 162 \text{ N} \cdot \text{m}$$

A capacidade de freagem é o torque total:

Resposta
$$T = T_R + T_L = 366 + 162 = 528 \text{ N} \cdot \text{m}$$

(*c*) A fim de encontrar as reações do pino de articulação, observamos que $\operatorname{sen}\theta_a = 1$ e $\theta_1 = 0$. Por conseguinte, a Equação (16-8) resulta em

$$A = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\theta_2 = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 126^\circ = 0{,}3273$$

$$B = \frac{\theta_2}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta_2 = \frac{\pi(126)}{2(180)} - \frac{1}{4}\operatorname{sen}[(2)(126^\circ)] = 1{,}3373$$

Ademais, estabeleça

$$D = \frac{p_a b r}{\operatorname{sen}\theta_a} = \frac{1000(0{,}032)(0{,}150)}{1} = 4{,}8 \text{ kN}$$

em que $p_a = 1000$ kPa para a sapata direita. Assim, utilizando a Equação (16-9), obtemos

$$R_x = D(A - fB) - F_x = 4{,}8[0{,}3273 - 0{,}32(1{,}3373)] - 2{,}28\operatorname{sen} 24^\circ$$
$$= -1{,}410 \text{ kN}$$
$$R_y = D(B + fA) - F_y = 4{,}8[1{,}3373 + 0{,}32(0{,}3273)] - 2{,}28\cos 24^\circ$$
$$= 4{,}839 \text{ kN}$$

A resultante nesse pino de articulação é

Resposta
$$R = \sqrt{(-1{,}410)^2 + (4{,}839)^2} = 5{,}04 \text{ kN}$$

As reações no pino de articulação da sapata esquerda são encontradas utilizando-se as Equações (16-10) para uma pressão de 443 kPa. Presume-se que elas sejam $R_x = 0{,}678$ kN e $R_y = 0{,}538$ kN. A resultante é

Resposta
$$R = \sqrt{(0{,}678)^2 + (0{,}538)^2} = 0{,}866 \text{ kN}$$

As reações para ambos os pinos de articulação, juntamente com suas direções, são mostradas na Figura 16-9.

Este exemplo mostra claramente o benefício que se tem organizando as sapatas para serem auto-energizantes. Se a sapata esquerda fosse girada de cabeça para baixo, de modo a pôr o pino de articulação no topo, ela aplicaria o mesmo torque que a sapata direita. Isso tornaria a capacidade do freio (2)(366) = 732 N · m, em vez da atual 528 N · m, uma melhoria de 30%. Além disso, parte do material de fricção no calcanhar poderia ser eliminado sem afetar seriamente a capacidade, devido à baixa pressão nessa área. Tal mudança pode realmente melhorar o projeto global, uma vez que a exposição adicional do aro aprimoraria a capacidade de dissipação de calor.

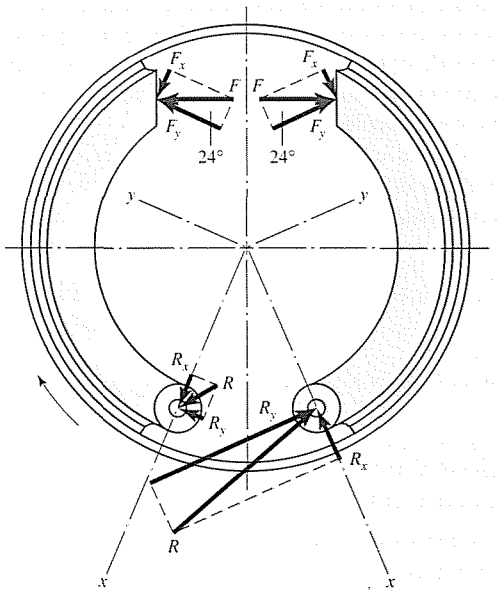


Figura 16-9

16-3 Embreagens e Freios de Aro Externo Contrátil

A embreagem-freio patenteada da Figura 16-10 tem elementos de fricção externos contráteis, mas o mecanismo acionador é pneumático. Estudaremos aqui somente os freios e embreagens de sapata externa pivotada, embora os métodos apresentados possam facilmente ser adotados para a embreagem-freio da Figura 16-10.

Os mecanismos de operação podem ser classificados como

1. Solenóides
2. Alavancas, elos ou dispositivos de travamento
3. Elos com carregamento de mola
4. Dispositivos hidráulicos e pneumáticos

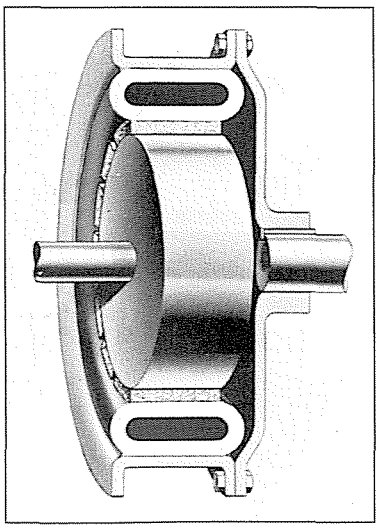


Figura 16-10 Uma embreagem-freio externa contrátil, engatada ao expandir o tubo flexível com ar comprimido. *(Cortesia da Twin Disc Clutch Company.)*

A análise estática requerida para esses dispositivos já foi abordada na Seção 4-1. Lá os métodos aplicam-se a qualquer sistema de mecanismo, incluindo todos aqueles utilizados em freios e embreagens. Não é necessário repetir o material do Capítulo 4 que se aplica diretamente a tais mecanismos. Omitir os mecanismos de operação de qualquer consideração permite que nos concentremos no desempenho de freio e embreagem sem as influências alheias introduzidas pela necessidade de analisar a estática do mecanismo de controle.

A notação para sapatas externas contráteis é mostrada na Figura 16-11. Os momentos de forças friccionais e normais ao redor do pino de articulação são os mesmos que para sapatas internas expansíveis. As Equações (16-2) e (16-3) são aplicadas e repetidas aqui por conveniência:

$$M_f = \frac{f p_a b r}{\operatorname{sen}\theta_a} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \operatorname{sen}\theta (r - a\cos\theta)\, d\theta \tag{16-2}$$

$$M_N = \frac{p_a b r a}{\operatorname{sen}\theta_a} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta \tag{16-3}$$

Ambas as equações fornecem valores positivos para momentos horários (Figura 16-11), quando utilizadas para sapatas externas contráteis. A força acionadora deve ser grande o suficiente para equilibrar ambos os momentos:

$$F = \frac{M_N + M_f}{c} \tag{16-11}$$

As reações horizontal e vertical no pino de articulação são encontradas da mesma maneira que para sapatas internas expansíveis. Elas são

$$R_x = \int dN\cos\theta + \int f\, dN \operatorname{sen}\theta - F_x \tag{a}$$

$$R_y = \int f\, dN\cos\theta - \int dN \operatorname{sen}\theta + F_y \tag{b}$$

Ao utilizar a Equação (16-8) e a Equação (*c*), da Seção 16-2, obtemos

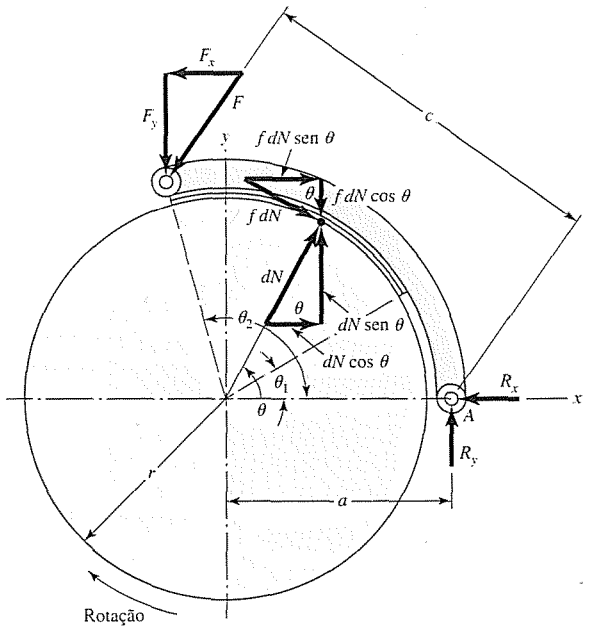


Figura 16-11 Notação de sapatas externas contráteis.

$$R_x = \frac{p_a br}{\operatorname{sen}\theta_a}(A + fB) - F_x$$
$$R_y = \frac{p_a br}{\operatorname{sen}\theta_a}(fA - B) + F_y \tag{16-12}$$

Se a rotação é anti-horária, o sinal do termo de fricção em cada equação é inverso. Logo, a Equação (16-11) para a força acionadora torna-se

$$F = \frac{M_N - M_f}{c} \tag{16-13}$$

e a auto-energização existe para a rotação anti-horária. As reações horizontal e vertical são encontradas, da mesma maneira que antes, como sendo

$$R_x = \frac{p_a br}{\operatorname{sen}\theta_a}(A - fB) - F_x$$
$$R_y = \frac{p_a br}{\operatorname{sen}\theta_a}(-fA - B) + F_y \tag{16-14}$$

Deve ser observado que, quando projetos externos contráteis são empregados como embreagens, o efeito da força centrífuga é decrescer a força normal. Assim, à medida que a velocidade cresce, um valor maior da força acionadora F é requerido.

Um caso especial surge quando o pivô está localizado simetricamente e também colocado de tal forma que o momento das forças de fricção ao seu redor é zero. A geometria de um freio desse tipo será similar àquela da Figura 16-12(a). Para obter uma relação de distribuição de pressão, observamos que o desgaste da forração é tal como para reter a forma cilíndrica – muito semelhante ao que um cortador de máquina de fresagem alimentado na direção x faria à sapata mantida em um fixador. Veja a Figura 16-12(b). Isso significa que a componente de abscissa do desgaste é w_0 para todas as posições θ. Se o desgaste na direção radial é expresso como $w(\theta)$, então

$$w(\theta) = w_0 \cos\theta$$

Utilizamos a Equação (12-26) para expressar o desgaste radial $\omega(\theta)$ como

$$w(\theta) = KPVt$$

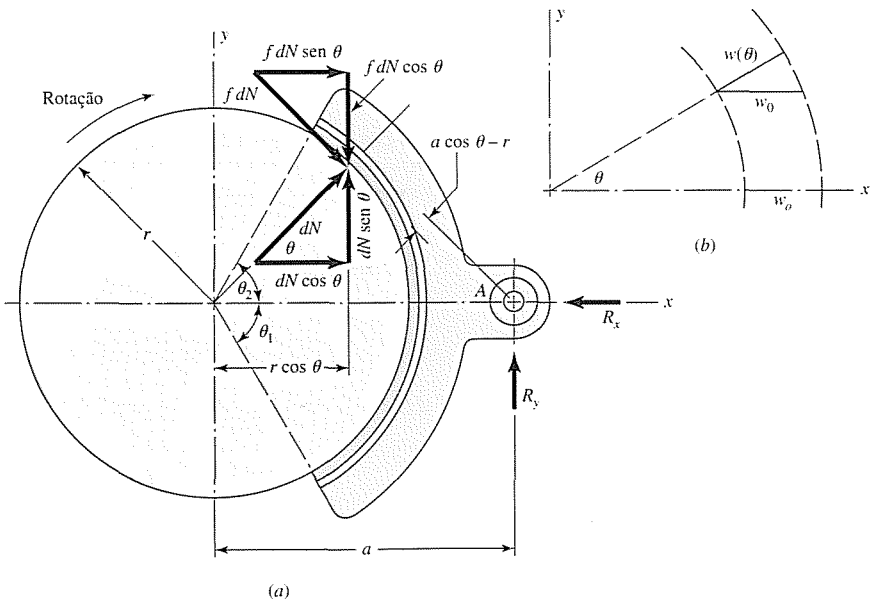


Figura 16-12 (a) Freio com sapata pivotada simétrica; (b) desgaste da forração de freio.

em que K é uma constante do material; P, a pressão; V, a velocidade do aro; e t, o tempo. Assim, denotando P como $p(\theta)$ acima e solucionando para $p(\theta)$, obtemos

$$p(\theta) = \frac{w(\theta)}{KVt} = \frac{w_0 \cos\theta}{KVt}$$

Visto que todas as áreas elementares de superfície do material de fricção vêem a mesma velocidade de roçamento para a mesma duração, $w_0/(KVt)$ é uma constante e

$$p(\theta) = (\text{constante})\cos\theta = p_a \cos\theta \tag{c}$$

em que p_a é o valor máximo de $p(\theta)$.

Procedendo à análise de força, observamos, a partir da Figura 16-12(a), que

$$dN = pbr\, d\theta \tag{d}$$

ou

$$dN = p_a br \cos\theta\, d\theta \tag{e}$$

A distância a ao pivô é escolhida descobrindo-se onde o momento das forças friccionais M_f é zero. Em primeiro lugar, isso assegura que a reação R_y está no local correto para estabelecer desgaste simétrico. Em segundo lugar, uma distribuição co-senoidal de pressão é confirmada, preservando nossa habilidade de previsão. A simetria significa que $\theta_1 = \theta_2$, de modo que

$$M_f = 2\int_0^{\theta_2} (f\, dN)(a\cos\theta - r) = 0$$

Substituindo a Equação (e), obtemos

$$2fp_a br \int_0^{\theta_2} (a\cos^2\theta - r\cos\theta)\, d\theta = 0$$

a partir do que

$$a = \frac{4r \operatorname{sen}\theta_2}{2\theta_2 + \operatorname{sen} 2\theta_2} \tag{16-15}$$

A distância a depende da distribuição de pressão. A má localização do pivô torna M_f zero ao redor de uma localização diferente; dessa forma, a forração do freio ajusta sua pressão local de contato, por meio de desgaste, para compensar. O resultado é um desgaste assimétrico, aposentando o forro de sapata – e, conseqüentemente, a sapata – mais cedo.

Com o pivô localizado de acordo com a Equação (16-15), o momento ao redor do pino é zero e as reações horizontal e vertical são

$$R_x = 2\int_0^{\theta_2} dN\cos\theta = \frac{p_a br}{2}(2\theta_2 + \operatorname{sen} 2\theta_2) \tag{16-16}$$

em que, devido à simetria,

$$\int f\, dN \operatorname{sen}\theta = 0$$

Ademais,

$$R_y = 2\int_0^{\theta_2} f\, dN\cos\theta = \frac{p_a brf}{2}(2\theta_2 + \operatorname{sen} 2\theta_2) \tag{16-17}$$

em que

$$\int dN \operatorname{sen}\theta = 0$$

também devido à simetria. Observe, da mesma forma, que $R_x = -N$ e $R_y = -fN$, como se poderia esperar para a escolha particular da dimensão a. Assim sendo, o torque é

$$T = afN \tag{16-18}$$

16-4 Embreagens e Freios de Cinta

Cintas flexíveis de embreagens e freios são utilizadas em escavadeiras de potência e em guindastes e outras maquinarias. A análise segue a notação da Figura 16-13.

Devido à fricção e à rotação do tambor, a força acionadora P_2 é menor que a reação do pino P_1. Qualquer elemento da cinta, de comprimento angular $d\theta$, estará em equilíbrio sob a ação das forças mostradas na figura. Somando essas forças na direção vertical, obtemos

$$(P + dP)\,\text{sen}\frac{d\theta}{2} + P\,\text{sen}\frac{d\theta}{2} - dN = 0 \qquad (a)$$

$$dN = P\,d\theta \qquad (b)$$

visto que, para ângulos pequenos, sen $\theta\, d/2 = d\,\theta/2$. Somando as forças na direção horizontal, obtemos

$$(P + dP)\cos\frac{d\theta}{2} - P\cos\frac{d\theta}{2} - f\,dN = 0 \qquad (c)$$

$$dP - f\,dN = 0 \qquad (d)$$

Uma vez que, para ângulos pequenos, $\cos(d\,\theta/2) \doteq 1$. Substituindo o valor de dN da Equação (b) na (d), e integrando, obtemos

$$\int_{P_2}^{P_1} \frac{dP}{P} = f\int_0^{\phi} d\theta \qquad \text{ou} \qquad \ln\frac{P_1}{P_2} = f\phi$$

e

$$\frac{P_1}{P_2} = e^{f\phi} \qquad (16\text{-}19)$$

O torque pode ser obtido da equação

$$T = (P_1 - P_2)\frac{D}{2} \qquad (16\text{-}20)$$

A força normal dN atuando em um elemento de área de largura b e comprimento $r\,d\theta$ é

$$dN = pbr\,d\theta \qquad (e)$$

em que p é a pressão. Substituindo o valor de dN da Equação (b), obtemos

$$P\,d\theta = pbr\,d\theta$$

Logo,

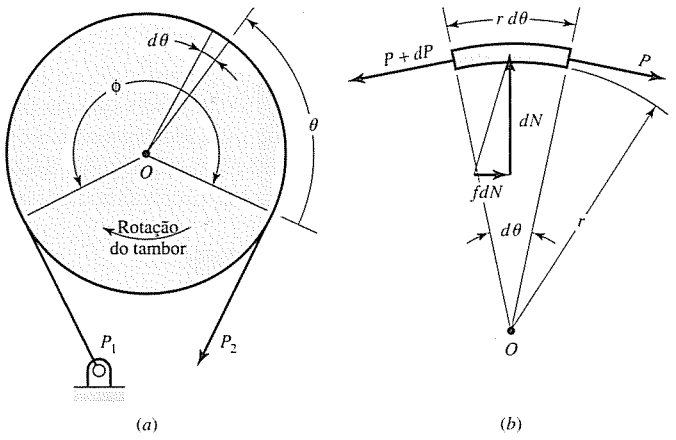


Figura 16-13 Forças em uma cinta de freio.

$$p = \frac{P}{br} = \frac{2P}{bD} \tag{16-21}$$

A pressão é, portanto, proporcional à tração na cinta. A pressão máxima p_a ocorrerá na ponta e tem o valor

$$p_a = \frac{2P_1}{bD} \tag{16-22}$$

16-5 Embreagens Axiais de Contato Friccional

Uma embreagem axial é uma embreagem na qual os membros friccionais de acoplagem são movidos em uma direção paralela ao eixo. Uma das primeiras dessa classe foi a embreagem de cone, que é simples em construção e bastante potente. Todavia, exceto para instalações relativamente simples, ela tem sido, em grande medida, preterida pela embreagem de disco empregando um ou mais discos como membros de operação. As vantagens desse tipo de embreagem incluem a independência dos efeitos centrífugos, a grande área friccional que pode ser instalada em um espaço pequeno, superfícies mais efetivas de dissipação de calor e a distribuição favorável de pressão. A Figura 16-14 mostra uma embreagem de disco de um único prato; uma embreagem-freio de múltiplos discos é ilustrada na Figura 16-15. Determinemos a capacidade de tal embreagem ou freio em termos do material e da geometria.

A Figura 16-16 mostra um disco de fricção com um diâmetro externo D e um diâmetro interno d. Estamos interessados em obter a força axial F necessária para se produzirem um certo torque T e uma pressão p. Dois métodos para solucionar o problema, dependendo da construção da embreagem, se dão em uso generalizado. Se os discos são rígidos, então a maior quantidade de desgaste ocorrerá, a princípio, nas áreas mais externas, visto que o trabalho de fricção é maior nessas áreas. Depois que uma certa quantidade de desgaste tiver ocorrido, a distribuição de pressão mudará para permitir que o desgaste seja uniforme. Essa é a base do primeiro método de solução.

Um outro método de construção emprega molas para obter uma pressão uniforme sobre a área. É essa suposição de pressão uniforme a empregada no segundo método de solução.

Desgaste Uniforme

Depois que o desgaste inicial tiver ocorrido e os discos tiverem se desgastado a um ponto em que o desgaste uniforme esteja estabelecido, o desgaste axial poderá ser expresso pela Equação (12-27) como

$$w = f_1 f_2 K P V t$$

em que somente P e V variam de lugar para lugar nas superfícies de roçamento. Por definição, o desgaste uniforme é constante de lugar para lugar; portanto,

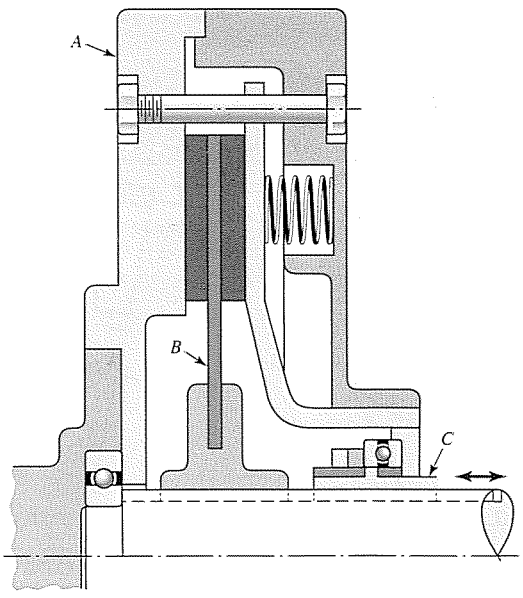


Figura 16-14 Vista de secção transversal de uma embreagem de um único disco; *A*, placa motora; *B*, placa movida (chaveada ao eixo motor); *C*, atuador.

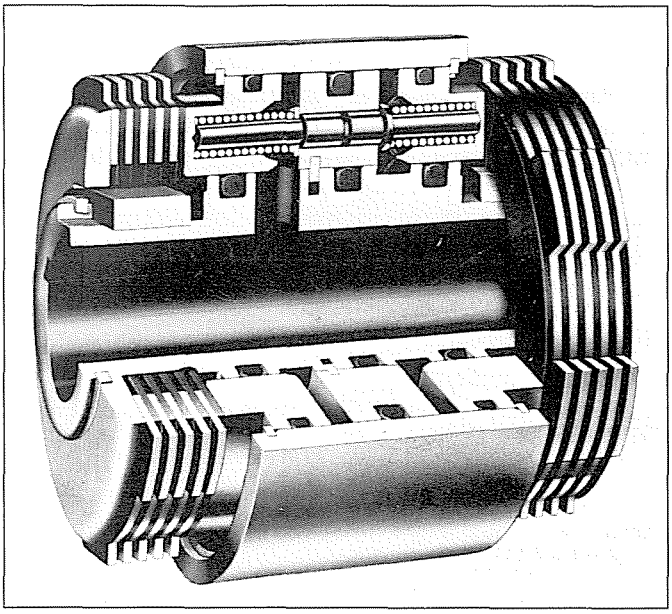


Figura 16-15 Uma embreagem-freio de múltiplos discos, acionada por óleo, para operação em um banho de óleo ou jato vaporizado. É especialmente útil para ciclos rápidos. *(Cortesia da Twin Disc Clutch Company.)*

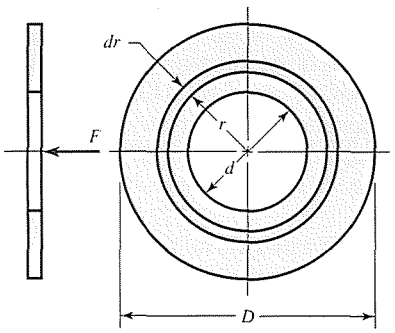


Figura 16-16 Membro de disco de fricção.

$$PV = (\text{constante}) = C_1$$
$$pr\omega = C_2$$
$$pr = C_3 = p_{\max} r_i = p_a r_i = p_a \frac{d}{2} \qquad (a)$$

Podemos escolher uma expressão da Equação (*a*), que é a condição para se ter a mesma quantidade de trabalho feito no raio r tal como é feito no raio $d/2$. Referindo-nos à Figura 16-16, temos um elemento de área de raio r e uma espessura dr. A área desse elemento é $2\pi r\, dr$, de modo que a força normal agindo sobre esse elemento é $dF = 2\pi pr\, dr$. Podemos encontrar a força normal total deixando r variar de $d/2$ a $D/2$ e integrando. Assim, com pr constante,

$$F = \int_{d/2}^{D/2} 2\pi pr\, dr = \pi p_a d \int_{d/2}^{D/2} dr = \frac{\pi p_a d}{2}(D - d) \qquad (16\text{-}23)$$

O torque é encontrado integrando-se o produto da força friccional e o raio:

$$T = \int_{d/2}^{D/2} 2\pi f pr^2\, dr = \pi f p_a d \int_{d/2}^{D/2} r\, dr = \frac{\pi f p_a d}{8}(D^2 - d^2) \qquad (16\text{-}24)$$

Substituindo o valor de F da Equação (16-23), podemos obter uma expressão mais conveniente para o torque. Logo,

$$T = \frac{Ff}{4}(D + d) \tag{16-25}$$

Em uso, a Equação (16-23) provê a força atuante para a pressão máxima selecionada p_a. Essa equação se mantém para qualquer número de pares de fricção ou superfícies. A Equação (16-25), contudo, fornece a capacidade de torque para somente uma única superfície de fricção.

Pressão Uniforme

Quando uma pressão uniforme pode ser assumida sobre a área do disco, a força atuante F é simplesmente o produto da pressão pela. Isso produz

$$F = \frac{\pi p_a}{4}(D^2 - d^2) \tag{16-26}$$

Como antes, o torque é encontrado integrando-se o produto da força friccional e o raio:

$$T = 2\pi f p \int_{d/2}^{D/2} r^2\, dr = \frac{\pi f p}{12}(D^3 - d^3) \tag{16-27}$$

Visto que $p = p_a$, a partir da Equação (16-26) podemos reescrever a Equação (16-27) como

$$T = \frac{Ff}{3}\frac{D^3 - d^3}{D^2 - d^2} \tag{16-28}$$

Deve ser observado, para ambas as equações, que o torque é para um único par de superfícies engatadas. Esse valor deve, por conseguinte, ser multiplicado pelo número de pares de superfícies em contato.

Expressemos a Equação (16-25) para o torque durante desgaste uniforme como

$$\frac{T}{fFD} = \frac{1 + d/D}{4} \tag{b}$$

e a Equação (16-28) para o torque sob pressão uniforme (embreagem nova) como

$$\frac{T}{fFD} = \frac{1}{3}\frac{1 - (d/D)^3}{1 - (d/D)^2} \tag{c}$$

e tracemos estas na Figura 16-17. O que vemos é uma apresentação adimensional[1] das Equações (*b*) e (*c*), o que reduz o número de variáveis de cinco (T, f, F, D e d) para três ($T/FD, f$ e d/D), que são adimensionais. Esse é o método de Buckingham. Os grupos adimensionais (denominados termos *pi*) são

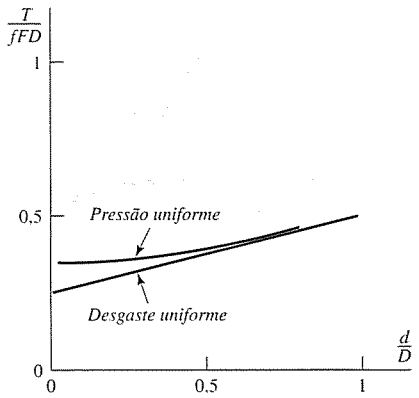


Figura 16-17 Gráfico adimensional das Equações (*b*) e (*c*).

[1] Charles R. Mischke, "Minimizing Engineering Effort", Cap. 11, em Joseph E. Shigley e Charles R. Mischke (eds-in-chief), *Standard Handbook of Machine Design*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1996, p. 11.1-11.9, ou Charles R. Mischke, *Mathematical Model Building*, 2nd rev. ed., Iowa State University Press, Ames, 1980, p. 139-164.

$$\pi_1 = \frac{T}{FD} \qquad \pi_2 = f \qquad \pi_3 = \frac{d}{D}$$

Isso permite que um espaço pentadimensional seja reduzido a um tridimensional. Ademais, devido à relação "multiplicativa" entre f e T nas Equações (*b*) e (*c*), é possível traçar π_1/π_2 *versus* π_3 em um espaço bidimensional (o plano de uma folha de papel), para se verem todos os casos sobre o domínio de existência das Equações (*b*) e (*c*) e para se proceder a uma comparação, sem risco de descuido! Examinando a Figura 16-17, podemos concluir que uma embreagem nova, Equação (*b*), sempre transmite mais torque que uma embreagem velha, Equação (*c*). Além disso, visto que as embreagens desse tipo são proporcionadas para fazer a relação de diâmetros d/D cair no intervalo $0{,}6 \le d/D \le 1$, a maior discrepância entre as Equações (*b*) e (*c*) será

$$\frac{T}{fFD} = \frac{1+0{,}6}{4} = 0{,}400 \qquad \text{(embreagem velha, desgaste uniforme)}$$

$$\frac{T}{fFD} = \frac{1}{3}\frac{1-0{,}6^3}{1-0{,}6^2} = 0{,}4083 \qquad \text{(embreagem nova, pressão uniforme)}$$

de modo que o erro proporcional é (0,4083 – 0,400)/0,400 = 0,021, ou cerca de 2%. Dadas as incertezas no coeficiente real de fricção e a certeza de que novas embreagens envelhecem, há pouca razão para se utilizar qualquer coisa além das Equações (16-23), (12-24) e (16-25).

16-6 Freios de Disco

Como indicado na Figura 16-16, não existe diferença fundamental entre uma embreagem de disco e um freio de disco. A análise da seção precedente aplica-se também a freios de disco.

Vimos que freios de tambor ou de aro podem ser projetados para auto-energização. Embora essa característica seja importante ao se reduzir o esforço de frenagem requerido, ela também apresenta uma desvantagem. Quando freios de tambor são usados como freios de veículos, apenas uma ligeira mudança no coeficiente de fricção causará uma grande alteração na força de pedal requerida para frenagem. Uma redução comum de 30% nesse coeficiente, devido a uma mudança de temperatura ou umidade, por exemplo, pode resultar em uma mudança de 50% na força de pedal requerida para se obter o mesmo torque de frenagem obtenível antes de tal mudança. O freio de disco não tem auto-energização – daí não ser tão suscetível a alterações no coeficiente de fricção.

Um outro tipo de freio de disco é o *freio de pinça flutuante*, ilustrado na Figura 16-18. A pinça suporta um único pistão flutuante acionado por pressão hidráulica. A ação é muito similar àquela de uma prensa de parafuso, com o pistão substituindo a função do parafuso. A ação flutuante também compensa pelo desgaste e assegura uma pressão razoavelmente constante sobre a área das pastilhas de fricção. O vedador e a bota da Figura 16-18 são projetados para obter folga por afastamento para longe do pistão quando este é liberado.

Freios de pinça (nomeados pela natureza do elo acionador) e de disco (nomeados pela forma da superfície sem forração) pressionam o material de fricção contra a(s) face(s) de um disco rodando. Representada na Figura 16-19 está a geometria de uma área de contato de freio com pastilha anular. A equação que governa o desgaste axial é a (12-27):

$$w = f_1 f_2 K P V t$$

A coordenada $\bar{r}$ localiza a linha de ação da força F que intercepta o eixo y. De interesse também é o raio efetivo r_e, ou seja, o raio de uma sapata equivalente de espessura radial infinitesimal. Se p é a pressão local de contato, a força atuante F e o torque de fricção T são fornecidos por

$$F = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{r_i}^{r_o} pr\,dr\,d\theta = (\theta_2 - \theta_1)\int_{r_i}^{r_o} pr\,dr \tag{16-29}$$

$$T = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{r_i}^{r_o} fpr^2\,dr\,d\theta = (\theta_2 - \theta_1) f \int_{r_i}^{r_o} pr^2\,dr \tag{16-30}$$

O raio equivalente r_e pode ser encontrado a partir de $fFr_e = T$, ou

$$r_e = \frac{T}{fF} = \frac{\displaystyle\int_{r_i}^{r_o} pr^2\,dr}{\displaystyle\int_{r_i}^{r_o} pr\,dr} \tag{16-31}$$

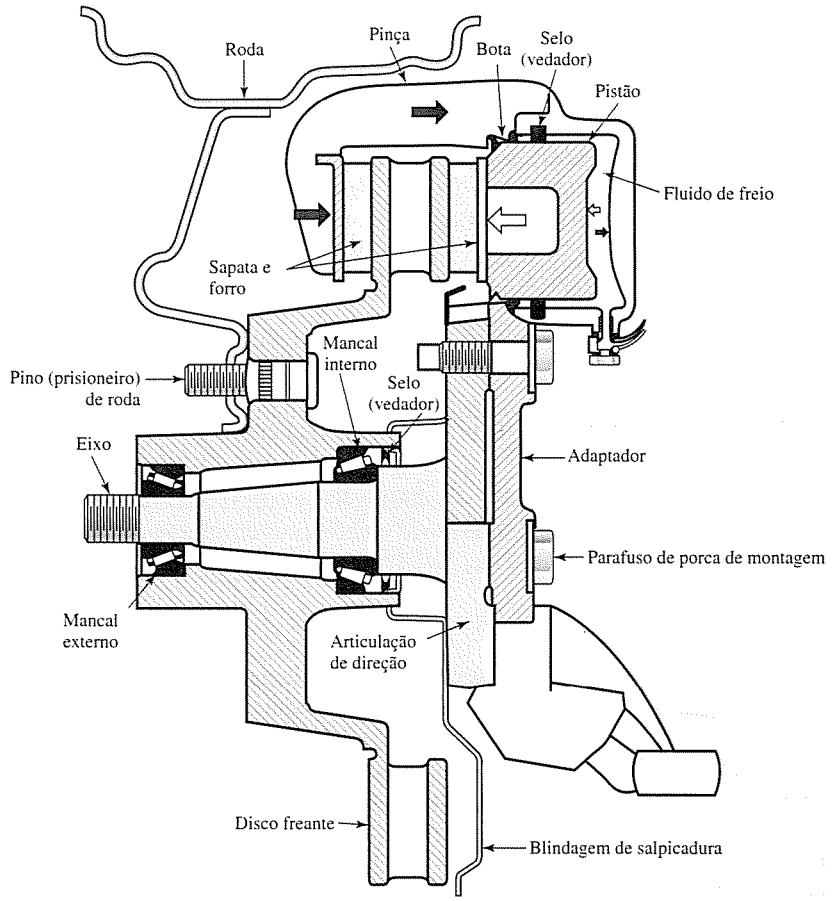


Figura 16-18 Um freio automotivo de disco. *(Cortesia da DaimlerChrysler Corporation.)*

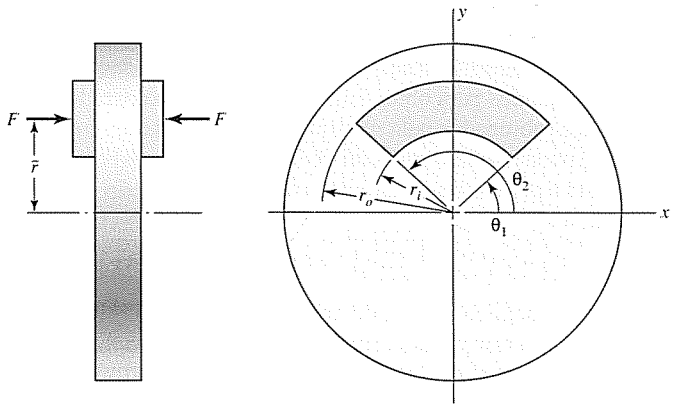


Figura 16-19 Geometria da área de contato de um segmento de pastilha anular de um freio de pinça.

A coordenada de localização $\bar{r}$ da força ativante é encontrada tomando-se momentos ao redor do eixo x.

$$M_x = F\bar{r} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_i}^{r_o} pr(r \operatorname{sen}\theta)\, dr\, d\theta = (\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \int_{r_i}^{r_o} pr^2\, dr$$

$$\bar{r} = \frac{M_x}{F} = \frac{(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)}{\theta_2 - \theta_1} r_e \tag{16-32}$$

Desgaste Uniforme

Está claro, a partir da Equação (12-27), que, para o desgaste axial ser o mesmo em todo lugar, o produto PV deve ser uma constante. A partir da Equação (*a*), da Seção 16-5, a pressão p pode ser expressa em termos da maior pressão admissível p_a (que ocorre no raio mais interno r_i), como $p = p_a r_i / r$. A Equação (16-29) torna-se

$$F = (\theta_2 - \theta_1) p_a r_i (r_o - r_i) \tag{16-33}$$

A Equação (16-30) torna-se

$$T = (\theta_2 - \theta_1) f p_a r_i \int_{r_i}^{r_o} r\, dr = \frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1) f p_a r_i \left(r_o^2 - r_i^2\right) \tag{16-34}$$

A Equação (16-31) torna-se

$$r_e = \frac{p_a r_i \displaystyle\int_{r_i}^{r_o} r\, dr}{p_a r_i \displaystyle\int_{r_i}^{r_o} dr} = \frac{r_o^2 - r_i^2}{2} \frac{1}{r_o - r_i} = \frac{r_o + r_i}{2} \tag{16-35}$$

A Equação (16-32) torna-se

$$\bar{r} = \frac{\cos\theta_1 - \cos\theta_2}{\theta_2 - \theta_1} \frac{r_o + r_i}{2} \tag{16-36}$$

Pressão Uniforme

Nessa situação, aproximada por um freio novo, $p = p_a$. A Equação (16-29) torna-se

$$F = (\theta_2 - \theta_1) p_a \int_{r_i}^{r_o} r\, dr = \frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1) p_a \left(r_o^2 - r_i^2\right) \tag{16-37}$$

A Equação (16-30) torna-se

$$T = (\theta_2 - \theta_1) f p_a \int_{r_i}^{r_o} r^2\, dr = \frac{1}{3}(\theta_2 - \theta_1) f p_a \left(r_o^3 - r_i^3\right) \tag{16-38}$$

A Equação (16-31) torna-se

$$r_e = \frac{p_a \displaystyle\int_{r_i}^{r_o} r^2\, dr}{p_a \displaystyle\int_{r_i}^{r_o} r\, dr} = \frac{r_o^3 - r_i^3}{3} \frac{2}{r_o^2 - r_i^2} = \frac{2}{3} \frac{r_o^3 - r_i^3}{r_o^2 - r_i^2} \tag{16-39}$$

A Equação (16-32) torna-se

$$\bar{r} = \frac{\cos\theta_1 - \cos\theta_2}{\theta_2 - \theta_1} \frac{2}{3} \frac{r_o^3 - r_i^3}{r_o^2 - r_i^2} = \frac{2}{3} \frac{r_o^3 - r_i^3}{r_o^2 - r_i^2} \frac{\cos\theta_1 - \cos\theta_2}{\theta_2 - \theta_1} \tag{16-40}$$

EXEMPLO 16-3

Duas pastilhas anulares, $r_i = 3{,}875$ in e $r_o = 5{,}50$ in, subtendem um ângulo de 108°, dispõem de um coeficiente de fricção de 0,37 e são acionadas por um par de cilindros hidráulicos de 1,5 in de diâmetro. O requisito de torque é 13 000 lbf · in. Para o desgaste uniforme

(*a*) Encontre a maior pressão normal p_a.

(*b*) Estime a força atuante F.

(*c*) Encontre o raio equivalente r_e e a localização da força $\bar{r}$.

(*d*) Estime a pressão hidráulica requerida.

Solução (*a*) A partir da Equação (16-34), com $T = 13\,000/2 = 6500$ lbf · in para cada pastilha,

$$p_a = \frac{2T}{(\theta_2 - \theta_1) f r_i \left(r_o^2 - r_i^2\right)}$$

Resposta
$$= \frac{2(6500)}{(144^\circ - 36^\circ)(\pi/180)0{,}37(3{,}875)(5{,}5^2 - 3{,}875^2)} = 315{,}8 \text{ psi}$$

(*b*) A partir da Equação (16-33),

Resposta
$$F = (\theta_2 - \theta_1) p_a r_i (r_o - r_i) = (144^\circ - 36^\circ)(\pi/180)315{,}8(3{,}875)(5{,}5 - 3{,}875)$$
$$= 3748 \text{ lbf}$$

(*c*) A partir da Equação (16-35),

Resposta
$$r_e = \frac{r_o + r_i}{2} = \frac{5{,}50 + 3{,}875}{2} = 4{,}688 \text{ in}$$

A partir da Equação (16-36),

Resposta
$$\bar{r} = \frac{\cos\theta_1 - \cos\theta_2}{\theta_2 - \theta_1} \frac{r_o + r_i}{2} = \frac{\cos 36^\circ - \cos 144^\circ}{(144^\circ - 36^\circ)(\pi/180)} \frac{5{,}50 + 3{,}875}{2}$$
$$= 4{,}024 \text{ in}$$

(*d*) Cada cilindro supre metade da força atuante, 3748 lbf.

Resposta
$$p_{\text{hidráulica}} = \frac{F}{A_P} = \frac{3748}{\pi(1{,}5^2/4)} = 2121 \text{ psi}$$

Freio de Pinça com Pastilha Circular (Botão ou Disco)

A Figura 16-20 exibe a geometria de pastilha. Integração numérica é necessária para analisar tal freio, uma vez que os contornos são difíceis de tratar de forma analítica. A Tabela 16-1 apresenta os parâmetros para esse freio de acordo com determinado por Fazekas. O raio efetivo é fornecido por

$$r_e = \delta e \tag{16-41}$$

A força atuante é fornecida por

$$F = \pi R^2 p_{\text{av}} \tag{16-42}$$

e o torque é fornecido por

$$T = f F r_e \tag{16-43}$$

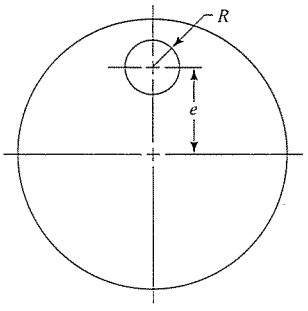


Figura 16-20 Geometria da almofada circular de um freio de calibre.

Tabela 16-1 Parâmetros para um freio de pinça (calibre) com pastilha circular

$\frac{R}{e}$	$\delta = \frac{r_e}{e}$	$\frac{p_{max}}{p_{av}}$
0,0	1,000	1,000
0,1	0,983	1,093
0,2	0,969	1,212
0,3	0,957	1,367
0,4	0,947	1,578
0,5	0,938	1,875

Fonte: G. A. Fazekas, "On Circular Spot Brakes", *Trans. ASME, J. Engineering for Industry,* vol. 94, Series B, nº 3, agosto de 1972, p. 859-863.

EXEMPLO 16-4

Um freio de disco de almofada de botão utiliza almofadas secas de metal sinterizado. O raio da almofada é de $\frac{1}{2}$ in, e seu centro está a 2 in do eixo de rotação do disco de diâmetro de $3\frac{1}{2}$ in. Usando metade da maior pressão admissível, $p_{max} = 350$ psi encontre a força atuante e o torque do freio. O coeficiente de fricção é 0,31.

Solução

Sendo o raio da almofada $R = 0{,}5$ in e a excentricidade $e = 2$ in,

$$\frac{R}{e} = \frac{0{,}5}{2} = 0{,}25$$

A partir da Tabela 16-1, por interpolação, $\delta = 0{,}963$ e $p_{max}/p_{av} = 1{,}290$. Segue-se que o raio efetivo e é encontrado a partir da Equação (16-41):

$$r_e = \delta e = 0{,}963(2) = 1{,}926 \text{ in}$$

e a pressão média é

$$p_{av} = \frac{p_{max}/2}{1{,}290} = \frac{350/2}{1{,}290} = 135{,}7 \text{ psi}$$

Presume-se que a força atuante F, a partir da Equação (16-42), seja

Resposta

$$F = \pi R^2 p_{av} = \pi(0{,}5)^2 135{,}7 = 106{,}6 \text{ lbf} \qquad \text{(um lado)}$$

O torque do freio T é

Resposta

$$T = fFr_e = 0{,}31(106{,}6)1{,}926 = 63{,}65 \text{ lbf} \cdot \text{in} \qquad \text{(um lado)}$$

16-7 Embreagens de Cone e Freios

O desenho de uma *embreagem de cone* na Figura 16-21 mostra que ela consiste em uma *copa* chavetada ou estriada em relação a um dos eixos, um *cone* que deve deslizar axialmente, em estrias ou chavetas em um eixo de engate, e uma *mola* helicoidal para manter a embreagem em engate. Essa embreagem é desengatada por meio de um garfo que cabe no sulco de câmbio, no cone de fricção. O *ângulo de cone* α e o diâmetro e a largura de face do cone constituem os parâmetros geométricos importantes de projeto. Se o ângulo de cone for muito pequeno – digamos, inferior a cerca de 8°–, então a força requerida para desengatar a embreagem poderá ser bastante grande. Ademais, o efeito de cunha diminui rapidamente quando ângulos de cone maiores são utilizados. Dependendo das características dos materiais de fricção, um bom compromisso pode ser encontrado utilizando-se ângulos de cone entre 10 e 15°.

Para encontrar uma relação entre a força operante F e o torque transmitido, designe as dimensões do cone de fricção como mostrado na Figura 16-22. Tal como no caso da embreagem axial, podemos obter um conjunto de relações para um desgaste uniforme e um outro conjunto para uma suposição de pressão uniforme.

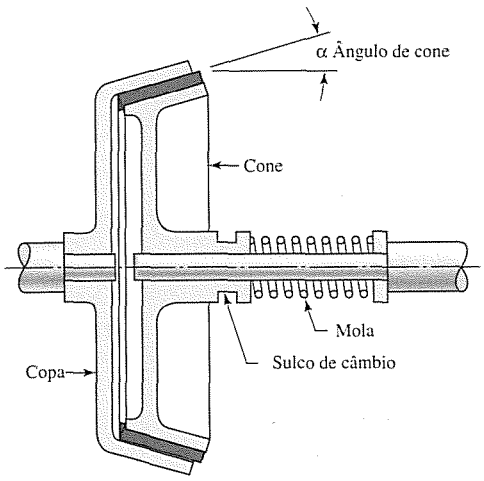


Figura 16-21 Secção transversal de uma embreagem de cone.

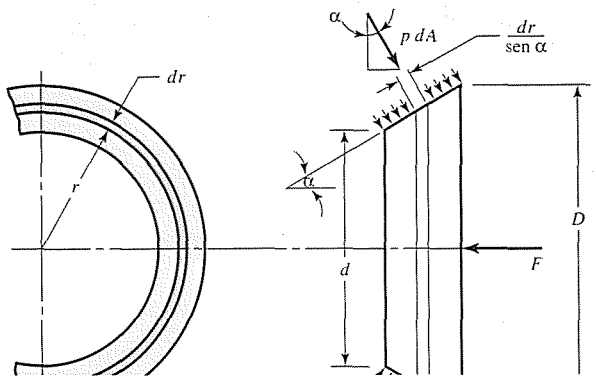


Figura 16-22 Área de contato de uma embreagem de cone.

Desgaste Uniforme

A relação de pressão é a mesma para a embreagem axial:

$$p = p_a \frac{d}{2r} \tag{a}$$

A seguir, referindo-nos à Figura 16-22, observamos a existência de um elemento de área dA de raio r e largura $dr/\text{sen}\,\alpha$. Logo, $dA = (2\pi\, rdr)/\text{sen}\,\alpha$. Como mostrado na figura, a força operante será a integral da componente axial da força diferencial $p\,dA$. Assim,

$$\begin{aligned} F &= \int p\,dA \,\text{sen}\,\alpha = \int_{d/2}^{D/2} \left(p_a \frac{d}{2r}\right)\left(\frac{2\pi r\,dr}{\text{sen}\,\alpha}\right)(\text{sen}\,\alpha) \\ &= \pi p_a d \int_{d/2}^{D/2} dr = \frac{\pi p_a d}{2}(D-d) \end{aligned} \tag{16-44}$$

que corresponde ao mesmo resultado da Equação (16-23).

A força diferencial de fricção é $f\,p\,d\,A$, e o torque é a integral do produto dessa força com o raio. Logo,

$$T = \int rfp\,dA = \int_{d/2}^{D/2} (rf)\left(p_a \frac{d}{2r}\right)\left(\frac{2\pi r\,dr}{\operatorname{sen}\alpha}\right)$$
$$= \frac{\pi f p_a d}{\operatorname{sen}\alpha}\int_{d/2}^{D/2} r\,dr = \frac{\pi f p_a d}{8\operatorname{sen}\alpha}(D^2 - d^2) \tag{16-45}$$

Observe que a Equação (16-24) constitui um caso especial da Equação (16-45), com $\alpha = 90°$. Utilizando a Equação (16-44), descobrimos que o torque pode também ser escrito como

$$T = \frac{Ff}{4\operatorname{sen}\alpha}(D + d) \tag{16-46}$$

Pressão Uniforme

Utilizando $p = p_a$, a força atuante deve ser

$$F = \int p_a\,dA\operatorname{sen}\alpha = \int_{d/2}^{D/2} (p_a)\left(\frac{2\pi r\,dr}{\operatorname{sen}\alpha}\right)(\operatorname{sen}\alpha) = \frac{\pi p_a}{4}(D^2 - d^2) \tag{16-47}$$

O torque é

$$T = \int rfp_a\,dA = \int_{d/2}^{D/2} (rfp_a)\left(\frac{2\pi r\,dr}{\operatorname{sen}\alpha}\right) = \frac{\pi f p_a}{12\operatorname{sen}\alpha}(D^3 - d^3) \tag{16-48}$$

ou, utilizando a Equação (16-47) na Equação (16-48), obtemos

$$T = \frac{Ff}{3\operatorname{sen}\alpha}\frac{D^3 - d^3}{D^2 - d^2} \tag{16-49}$$

Como no caso de uma embreagem axial, podemos escrever a Equação (16-46) adimensionalmente como

$$\frac{T\operatorname{sen}\alpha}{fFd} = \frac{1 + d/D}{4} \tag{b}$$

e a Equação (16-49) como

$$\frac{T\operatorname{sen}\alpha}{fFd} = \frac{1}{3}\frac{1 - (d/D)^3}{1 - (d/D)^2} \tag{c}$$

Desta vez, existem seis parâmetros (T, α, f, F, D e d) e quatro termos *pi*:

$$\pi_1 = \frac{T}{FD} \qquad \pi_2 = f \qquad \pi_3 = \operatorname{sen}\alpha \qquad \pi_4 = \frac{d}{D}$$

Como na Figura 16-17, traçamos T sen $\alpha/(f\,F\,D)$ como ordenada e d/D como abscissa. Os gráficos e as conclusões são os mesmos. Há poucos motivos para utilizar equações outras que não as Equações (16-44), (16-45) e (16-46).

16-8 Considerações de Energia

Quando membros rotantes de uma máquina são forçados a parar por meio de um freio, a energia cinética da rotação deve ser absorvida pelo freio. Essa energia surge na forma de calor. Da mesma forma, quando os membros de uma máquina que estão inicialmente em repouso são postos em movimento a uma determinada velocidade, deve ocorrer deslizamento na embreagem até que os membros movidos tenham a mesma velocidade dos motores. A energia cinética é absorvida durante o deslizamento, seja de uma embreagem ou de um freio, e essa energia aparece como calor.

Vimos como a capacidade de torque de uma embreagem ou de um freio depende do coeficiente de fricção do material e de uma pressão normal segura. Contudo, o caráter da carga pode ser tal que, se esse valor de torque for permitido, a embreagem ou o freio poderão ser destruídos pelo calor gerado por si mesmos. A capacidade de uma embreagem é, portanto, limitada por dois fatores: as características do material e a habi-

lidade de dissipar calor. Nesta seção, consideraremos a quantidade de calor gerado por uma operação de embrear ou frear. Se tal calor é gerado mais rapidamente do que quando é dissipado, estamos diante de um problema de elevação de temperatura, assunto da próxima seção.

Para uma idéia clara a respeito do que acontece durante uma operação simples de embrear ou frear, veja a Figura 16-1(*a*), que constitui um modelo matemático de um sistema de duas inércias conectadas por uma embreagem. Como mostrado, as inércias I_1 e I_2 apresentam velocidades angulares iniciais de ω_1 e ω_2, respectivamente. Durante a operação de embrear, ambas as velocidades angulares mudam e, por fim, tornam-se iguais. Assumimos que os dois eixos são rígidos e que o torque de embreagem é constante.

Escrevendo a equação de movimento para inércia 1, obtemos

$$I_1\ddot{\theta}_1 = -T \tag{a}$$

em que $\ddot{\theta}_1$ é a aceleração angular de I_1 e T é o torque de embreagem. Uma equação similar para I_2 é

$$I_2\ddot{\theta}_2 = T \tag{b}$$

Podemos determinar as velocidades angulares instantâneas $\dot{\theta}_1$ e $\dot{\theta}_2$ de I_1 e I_2, depois que tiver decorrido qualquer período de tempo t, integrando as Equações (*a*) e (*b*). Os resultados são

$$\dot{\theta}_1 = -\frac{T}{I_1}t + \omega_1 \tag{c}$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{T}{I_2}t + \omega_2 \tag{d}$$

em que $\dot{\theta}_1 = \omega_1$ e $\dot{\theta}_2 = \omega_2$ quando $t = 0$. A diferença nas velocidades, às vezes chamada de velocidade relativa, é

$$\begin{aligned}\dot{\theta} = \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 &= -\frac{T}{I_1}t + \omega_1 - \left(\frac{T}{I_2}t + \omega_2\right) \\ &= \omega_1 - \omega_2 - T\left(\frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2}\right)t\end{aligned} \tag{16-50}$$

A operação de embrear é completada no instante em que as duas velocidades angulares $\dot{\theta}_1$ e $\dot{\theta}_2$ tornam-se iguais. Considere o tempo requerido para a operação completa como t_1. Então, $\dot{\theta} = 0$ quando $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2$ e, dessa forma, a Equação (16-50) fornece o tempo como

$$t_1 = \frac{I_1 I_2(\omega_1 - \omega_2)}{T(I_1 + I_2)} \tag{16-51}$$

Essa equação mostra que o tempo requerido para a operação de engate é diretamente proporcional à diferença de velocidade e inversamente proporcional ao torque.

Assumimos que o torque de embreagem é constante. Portanto, utilizando a Equação (16-50), consideramos que a taxa de dissipação de energia durante a operação de embrear deva ser

$$u = T\dot{\theta} = T\left[\omega_1 - \omega_2 - T\left(\frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2}\right)t\right] \tag{e}$$

Essa equação aponta que a taxa de dissipação de energia é maior no início, quando $t = 0$.

A energia total dissipada durante o ciclo de operação de embreagem ou frenagem é obtida integrando a Equação (*e*) de $t = 0$ a $t = t_1$. O resultado deve ser

$$\begin{aligned}E = \int_0^{t_1} u\,dt &= T\int_0^{t_1}\left[\omega_1 - \omega_2 - T\left(\frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2}\right)t\right]dt \\ &= \frac{I_1 I_2(\omega_1 - \omega_2)^2}{2(I_1 + I_2)}\end{aligned} \tag{16-52}$$

em que a Equação (16-51) foi empregada. Observe que a energia dissipada é proporcional à diferença de velocidade quadrada e independente do torque de embreagem.

Observe, também, que E, na Equação (16-52), é a energia perdida ou dissipada; tal é a energia absorvida pela embreagem ou pelo freio. Se as inércias são expressas conforme unidades habituais nos Estados Unidos (lbf · in · s^2), então a energia absorvida pela montagem da embreagem é em in · lbf. Utilizando essas unidades, o calor gerado em Btu é

$$H = \frac{E}{9336} \tag{16-53}$$

No SI, as inércias são expressas em unidades de Kg-m^2 e a energia dissipada é expressa em joules.

16-9 Elevação de Temperatura

A elevação de temperatura da montagem de embreagem ou freio pode ser aproximada pela expressão clássica

$$\Delta T = \frac{H}{C_p W} \tag{16-54}$$

em que ΔT = elevação de temperatura, °F
C_p = capacidade térmica específica, Btu/(lb$_m$ · °F); use 0,12 para aço ou ferro fundido
W = massa da embreagem ou componentes do freio, lbm

Uma equação similar pode ser escrita utilizando-se unidades SI:

$$\Delta T = \frac{E}{C_p m} \tag{16-55}$$

em que ΔT = elevação de temperatura, °C
C_p = capacidade térmica específica; use 500 J/kg · °C para aço ou ferro fundido
m = massa da embreagem ou componentes do freio, kg

As equações de elevação de temperatura mencionadas podem ser empregadas para explicar o que acontece quando uma embreagem ou um freio são utilizados. Todavia, existem tantas variáveis envolvidas que seria improvável que uma análise desse tipo pudesse sequer se aproximar de resultados experimentais. Por essa razão, tais análises são mais úteis, em ciclos repetitivos, para apontar com precisão aqueles parâmetros de projeto que têm o maior efeito no desempenho.

Se um objeto se encontra à temperatura inicial T_1 em um ambiente de temperatura T_∞, então o modelo de resfriamento de Newton é expresso como

$$\frac{T - T_\infty}{T_1 - T_\infty} = \exp\left(-\frac{h_{CR} A}{W C_p} t\right) \tag{16-56}$$

em que T = temperatura no instante t, °F
T_1 = temperatura inicial, °F
$T\infty$ = temperatura ambiental, °F
h_{CR} = coeficiente global de transferência de calor, Btu/(in^2 · s · °F)
A = área da superfície lateral, in^2
W = massa do objeto, lbm
C_p = capacidade térmica específica do objeto, Btu/(lbm · °F)

A Figura 16-23 apresenta uma aplicação da Equação (16-56). A curva ABC é o declínio exponencial de temperatura fornecido por essa equação. No instante t_B, ocorre uma segunda aplicação do freio. A temperatura rapidamente se eleva a T_2, e uma nova curva de resfriamento tem início. Para repetidas aplicações do freio, picos subseqüentes de temperatura T_3, T_4, etc., ocorrem até que o freio seja capaz de dissipar, por resfriamento entre operações, uma quantidade de calor igual à energia absorvida na aplicação. Se essa é uma situação de produção com aplicações do freio a cada t_1 segundos, então um estado permanente se desenvolve, no qual todos os picos T_{max} e todos os vales T_{min} são repetitivos.

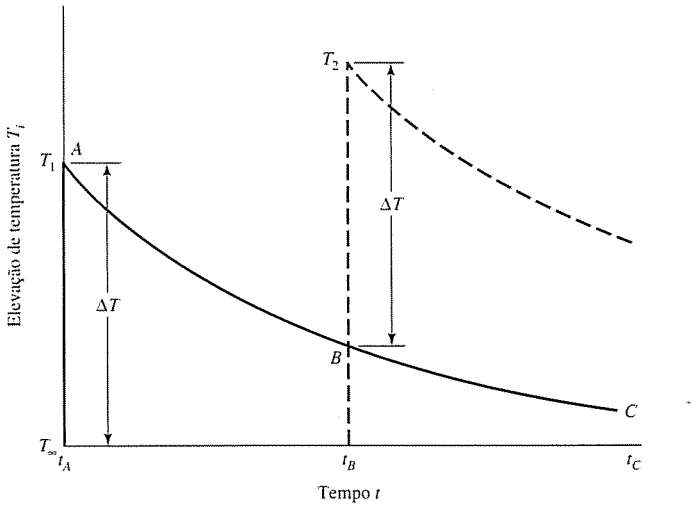


Figura 16-23 O efeito das operações de embrear e frear sobre a temperatura. T_∞ *é a temperatura do ambiente. Observe que a elevação da* temperatura ΔT pode ser diferente para cada operação.

A capacidade de dissipação de calor dos freios de disco tem de ser planejada para evitar que sejam temperaturas de disco e pastilha prejudiciais às componentes. Quando um freio de disco apresenta um ritmo tal como discutido anteriormente, então a taxa de transferência de calor é descrita por uma outra equação newtoniana, a saber:

$$H_{\text{perda}} = \hbar_{\text{CR}} A(T - T_\infty) = (h_r + f_v h_c) A(T - T_\infty) \tag{16-57}$$

em que H_{perda} = taxa de perda de energia, Btu/s

$\hbar_{\text{CR}}$ = coeficiente global de transferência de calor, Btu/(in^2 · s · °F)

h_r = componente de radiação de $\hbar_{\text{CR}}$, Btu/(in^2 · s · °F), Figura 16-24(*a*)

h_c = componente convectiva de $\hbar_{\text{CR}}$ Btu/(in^2 · s · °F), Figura 16-24(*a*)

f_v = fator de ventilação, Figura 16-24(*b*)

T = temperatura do disco, °F

T_∞ = temperatura do ambiente, °F

A energia E absorvida pelo freio parando uma inércia rotacional equivalente I, em termos das velocidades angulares original ω_o e final ω_f, e é fornecida pela Equação (16-53), com $I_1 = I$ e $I_2 = 0$:

$$E = \frac{1}{2}\frac{I}{9336}(\omega_o^2 - \omega_f^2) \tag{16-58}$$

em Btu. A elevação de temperatura ΔT decorrente de uma única parada é

$$\Delta T = \frac{E}{WC} \tag{16-59}$$

T_{max} tem de ser alta o suficiente para transferir E Btu em t_1 segundos. Podemos rearranjar a Equação (16-56) como

$$\frac{T_{\text{min}} - T_\infty}{T_{\text{max}} - T_\infty} = \exp(-\beta t_1)$$

em que $\beta = \hbar_{\text{CR}} A\,(WC_p)$. Multiplique cruzado, adicione T_{max} a ambos os lados, defina $T_{max} - T_{min}$ e rearranje, obtendo

$$T_{\text{max}} = T_\infty + \frac{\Delta T}{1 - \exp(-\beta t_1)} \tag{16-60}$$

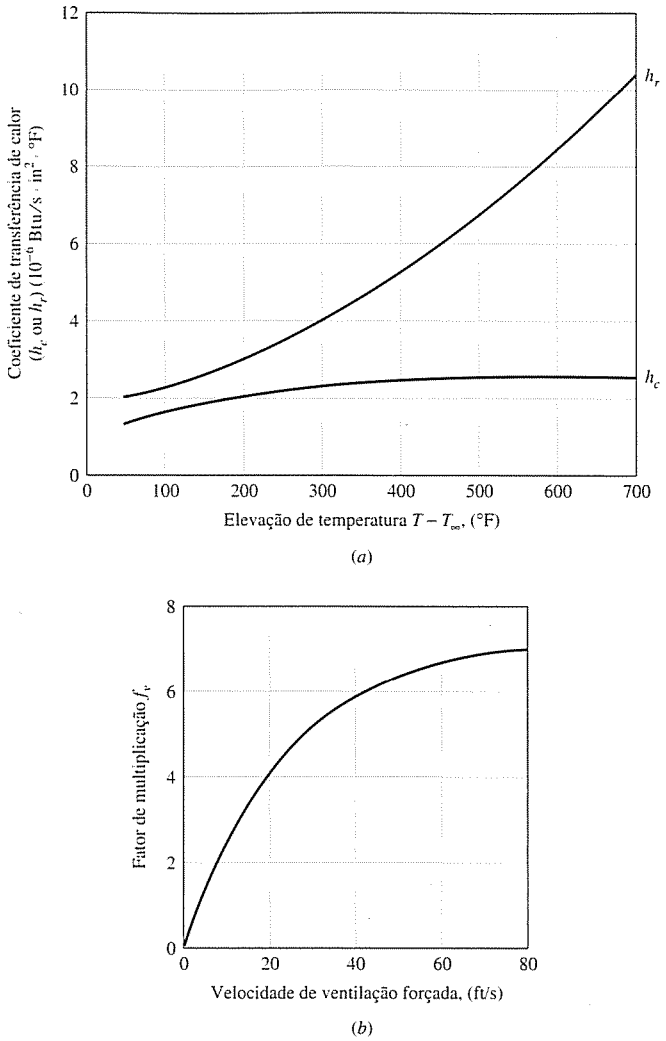


Figura 16-24 (*a*) Coeficiente de transferência de calor em ar parado. (*b*) Fatores de ventilação. *(Cortesia de Tolo-o-matic.)*

EXEMPLO 16-5

Um freio de calibre é usado 24 vezes por hora, a fim deter um eixo de máquina a uma velocidade de 250 rpm em repouso. A ventilação do freio provê uma velocidade média de ar de 25 ft/s. A inércia rotacional equivalente da máquina, como vista a partir do eixo do freio, é de 289 lbm · in · s. O disco é feito de aço, com uma densidade de 0,282 lb/in^3, uma capacidade de calor específica de 0,108 Btu/(lbm · °F), um diâmetro de 6 in e uma espessura de $\frac{1}{4}$ in. As pastilhas são de metal sinterizado seco. A área lateral da superfície do freio é de 50 in^2. Encontre T_{max} e T_{min} para a operação de estado permanente.

Solução

$$t_1 = 3600/24 = 150 \text{ s}$$

Assumindo um aumento de temperatura de $T_{max} - T_\infty = 200°F$, a partir da Figura 16-24(*a*),

$$h_r = 3{,}0(10^{-6}) \text{ Btu/(in}^2 \cdot \text{s} \cdot °\text{F)}$$

$$h_c = 2{,}0(10^{-6}) \text{ Btu/(in}^2 \cdot \text{s} \cdot °\text{F)}$$

Figura 16-24(*b*): $$f_v = 4{,}8$$

$$\hbar_{CR} = h_r + f_v h_c = 3{,}0(10^{-6}) + 4{,}8(2{,}0)10^{-6} = 12{,}6(10^{-6}) \text{ Btu/(in}^2 \cdot \text{s} \cdot ° \text{F)}$$

O peso do disco é

$$W = \frac{\pi \gamma D^2 h}{4} = \frac{\pi(0{,}282)6^2(0{,}25)}{4} = 1{,}99 \text{ lb}$$

Equação (16-58):
$$E = \frac{1}{2}\frac{I}{9336}\left(\omega_o^2 - \omega_f^2\right) = \frac{289}{2(9336)}\left(\frac{2\pi}{60}250\right)^2 = 10{,}6 \text{ Btu}$$

$$\beta = \frac{h_{CR}A}{WC_p} = \frac{12{,}6(10^{-6})50}{1{,}99(0{,}108)} = 2{,}93(10^{-3}) \text{ s}^{-1}$$

Equação (16-59):
$$\Delta T = \frac{E}{WC_p} = \frac{10{,}6}{1{,}99(0{,}108)} = 49{,}3^\circ\text{F}$$

Resposta Equação (16-60):
$$T_{\max} = 70 + \frac{49{,}3}{1 - \exp[-2{,}93(10^{-3})150]} = 209^\circ\text{F}$$

Resposta
$$T_{\min} = 209 - 49{,}3 = 160^\circ\text{F}$$

A elevação predita de temperatura aqui é $T_{max} - T_\infty = -T_\infty = 139°F$. Iterando com os valores revistos de h_r e h_c da Figura 16-24, podemos fazer a solução convergir para $T_{max} = 220°F$ e $T_{min} = 171°F$.

A Tabela 16-3 para pastilhas de metal sinterizado seco fornece uma temperatura máxima de operação contínua de 570 a 660°F. Não há perigo de superaquecimento.

16-10 Materiais de Fricção

Um freio ou uma embreagem de fricção devem apresentar as seguintes características de material de forro a um grau que seja dependente das exigências do serviço:

- Coeficiente de fricção alto e reproduzível;
- Imprevisibilidade a condições ambientais, tais como umidade;
- Habilidade de suportar altas temperaturas, juntamente com boa condutividade térmica e difusividade, bem como com alta capacidade de calor específico;
- Boa resiliência;
- Alta resistência a desgaste, marcas e escoriação;
- Compatibilidade com o ambiente;
- Flexibilidade.

A Tabela 16-3 fornece a área de superfície de fricção requerida para várias potências de frenagem.A Tabela 16-3 apresenta características importantes de alguns materiais de fricção para freios e embreagens.

Tabela 16-2 Área de material de fricção requerida para uma dada potência média de freagem

Ciclo de serviço	Aplicações típicas	Razão de área para potência média de freagem $in^2/(Btu/s)$ Freios de banda e tambor	Freios de disco de chapa	Freios de disco de calibre
Infreqüente	Freios de emergência	0,85	2,8	0,28
Intermitente	Elevadores, guindastes e guinchos	2,8	7,1	0,70
Serviço pesado	Escavadeiras, prensas	5,6-6,9	13,6	1,41

Fontes: M. J. Neale, *The Tribology Handbook*, Butterworth, London, 1973; *Friction Materials for Engineers*, Ferodo Ltd., Chapel-en-le-frith, England, 1968.

Tabela 16-3 Características de materiais de fricção para freios e embreagens

Material	Coeficiente de fricção f	Pressão máxima P_{max}, psi	Temperatura máxima Instantânea, °F	Temperatura máxima Contínua, °F	Velocidade máxima V_{max}, ft/min	Aplicações
Cermeto	0,32	150	1500	750		Freios e embreagens
Metal sinterizado (seco)	0,29-0,33	300-400	930-1020	570-660	3600	Embreagens e freios de disco de calibre (pinças)
Metal sinterizado (úmido)	0,06-0,08	500	930	570	3600	Embreagens
Asbestos rígidos moldados (secos)	0,35-0,41	100	660-750	350	3600	Freios de tambor e embreagens
Asbestos rígidos moldados (úmidos)	0,06	300	660	350	3600	Embreagens industriais
Pastilhas de asbestos rígidos moldados	0,31-0,49	750	930-1380	440-660	4800	Freio de dicos
Não-asbestos rígidos moldados	0,33-0,63	100-150		500-750	4800-7500	Embreagens e freios
Asbestos semi-rígidos moldados	0,37-0,41	100	660	300	3600	Embreagens e freios
Asbestos flexíveis moldados	0,39-0,45	100	660-750	300-350	3600	Embreagens e freios
Fio enrolado de asbestos e arame	0,38	100	660	300	3600	Embreagens de veículos
Fio enrolado de asbestos e arame	0,38	100	500	260	3600	Embreagens industriais e freios
Algodão trançado	0,47	100	230	170	3600	Embreagens industriais e freios
Papel resiliente (úmido)	0,09-0,15	400	300		$PV < 500\,000$ psi · ft/min	Embreagens e bandas de transmissão

Fontes: Ferodo Ltd., Chapel-en-le-frith, England; Scan-pac, Mequon, Wisc.; Raybestos, New York, N. Y. and Stratford, Conn.; Gatke Corp, Chicago, Ill.; General Metals Powder Co., Akron, Ohio; D.A.B. Industries, Troy, Mich.; Friction Products Co., Medina, Ohio.

A manufatura de materiais de fricção constitui um processo altamente especializado, e é aconselhável consultar catálogos de fabricantes e manuais, bem como fabricantes diretamente, ao se selecionarem materiais de fricção para aplicações específicas. A seleção envolve uma consideração de muitas características, bem como os tamanhos padronizados disponíveis.

Os *revestimentos* (forro) *de algodão trançado* são produzidos como um cinto de tecido impregnado de resinas e polimerizado. São utilizados principalmente em maquinaria pesada e costuma ser fornecido em rolos de até 50 ft de comprimento. As espessuras disponíveis variam de $\frac{1}{8}$ a 1 in, em larguras de até aproximadamente 12 in.

Os *revestimentos de asbesto trançado* sãos feitos de maneira semelhante ao revestimento de algodão e pode também conter partículas de metal. Não são tão flexíveis quanto os revestimentos de algodão e vêm em uma variedade menor de tamanhos. Junto com os revestimentos de algodão, o revestimento de asbesto foi amplamente utilizado como um material de freio em maquinaria pesada.

Os *revestimentos de asbesto moldado* contêm fibra de asbesto e modificadores de fricção; um polímero termorrígido é utilizado, com calor, para formar um molde rígido ou semi-rígido. Sua principal utilização se deu em freios de tambor.

As *pastilhas de asbesto moldado* são similares a revestimentos moldados, mas não têm flexibilidade; elas foram usadas tanto em embreagens como em freios.

As *pastilhas de metal sinterizado* são feitas de uma mistura de cobre e/ou partículas de ferro com modificadores de fricção, moldadas sob alta pressão e então aquecidas a uma temperatura elevada, para fundir o material. Essas pastilhas são utilizadas, tanto em freios como em embreagens, para aplicações de serviço pesado.

As *pastilhas de cermeto* são similares a pastilhas de metal sinterizado e têm um substancial conteúdo cerâmico.

A Tabela 16-4 lista propriedades de revestimentos típicos de freio. Os forros podem consistir em uma mistura de fibras para prover resistência e habilidade para suportar altas temperaturas, várias partículas de fricção para obter um grau de resistência a desgaste, bem como um coeficiente mais elevado de fricção, e materiais de ligação.

A Tabela 16-5 inclui uma variedade mais ampla de materiais de fricção de embreagem, juntamente com algumas de suas propriedades. Alguns desses materiais podem ser usados úmidos, pulverizando-os ou mergulhando-os em óleo. Isso reduz de alguma forma o coeficiente de fricção, mas gasta mais calor e permite que pressões mais elevadas sejam utilizadas.

16-11 Embreagens e Acoplamentos Diversos

A embreagem de mandíbula quadrada ilustrada na Figura 16-25(*a*) é uma forma de embreagem de contato positivo. Essas embreagens apresentam as seguintes características:

1. Não deslizam
2. Não geram calor
3. Não podem ser engatadas a altas velocidades
4. Às vezes, não podem ser engatadas quando ambos os eixos estão em descanso
5. Engate a qualquer velocidade é seguido de choque

Tabela 16-4 Algumas propriedades de revestimentos de freio

	Revestimento trançado	Revestimento moldado	Bloco rígido
Resistência à compressão, kpsi	10-15	10-18	10-15
Resistência à compressão, MPa	70-100	70-125	70-100
Resistência à tração, kpsi	2,5-3	4-5	3-4
Resistência à tração, MPa	17-21	27-35	21-27
Temperatura máxima, °F	400-500	500	750
Temperatura máxima, °C	200-260	260	400
Velocidade máxima, ft/min	7500	5000	7500
Velocidade máxima, m/s	38	25	38
Pressão máxima, psi	50-100	100	150
Pressão máxima, kPa	340-690	690	1000
Coeficiente friccional, médio	0,45	0,47	0,40-45

Tabela 16-5 Materiais de fricção para embreagens

Material	Coeficiente de fricção Úmido	Seco	Temperatura máxima °F	°C	Pressão máxima psi	kPa
Ferro fundido em ferro fundido	0,05	0,15-0,20	600	320	150-250	1000-1750
Metal pulverizado* em ferro fundido	0,05-0,1	0,1-0,4	1000	540	150	1000
Metal pulverizado* em aço duro	0,05-0,1	0,1-0,3	1000	540	300	2100
Madeira em aço ou ferro fundido	0,16	0,2-0,35	300	150	60-90	400-620
Couro em aço ou ferro fundido	0,12	0,3-0,5	200	100	10-40	70-280
Cortiça em aço ou ferro fundido	0,15-0,25	0,3-0,5	200	100	8-14	50-100
Feltro em aço ou ferro fundido	0,18	0,22	280	140	5-10	35-70
Asbesto trançado* em aço ou ferro fundido	0,1-0,2	0,3-0,6	350-500	175-260	50-100	350-700
Asbesto moldado* em aço ou ferro fundido	0,08-0,12	0,2-0,5	500	260	50-150	350-1000
Asbesto impregnado* em aço ou ferro fundido	0,12	0,32	500-750	260-400	150	1000
Aço carbono em aço	0,05-0,1	0,25	700-1000	370-540	300	2100

*O coeficiente de fricção pode ser mantido em ±5% para materiais específicos neste grupo.

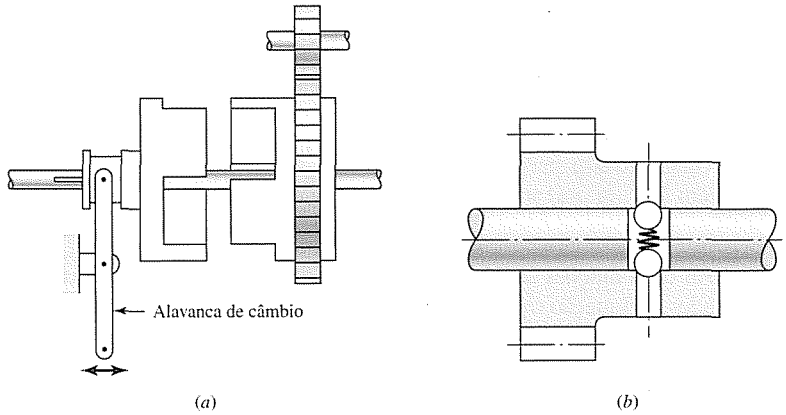


Figura 16-25 (*a*) Embreagem de mandíbula quadrada; (*b*) embreagem de alívio de sobrecarga utilizando um distensor.

A maior diferença entre os vários tipos de embreagens positivas está relacionada com o projeto das mandíbulas. Para prover um período mais longo de tempo para a ação de câmbio durante o engate, essas mandíbulas podem ter forma de catraca, de espiral ou de dente de engrenagem. Às vezes, um número exagerado de dentes ou mandíbulas é utilizado, e eles podem ser cortados ou circunferencialmente para engatarem por acoplamento cilíndrico ou nas faces dos elementos acopladores.

Embora as embreagens positivas não sejam utilizadas na mesma medida em que o são os tipos de contato friccional, elas têm importantes aplicações, nas quais é requerida operação síncrona – como, por exemplo, em prensas de potência ou em laminadores.

Dispositivos como comandos lineares ou chaves de parafusos operadas por motor devem rodar a um limite definido e então fazer uma parada. Um tipo de embreagem de alívio de sobrecarga é requerido para essas aplicações. A Figura 16-25(*b*) constitui-se em um desenho esquemático que ilustra o princípio de operação de tais embreagens. Essas embreagens são geralmente carregadas por mola, para soltar a um torque predeterminado. O estalo que se ouve quando o ponto de sobrecarga é alcançado é considerado um sinal desejável.

Ambas as cargas de fadiga e choque devem ser consideradas ao se obterem as tensões e deflexões das várias porções das embreagens positivas. Ademais, o desgaste deve normalmente ser considerado. A aplicação dos fundamentos discutidos nas Partes 1 e 2 é em geral suficiente para o projeto completo desses dispositivos.

Uma embreagem ou acoplamento de desengate permite ao membro movido de uma máquina "mover-se livremente" ou "desengatar", em razão de que o membro motor foi parado ou uma outra fonte ou potência aumenta a velocidade do mecanismo movido. A construção utiliza rolos ou esferas montadas entre uma manga mais externa e um membro mais interno com cames planos usinados ao redor da periferia. A ação

motora é obtida ao se calçarem os rolos entre a manga e as partes niveladas do came. Essa embreagem é, por isso, equivalente a uma lingüeta e a uma catraca com um número infinito de dentes.

Existem muitos tipos de embreagens de desengate disponíveis, e elas são construídas com capacidade de até centenas de cavalos de potência. Visto que deslizamento algum está envolvido, a única perda de potência é aquela decorrente da fricção de mancais e turbulência.

Os acoplamentos de eixo mostrados na Figura 16-26 são representativos da seleção disponível em catálogos.

16-12 Volantes

A equação de movimento para o volante representado na Figura 16-1(*b*) é

$$\sum M = T_i(\theta_i, \dot{\theta}_i) - T_o(\theta_o, \dot{\theta}_o) - I\ddot{\theta} = 0$$

ou

$$I\ddot{\theta} = T_i(\theta_i, \omega_i) - T_o(\theta_o, \omega_o) \qquad (a)$$

em que T_i é considerado positivo e T_o, negativo, e em que $\dot{\theta}$ e $\ddot{\theta}$ são a primeira e a segunda derivadas temporais de θ, respectivamente. Observe que tanto T_i quanto T_o podem depender, em seus valores, dos deslocamentos angulares θ_i e θ_o, bem como de suas velocidades angulares ω_i e ω_o. Em muitos casos, a característica de torque depende somente de um destes. Assim, o torque entregue por um motor de indução depende da velocidade desse motor. De fato, os fabricantes de motores publicam os detalhes das características torque-velocidade de seus motores.

Quando as funções de torque de entrada e saída são fornecidas, a Equação (*a*) pode ser solucionada para o movimento do volante mediante técnicas bem conhecidas para a solução de equações diferencias lineares e não-lineares. Podemos dispensar isso ao assumirmos um eixo rígido, com $\theta_i = \theta = \theta_o$. Logo, a Equação (*a*) torna-se

$$I\ddot{\theta} = T_i(\theta, \omega) - T_o(\theta, \omega) \qquad (b)$$

Quando as duas funções de torque forem conhecidas e os valores iniciais do deslocamento θ e da velocidade ω forem dados, a Equação (*b*) poderá ser solucionada para θ, ω e $\ddot{\theta}$ como funções do tempo. Entretanto, não estamos, em absoluto, interessados realmente nos valores instantâneos desses termos. Primeiramente, queremos conhecer o desempenho global do volante. Qual deve ser seu momento de inércia? Como ajustamos a fonte de potência à carga? E quais as características resultantes de desempenho do sistema que selecionamos?

Para entendermos melhor este problema, uma situação hipotética é mostrada, na forma de diagrama na Figura 16-27. Uma fonte de potência de entrada sujeita um volante a um torque constante T_i, enquanto o eixo roda de θ_1 a θ_2. O torque é positivo e está traçado na ascendente. A Equação (*b*) indica que uma acelera-

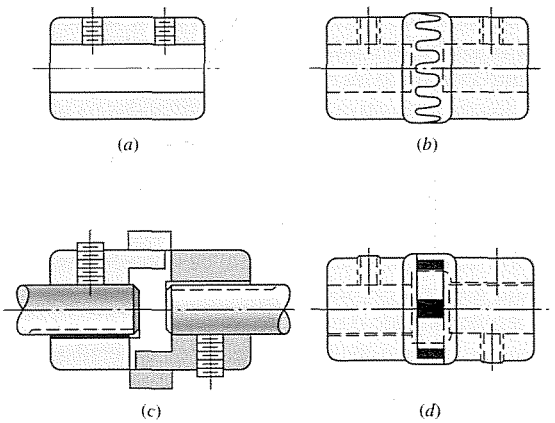


Figura 16-26 Acoplamentos de eixo. (*a*) Plano. (*b*) Acoplamento denteado de serviço leve. (*c*) Projeto da BOST-FLEX® de orifício passante com elastômero inserido para transmitir torque por compressão; inserto permite 1º de desalinhamento. (*d*) Acoplamento de três mandíbulas disponível com bronze, borracha ou inserto de poliuretano para minimizar vibrações. *(Reproduzida com autorização, Boston Gear Division, Colfax Corp.)*

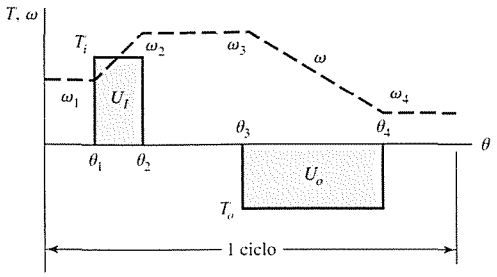


Figura 16-27

ção positiva $\ddot{\theta}$ resultará; dessa forma, a velocidade do eixo aumenta de ω_1 para ω_2. Como mostrado, o eixo agora gira de θ_2 a θ_3, com torque zero, e, conseqüentemente, a partir da Equação (*b*), com aceleração zero. Portanto, $\omega_3 = \omega_2$. De θ_3 a θ_4, uma carga, ou um torque de saída, de magnitude constante é aplicada, motivando o eixo a diminuir a velocidade de ω_3 para ω_4. Observe que o torque de saída está traçado na direção negativa, de acordo com a Equação (*b*).

O trabalho introduzido no volante corresponde à área do retângulo entre θ_1 e θ_2, ou

$$U_i = T_i(\theta_2 - \theta_1) \tag{c}$$

O trabalho transferido pelo volante é a área do retângulo de θ_3 a θ_4, ou

$$U_o = T_o(\theta_4 - \theta_3) \tag{d}$$

Se U_o é maior que U_i, então a carga utiliza mais energia do que foi transferida ao volante e, assim, ω_4 será menor que ω_1. Se $U_o = U_i$, ω_4 será igual a ω_1, uma vez que os ganhos e as perdas serão iguais – estamos considerando a não-existência de perdas de fricção. Por fim, ω_4 será maior que ω_1 se $U_i > U_o$.

Podemos, também, escrever as relações em termos de energia cinética. Em $\theta = \theta_1$, o volante apresenta uma velocidade de ω_1 rad/s; logo, sua energia cinética é

$$E_1 = \frac{1}{2} I \omega_1^2 \tag{e}$$

Quando $\theta = \theta_2$, a velocidade é ω_2; logo,

$$E_2 = \frac{1}{2} I \omega_2^2 \tag{f}$$

Assim sendo, a mudança na energia cinética é

$$E_2 - E_1 = \frac{1}{2} I \left(\omega_2^2 - \omega_1^2\right) \tag{16-61}$$

Muitas das funções de torque-deslocamento encontradas em situações práticas de engenharia são tão complicadas que devem ser integradas por métodos numéricos. A Figura 16-28, por exemplo, consiste em um gráfico típico de motor para um ciclo de movimento de um motor de combustão interna de um cilindro único. Visto que parte da curva de torque é negativa, o volante deve retornar parte da energia de volta ao motor. Integrar essa curva de $\theta = 0$ a 4π e dividir o resultado por 4π teremos um torque médio T_m disponível para mover uma carga durante o ciclo.

É conveniente definir um *coeficiente de flutuação de velocidade* como

$$C_s = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega} \tag{16-62}$$

em que ω é a velocidade angular nominal, fornecida por

$$\omega = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} \tag{16-63}$$

A Equação (16-61) pode ser fatorada para produzir

$$E_2 - E_1 = \frac{I}{2}(\omega_2 - \omega_1)(\omega_2 + \omega_1)$$

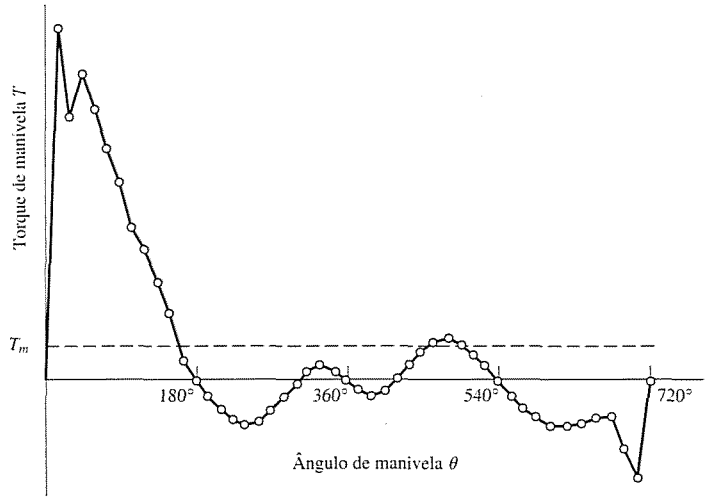


Figura 16-28 Relação entre torque e ângulo de manivela para um motor de combustão interna de quatro ciclos de um único cilindro.

Na medida em que $\omega_2 - \omega_1 = C_s\omega$ e que $\omega_2 + \omega_1 = 2\omega$, obtemos

$$E_2 - E_1 = C_s I \omega^2 \tag{16-64}$$

A Equação (16-64) pode ser utilizada para se obter uma inércia apropriada de volante correspondente à mudança de energia $E_2 - E_1$.

EXEMPLO 16-6

A Tabela 16-6 lista valores do torque utilizado para traçar a Figura 16-28. A velocidade nominal do motor deve ser de 250 rad/s.

(*a*) Integre a função torque-deslocamento para um ciclo e encontre a energia que pode ser entregue a uma carga durante o mesmo.

(*b*) Determine o torque médio T_m (ver Figura 16-28).

Tabela 16-6 Dados do gráfico para a Figura 16-29

θ, grau	T, lbf · in	θ, grau	T, lbf · in	θ, grau	T, lbf · in	θ, grau	T, lbf · in
0	0	195	−107	375	−85	555	−107
15	2800	210	−206	390	−125	570	−206
30	2090	225	−260	405	−89	585	−292
45	2430	240	−323	420	8	600	−355
60	2160	255	−310	435	126	615	−371
75	1840	270	−242	450	242	630	−362
90	1590	285	−126	465	310	645	−312
105	1210	300	−8	480	323	660	−272
120	1066	315	89	495	280	675	−274
135	803	330	125	510	206	690	−548
150	532	345	85	525	107	705	−760
165	184	360	0	540	0	720	0
180	0						

(*c*) A maior flutuação de energia está, aproximadamente, entre $\theta = 15°$ e $\theta = 150°$ no diagrama de torque; veja a Figura 16-28 e observe que $T_o = -T_m$. Utilizando um coeficiente de flutuação de velocidade $C_s = 0{,}1$, encontre um valor conveniente para a inércia de volante.

(*d*) Encontre ω_2 e ω_1.

Solução (*a*) Utilizando $n = 48$ intervalos de $\Delta\theta = 4\pi/48$, a integração numérica dos dados da Tabela 16-6 produz $E = 3368$ in · lbf. Essa é a energia que pode ser entregue à carga.

Resposta (*b*)
$$T_m = \frac{3368}{4\pi} = 268 \text{ lbf} \cdot \text{in}$$

(*c*) O trecho positivo mais longo no diagrama torque-deslocamento ocorre entre $\theta = 0°$ e $\theta = 180°$. Selecionamos esse trecho como produtor da maior mudança de velocidade. Subtraindo 268 lbf · in dos valores da Tabela 16-6 para esse trecho, obtemos, respectivamente, –268, 2532, 1822, 2162, 1892, 1572, 1322, 942, 798, 535, 264, –84 e –268 lbf · in. Integrando numericamente $T - T_m$ em relação a θ produz $E_2 - E_1 = 3531$ bbf.in. Solucionamos, agora, a Equação (16-64) para I. Como resultado, obtemos

Resposta
$$I = \frac{E_2 - E_1}{C_s \omega^2} = \frac{3531}{0{,}1(250)^2} = 0{,}565 \text{ lbf} \cdot \text{s}^2 \text{ in}$$

(*d*) As Equações (16-62) e (16-63) podem ser solucionadas, simultaneamente, para ω_2 e ω_1. Substituindo valores apropriados nessas duas equações, obtemos

Resposta
$$\omega_2 = \frac{\omega}{2}(2 + C_s) = \frac{250}{2}(2 + 0{,}1) = 262{,}5 \text{ rad/s}$$

Resposta
$$\omega_1 = 2\omega - \omega_2 = 2(250) - 262{,}5 = 237{,}5 \text{ rad/s}$$

Ambas as velocidades ocorrem em $\theta = 180°$ e $\theta = 0°$, respectivamente.

A demanda de torque de prensa de punção freqüentemente toma a forma de um impulso intenso e da fricção contínua do trem motor. O motor supera a fricção enquanto atende à tarefa maior de restaurar a velocidade angular do volante. A situação pode ser idealizada como mostra a Figura 16-29. Ignorando a fricção contínua, a equação de Euler pode ser escrita como

$$T(t_1 - 0) = \frac{1}{2} I\left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right) = E_2 - E_1$$

em que a única inércia significativa é o volante. As prensas de punção podem ter o motor e o volante em um eixo e então, por meio de um redutor de engrenagem, comandar um mecanismo manivela-deslizador que carrega a ferramenta de punção. O motor pode estar conectado à punção continuamente, criando um ritmo de puncionamento, ou estar conectado ao comando por meio de uma embreagem que permite um golpe e uma desconexão. O motor e a embreagem devem ser dimensionados para o serviço mais exigente, que é o puncionamento do regime. O trabalho feito é fornecido por

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} [T(\theta) - T]\, d\theta = \frac{1}{2} I\left(\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2\right)$$

Essa equação pode ser arranjada para incluir o coeficiente de flutuação de velocidade C_s como segue:

$$W = \frac{1}{2} I\left(\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2\right) = \frac{I}{2}(\omega_{\max} - \omega_{\min})\,(\omega_{\max} + \omega_{\min})$$

$$= \frac{I}{2}(C_s \bar{\omega})(2\omega_0) = I C_s \bar{\omega} \omega_0$$

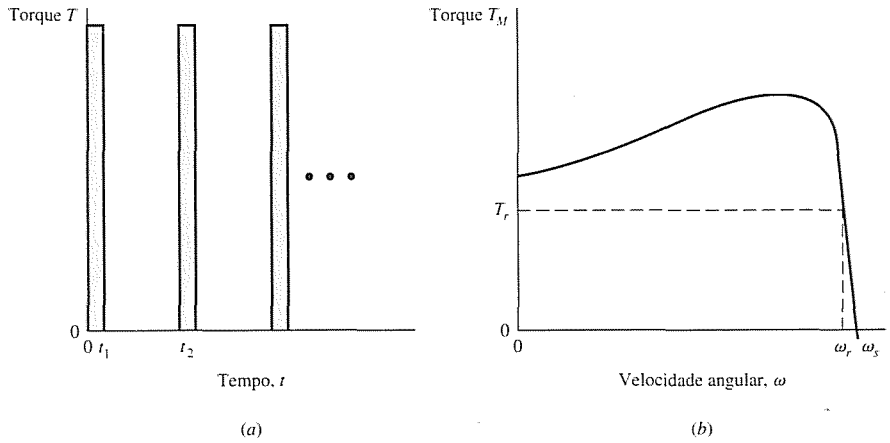


Figura 16-29 a) Demanda de torque de prensa de punção durante puncionamento. b) Característica torque-velocidade de motor elétrico de gaiola de esquilo.

Quando a flutuação de velocidade é baixa, $\omega_0 \doteq \bar{\omega}$, e

$$I = \frac{W}{C_s \bar{\omega}^2}$$

Um motor de indução apresenta uma característica de torque linear $T = a\omega + b$ no intervalo de operação. As constantes a e b podem ser encontradas a partir da velocidade registrada em placa metálica na máquina ω_r e na velocidade síncrona ω_s:

$$\begin{aligned} a &= \frac{T_r - T_s}{\omega_r - \omega_s} = \frac{T_r}{\omega_r - \omega_s} = -\frac{T_r}{\omega_s - \omega_r} \\ b &= \frac{T_r\omega_s - T_s\omega_r}{\omega_s - \omega_r} = \frac{T_r\omega_s}{\omega_s - \omega_r} \end{aligned} \tag{16-65}$$

Por exemplo, um motor a-c de 3 hp, com três fases de gaiola de esquilo, avaliado a 1125 rpm, tem um torque de 63 025(3)/1125 = 168,1 lbf · in. A velocidade angular estimada é $\omega_r = 2\pi n_r/60 = 2\pi(1125)/60 = 117{,}81$ rad/s, e a velocidade angular síncrona, $\omega_s = 2\pi = (1200)/60 = 125{,}66$ rad/s. Logo, $a = -21{,}41$lbf · in. s/rad, e $b = 2690{,}9$ lbf · in, sendo que podemos expressar $T(\omega)$ como $a\omega + b$. Durante o intervalo de t_1 a t_2, o motor acelera o volante de acordo com $I\ddot{\theta} = T_m$ (i.e, $T_w/dt = T_m$) Separando a equação $T_M = I\, d\omega/dt$, obtemos

$$\int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{\omega_r}^{\omega_2} \frac{I\, d\omega}{T_M} = I\int_{\omega_r}^{\omega_2} \frac{d\omega}{a\omega + b} = \frac{I}{a}\ln\frac{a\omega_2 + b}{a\omega_r + b} = \frac{I}{a}\ln\frac{T_2}{T_r}$$

ou

$$t_2 - t_1 = \frac{I}{a}\ln\frac{T_2}{T_r} \tag{16-66}$$

Para o intervalo de desaceleração, quando o motor e o volante sentem o torque de puncionar no eixo como T_L, $(T_M - T_L) = I\, d\omega/dt$, ou

$$\int_0^{t_1} dt = I\int_{\omega_2}^{\omega_r} \frac{d\omega}{T_M - T_L} = I\int_{\omega_2}^{\omega_r} \frac{d\omega}{a\omega + b - T_L} = \frac{I}{a}\ln\frac{a\omega_r + b - T_L}{a\omega_2 + b - T_L}$$

ou

$$t_1 = \frac{I}{a}\ln\frac{T_r - T_L}{T_2 - T_L} \tag{16-67}$$

Podemos dividir a Equação (16-66) pela (16-67), de modo a obter

$$\frac{T_2}{T_r} = \left(\frac{T_L - T_r}{T_L - T_2}\right)^{(t_2 - t_1)/t_1} \tag{16-68}$$

A Equação (16-68) pode ser solucionada para T_2 numericamente. Tendo T_2 a inércia do volante, é, a partir da Equação (16-66),

$$I = \frac{a(t_2 - t_1)}{\ln(T_2/T_r)} \tag{16-69}$$

É importante que a esteja em unidades de lbf · in · s/rad, de modo que I tenha unidades apropriadas. A constante a não deve estar em lbf · in por rpm ou em lbf · in por rev/s.

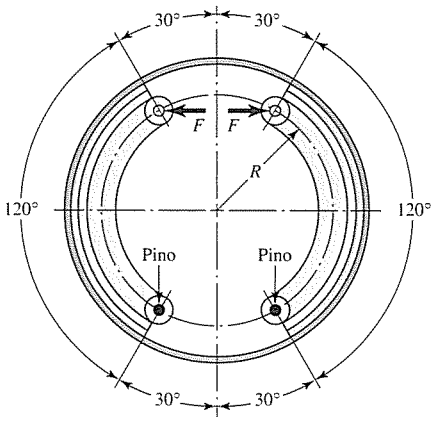
PROBLEMAS

ANÁLISE **16-1** A figura mostra um freio do tipo aro interno com um diâmetro interno de aro de 12 in e uma dimensão R = 5 in. As sapatas têm uma largura de face de $1\frac{1}{2}$ in e são ambas acionadas por uma força de 500 lbf. O coeficiente médio de fricção é 0,28.

(*a*) Encontre a pressão máxima e indique a sapata em que ela ocorre.

(*b*) Estime o torque de freagem executado por cada sapata e encontre o torque total de freagem.

(*c*) Estime as reações resultantes de pino de articulação.



Problema 16-1

ANÁLISE **16-2** Para o freio no Problema 16-1 considere as localizações do pino e do atuador como sendo as mesmas. Contudo, em lugar de 120°, faça a superfície de atrito dos sapatos de freio igual a 90° e localizada de forma centrada. Encontre a máxima pressão e o torque de freagem total.

ANÁLISE **16-3** Na figura do Problema 16-1, o diâmetro interno de aro é de 280 mm e a dimensão R, de 90 mm. As sapatas apresentam uma largura de face de 30 mm. Encontre o torque de frenagem e a pressão máxima em cada sapata se a força atuante é de 1000 N, se a rotação do tambor for anti-horária e se f = 0,30.

ANÁLISE **16-4** A figura ilustra um tambor de freio com diâmetro de 400 mm e quatro sapatas internamente expansíveis. Cada um dos pinos de articulação A e B suporta um par de sapatas. O mecanismo atuante deve ser organizado para produzir a mesma força F em cada sapata. A largura de face das sapatas é de 75 mm. O material utilizado permite um coeficiente de fricção de 0,24 e uma pressão máxima de 1000 kPa.

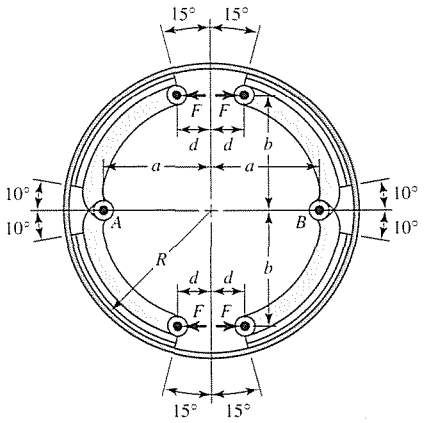
(*a*) Determine a força atuante.

(*b*) Estime a capacidade do freio.

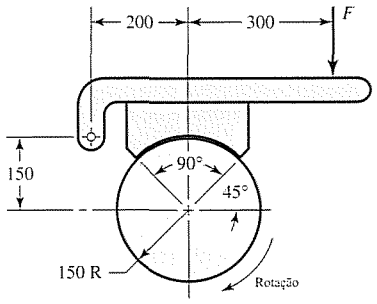
(*c*) Observando que a rotação pode se dar em qualquer direção, estime as reações de pino de articulação.

ANÁLISE **16-5** O freio de mão de tipo bloco mostrado na figura dispõe de uma largura de face de 30 mm e de um coeficiente médio de fricção de 0,25. Para uma força atuante estimada de 400 N, encontre a pressão máxima na sapata e o torque de freagem.

ANÁLISE **16-6** Suponha que o desvio-padrão do coeficiente de fricção no Problema 16-5 seja $\hat{\sigma}_f$ = 0,025, onde o desvio da média se deva inteiramente às condições ambientais. Encontre o torque de freio que corresponda a $\pm 3\hat{\sigma}_f$.

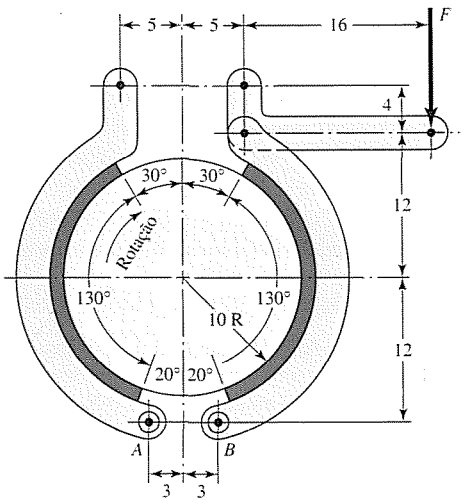


Problema 16-4
As dimensões em milímetros são $a = 150$, $b = 165$, $R = 200$ e $d = 50$.



Problema 16-5
Dimensões em milímetros.

ANÁLISE **16-7** O freio exibido na figura tem um coeficiente de fricção de 0,30, uma largura de face de 2 in e uma pressão limitante de forro de sapata de 150 psi. Encontre a força atuante limitante F e a capacidade de torque.



Problema 16-7
Dimensões em polegadas.

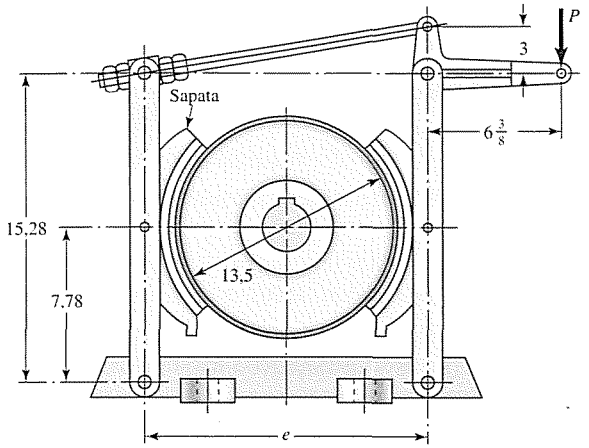
ANÁLISE **16-8** Refira-se à sapata simétrica pivotada externa de freio da Figura 16-12 e à Equação (16-15). Suponha que a distribuição de pressão seja uniforme, isto é, a pressão p independente de θ. Qual seria a distância de pivô a'? Se $\theta_1 = \theta_2 = 60°$, compare a com a'.

ANÁLISE **16-9** As sapatas no freio representado na figura subtendem um arco de 90° no tambor desse freio de sapata externa pivotada. A força atuante P é aplicada à alavanca. O sentido de rotação do tambor é anti-horário, e o coeficiente de fricção é 0,30.

(*a*) Qual deve ser a dimensão e?

(*b*) Desenhe os diagramas de corpo livre da alavanca do cabo e ambas as alavancas de sapata, com as forças expressas em termos da força atuante P.

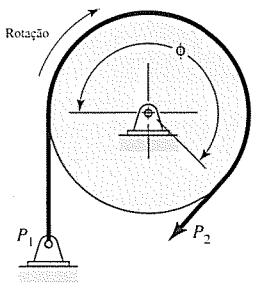
(*c*) A direção de rotação do tambor afeta o torque de freagem?



Problema 16-9
Dimensões em polegadas.

ANÁLISE **16-10** O Problema 16-9 é preliminar para a análise do freio. Um forro moldado é utilizado seco no freio do problema, em um tambor de ferro fundido. As sapatas têm 7,5 in de largura e subtendem um arco de 90°. Encontre a força atuante e o torque de frenagem.

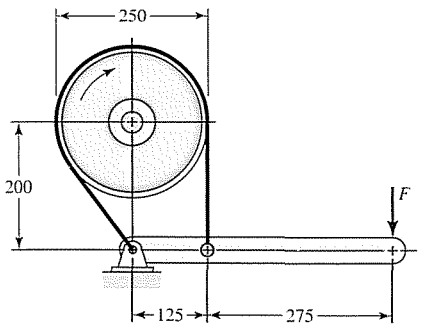
ANÁLISE **16-11** A pressão máxima de interface de banda no freio ilustrado na figura é de 90 psi. Use um tambor com diâmetro de 14 in, largura de banda de 4 in, coeficiente de fricção de 0,25 e ângulo de cobertura de 270°. Encontre as tensões de banda e a capacidade de torque.



Problema 16-11

ANÁLISE **16-12** O tambor para o freio de banda no Problema 16-11 tem 300 mm de diâmetro. A banda selecionada conta com um coeficiente médio de fricção de 0,28 e uma largura de 80 mm. Ele pode seguramente suportar uma tensão de 7,6 kN. *Se o ângulo de cobertura for de 270°, encontre a pressão de forro e a capacidade de torque.*

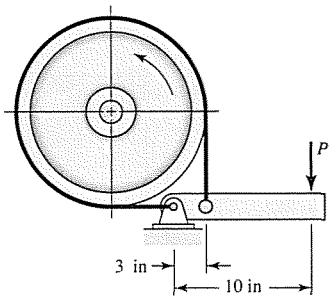
ANÁLISE **16-13** O freio apresentado na figura tem um coeficiente de fricção de 0,30 e deve operar utilizando uma força máxima F de 400 N. Se a largura de banda for de 50 mm, encontre as tensões de banda e o torque de frenagem.



Problema 16-13
Dimensões em milímetros.

ANÁLISE **16-14** A figura representa um freio de banda cujo tambor roda a 200 rpm em sentido anti-horário. O tambor tem16 in de diâmetro e suporta um forro de banda de 3 in de largura. O coeficiente de fricção é 0,20. A pressão máxima de interface de forro é de 70 psi.

(*a*) Encontre o torque de freagem, a força necessária P e a potência de regime permanente.



Problema 16-14

(*b*) Complete o diagrama de corpo livre do tambor. Encontre a carga radial de mancal que um par de mancais em balanço teria de carregar.

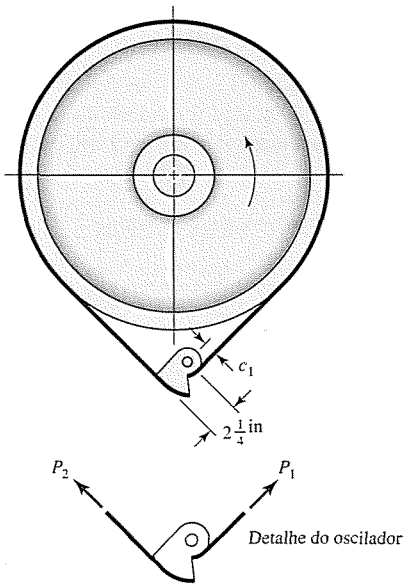
(*c*) Qual a pressão de forro p em ambas as extremidades do arco de contato?

ANÁLISE **16-15** A figura mostra um freio de cinta projetado para prevenir a rotação "para trás" do eixo. O ângulo de cobertura é de 270°; a largura de cinta, de $2\frac{1}{8}$ in e o coeficiente de fricção, de 0,20. O torque a ser resistido pelo freio é de 150 lbf · ft. O diâmetro da polia é de $8\frac{1}{4}$ in.

(*a*) Que dimensão c_1 simplesmente prevenirá o movimento para trás?

(*b*) Se o oscilador fosse projetado com $c_1 = 1$ in, qual seria a pressão máxima entre a cinta e o tambor a 150 lbf · ft de torque para trás?

(*c*) Se a demanda do torque para trás for de 100 lbf · in, qual será a maior pressão entre a cinta e o tambor?



Problema 16-15

ANÁLISE **16-16** Uma embreagem de placa dispõe de um único par de superfícies acomplantes de fricção com 300 mm de diâmetro externo por 225 mm de diâmetro interno. O valor médio do coeficiente de fricção é 0,25, e a força atuante é de 5 kN.

(*a*) Encontre a pressão máxima e a capacidade de torque utilizando o modelo de desgaste uniforme.

(*b*) Encontre a pressão máxima e a capacidade de torque utilizando o modelo de pressão uniforme.

ANÁLISE **16-17** Uma embreagem de placa de múltiplos discos, operada hidraulicamente, tem um diâmetro mais externo efetivo de disco de 6,5 in e um diâmetro mais interno de 4 in. O coeficiente de fricção é 0,24, e a pressão limitadora é de 120 psi. Existem seis planos de deslizamento presentes.

(*a*) Utilizando o modelo de desgaste uniforme, estime a força axial F e o torque T.

(*b*) Torne o diâmetro mais interno dos pares de fricção d uma variável. Complete a seguinte tabela:

d, in	2	3	4	5	6
T, lbf · in					

(*c*) O que a tabela mostra?

PROJETO **16-18** Observe novamente o Problema 16-17.

(*a*) Mostre como o diâmetro ótimo d^* está relacionado com o diâmetro externo D.

(*b*) Qual é o diâmetro interno ótimo?

(*c*) O que a tabulação mostra acerca do máximo?

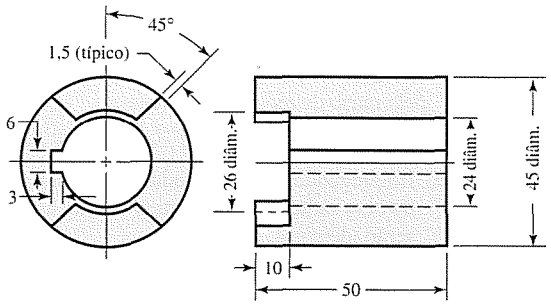
(*d*) Proporções comuns para tais embreagens de placa residem no intervalo $0{,}45 \leq d/D \leq 0{,}80$. É útil o resultado em?

ANÁLISE **16-19** Uma embreagem de cone apresenta $D = 330$ mm, $d = 306$ mm, um comprimento de cone de 60 mm e um coeficiente de fricção de 0,26. Um torque de 200 N · m deve ser transmitido. Para tal requisito, estime a força atuante e a pressão para ambos os modelos.

16-20 Mostre que, para o freio de calibre (picas), o gráfico de $T/(f\,F\,A)$ *versus* d/D é o mesmo que a Equação (*c*) da Seção 16-5.

ANÁLISE

16-21 Uma embreagem de mandíbula dupla tem suas dimensões mostradas na figura e é feita de aço dúctil. A embreagem foi projetado para transmitir 2 kW a 500 rpm. Encontre as tensões de suporte e cisalhamento na chaveta e na mandíbula.



Problema 16-21
Dimensões em milímetros.

ANÁLISE **16-22** Um freio conta com um torque normal de freagem de 320 N · m e superfícies de dissipação de calor cuja massa é de 18 kg. Suponha que uma carga seja levada a repouso em 8,3 s, a partir de uma velocidade angular inicial de 1800 rpm, usando, para tanto, o torque normal de freagem; estime a elevação de temperatura das superfícies de dissipação de calor.

ANÁLISE **16-23** Um volante de ferro fundido tem um aro de diâmetro externo de 60 in e diâmetro interno de 56 in. O peso do volante deve ser tal que uma flutuação de energia de 5000 ft · lbf fará a velocidade angular variar não mais do que 240 a 260 rpm. Estime o coeficiente de flutuação de velocidade. Se o peso dos raios de roda for ignorado, qual deverá ser a largura do aro?

ANÁLISE **16-24** Uma prensa de material bruto de marcha única apresenta um curso de 8 in e uma capacidade nominal de 35 toneladas. Um socador movido por came é considerado capaz de entregar a carga completa de prensa, a uma força constante, durante os últimos 15% de um curso de velocidade constante. O eixo excêntrico tem uma velocidade média de 90 rpm e é engrenado no eixo do volante a uma razão de 6:1. O trabalho total executado deve incluir uma margem de 16% para fricção.

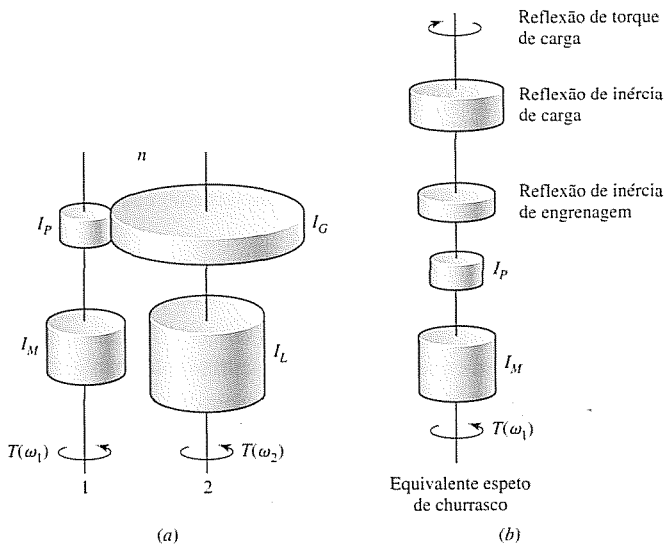
(*a*) Estime a flutuação máxima de energia.

(*b*) Encontre o peso do aro para um diâmetro efetivo de 48 in e um coeficiente de flutuação de velocidade de 0,10.

ANÁLISE **16-25** Utilizando os dados da Tabela 16-6, encontre o torque médio de saída e a inércia de volante requerida para um motor de três cilindros em linha correspondente a uma velocidade nominal de 2400 rpm. Use $C_s = 0{,}30$.

ANÁLISE **16-26** Quando uma inércia de armadura de motor, uma inércia de pinhão e um torque de motor residem em um eixo de motor e quando uma inércia de engrenagem, uma inércia de carga e um torque de carga existem em um segundo eixo, é útil refletir todos os torques e inércias a um eixo – digamos, o eixo de armadura. Necessitamos de algumas regras para tornar fácil essa reflexão. Considere o pinhão e a engrenagem como discos de raio primitivo.

- Um torque em um segundo eixo é refletido ao eixo motor como o torque de carga dividido pelo negativo da razão de redução.
- Uma inércia em um segundo eixo é refletida para o eixo motor como sua inércia dividida pela razão de redução quadrada.



Problema 16-26
Dimensões em milímetros.

- A inércia de um disco de engrenagem. A inércia de um disco de engrenagem em um segundo eixo com um disco de pinhão no eixo motor é refletida ao eixo de pinhão com a inércia do pinhão multiplicada pela razão de redução quadrada.

(*a*) Verifique as três regras.

(*b*) Empregando as regras, reduza o sistema de dois eixos na figura a um equivalente espeto de churrasco do eixo motor. Se corretamente feito, as respostas dinâmicas do espeto de churrasco e do sistema real serão idênticas.

(*c*) Para uma razão de redução de $n = 10$, compare as inércias do espeto de churrasco.

ANÁLISE **16-27** Aplique as regras do Problema 16-26 ao sistema de três eixos mostrado na figura, de modo a criar um espeto de churrasco do eixo motor.

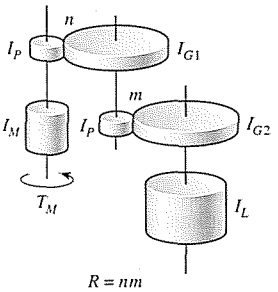
(*a*) Mostre que a inércia equivalente I_e é fornecida por

$$I_e = I_M + I_P + n^2 I_P + \frac{I_P}{n^2} + \frac{m^2 I_P}{n^2} + \frac{I_L}{m^2 n^2}$$

(*b*) Se a redução global de engrenamento R for uma constante nm, mostre que a inércia equivalente torna-se

$$I_e = I_M + I_P + n^2 I_P + \frac{I_P}{n^2} + \frac{R^2 I_P}{n^4} + \frac{I_L}{R^2}$$

(*c*) Se o problema for minimizar a inércia do trem de engrenagem, encontre as razões n e m para os valores de $I_P = 1$, $I_m = 10$, $I_L = 100$ e $R = 10$.



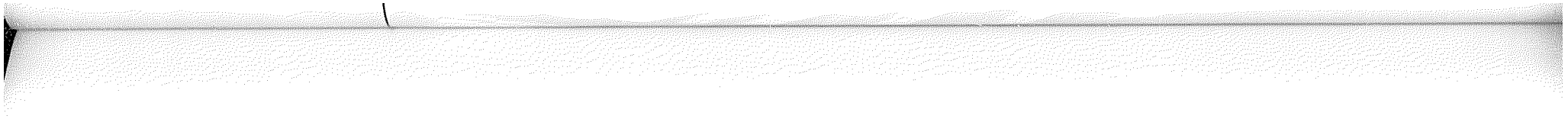
Problema 16-27

PROJETO **16-28** Para as condições do Problema 16-27, faça um gráfico da inércia equivalente I_e como ordenada e a razão de redução n como abscissa no intervalo $1 \leq n \leq 10$. Como a inércia mínima se compara à de passo único?

PROJETO **16-29** Uma prensa de punção engrenada 10:1 deve executar seis golpes por minuto, sob circunstâncias em que o torque no eixo de manivela é de 1300 lbf · ft para $\frac{1}{2}$ s. A placa do motor mostra 3 bhp a 1125 rpm, para serviço contínuo. Projete um volante satisfatório para uso no eixo do motor, a ponto de especificar o material e os diâmetros interno e externo de aro, bem como sua largura. À medida que você preparar suas especificações, observe ω_{max}, ω_{min}, o coeficiente de flutuação de velocidade C_s, a transferência de energia e a potência de pico que o volante transmite à prensa de punção. Observe, também, a potência e as condições de choque impostas no trem de engrenagem em razão de o volante estar no eixo do motor.

PROJETO **16-30** A prensa de punção do Problema 16-29 necessita de um volante para serviço em um eixo de manivela da prensa de punção. Projete um volante satisfatório, a ponto de especificar o material, os diâmetros interno e externo de aro e a largura. Observe ω_{max}, ω_{min}, C_s, a transferência de energia e a potência de pico que o volante transmite à punção. Qual a potência de pico vista no trem de engrenagem? Que potência e condições de choque deve o trem de engrenagem transmitir?

PROJETO **16-31** Compare os projetos resultantes das tarefas assinaladas nos Problemas 16-29 e 16-30. O que você aprendeu? Que recomendações tem a dar?



CAPÍTULO

17 Elementos Mecânicos Flexíveis

17-1 Correias 816
17-2 Transmissões de Correias Planas e Redondas 819
17-3 Correias em V 824
17-4 Correias de Tempo 841
17-5 Corrente de Rolos 842
17-6 Corda de Fio 849
17-7 Eixos Flexíveis 856

Correias, cordas, correntes e outros elementos similares, elásticos ou flexíveis, de máquina são usados em sistemas de transporte e na transmissão de potência por comparativamente longas distâncias. Com freqüência, esses elementos podem ser utilizados para substituir engrenagens, eixos, mancais e outros dispositivos relativamente rígidos de transmissão de potência. Em muitos casos, seu uso simplifica o projeto de uma máquina e substancialmente reduz o custo.

Além disso, visto que tais elementos são elásticos e normalmente muito longos, eles ocupam uma posição importante no que diz respeito a absorver cargas de choque e a amortecer e isolar os efeitos de vibração. Essa é uma vantagem importante para a vida da máquina.

A maioria dos elementos flexíveis não dispõe de uma vida infinita. Ao serem utilizados, é importante estabelecer um programa de inspeção, a fim de protegê-los contra desgaste, envelhecimento e perda de elasticidade. Tais elementos devem ser trocados ao primeiro sinal de deterioração.

17-1 Correias

Os quatro principais tipos de correias são mostrados, com algumas de suas características, na Tabela 17-1. *Polias coroadas* são usadas para correias planas, e *polias ranhuradas* ou *acanaladas*, para correias redondas e em V. Correias de tempo requerem *rodas dentadas*, ou *catracas*. Em todos os casos, os eixos devem ser separados por uma certa distância mínima, dependendo do tipo de correia e do tamanho, para operar apropriadamente. Outras características das correias são as seguintes:

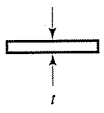
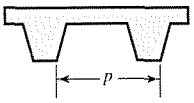
- Podem ser usadas para longas distâncias de centro.
- Exceto para as correias de tempo, existe algum deslize e deformação lenta; assim, a razão de velocidade angular entre os eixos motores e movidos não é constante nem exatamente igual à razão dos diâmetros de polias.
- Em alguns casos, uma polia intermediária ou de tensão pode ser usada para evitar ajustes na distância de centro que são ordinariamente necessários pelo envelhecimento ou pela instalação de correias novas.

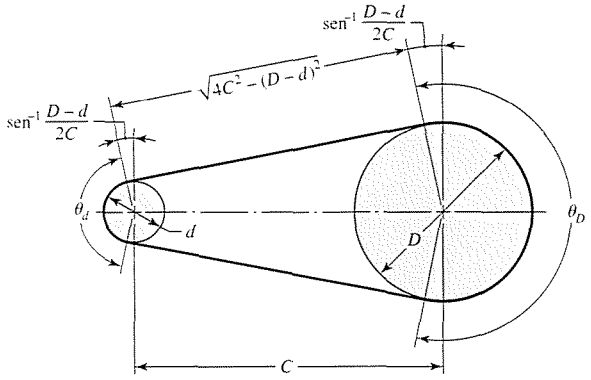
A Figura 17-1 ilustra a geometria de transmissões de correias planas abertas e fechadas. Para uma correia plana com essa transmissão, a tração na correia é tal que uma barriga ou caimento é visível na Figura 17-2(*a*), quando a correia está funcionando. Embora o topo seja o lado bambo, preferido para este tipo de correia, para outros tipos de correia tanto o lado superior como o inferior podem ser usados, uma vez que sua tração de instalação é geralmente maior.

Dois tipos de transmissão inversa são mostrados na Figura 17-2. Observe que ambos os lados da correia contatam as polias nas Figuras 17-2(*b*) e 17-2(*c*); dessa forma, tais transmissões não podem ser usadas com correias em V ou com correias de tempo.

A Figura 17-3 mostra uma transmissão de correia plana com polias fora do plano. Os eixos não necessitam estar em ângulos retos como neste caso. Observe a vista de topo da transmissão nessa figura. As po-

Tabela 17-1 Características de alguns tipos comuns de correia

Tipo de correia	Figura	Junta	Intervalo de tamanho	Distância de centro
Plana		Sim	$t = \begin{cases} 0{,}03 \text{ a } 0{,}20 \text{ in} \\ 0{,}75 \text{ a } 5 \text{ mm} \end{cases}$	Nenhum limite superior
Redonda		Sim	$d = \frac{1}{8}$ a $\frac{3}{4}$ in	Nenhum limite superior
V		Nenhuma	$b = \begin{cases} 0{,}31 \text{ a } 0{,}91 \text{ in} \\ 8 \text{ a } 19 \text{ mm} \end{cases}$	Limitada
De tempo		Nenhuma	$p = 2$ mm e acima	Limitada

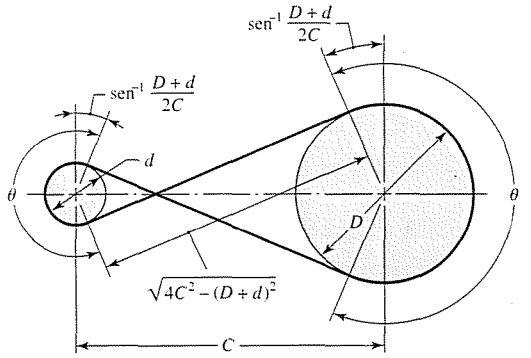


(a)

$$\theta_d = \pi - 2\,\text{sen}^{-1}\frac{D-d}{2C}$$

$$\theta_D = \pi + 2\,\text{sen}^{-1}\frac{D-d}{2C}$$

$$L = \sqrt{4C^2-(D-d)^2} + \tfrac{1}{2}(D\,\theta_D + d\,\theta_d)$$

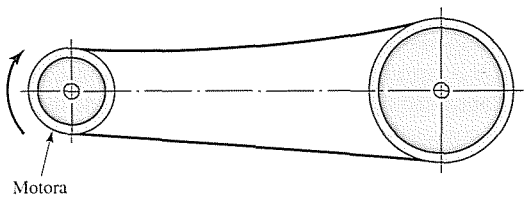


(b)

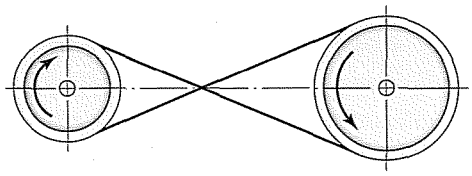
$$\theta = \pi + 2\,\text{sen}^{-1}\frac{D+d}{2C}$$

$$L = \sqrt{4C^2-(D+d)^2} + \tfrac{1}{2}(D+d)\,\theta$$

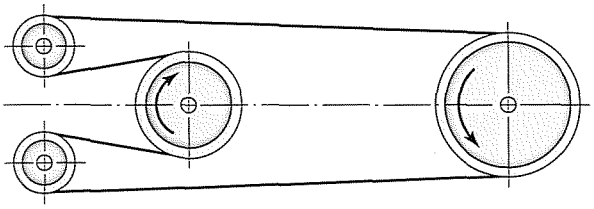
Figura 17-1 Geometria de correia plana. (*a*) Correia aberta. (*b*) Correia cruzada.



(a)



(b)



(c)

Figura 17-2 Transmissões reversível e não-reversível de correias. (*a*) Correia aberta não-reversível. (*b*) Correia cruzada reversível. As correias cruzadas devem ser separadas para prevenir roçamento, se materiais de alta fricção forem usados. (*c*) Transmissão de correia aberta reversível.

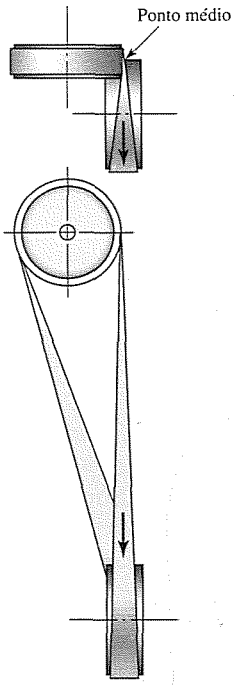


Figura 17-3 Transmissão de correia de torção de quatro partes; uma polia de guia intermediária deve ser usada se o movimento for em ambas as direções.

lias devem ser posicionadas de modo que a correia deixe cada uma no plano médio da outra face de polia. Outros arranjos podem requerer polias de guia para alcançar tal condição.

Uma outra vantagem das correias planas é mostrada na Figura 17-4, na qual a ação de embrear é obtida ao se mudar a correia de uma polia folgada para uma apertada ou movida.

A Figura 17-5 apresenta duas transmissões de velocidade variável. A transmissão na Figura 17-5(*a*) é comumente utilizada apenas para correias planas. Já a transmissão na Figura 17-5(*b*) pode também ser usada para correias em V e correias redondas mediante a utilização de polias sulcadas.

As correias planas são feitas de uretano e também de tecido impregnado de borracha reforçado com cabo de aço, ou com cordas de náilon, para absorver a carga de tensão. Uma ou ambas as superfícies podem ter um revestimento de fricção de superfície. Essas correias são silenciosas, eficientes a altas velocidades e

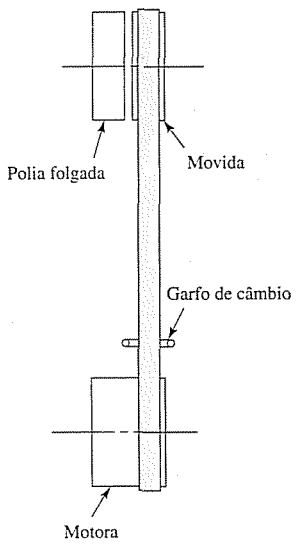


Figura 17-4 Essa transmissão elimina a necessidade de uma embreagem. A correia plana pode ser mudada, para a esquerda ou para a direita, pelo uso de um garfo.

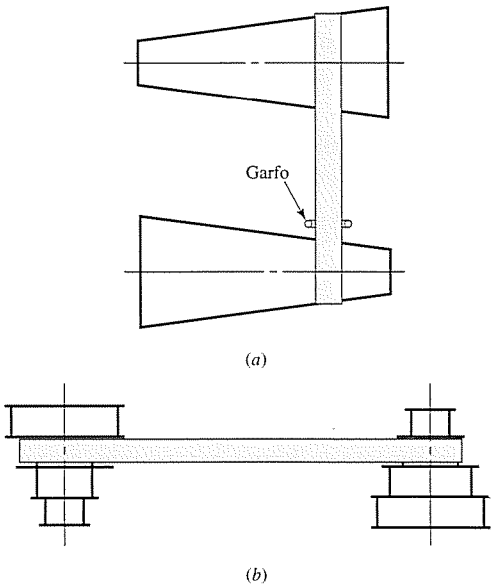


Figura 17-5 Transmissões de correia de velocidade variável.

podem transmitir grandes quantidades de potência por longas distâncias de centro. Normalmente, a correia plana é adquirida por rolo e cortada, sendo as extremidades unidas mediante a utilização de apetrechos fornecidos pelo fabricante. Duas ou mais correias planas funcionando lado a lado, em vez de uma única correia larga, são freqüentemente usadas para formar um sistema de transporte.

Uma correia em V é feita de tecido e corda – geralmente de algodão, raiom ou náilon – e impregnada de borracha. Em contraste com as correias planas, as correias em V são usadas com *polias ranhuradas* similares e a distâncias mais curtas de centro. Além disso, são um pouco menos eficientes que as correias planas, mas algumas delas podem ser utilizadas em uma única *polia*, realizando, assim, uma transmissão múltipla. As correias em V são produzidas somente em certos comprimentos e não têm juntas.

As correias de tempo são feitas de tecido emborrachado e cabo de aço e têm dentes que se encaixam nos sulcos cortados na periferia da roda dentada. A correia de tempo não estica nem desliza e, conseqüentemente, transmite potência a uma razão de velocidade angular constante. O fato de ser dentada fornece várias vantagens sobre as correias ordinárias. Uma delas é que nenhuma tensão inicial é necessária, de modo que transmissões de centros fixos podem ser usadas. Uma outra vantagem é a eliminação da restrição nas velocidades; os dentes permitem funcionarem a praticamente qualquer velocidade. As desvantagens estão no primeiro custo da correia, na necessidade de sulcar a roda dentada e nas presentes flutuações dinâmicas causadas nas freqüências de engrenamento dos dentes de correia.

17-2 Transmissões de Correias Planas e Redondas

As transmissões modernas de correias planas consistem em um forte núcleo elástico rodeado por um elastômero e apresentam distintas vantagens sobre as transmissões de engrenagem ou de correia em V. Uma transmissão de correia plana conta com uma eficiência de cerca de 98%, valor que corresponde aproximadamente ao de uma transmissão de engrenagem. Por outro lado, a eficiência de uma transmissão de correia V varia de cerca de 70 a 96%.[1] As transmissões de correia plana produzem pouco barulho e absorvem mais vibração torcional do sistema que qualquer das duas transmissões de correia em V ou de engrenagens.

Quando uma transmissão de correia aberta (Figura 17-1(*a*)) é usada, supõe-se que os ângulos de contato devam ser

$$\theta_d = \pi - 2\,\text{sen}^{-1}\frac{D-d}{2C}$$
$$\theta_D = \pi + 2\,\text{sen}^{-1}\frac{D-d}{2C} \tag{17-1}$$

[1] A. W. Wallin, "Efficiency of Synchronous Bels and V-Belts," *Proc. Nat. Conf. Power Transmission*, vol. 5, Illinois Institute of Technology, Chicago, Nov. 7-9, 1978, p. 265-271.

em que D = diâmetro da polia grande
d = diâmetro da polia pequena
C = distância de centros
θ = ângulo de contato

O comprimento da correia é encontrado somando-se os comprimentos dos dois arcos com duas vezes a distância entre o começo e o fim do contato. O resultado é

$$L = [4C^2 - (D-d)^2]^{1/2} + \frac{1}{2}(D\theta_D + d\theta_d) \tag{17-2}$$

Um conjunto similar de equações pode ser derivado para as correias cruzadas da Figura 17-2(*b*). Para estas, o ângulo de envolvimento é o mesmo para ambas as polias, sendo

$$\theta = \pi + 2\,\text{sen}^{-1}\frac{D+d}{2C} \tag{17-3}$$

Presume-se que o comprimento de correia para correias cruzadas deva ser

$$L = [4C^2 - (D+d)^2]^{1/2} + \frac{1}{2}(D+d)\theta \tag{17-4}$$

Firbank[2] explica a teoria de transmissão de correia plana da seguinte maneira. Uma mudança na tensão da correia, devida a forças de fricção entre ela e a polia, fará com que ela se elongue ou se contraia, movendo-se relativamente à superfície da polia. Esse movimento é causado por *deformação elástica lenta* e está associado à fricção de deslizamento, em oposição à fricção estática. A ação na polia motora, por meio daquela porção do ângulo de contato que está realmente transmitindo potência, é tal que a correia move-se mais vagarosamente que a velocidade da superfície da polia, devido à deformação elástica lenta. O ângulo de contato é constituído do *arco efetivo,* por meio do qual a potência é transmitida, e do *arco intermediário.* Para a polia motora, a correia primeiro contata a polia com uma *tensão do lado apertado* F_1 e uma velocidade V_1, que é igual à velocidade de superfície dessa polia. A correia então passa pelo arco intermediário sem qualquer mudança em F_1 ou V_1. Então, a deformação lenta ou o contato de deslizamento iniciam, e a tensão de correia muda de acordo com as forças de fricção. Na extremidade do arco efetivo, a correia deixa a polia com uma *tensão no lado folgado* F_2 e uma velocidade reduzida V_2.

Firbank utilizou essa teoria para expressar o mecanismo de transmissões de correia plana em forma matemática e verificou os resultados a partir de experimentos. Suas observações incluem a descoberta de que substancialmente mais potência é transmitida por fricção estática do que por fricção de deslizamento. Ele também descobriu que o coeficiente de fricção para uma correia com um núcleo de náilon e superfície de couro era tipicamente de 0,7, mas que poderia ser elevado a 0,9 empregando-se acabamentos especiais de superfície.

Nosso modelo assumirá que a força de fricção na correia é proporcional à força normal através do arco de contato. Buscamos primeiro um relacionamento entre a tensão do lado apertado e a tensão do lado com folga, similar àquele dos freios de banda, mas incorporando as conseqüências do movimento, ou seja, tensão centrífuga na correia. Na Figura 17-6, vemos um corpo livre de um pequeno segmento de correia. A força diferencial dS deve-se à força centrífuga, dN é a força normal entre a correia e a polia, e $f\,dN$ é a força de cisalhamento decorrente da fricção no ponto de deslize. A largura da correia é b e a espessura, t. A massa da correia m é expressa por unidade de comprimento. A força centrífuga dS, por sua vez, pode ser expressa como

$$dS = (mr\,d\theta)r\omega^2 = mr^2\omega^2\,d\theta = mV^2\,d\theta = F_c\,d\theta \tag{a}$$

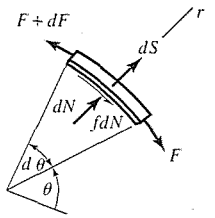


Figura 17-6 Corpo livre de um elemento infinitesimal de uma correia plana em contato com uma polia.

[2] T. C. Firbank, *Mechanics of the Flat Belt Drive*, ASME paper nº. 72-PTG-21.

em que V é a velocidade da correia. Somando as forças radialmente, obtemos

$$\sum F_r = -(F + dF)\frac{d\theta}{2} - F\frac{d\theta}{2} + dN + dS = 0$$

Ignorando o termo de ordem mais elevada, temos:

$$dN = F\,d\theta - dS \tag{b}$$

Somando as forças tangencialmente, obtemos

$$\sum F_t = -f\,dN - F + (F + dF) = 0$$

a partir do que, incorporando as Equações (*a*) e (*b*), obtemos

$$dF = f\,dN = fF\,d\theta - f\,dS = fF\,d\theta - fmr^2\omega^2\,d\theta$$

ou

$$\frac{dF}{d\theta} - fF = -fmr^2\omega^2 \tag{c}$$

A solução para essa equação diferencial linear de primeira ordem não-homogênea é

$$F = A\exp(f\theta) + mr^2\omega^2 \tag{d}$$

em que A é uma constante arbitrária. Assumindo que θ comece no lado bambo, a condição de contorno que F em $\theta = 0$ iguala F_2 produz $A = F_2 - mr^2\omega^2$. A solução é

$$F = (F_2 - mr^2\omega^2)\exp(f\theta) + mr^2\omega^2 \tag{17-5}$$

Na extremidade do ângulo de envolvimento ϕ, o lado apertado,

$$F|_{\theta=\phi} = F_1 = (F_2 - mr^2\omega^2)\exp(f\phi) + mr^2\omega^2 \tag{17-6}$$

Agora, podemos escrever

$$\frac{F_1 - mr^2\omega^2}{F_2 - mr^2\omega^2} = \frac{F_1 - F_c}{F_2 - F_c} = \exp(f\phi) \tag{17-7}$$

onde, a partir da Equação (*a*), $F_c = mr^2\omega^2$. É também útil que a Equação (17-7) possa ser escrita como

$$F_1 - F_2 = (F_1 - F_c)\frac{\exp(f\phi) - 1}{\exp(f\phi)} \tag{17-8}$$

Agora F_c é encontrada como segue: com n sendo a velocidade de rotação, em rev/min, da polia de diâmetro d, a velcidade da correia é

$$V = \pi\,dn/12 \qquad \text{ft/min}$$

O peso w de um pé de correia é dado, em termos da densidade de peso γ em lbf/in^3, como $w = 12\gamma bt$ lbf/ft, em que b e t estão em polegadas. F_c é escrito como

$$F_c = \frac{w}{g}\left(\frac{V}{60}\right)^2 = \frac{w}{32{,}17}\left(\frac{V}{60}\right)^2 \tag{e}$$

A Figura 17-7 mostra um corpo livre de uma polia e parte da correia. A tensão do lado apertado, F_1, e a tensão do lado folgado, F_2, têm as seguintes componentes aditivas:

$$F_1 = F_i + F_c + \Delta F' = F_i + F_c + T/D \tag{f}$$

$$F_2 = F_i + F_c - \Delta F' = F_i + F_c - T/D \tag{g}$$

em que F_i = tensão inicial
F_c = tensão circunferencial decorrente da força centrífuga
$\Delta F'$ = tensão decorrente do torque transmitido T
D = diâmetro da polia

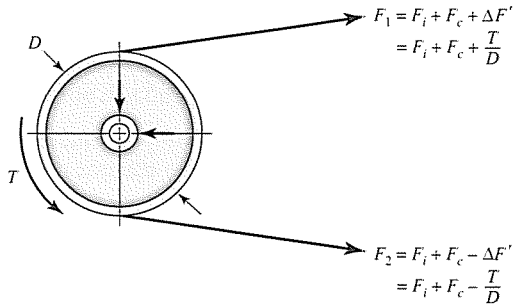


Figura 17-7 Forças e torques em uma polia.

A diferença entre F_1 e F_2 está relacionada ao torque de polia. Subtraindo a Equação (g) da Equação (f), obtemos

$$F_1 - F_2 = \frac{2T}{D} = \frac{T}{D/2} \tag{h}$$

Adicionando as Equações (f) e (g), obtemos

$$F_1 + F_2 = 2F_i + 2F_c$$

A partir do que

$$F_i = \frac{F_1 + F_2}{2} - F_c \tag{i}$$

Dividindo a Equação (i) pela Equação (h), obtemos, após manipulação considerável,

$$\frac{F_i}{T/D} = \frac{(F_1 + F_2)/2 - F_c}{(F_1 - F_2)/2} = \frac{F_1 + F_2 - 2F_c}{F_1 - F_2} = \frac{(F_1 - F_c) + (F_2 - F_c)}{(F_1 - F_c) - (F_2 - F_c)}$$

$$= \frac{(F_1 - F_c)/(F_2 - F_c) + 1}{(F_1 - F_c)/(F_2 - F_c) - 1} = \frac{\exp(f\phi) + 1}{\exp(f\phi) - 1}$$

a partir do que

$$F_i = \frac{T}{D}\frac{\exp(f\phi) + 1}{\exp(f\phi) - 1} \tag{17-9}$$

A Equação (17-9) oferece um discernimento fundamental no que se refere a correias planas. Se F_i iguala-se a zero, então T também se iguala a zero: não há tensão inicial, nenhum torque é transmitido. Este é proporcional àquela. Isso significa que, se tiver de existir uma transmissão satisfatória de correia plana, a tensão inicial deve ser (1) provida, (2) sustentada, (3) na quantidade apropriada e (4) mantida por inspeção rotineira.

A partir da Equação (f), incorporando a Equação (17-9), obtemos

$$F_1 = F_i + F_c + \frac{T}{D} = F_c + F_i + F_i\frac{\exp(f\phi) - 1}{\exp(f\phi) + 1}$$

$$= F_c + \frac{F_i[\exp(f\phi) + 1] + F_i[\exp(f\phi) - 1]}{\exp(f\phi) + 1}$$

$$F_1 = F_c + F_i\frac{2\exp(f\phi)}{\exp(f\phi) + 1} \tag{17-10}$$

A partir da Equação (g), incorporando a Equação (17-9), obtemos

$$F_2 = F_i + F_c - \frac{T}{D} = F_c + F_i - F_i\frac{\exp(f\phi) - 1}{\exp(f\phi) + 1}$$

$$= F_c + \frac{F_i[\exp(f\phi) + 1] - F_i[\exp(f\phi) - 1]}{\exp(f\phi) + 1}$$

$$F_2 = F_c + F_i \frac{2}{\exp(f\phi) + 1} \tag{17-11}$$

A Equação (17-7) é chamada de equação de correia, mas as Equações (17-9) a (17-11) revelam como as correias funcionam. Traçamos as Equações (17-10) e (17-11), como mostrado na Figura 17-8, contra F_i como abscissa. A tensão inicial necessita ser suficiente para que a diferença entre a curva de F_1 e F_2 seja $2T/D$. Com nenhum torque transmitido, a tensão de correia mínima possível é $F_1 = F_2 = F_c$.

A potência transmitida é dada por

$$H = \frac{(F_1 - F_2)V}{33\,000} \tag{j}$$

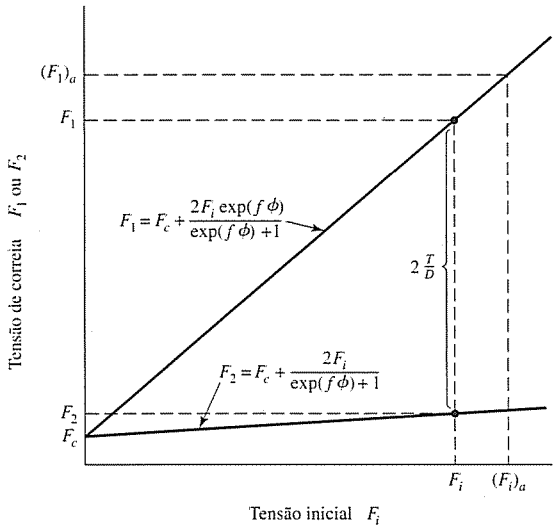


Figura 17-8 Gráfico da tensão inicial F_i contra a tensão de correia F_1 ou F_2, mostrando a intersecção F_c, as equações dos locais geométricos e o ponto onde $2T/D$ deve ser encontrada.

Os fabricantes provêem especificações para suas correias que incluem a tensão admissível F_a (ou tensão σ_{all}), sendo esta expressa em unidades de força por unidade de largura. A vida de uma correia é em geral de vários anos. A intensidade da flexão na polia e seu efeito sobre a vida estão refletidos em um fator de correção de polia C_p. Velocidades em excesso de 600 ft/min e seus efeitos sobre a vida estão refletidos em um fator de correção de velocidade C_v. Para correias de poliamida e uretano, use $C_v = 1$. Para correias de couro, veja a Figura 17-9. Um fator de serviço K_s é utilizado para desvios de carga a partir da nominal, aplicado para a potência nominal como $H_d = H_{nom} K_s n_d$, em que n_d é o fator de projeto por exigências. Esses efeitos são incorporados como segue:

$$(F_1)_a = bF_aC_pC_v \tag{17-12}$$

em que $(F_1)_a$ = máxima tensão admissível, lbf
b = largura de correia, in
F_a = tensão permitida pelo fabricante, lbf/in
C_p = fator de correção de polia (Tabela 17-4)
C_v = fator de correção de velocidade

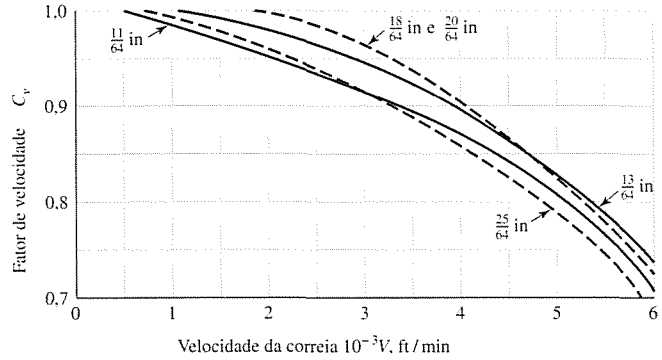


Figura 17-9 Fator de correção de velocidade C_v para correias de couro. *(Fonte de dados: Machinery's Handbook, 20th ed., Industrial Press, New York, 1976, p. 1047.)*

Ao se analisar uma transmissão de correia plana, os seguintes passos podem ser tomados:

1. Encontrar $\exp(f\phi)$ a partir da geometria da transmissão de correia e fricção
2. A partir da geometria da correia e da velocidade, encontrar F_c
3. A partir de $T = 63\,025H_{\text{nom}}K_s n_d/n$, encontrar o torque necessário
4. A partir do torque T, encontrar o necessário $(F_1)_a - F_2 = 2T/D$
5. Encontrar F_2 a partir de $(F_1)_a - [(F_1)_a - F_2]$
6. A partir da Equação (i), encontrar a tensão inicial necessária F_i
7. Verificar a evolução da fricção, $f' < f$. Utilizar a Equação (17-7) solucionada para f':

$$f' = \frac{1}{\phi} \ln \frac{(F_1)_a - F_c}{F_2 - F_c}$$

8. Encontrar o fator de segurança a partir de $n_{fs} = H_a/(H_{\text{nom}}K_s)$

É lamentável que muitos dos dados disponíveis sobre correias procedam de fontes em que são apresentados de uma maneira muito simplista. Essas fontes empregam diversos tipos de diagramas, monografias e tabelas para facilitar seu acesso. Pouca, se alguma, computação é necessária para que mesmo leigos possam obter resultados válidos. Visto que um entendimento apenas básico do processo, em muitos casos, é deficiente, não há maneira pela qual um leigo possa variar os passos no processo, de modo a obter um projeto melhor.

Incorporar os dados disponíveis de transmissão de correia de modo a fornecer um bom entendimento do mecanismo de correia envolve certos ajustes necessários. Por tal razão, os resultados da análise aqui apresentados não corresponderão exatamente àqueles das fontes das quais foram obtidos.

Determinados materiais de correia, com algumas de suas propriedades, estão listados na Tabela 17-2. Esses materiais são suficientes para solucionar diversos projetos e problemas de análise. A Equação de projeto a ser utilizada é a (j).

Os valores fornecidos na Tabela 17-2 para a tensão admissível de correia estão baseados em uma velocidade de correia de 600 ft/min. Para velocidades mais elevadas, use a Figura 17-9 de modo a obter valores de C_v para correias de couro. Para correias de poliamida e uretano, use $C_v = 1{,}0$.

Os fatores de serviço K_s para transmissões de correia em V, fornecidos na Tabela 17-15 da Seção 17-3, são também recomendados aqui para transmissões de correia plana e redonda.

Tamanhos mínimos de polia para várias correias estão listados nas Tabelas 17-2 e 17-3. O fator de correção de polia considera a quantidade de flexão ou flexionamento da correia e como isso afeta sua vida. Por tal razão, é dependente do tamanho e do material da correia utilizada. Veja a Tabela 17-4. Use $C_p = 1{,}0$ para correias de uretano.

As polias de correia plana devem ser coroadas para evitar que as correias escapem. Se somente uma polia for coroada, esta deverá ser a maior. Ambas as polias devem ser coroadas sempre que seus eixos não estiverem em uma posição horizontal. Utilize a Tabela 17-5 para a altura de coroa.

Tabela 17-2 Propriedades de alguns materiais de correia plana e redonda. (Diâmetro = d, espessura = t, largura = w)

Material	Especificação	Tamanho, in	Diâmetro mínimo de polia, in	Tensão admissível por unidade de largura a 600 ft/min, lbf/in	Peso específico, lbf/in³	Coeficiente de fricção
Couro	1 camada	$t = \frac{11}{64}$	3	30	0,035-0,045	0,4
		$t = \frac{13}{64}$	$3\frac{1}{2}$	33	0,035-0,045	0,4
	2 camadas	$t = \frac{18}{64}$	$4\frac{1}{2}$	41	0,035-0,045	0,4
		$t = \frac{20}{64}$	6[a]	50	0,035-0,045	0,4
		$t = \frac{23}{64}$	9[a]	60	0,035-0,045	0,4
Poliamida[b]	F–0[c]	$t = 0,03$	0,60	10	0,035	0,5
	F–1[c]	$t = 0,05$	1,0	35	0,035	0,5
	F–2[c]	$t = 0,07$	2,4	60	0,051	0,5
	A–2[c]	$t = 0,11$	2,4	60	0,037	0,8
	A–3[c]	$t = 0,13$	4,3	100	0,042	0,8
	A–4[c]	$t = 0,20$	9,5	175	0,039	0,8
	A–5[c]	$t = 0,25$	13,5	275	0,039	0,8
Uretano[d]	$w = 0,50$	$t = 0,062$	Veja a	5,2[e]	0,038-0,045	0,7
	$w = 0,75$	$t = 0,078$	Tabela	9,8[e]	0,038-0,045	0,7
	$w = 1,25$	$t = 0,090$	17-3	18,9[e]	0,038-0,045	0,7
	Redonda	$d = \frac{1}{4}$	Veja a	8,3[e]	0,038-0,045	0,7
		$d = \frac{3}{8}$	Tabela	18,6[e]	0,038-0,045	0,7
		$d = \frac{1}{2}$	17-3	33,0[e]	0,038-0,045	0,7
		$d = \frac{3}{4}$		74,3[e]	0,038-0,045	0,7

[a] Adicionar 2 in a tamanhos de polia para correias de largura de 8 in ou mais.
[b] *Fonte*: *Habasit Engineering Manual*, Habasit Belting, Inc., Chamblee (Atlanta), Ga.
[c] Cobertura de fricção de borracha acrilonitrila-butadieno em ambos os lados.
[d] *Fonte*: Eagle Belting Co. Des Plaines, Ill.
[e] A 6% de elongação; 12% é o valor máximo admissível.

Tabela 17-3 Tamanhos mínimos de polia para correias de uretano plana e redonda. (Os diâmetros de polia em polegadas estão listados)

Estilo de correia	Tamanho de correia, in	Razão da velocidade de polia pelo comprimento de correia rev/(ft • min)		
		Até 250	250 a 499	500 a 1000
Plana	0,50 x 0,062	0,38	0,44	0,50
	0,75 x 0,078	0,50	0,63	0,75
	1,25 x 0,090	0,50	0,63	0,75
Redonda	$\frac{1}{4}$	1,50	1,75	2,00
	$\frac{3}{8}$	2,25	2,62	3,00
	$\frac{1}{2}$	3,00	3,50	4,00
	$\frac{3}{4}$	5,00	6,00	7,00

Fonte: Eagle Belting Co., Des Plaines, Ill.

Tabela 17-4 Fator de correção de polia C_p para correias planas*

Material	Diâmetro menor de polia, in					
	1,6 a 4	4,5 a 8	9 a 12,5	14, 16	18 a 31,5	Acima de 31,5
Couro	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Poliamida, F-0	0,95	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
F-1	0,70	0,92	0,95	1,0	1,0	1,0
F-2	0,73	0,86	0,96	1,0	1,0	1,0
A-2	0,73	0,86	0,96	1,0	1,0	1,0
A-3	—	0,70	0,87	0,94	0,96	1,0
A-4	—	—	0,71	0,80	0,85	0,92
A-5	—	—	—	0,72	0,77	0,91

* Os valores médios de C_p para os intervalos dados foram aproximados de curvas no *Habasit Engineering Manual,* Habasit Belting, Inc., Chamblee (Atlanta), Ga.

Tabela 17-5 Altura de coroa e diâmetros ISO de polia para correias planas*

Diâmetro ISO de polia, in	Altura de coroa, in	Diâmetro ISO de polia, in	Altura de coroa	
			$w \leq 10$ in	$w > 10$ in
1,6, 2, 2,5	0,012	12,5, 14	0,03	0,03
2,8, 3,15	0,012	12,5, 14	0,04	0,04
3,55, 4, 4,5	0,012	22,4, 25, 28	0,05	0,05
5, 5,6	0,016	31,5, 35,5	0,05	0,06
6,3, 7,1	0,020	40	0,05	0,06
8, 9	0,024	45, 50, 56	0,06	0,08
10, 11,2	0,030	63, 71, 80	0,07	0,10

* A coroa deve ser arredondada, e não pontiaguda; a rugosidade é R_a = AA 63 μin.

EXEMPLO 17-1

Uma correia plana de poliamida A-3, com largura de 6 in, é usada para transmitir 15 hp sob condições de choque leve, em que $K_s = 1{,}25$, e um fator de segurança igual a ou maior que 1,1 é apropriado. Os eixos de rotação da polia são paralelos e estão no plano horizontal. Eles estão 8 ft à parte. A polia motora de 6 in gira a 1750 rpm, de uma maneira tal que o lado folgado está em cima. A polia movida tem diâmetro de 18 in. Veja a Figura 17-10. O fator de segurança destina-se a exigências não-qualificáveis.

(*a*) Estime a tensão centrífuga F_c e o torque T.

(*b*) Estime as F_1, F_2 e F_i admissíveis, bem como a potência admissível H_a.

(*c*) Estime o fator de segurança. Ele é satisfatório?

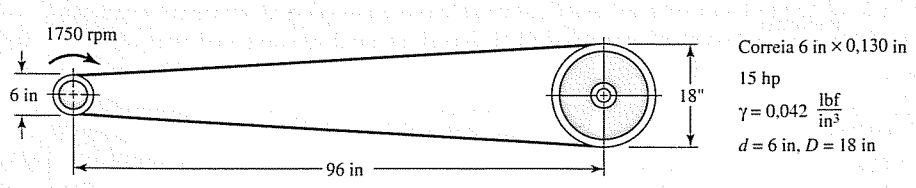


Figura 17-10 Transmissão de correia plana do Exemplo 17-1.

Solução (*a*) Equação (17-1):

$$\phi = \theta_d = \pi - 2\,\text{sen}^{-1}\left[\frac{18-6}{2(8)12}\right] = 3{,}0165 \text{ rad}$$

$$\exp(f\phi) = \exp[0{,}8(3{,}0165)] = 11{,}17$$

$$V = \pi(6)1750/12 = 2749 \text{ ft/min}$$

Tabela 17–2:

$$w = 12\gamma bt = 12(0{,}042)6(0{,}130) = 0{,}393 \text{ lbf/ft}$$

Resposta Equação (*e*):

$$F_c = \frac{w}{g}\left(\frac{V}{60}\right)^2 = \frac{0{,}393}{32{,}17}\left(\frac{2749}{60}\right)^2 = 25{,}6 \text{ lbf}$$

$$T = \frac{63\,025 H_{\text{nom}} K_s n_d}{n} = \frac{63\,025(15)1{,}25(1{,}1)}{1750}$$

Resposta

$$= 742{,}8 \text{ lbf} \cdot \text{in}$$

(*b*) A necessária $(F_1)_a - F_2$ para transmitir o torque T, a partir da Equação (*h*), é

$$(F_1)_a - F_2 = \frac{2T}{d} = \frac{2(742{,}8)}{6} = 247{,}6 \text{ lbf}$$

Da Tabela 17-2, $F_a = 100$ lbf. Para correias de poliamida $C_v = 1$ e a partir da Tabela 17-4 $C_p = 0{,}70$. A partir da Equação (17-12) a máxima tração admissível na correia $(F_1)_a$ é

Resposta

$$(F_1)_a = bF_aC_pC_v = 6(100)0{,}70(1) = 420 \text{ lbf}$$

então

Resposta

$$F_2 = (F_1)_a - [(F_1)_a - F_2] = 420 - 247{,}6 = 172{,}4 \text{ lbf}$$

e, a partir da Equação (*i*),

$$F_i = \frac{(F_1)_a + F_2}{2} - F_c = \frac{420 + 172{,}4}{2} - 25{,}6 = 270{,}6 \text{ lbf}$$

Resposta A combinação de $(F_1)_a$, F_2 e F_i transmitirá a potência de projeto de $15(1{,}25)(1{,}1) = 20{,}6$ hp e protegerá a correia. Verificamos o desenvolvimento da fricção solucionando a Equação (17-7) para f':

$$f' = \frac{1}{\phi}\ln\frac{(F_1)_a - F_c}{F_2 - F_c} = \frac{1}{3{,}0165}\ln\frac{420 - 25{,}6}{172{,}4 - 25{,}6} = 0{,}328$$

A partir da Tabela 17-2, $f = 0{,}8$. Uma vez que $f' < f$, isto é, $0{,}328 < 0{,}80$, não existe perigo de deslizamento.

(*c*)

Resposta

$$n_{fs} = \frac{H}{H_{\text{nom}} K_s} = \frac{20{,}6}{15(1{,}25)} = 1{,}1 \qquad \text{(como esperado)}$$

Resposta A correia é satisfatória, e a tensão máxima admissível de correia existe. Se a tensão inicial for mantida, a capacidade será a potência de projeto de 20,6 hp.

A tensão inicial é a chave para o funcionamento da correia plana do modo desejado. Há várias maneiras de controlar tal tensão. Uma delas é colocar o motor e a polia motora em uma placa de montagem pivotada, de modo que o peso do motor e da polia, mais a placa de montagem e parte do peso da correia, induzam a tensão correta inicial e a mantenham. Uma segunda maneira é utilizar uma polia intermediária carregada por

mola e ajustada à mesma tarefa. Ambos os métodos acomodam estiramentos temporários ou permanentes de correia. Veja a Figura 17-11.

Uma vez que as correias planas foram usadas para distâncias longas de centro a centro, o peso da correia em si pode prover a tensão inicial. A correia estática deflete-se a uma curva semelhante à catenária, e a depressão de uma correia reta pode ser medida contra um fio musical esticado. Isso fornece uma maneira de medir e ajustar tal depressão. A partir da teoria de catenária, a depressão é relacionada à tensão inicial por

$$d = \frac{12L^2w}{8F_i} = \frac{3L^2w}{2F_i} \tag{17-13}$$

em que d = depressão, in
L = distância de centro a centro, ft
w = peso por pé da correia, lbf/ft
F_i = tensão inicial, lbf

No Exemplo 17-1, a depressão correspondente à tensão inicial de 270,6 lb é

$$d = \frac{3(8^2)0{,}393}{2(270{,}6)} = 0{,}14 \text{ in}$$

Um conjunto de decisões para uma correia plana pode consistir de:

- Função: potência, velocidade, durabilidade, redução, fator de serviço, C
- Fator de projeto: n_d
- Manutenção de tensão inicial
- Material de correia
- Geometria de transmissão, d, D
- Espessura de correia: t
- Largura de correia: b

Dependendo do problema, algumas ou todas as últimas quatro poderiam ser variáveis de projeto. A área transversal de correia é realmente a decisão de projeto, mas as espessuras e larguras disponíveis de correias são escolhas discretas. As dimensões disponíveis são encontradas nos catálogos dos fornecedores.

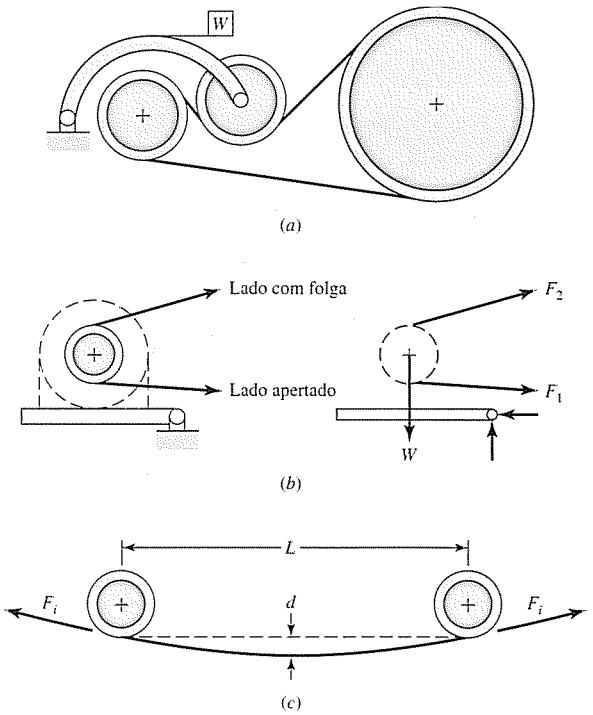


Figura 17-11 Esquemas de tensionamento de correia.

EXEMPLO 17-2

Projete uma transmissão de correia plana para conectar eixos horizontais em centros a 16 ft. A razão de velocidade deve ser de 2,25:1. A velocidade angular da polia motora pequena é de 860 rpm, e a transmissão de potência nominal deve ser de 60 hp sob choque muito leve.

Solução

- Função: $H_{nom} = 60$ hp, 860 rpm, razão de 2,25:1, $K_s = 1{,}15$, $C = 16$ ft
- Fator de projeto: $n_d = 1{,}05$
- Manutenção de tensão inicial: catenária
- Material de correia: poliamida
- Geometria de transmissão, d, D
- Espessura de correia: t
- Largura de correia: b

As últimas quatro podem ser variáveis de projeto. Tomemos mais algumas decisões *a priori*.

Decisão $d = 16$ in, $D = 2{,}25d = 2{,}25(16) = 36$ in

Decisão Utilize correia A-3 de poliamida; assim, $t = 0{,}13$ in e $C_v = 1$.

Agora, resta uma decisão de projeto a ser feita, a largura de correia b.

Tabela 17-2: $\gamma = 0{,}042$ lbf/in^3 $\quad f = 0{,}8 \quad F_a = 100$ lbf/in a 600 rpm

Tabela 17-4: $C_p = 0{,}94$

Equação (17-12): $F_{1a} = b(100)0{,}94(1) = 94{,}0b$ lbf (1)

$$H_d = H_{nom} K_s n_d = 60(1{,}15)1{,}05 = 72{,}5 \text{ hp}$$

$$T = \frac{63\,025 H_d}{n} = \frac{63\,025(72{,}5)}{860} = 5310 \text{ lbf} \cdot \text{in}$$

Estime $\exp(f\phi)$ para um desenvolvimento de fricção completo

Equação (17-1): $$\phi = \theta_d = \pi - 2 \operatorname{sen}^{-1} \frac{36 - 16}{2(16)12} = 3{,}037 \text{ rad}$$

$$\exp(f\phi) = \exp[0{,}80(3{,}037)] = 11{,}35$$

Estime a tensão centrífuga F_c, no que diz respeito à largura da correia b:

$$w = 12\gamma bt = 12(0{,}042)b(0{,}13) = 0{,}0655b \text{ lbf/ft}$$

$$V = \pi dn/12 = \pi(16)860/12 = 3602 \text{ ft/min}$$

Equação (*e*): $$F_c = \frac{w}{g}\left(\frac{V}{60}\right)^2 = \frac{0{,}0655b}{32{,}17}\left(\frac{3602}{60}\right)^2 = 7{,}34b \text{ lbf} \quad (2)$$

Para condições de projeto, isto é, no nível de potência H_d, utilizando a Equação (*h*), obtemos

$$(F_1)_a - F_2 = 2T/d = 2(5310)/16 = 664 \text{ lbf} \quad (3)$$

$$F_2 = (F_1)_a - [(F_1)_a - F_2] = 94{,}0b - 664 \text{ lbf} \quad (4)$$

Utilizando a Equação (*i*),

$$F_i = \frac{(F_1)_a + F_2}{2} - F_c = \frac{94{,}0b + 94{,}0b - 664}{2} - 7{,}34b = 86{,}7b - 332 \text{ lbf} \quad (5)$$

Coloque o desenvolvimento de fricção em seu nível mais elevado utilizando a Equação (17-7):

$$f\phi = \ln \frac{(F_1)_a - F_c}{F_2 - F_c} = \ln \frac{94{,}0b - 7{,}34b}{94{,}0b - 664 - 7{,}34b} = \ln \frac{86{,}7b}{86{,}7b - 664}$$

Solucionando a equação precedente para a largura de correia b, na qual a fricção está totalmente desenvolvida, obtemos

$$b = \frac{664}{86,7}\frac{\exp(f\phi)}{\exp(f\phi)-1} = \frac{664}{86,7}\frac{11,38}{11,38-1} = 8,40 \text{ in}$$

Uma largura de correia maior que 8,40 in desenvolverá uma fricção menor que $f = 0,80$. Os dados dos fabricantes indicam que próximo tamanho maior disponível de largura será de 10 in.

Decisão

Utilize correia com largura de 10 in.

Segue-se que, para uma correia com largura de 10 in,

Equação (2): $F_c = 7,34(10) = 73,4$ lbf

Equação (1): $(F_1)_a = 94(10) = 940$ lbf

Equação (4): $F_2 = 94(10) - 664 = 276$ lbf

Equação (5): $F_i = 86,7(10) - 332 = 535$ lbf

A potência transmitida, a partir da Equação (3), é

$$H_t = \frac{[(F_1)_a - F_2]V}{33\,000} = \frac{664(3602)}{33\,000} = 72,5 \text{ hp}$$

e o nível de desenvolvimento de fricção f', a partir da Equação (17-7), é

$$f' = \frac{1}{\phi}\ln\frac{(F_1)_a - F_c}{F_2 - F_c} = \frac{1}{3,037}\ln\frac{940-73,4}{276-73,4} = 0,479$$

o que é satisfatório. Se houvesse uma largura de correia de 9 in disponível, a análise mostraria $(F_1)_a = 846$ lbf, $F_2 = 182$ lbf, $F_i = 448$ lbf e $f' = 0,63$. Com uma figura de mérito disponível refletindo custo, correias mais grossas (A-4 ou A-5) poderiam ser examinadas para averiguar qual das alternativas satisfatórias é a melhor. A partir da Equação (17-13), a depressão de catenária é

$$d = \frac{3L^2w}{2F_i} = \frac{3(15^2)0,0655(10)}{2(535)} = 0,413 \text{ in}$$

A Figura 17-12 ilustra a variação das tensões flexíveis de correia plana em alguns pontos cardinais durante um passo de correia.

Correias Planas de Metal

As correias finas planas de metal, com suas resistências inerentes e estabilidades geométricas, não poderiam ser fabricadas até que a soldagem a *laser* e a tecnologia fina de rolamento tornassem possíveis correias tão finas como as de 0,002 in e tão estreitas como as de 0,026 in. A introdução de perfurações permite aplicações sem deslizamento. As correias finas de metal exibem

- Razão elevada de resistência por peso
- Estabilidade dimensional
- Sincronia precisa
- Utilidade para temperaturas até 700°F
- Boas propriedades elétricas e de condução térmica

Além disso, as ligas de aço inoxidável oferecem correias "inertes", não-absorventes, adequadas a ambientes hostis (corrosivos), que podem ser estéreis para aplicações alimentícias e farmacêuticas.

As correias finas de metal podem ser classificadas como transmissões de fricção, transmissões sincronizadas ou de posicionamento, ou transmissões de fita. Entre as transmissões de fricção estão as correias planas, as revestidas de metal e as perfuradas. Polias de coroa são usadas para compensar erros de pista.

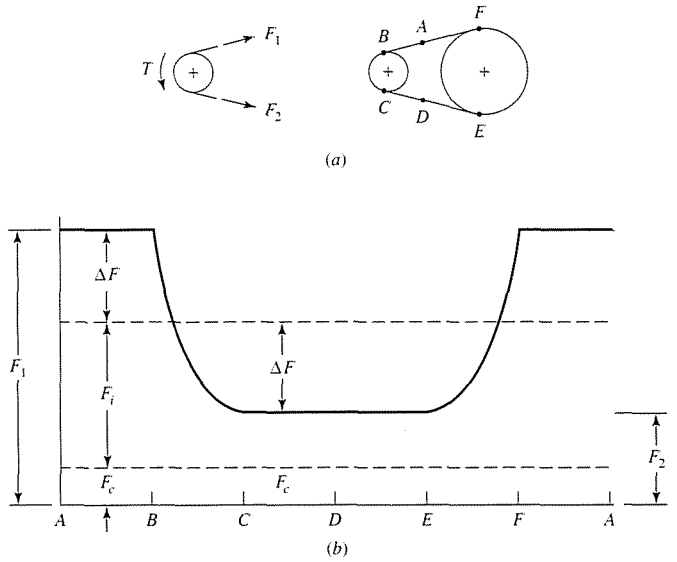


Figura 17-12 Tensões de correia plana.

A Figura 17-13 mostra uma correia fina plana de metal, com as tensões no lado apertado F_1 e no lado com folga F_2 expostas. O relacionamento entre F_1 e F_2 e o torque motor T são iguais aos da Equação (h). As Equações (17-9) a (17-11) também se aplicam. A maior tensão aplicável, como na Equação (17-12), é proposta em termos de tensão em correias de metal. Uma tensão de flexão é criada ao fazer a correia se conformar à polia, e sua magnitude de tração σ_b é fornecida por

$$\sigma_b = \frac{Et}{(1-\nu^2)D} = \frac{E}{(1-\nu^2)(D/t)} \tag{17-14}$$

em que E = módulo de Young
t = espessura de correia
ν = coeficiente de Poisson
D = diâmetro de polia

As tensões de tração $(\sigma)_1$ e $(\sigma)_2$ impostas pelas tensões de correia F_1 e F_2 são

$$(\sigma)_1 = F_1/(bt) \text{ e } (\sigma)_2 = F_2/(bt)$$

A maior tensão de tração é $(\sigma_b)_1 + F_1/(bt)$ e a menor, $(\sigma_b)_2 + F_2/(bt)$. Durante uma passagem da correia, ambos os níveis de tensão aparecem.

Embora as correias sejam de geometria simples, o método de Marin não é utilizado porque a condição de soldagem de topo (para formar o laço) não é conhecida com precisão, e o teste por cupons é difícil. As correias operam até a falha em duas polias de tamanho igual. Informações referentes à vida de fadiga, como as mostradas na Tabela 17-6, são obteníveis. As tabelas 17-7 e 17-8 fornecem informações adicionais.

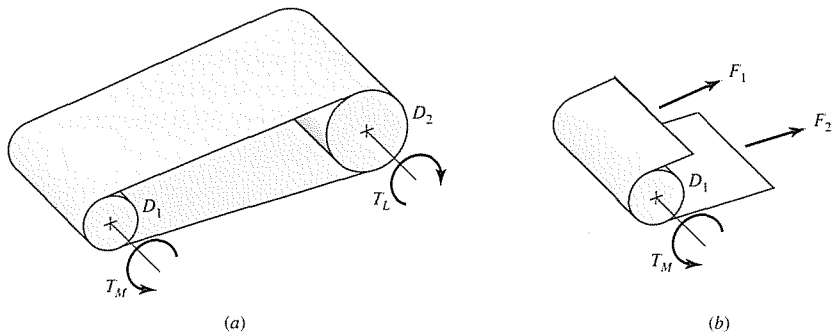


Figura 17-13 Tensões de correia metálica e torques.

Tabela 17-6 Vida de correia para transmissões* de fricção de aço inoxidável

$\frac{D}{t}$	Passagens da correia
625	$\geq 10^6$
400	$0{,}500 \cdot 10^6$
333	$0{,}165 \cdot 10^6$
200	$0{,}085 \cdot 10^6$

* Dados cedidos como cortesia da Belt Technologies, Agawam, Mass.

Tabela 17-7 Diâmetro* mínimo de polia

Espessura de correia, in	Diâmetro mínimo de polia, in
0,002	1,2
0,003	1,8
0,005	3,0
0,008	5,0
0,010	6,0
0,015	10
0,020	12,5
0,040	25,0

* Dados cedidos como cortesia da Belt Technologies, Agawam, Mass.

Tabela 17-8 Propriedades típicas de materiais, correias metálicas*

Liga	Resistência de escoamento, kpsi	Módulo de Youna, Mpsi	Coeficiente de Poisson
301 ou 302 Aço inoxidável	175	28	0,285
BeCu	170	17	0,220
1075 ou 1095 Aço carbono	230	30	0,287
Titânio	150	15	—
Inconel	160	30	0,284

* Dados cedidos como cortesia da Belt Technologies, Agawam, Mass.

A Tabela 17-6 apresenta expectativas de vida de correias metálicas para correias de aço inoxidável. A partir da Equação (17-14), com $E = 28$ Mpsi e $\nu = 0{,}29$, as tensões de flexão correspondentes às quatro entradas da tabela são de 48 914, 76 428, 91 805 e 152 855 psi. Utilizando uma transformação natural *log* da tensão e das passagens, a linha de regressão ($r = -0{,}96$) é

$$\sigma = 14\,169\,982 N^{-0{,}407} = 14{,}17(10^6) N_p^{-0{,}407} \tag{17-15}$$

em que N_p é o número de passagens da correia.

A seleção de uma correia plana metálica pode consistir nos seguintes passos:

1. Encontrar $\exp(f\phi)$ da geometria e da fricção
2. Encontrar a resistência

$$S_f = 14{,}17(10^6)N_p^{-0{,}407} \qquad \text{301, 302 inoxidável}$$
$$S_f = S_y/3 \qquad \text{outros}$$

3 Tensão admissível

$$F_{1a} = \left[S_f - \frac{Et}{(1-\nu^2)D}\right] tb = ab$$

4 $\Delta F = 2T/D$

5 $F_2 = F_{1a} - \Delta F = ab - \Delta F$

6 $F_i = \dfrac{F_{1a} + F_2}{2} = \dfrac{ab + ab - \Delta F}{2} = ab - \dfrac{\Delta F}{2}$

7 $b_{\min} = \dfrac{\Delta F}{a} \dfrac{\exp(f\phi)}{\exp(f\phi) - 1}$

8 Escolher $b > b_{\min}$, $F_1 = ab$, $F_2 = ab - \Delta F$, $F_i = ab - \Delta F/2$, $T = \Delta FD/2$

9 Verificar o desenvolvimento friccional f':

$$f' = \frac{1}{\phi} \ln \frac{F_1}{F_2} \qquad f' < f$$

EXEMPLO 17-3

Uma correia de aço inoxidável de transmissão de fricção gira sobre duas polias de metal de 4 in ($f = 0{,}35$). A espessura dessa correia deve ser de 0,003 in. Para uma vida excedendo a 10^6 passagens de correia com torque suave ($K_s = 1$), (*a*) selecione a correia, se o torque tiver de ser de 30 lbf · in, e (*b*) encontre a tensão inicial F_i.

Solução

A partir do passo 1, $\phi = \theta_d = \pi$; portanto, $\exp(0{,}35\pi) = 3{,}00$. A partir do passo 2,

$$(S_f)_{10^6} = 14{,}17(10^6)(10^6)^{-0{,}407} = 51\,210 \text{ psi}$$

A partir dos passos 3, 4, 5 e 6,

$$F_{1a} = \left[51\,210 - \frac{28(10^6)0{,}003}{(1 - 0{,}285^2)4}\right] 0{,}003b = 85{,}1b \text{ lbf} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \Delta F &= 2T/D = 2(30)/4 = 15 \text{ lbf} \\ F_2 &= F_{1a} - \Delta F = 85{,}1b - 15 \text{ lbf} \end{aligned} \tag{2}$$

$$F_i = \frac{F_{1a} + F_2}{2} = \frac{85{,}1b + 15}{2} \text{ lbf} \tag{3}$$

A partir do passo 7,

$$b_{\min} = \frac{\Delta F}{a} \frac{\exp(f\phi)}{\exp(f\phi) - 1} = \frac{15}{85{,}1} \frac{3{,}00}{3{,}00 - 1} = 0{,}264 \text{ in}$$

Decisão

Selecione uma correia disponível com largura de 0,75 in e espessura de 0,003 in.

Equação (1): $F_1 = 85{,}1(0{,}75) = 63{,}8$ lbf

Equação (2): $F_2 = 85{,}1(0{,}75) - 15 = 48{,}8$ lbf

Equação (3): $$F_i = (63{,}8 + 48{,}8)/2 = 56{,}3 \text{ lbf}$$

$$f' = \frac{1}{\phi} \ln \frac{F_1}{F_2} = \frac{1}{\pi} \ln \frac{63{,}8}{48{,}8} = 0{,}0853$$

Observe que $f' < f$, isto é, $0{,}0853 < 0{,}35$.

17-3 Correias em V

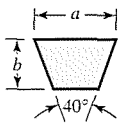
As dimensões transversais das correias em V foram padronizadas pelos fabricantes, com cada secção designada por uma letra do alfabeto para tamanhos em dimensões de polegada. Os tamanhos em metro são designados por números. Embora estes não tenham sido aqui incluídos, o procedimento de analisá-los e projetá-los é o mesmo que agora é apresentado. As dimensões, os diâmetros mínimos de polia acanalada e os intervalos de potência para cada uma das secções com letras estão listados na Tabela 17-9.

Para especificar uma correia em V, dê a letra da secção, seguida pela circunferência interna em polegadas (circunferências padronizadas estão listadas na Tabela 17-10). Por exemplo, B75 é uma correia de secção B com uma circunferência interna de 75 in.

Os cálculos envolvendo o comprimento de correia são geralmente baseados no comprimento de passo primitivo. Para qualquer secção de correia, o comprimento de passo primitivo é obtido ao se adicionar uma quantidade à circunferência interna (Tabelas 17-10 e 17-11). Por exemplo, uma correia B75 tem um comprimento de passo primitivo de 76,8 in. De maneira semelhante, os cálculos das razões de velocidade são efetuados utilizando-se os diâmetros de passo primitivo de polias acanaladas; por isso, os diâmetros declarados costumam ser entendidos como sendo os diâmetros de passo primitivos, embora não sejam sempre tão especificados.

O ângulo de sulco de uma polia acanalada é feito um pouco menor que o ângulo da secção da correia. Isso faz com que esta introduza a si mesma no sulco, aumentando, assim, a fricção. O valor exato desse ângulo depende da secção de correia, do diâmetro de polia acanalada e do ângulo de contato. Se ele for feito muito menor que a correia, a força requerida para que esta seja sacada para fora do sulco à medida que deixa a polia será excessiva. Valores ótimos são fornecidos na literatura comercial.

Tabela 17-9 Secções padronizadas de correias em V



Secção de correia	Largura a, in	Espessura b, in	Diâmetro mínimo de polia acanalada, in	Intervalo, uma ou mais correias
A	$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{32}$	3,0	$\frac{1}{4}$-10
B	$\frac{21}{32}$	$\frac{7}{16}$	5,4	1-25
C	$\frac{7}{8}$	$\frac{17}{32}$	9,0	15-100
D	$1\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	13,0	50-250
E	$1\frac{1}{2}$	1	21,6	100 e acima

Tabela 17-10 Circunferências internas das correias padronizadas em V

Secção	Circunferência, in
A	26, 31, 33, 35, 38, 42, 46, 48, 51, 53, 55, 57, 60, 62, 64, 66, 68, 71, 75, 78, 80, 85, 90, 96, 105, 112, 120, 128
B	35, 38, 42, 46, 48, 51, 53, 55, 57, 60, 62, 64, 65, 66, 68, 71, 75, 78, 79, 81, 83, 85, 90, 93, 97, 100, 103,105, 112, 120, 128, 131, 136, 144, 158, 173, 180, 195, 210, 240, 270, 300
C	51, 60, 68, 75, 81, 85, 90, 96, 105, 112, 120, 128, 136, 144, 158, 162, 173, 180, 195, 210, 240, 270, 300, 330, 360, 390, 420
D	120, 128, 144, 158, 162, 173, 180, 195, 210, 240, 270, 300, 330, 360, 390, 420, 480, 540, 600, 660
E	180, 195, 210, 240, 270, 300, 330, 360, 390, 420, 480, 540, 600, 660

Tabela 17-11 Dimensões de conversão de comprimento (adicionar as quantidades listadas à circunferência interna, para obter o comprimento de passo primitivo em polegadas)

Secção de correia	A	B	C	D	E
Quantidade a ser adicionada	1,3	1,8	2,9	3,3	4,5

Os diâmetros mínimos de polia foram listados na Tabela 17-9. Para melhores resultados, uma correia em V deve girar muito rapidamente: 4000 ft/min é uma boa velocidade. Problemas podem ocorrer se essa correia girar a uma velocidade muito mais rápida que 5000 ft/min, ou muito mais devagar que 1000 ft/min.

O *comprimento de passo primitivo* L_p e a distância de centro a centro C são

$$L_p = 2C + \pi(D+d)/2 + (D-d)^2/(4C) \tag{17-16a}$$

$$C = 0{,}25\left\{\left[L_p - \frac{\pi}{2}(D+d)\right] + \sqrt{\left[L_p - \frac{\pi}{2}(D+d)\right]^2 - 2(D-d)^2}\right\} \tag{17-16b}$$

em que D = diâmetro de passo primitivo da maior polia e d = diâmetro de passo primitivo da menor.

No caso de correias planas, não existe virtualmente nenhum limite para a distância de centro a centro. Longas distâncias de centro a centro não são recomendadas para correias em V, uma vez que a excessiva vibração do lado com folga encurtará a vida da correia materialmente. Em geral, a distância de centro a centro não deve ser maior que três vezes a soma dos diâmetros de polia acanalada e tampouco menor que o diâmetro da maior polia acanalada. As correias de conexão do tipo V apresentam menor vibração, devido ao melhor balanço, e conseqüentemente podem ser usadas com distâncias mais longas de centro a centro.

A base para as classificações de potência das correias em V de alguma forma depende do fabricante; não é com freqüência mencionada quantitativamente na literatura dos fornecedores, mas está disponível por estes. Tal base pode consistir em um número de horas – 24 000, por exemplo – ou na vida de 10^8 ou 10^9 passagens da correia. Haja vista que o número de correias deve ser um inteiro, um conjunto de correia subdimensionado que é aumentado por uma correia pode ser substancialmente superdimensionado. A Tabela 17-12 apresenta as classificações de potência das correias padronizadas em V.

A classificação, quer seja em termos de horas ou de passagens de correia, destina-se a uma correia girando em polia acanalada de igual diâmetro (180° de envolvimento), de comprimento moderado, e transmitindo uma carga permanente. Desvios dessas condições de ensaio de laboratório são conhecidos por ajustes multiplicativos. Se a potência tabelada de uma correia para uma correia de secção C é de 9,46 hp – para um diâmetro de polia de 12 in, a uma velocidade periférica de 3000 ft/min (Tabela 17-12) –, então, quando tal correia é utilizada sob outras condições, o valor tabulado H_{tab} é ajustado como segue:

$$H_a = K_1 K_2 H_{tab} \tag{17-17}$$

em que H_a = potência admissível, por correia, Tabela 17-12
K_1 = fator de correção de ângulo de envolvimento, Tabela 17-13
K_2 = fator de correção de comprimento de correia, Tabela 17-14

A potência admissível pode ser próxima de H_{tab}, dependendo das circunstâncias.

Em uma correia em V, o coeficiente efetivo de fricção f' é $f/\text{sen}(\phi/2)$, que corresponde a um aumento por um fator de cerca de 3 decorrente dos sulcos. Esse coeficiente efetivo de fricção é às vezes tabelado contra os ângulos de sulco de *polia* de 30°, 34° e 38°, sendo 0,50, 0,45 e 0,40 os valores tabelados, respectivamente, revelando um coeficiente de fricção do metal no material de correia de 0,13 para cada caso. A Gates Rubber Company declara que seu coeficiente efetivo de fricção é de 0,5123 para sulcos. Logo,

$$\frac{F_1 - F_c}{F_2 - F_c} = \exp(0{,}5123\phi) \tag{17-18}$$

A potência de projeto é fornecida por

$$H_d = H_{nom} K_s n_d \tag{17-19}$$

em que H_{nom} é a potência nominal, K_s é o fator de serviço dado na Tabela 17-15 e n_d é o fator de projeto. O número de correias, N_b, é geralmente o próximo inteiro mais alto para H_d / H_a.

Tabela 17-12 Classificações de potência de correias padronizadas em V

Secção de correia	Diâmetro de passo primitivo de polia	Velocidade de correia, ft/min 1000	2000	3000	4000	5000
A	2,6	0,47	0,62	0,53	0,15	
	3,0	0,66	1,01	1,12	0,93	0,38
	3,4	0,81	1,31	1,57	1,53	1,12
	3,8	0,93	1,55	1,92	2,00	1,71
	4,2	1,03	1,74	2,20	2,38	2,19
	4,6	1,11	1,89	2,44	2,69	2,58
	5,0 e acima	1,17	2,03	2,64	2,96	2,89
B	4,2	1,07	1,58	1,68	1,26	0,22
	4,6	1,27	1,99	2,29	2,08	1,24
	5,0	1,44	2,33	2,80	2,76	2,10
	5,4	1,59	2,62	3,24	3,34	2,82
	5,8	1,72	2,87	3,61	3,85	3,45
	6,2	1,82	3,09	3,94	4,28	4,00
	6,6	1,92	3,29	4,23	4,67	4,48
	7,0 e acima	2,01	3,46	4,49	5,01	4,90
C	6,0	1,84	2,66	2,72	1,87	
	7,0	2,48	3,94	4,64	4,44	3,12
	8,0	2,96	4,90	6,09	6,36	5,52
	9,0	3,34	5,65	7,21	7,86	7,39
	10,0	3,64	6,25	8,11	9,06	8,89
	11,0	3,88	6,74	8,84	10,0	10,1
	12,0 e acima	4,09	7,15	9,46	10,9	11,1
D	10,0	4,14	6,13	6,55	5,09	1,35
	11,0	5,00	7,83	9,11	8,50	5,62
	12,0	5,71	9,26	11,2	11,4	9,18
	13,0	6,31	10,5	13,0	13,8	12,2
	14,0	6,82	11,5	14,6	15,8	14,8
	15,0	7,27	12,4	15,9	17,6	17,0
	16,0	7,66	13,2	17,1	19,2	19,0
	17,0 e acima	8,01	13,9	18,1	20,6	20,7
E	16,0	8,68	14,0	17,5	18,1	15,3
	18,0	9,92	16,7	21,2	23,0	21,5
	20,0	10,9	18,7	24,2	26,9	26,4
	22,0	11,7	20,3	26,6	30,2	30,5
	24,0	12,4	21,6	28,6	32,9	33,8
	26,0	13,0	22,8	30,3	35,1	36,7
	28,0 e acima	13,4	23,7	31,8	37,1	39,1

Isto é,

$$N_b \geq \frac{H_d}{H_a} \qquad N_b = 1, 2, 3, \ldots \tag{17-20}$$

Os projetistas trabalham em uma base por correia.

As tensões de correia plana mostradas na Figura 17-12 ignoram a tensão induzida ao fletirem a correia ao redor das polias. Isso é mais pronunciado em correias em V, como ilustra a Figura 17-14.

A tensão centrífuga F_c é fornecida por

$$F_c = K_c \left(\frac{V}{1000} \right)^2 \tag{17-21}$$

em que K_c é da Tabela 17-16.

Tabela 17-13 Fator de correção de ângulo de contato K_1 para transmissões VV* e V planas

$\frac{D-d}{C}$	ϕ, graus	K_1 VV	K_1 V plana
0,00	180	1,00	0,75
0,10	174,3	0,99	0,76
0,20	166,5	0,97	0,78
0,30	162,7	0,96	0,79
0,40	156,9	0,94	0,80
0,50	151,0	0,93	0,81
0,60	145,1	0,91	0,83
0,70	139,0	0,89	0,84
0,80	132,8	0,87	0,85
0,90	126,5	0,85	0,85
1,00	120,0	0,82	0,82
1,10	113,3	0,80	0,80
1,20	106,3	0,77	0,77
1,30	98,9	0,73	0,73
1,40	91,1	0,70	0,70
1,50	82,8	0,65	0,65

* Um ajuste de curva para a coluna VV, em termos de θ, é $K_1 = 0{,}143\,543 + 0{,}007\,46\,8\,\theta - 0{,}000\,015\,052\,\theta^2$ no intervalo $90° \leq \theta \leq 180°$.

Tabela 17-14 Fator de correção de comprimento de correia K_2^*

	Comprimento nominal de correia				
Fator de comprimento	Correias A	Correias B	Correias C	Correias D	Correias E
0,85	Até 35	Até 46	Até 75	Até 128	
0,90	38-46	48-60	81-96	144-162	Até 195
0,95	48-55	62-75	105-120	173-210	210-240
1,00	60-75	78-97	128-158	240	270-300
1,05	78-90	105-120	162-195	270-330	330-390
1,10	96-112	128-144	210-240	360-420	420-480
1,15	120 e acima	158-180	270-300	480	540-600
1,20		195 e acima	330 e acima	540 e acima	660

* Multiplique a potência estimada por correia por este fator, para obter a potência corrigida.

Tabela 17-15 Fatores de serviço K_s sugeridos para transmissões de correia em V

	Fonte de potência	
Maquinaria movida	Característica normal de torque	Torque elevado ou não-uniforme
Uniforme	1,0 a 1,2	1,1 a 1,3
Choque leve	1,1 a 1,3	1,2 a 1,4
Choque médio	1,2 a 1,4	1,4 a 1,6
Choque elevado	1,3 a 1,5	1,5 a 1,8

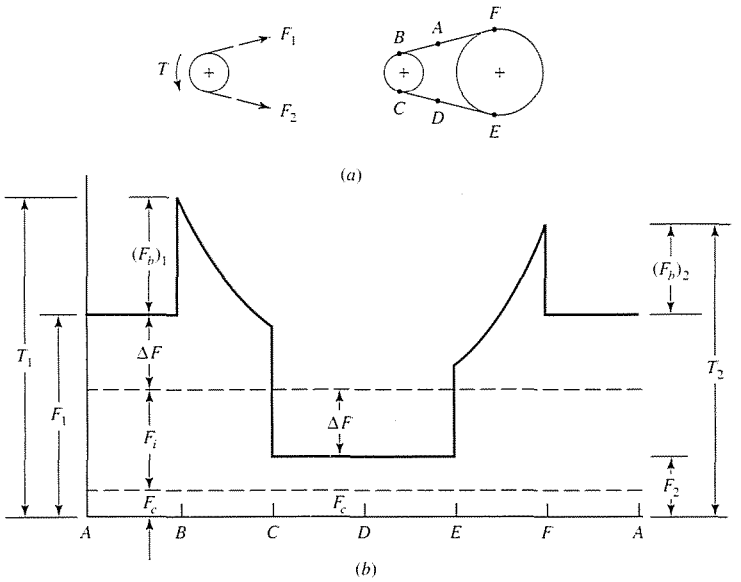


Figura 17-14 Tensões de correia em V.

A potência transmitida por correia está baseada em $\Delta F = F_1 - F_2$, em que

$$\Delta F = \frac{63\,025 H_d / N_b}{n(d/2)} \tag{17-22}$$

então, a partir da Equação (17-8), a maior tensão F_1 é dada por

$$F_1 = F_c + \frac{\Delta F \exp(f\phi)}{\exp(f\phi) - 1} \tag{17-23}$$

A partir da definição de ΔF, a menor tensão F_2 é

$$F_2 = F_1 - \Delta F \tag{17-24}$$

A partir da Equação (*j*) na Seção 17-2,

$$F_i = \frac{F_1 + F_2}{2} - F_c \tag{17-25}$$

O fator de segurança é

$$n_{fs} = \frac{H_a N_b}{H_{\text{nom}} K_s} \tag{17-26}$$

As correlações de durabilidade (vida) são complicadas pelo fato de que a flexão induz tensões flexionais na correia; a correspondente tensão de correia que induz a mesma tensão máxima de tração é F_{b1} na polia motora e F_{b2} na movida. Essas tensões equivalentes são adicionadas a F_1 como

$$T_1 = F_1 + (F_b)_1 = F_1 + \frac{K_b}{d}$$

$$T_2 = F_1 + (F_b)_2 = F_1 + \frac{K_b}{D}$$

em que K_b é dada na Tabela 17-16. A equação para o compromisso de tensão *versus* a passagem usada pela Gates Rubber Company é da forma

$$T^b N_P = K^b$$

em que N_P é o número de passagens e b é aproximadamente 11. Veja a Tabela 17-17. A regra de Miner é empregada para somar danos decorrentes dos dois picos de tensão:

Tabela 17-16 Parâmetros* de algumas correias em V

Secção de correia	K_b	K_c
A	220	0,561
B	576	0,965
C	1 600	1,716
D	5 680	3,498
E	10 850	5,041
3V	230	0,425
5V	1098	1,217
8V	4830	3,288

* Dados cedidos como cortesia da Gates Rubber Co., Denver, Colo.

Tabela 17-17 Parâmetros de durabilidade para algumas secções de correia em V

Secção de correia	10^8 a 10^9 Picos de força K	b	10^9 a 10^{10} Picos de força K	b	Diâmetro mínimo de polia, in
A	674	11,089			3,0
B	1193	10,926			5,0
C	2038	11,173			8,5
D	4208	11,105			13,0
E	6061	11,100			21,6
3V	728	12,464	1062	10,153	2,65
5V	1654	12,593	2394	10,283	7,1
8V	3638	12,629	5253	10,319	12,5

Fonte: M. E. Spotts, *Design of Machine Elements*, 6th. ed. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1985.

$$\frac{1}{N_P} = \left(\frac{K}{T_1}\right)^{-b} + \left(\frac{K}{T_2}\right)^{-b}$$

ou

$$N_P = \left[\left(\frac{K}{T_1}\right)^{-b} + \left(\frac{K}{T_2}\right)^{-b}\right]^{-1} \tag{17-27}$$

O tempo de vida t em horas é fornecido por

$$t = \frac{N_P L_p}{720V} \tag{17-28}$$

As constantes K e b têm seus intervalos de validade. Se $N_P > 10^9$, observe que $N_P = 10^9$ e $t > N_P L_p/(720V)$ sem pôr confiança em valores numéricos além do intervalo de validade. Veja a declaração acerca de N_P e t próxima à conclusão do Exemplo 17-4.

A análise de uma transmissão de correia em V pode consistir nos seguintes passos:

- Descubra V, L_P, C, ϕ e $\exp(0{,}5123\phi)$
- Descubra H_d, H_a e N_b, a partir de H_d / H_a, e arredonde para cima
- Encontre F_c, ΔF, F_1, F_2 e F_i, bem como n_{fs}
- Encontre a vida da correia em número de passagens, ou de horas, se possível

EXEMPLO 17-4

Um motor de 10 hp de fase separada, funcionando a 1750 rpm, é utilizado para acionar uma bomba giratória que opera 24 horas por dia. Um engenheiro especificou uma polia pequena de 7,4 in, uma polia grande de 11 in e três correias B112. O fator de serviço de 1,2 foi aumentado em 0,1, por causa do requisito de serviço contínuo. Analise a transmissão e estime a vida da correia em passagens e horas.

Solução

A velocidade periférica V da correia é

$$V = \pi\, dn/12 = \pi(7{,}4)1750/12 = 3390 \text{ ft/min}$$

Tabela 17-11: $L_p = L + L_c = 112 + 1{,}8 = 113\,8$ in

Equação (17-16b):
$$C = \frac{1}{4}\left\{ -\left[\frac{\pi}{2}(11 + 7{,}4) - 113{,}8\right] + \sqrt{\left[\frac{\pi}{2}(11 + 7{,}4) - 113{,}8\right]^2 - 2(11 - 7{,}4)^2}\right\}$$
$$= 42{,}4 \text{ in}$$

Equação (17-1): $\phi = \theta_d = \pi - 2\,\text{sen}^{-1}(11 - 7{,}4)/[2(42{,}4)] = 3{,}057$ rad

$$\exp[0{,}5123(3{,}057)] = 4{,}788$$

Interpolando na Tabela 17-12 para $V = 3390$ ft/min, obtemos $H_{tab} = 4{,}693$ hp. O ângulo de envolvimento em graus é de $3{,}057(180)/\pi = 175°$. A partir da Tabela 17-13, $K_1 = 0{,}99$. A partir da Tabela 17-14, $K_2 = 1{,}05$. Logo, a partir da Equação (17-17),

$$H_a = K_1 K_2 H_{tab} = 0{,}99(1{,}05)4{,}693 = 4{,}878 \text{ hp}$$

Equação (17-19): $H_d H_{nom} K_s n_d = 10(1{,}2 + 0{,}1)(1) = 13$ hp

Equação (17-20): $N_b \geq H_d/H_a = 13/4{,}878 = 2{,}67 \rightarrow 3$

A partir da Tabela 17-16, $K_c = 0{,}965$. Logo, a partir da Equação (17-21),

$$F_c = 0{,}965(3390/1000)^2 = 11{,}1 \text{ lbf}$$

Equação (17-22): $$\Delta F = \frac{63\,025(13)/3}{1750(7{,}4/2)} = 42{,}2 \text{ lbf}$$

Equação (17-23): $$F_1 = 11{,}1 + \frac{42{,}2(4{,}788)}{4{,}788 - 1} = 64{,}4 \text{ lbf}$$

Equação (17-24): $F_2 = F_1 - \Delta F = 64{,}4 - 42{,}2 = 22{,}2$ lbf

Equação (17-25): $$F_i = \frac{64{,}4 + 22{,}2}{2} - 11{,}1 = 32{,}2 \text{ lbf}$$

Equação (17-26): $$n_{fs} = \frac{H_a N_b}{H_{nom} K_s} = \frac{4{,}878(3)}{10(1{,}3)} = 1{,}13$$

Vida: A partir da Tabela 17-16, $K_b = 576$.

$$F_{b1} = \frac{K_b}{d} = \frac{576}{7{,}4} = 77{,}8 \text{ lbf}$$

$$F_{b2} = \frac{576}{11} = 52{,}4 \text{ lbf}$$

$$T_1 = F_1 + F_{b1} = 64{,}4 + 77{,}8 = 142{,}2 \text{ lbf}$$

$$T_2 = F_1 + F_{b2} = 64{,}4 + 52{,}4 = 116{,}8 \text{ lbf}$$

A partir da Tabela 17-17, $K = 1193$ e $b = 10{,}926$.

Equação (17-27): $$N_P = \left[\left(\frac{1193}{142{,}2}\right)^{-10{,}926} + \left(\frac{1193}{116{,}8}\right)^{-10{,}926}\right]^{-1} = 11(10^9) \text{ passagens}$$

Resposta Visto que N_P está fora do intervalo de validade da Equação (17-27), a vida é reportada como maior do que 10^9 passagens. Então,

Resposta Equação (17-28): $$t > \frac{10^9(113{,}8)}{720(3390)} = 46\,600 \text{ h}$$

17-4 Correias de Tempo

Uma correia de tempo é feita de um tecido emborrachado revestido, por sua vez, de um tecido de náilon e tem, em seu interior, fio de aço para agüentar a carga de tensão. Ela tem dentes que cabem nos cortes de sulcos, na periferia das polias (Figura 17-15). Uma correia de tempo não estica apreciavelmente, ou desliza e conseqüentemente transmite potência a uma razão constante de velocidade angular. Nenhuma tensão inicial é necessária.

Tais correias podem operar em um intervalo muito amplo de velocidades, têm eficiência no intervalo de 97 a 99%, não requerem lubrificação e são mais silenciosas que as transmissões de corrente. À diferença dessas últimas, nelas não há variação de velocidade cardal (ver Seção 17-5); dessa forma, elas constituem uma solução atrativa para requisitos de transmissão precisa.

O fio de aço, o membro de tensão de uma correia de tempo, está localizado na linha de passo da correia (Figura 17-15). Logo, o comprimento de passo é o mesmo, independentemente da espessura do reforço.

Os cinco passos padronizados da série em polegada disponíveis estão listados na Tabela 17-18, com suas designações de letra. Os comprimentos padronizados de passo estão disponíveis em tamanhos que va-

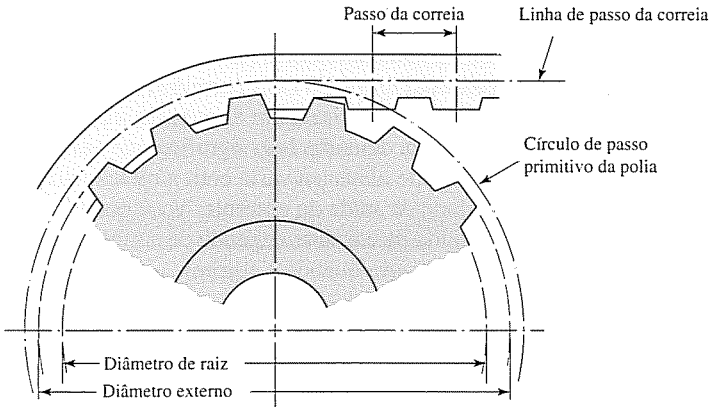


Figura 17-15 Transmissão de correia de tempo mostrando porções da polia e da correia. Observe que o diâmetro primitivo da polia é maior que a distância diametral medida ao longo do topo dos dentes.

Tabela 17-18 Passos padronizados das correias de tempo

Serviço	Designação	Passo p, in
Extraleve	XL	$\frac{1}{5}$
Leve	L	$\frac{3}{8}$
Pesado	H	$\frac{1}{2}$
Extrapesado	XH	$\frac{7}{8}$
Duplamente extrapesado	XXH	$1\frac{1}{4}$

riam de 6 a 180 in. As polias vêm em tamanhos de diâmetro de passo primitivo de 0,60 in até 35,8 in e com número de sulcos de 10 a 120.

O processo de projeto e seleção para correias de tempo é tão similar àquele para correias em V que não será apresentado aqui. Como no caso de outras transmissões de correia, os fabricantes proverão um amplo suprimento de informação e detalhes sobre tamanhos e resistências.

17-5 Corrente de Rolos

As características básicas das transmissões de corrente incluem uma razão constante, visto que nenhum deslizamento ou deformação lenta está envolvido, vida longa e a habilidade de acionar eixos de uma única fonte de potência.

As correntes de rolos foram padronizadas, quanto aos tamanhos, pela ANSI. A Figura 17-16 mostra a respectiva nomenclatura. O passo é a distância linear entre os centros dos rolos, e a largura é o espaço entre as placas internas de conexão. Essas correntes são manufaturadas em fileiras única, dupla, tripla e quádrupla. As dimensões de tamanhos padronizados estão listadas na Tabela 17-19.

A Figura 17-17 apresenta uma roda dentada acionando uma corrente e girando em sentido anti-horário. Denotando o passo de corrente por p, o ângulo de passo por γ e o diâmetro de passo primitivo da roda dentada por D, a partir da trigonometria da figura vemos

$$\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2} = \frac{p/2}{D/2} \qquad \text{ou} \qquad D = \frac{p}{\operatorname{sen}(\gamma/2)} \tag{a}$$

Haja vista que $\gamma = 360°/N$, em que N é o número de dentes da roda dentada, a Equação (a) pode ser escrita como

$$D = \frac{p}{\operatorname{sen}(180°/N)} \tag{17-29}$$

O ângulo $\gamma/2$, por meio do qual o elo balança à medida que entra em contato, é denominado *ângulo de articulação*. Pode ser visto que a magnitude desse ângulo é uma função do número de dentes. A rotação do elo através dele causa impacto entre os rolos e os dentes da roda dentada, bem como desgaste na junção da corrente. Na medida em que a vida de uma transmissão propriamente selecionada é uma função do desgaste e da resistência superficial de fadiga dos rolos, é importante reduzir o ângulo de articulação tanto quanto possível.

O número de dentes da roda dentada também afeta a razão de velocidade durante a rotação pelo ângulo de passo γ. Na posição mostrada na Figura 17-17, a corrente AB é tangente ao círculo de passo primitivo da roda dentada. Contudo, quando tal roda gira a um ângulo de $\gamma/2$, a linha de corrente AB move-se para mais perto do centro de rotação da roda dentada. Isso significa que essa linha de corrente está se movendo para cima e para baixo e que o braço de alavanca varia com a rotação através do ângulo de passo, tudo resultando em uma desigual velocidade de saída da corrente. Você pode considerar a roda dentada como um polígono no qual a velocidade de saída da corrente depende de a saída ser de um vértice ou de uma aresta do polígono. Por certo, o mesmo efeito ocorre quando a corrente entra em engrenamento com a roda dentada.

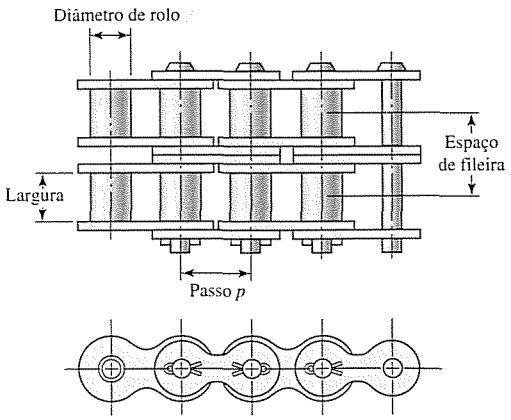


Figura 17-16 Porção de uma corrente de rolos de fileira dupla.

Tabela 17-19 Dimensões de correntes americanas padronizadas de rolos – fileira única

Número de corrente ANSI	Passo, in (mm)	Largura, in (mm)	Resistência mínima de tração, lbf (N)	Largura média, lbf/ft (N/m)	Diâmetro de rolo, in (mm)	Espaçamento de fileiras múltiplas in (mm)
25	0,250	0,125	780	0,09	0,130	0,252
	(6,35)	(3,18)	(3 470)	(1,31)	(3,30)	(6,40)
35	0,375	0,188	1 760	0,21	0,200	0,399
	(9,52)	(4,76)	(7 830)	(3,06)	(5,08)	(10,13)
41	0,500	0,25	1 500	0,25	0,306	—
	(12,70)	(6,35)	(6 670)	(3,65)	(7,77)	—
40	0,500	0,312	3 130	0,42	0,312	0,566
	(12,70)	(7,94)	(13 920)	(6,13)	(7,92)	(14,38)
50	0,625	0,375	4 880	0,69	0,400	0,713
	(15,88)	(9,52)	(21 700)	(10,1)	(10,16)	(18,11)
60	0,750	0,500	7 030	1,00	0,469	0,897
	(19,05)	(12,7)	(31 300)	(14,6)	(11,91)	(22,78)
80	1,000	0,625	12 500	1,71	0,625	1,153
	(25,40)	(15,88)	(55 600)	(25,0)	(15,87)	(29,29)
100	1,250	0,750	19 500	2,58	0,750	1,409
	(31,75)	(19,05)	(86 700)	(37,7)	(19,05)	(35,76)
120	1,500	1,000	28 000	3,87	0,875	1,789
	(38,10)	(25,40)	(124 500)	(56,5)	(22,22)	(45,44)
140	1,750	1,000	38 000	4,95	1,000	1,924
	(44,45)	(25,40)	(169 000)	(72,2)	(25,40)	(48,87)
160	2,000	1,250	50 000	6,61	1,125	2,305
	(50,80)	(31,75)	(222 000)	(96,5)	(28,57)	(58,55)
180	2,250	1,406	63 000	9,06	1,406	2,592
	(57,15)	(35,71)	(280 000)	(132,2)	(35,71)	(65,84)
200	2,500	1,500	78 000	10,96	1,562	2,817
	(63,50)	(38,10)	(347 000)	(159,9)	(39,67)	(71,55)
240	3,00	1,875	112 000	16,4	1,875	3,458
	(76,70)	(47,63)	(498 000)	(239)	(47,62)	(87,83)

Fonte: Compilada da ANSI B29.1-1975.

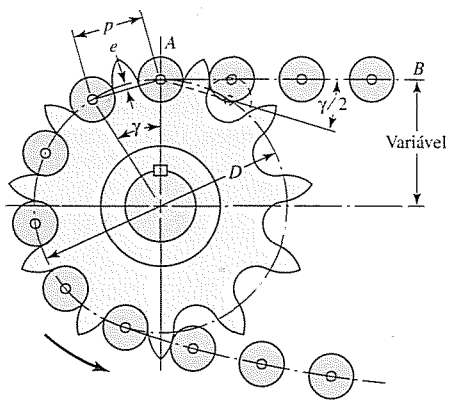


Figura 17-17 Acoplamento de uma corrente e uma roda dentada.

A velocidade da corrente em V é definida como o número de pés separando-se da roda dentada por unidade de tempo. Assim, a velocidade da corrente, em pés por minuto, é

$$V = \frac{Npn}{12} \tag{17-30}$$

em que N = número de dentes da roda dentada
p = passo da corrente, in
n = velocidade da roda dentada, rpm

A velocidade máxima de saída da corrente é

$$v_{\max} = \frac{\pi Dn}{12} = \frac{\pi np}{12\,\text{sen}(\gamma/2)} \tag{b}$$

em que a Equação (*a*) foi substituída pelo diâmetro de passo primitivo D. A velocidade mínima de saída ocorre em um diâmetro d, menor que D. Empregando a geometria da Figura 17-17, encontramos

$$d = D\cos\frac{\gamma}{2} \tag{c}$$

Logo, a velocidade mínima de saída é

$$v_{\min} = \frac{\pi dn}{12} = \frac{\pi np}{12}\frac{\cos(\gamma/2)}{\text{sen}(\gamma/2)} \tag{d}$$

Agora, substituindo $\gamma/2 = 180°/N$ e empregando as Equações (17-30), (*b*) e (*d*), descobrimos que a variação de velocidade é

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{v_{\max} - v_{\min}}{V} = \frac{\pi}{N}\left[\frac{1}{\text{sen}(180°/N)} - \frac{1}{\tan(180°/N)}\right] \tag{17-31}$$

Tal variação é denominada *variação de velocidade cordal* e é traçada na Figura 17-18. Quando transmissões de corrente são usadas para sincronizar componentes precisas ou processos, uma devida consideração deve ser feita quanto a essas variações. Por exemplo, se uma transmissão de corrente sincronizasse o corte de filme fotográfico com o impulso para adiante desse filme, os comprimentos das chapas cortadas de filme poderiam variar muito por causa dessa variação de velocidade cordal. Tais variações podem também causar vibrações dentro do sistema.

Ainda que uma grande quantidade de dentes seja considerada desejável para a roda dentada motora, em uma situação usual é vantajoso obter uma roda dentada tão pequena quanto possível, e isso requer uma com pouca quantidade de dentes. Para uma operação suave a velocidades moderadas e altas, considera-se boa prática utilizar uma roda dentada motora com pelo menos 17 dentes; 19 ou 21 proporcionarão, por certo, uma melhor expectativa de vida, com menos ruído de corrente. Onde as limitações de espaço forem muitas, ou para velocidades muito baixas, menos dentes podem ser usados, sacrificando-se a expectativa de vida da corrente.

As rodas dentadas movidas não são feitas em tamanhos padronizados com mais de 120 dentes, uma vez que a elongação do passo fará com que a corrente se "levante" bem antes de estar desgastada. As transmissões mais bem-sucedidas apresentam razões de velocidade de até 6:1, mas razões mais elevadas podem ser usadas à custa do sacrifício da vida da corrente.

As correntes de rolo raramente falham por carência de resistência à tração, mas sim se submetidas a muitas horas de serviço. Não obstante, a verdadeira falha pode ser decorrente do desgaste dos rolos nos pinos ou da fadiga das superfícies desses rolos. Os fabricantes de correntes de rolo compilaram tabelas que

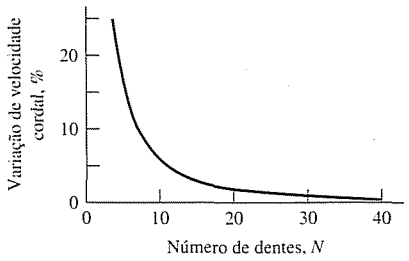


Figura 17-18

fornecem a capacidade de potência correspondente a uma expectativa de vida de até 15 mil horas para várias velocidades de roda dentada. Tais capacidades estão listadas na Tabela 17-20, para rodas dentadas de 17 dentes. A Tabela 17-21 mostra o total de dentes disponíveis em rodas dentadas de um supridor. A Tabela 17-22, por sua vez, lista os fatores de correção de dente para outras rodas que não as de 17 dentes. Já a Tabela 17-23 apresenta os fatores de múltiplas fileiras K_2.

As capacidades de correntes são baseadas no seguinte:

- 15 000 h à carga completa
- Fileira única
- Proporções ANSI
- Fator de serviço unitário
- 100 passos no comprimento
- Lubrificação recomendada
- Máxima elongação de 3%
- Eixos horizontais
- Duas rodas dentadas de 17 dentes

A resistência de fadiga das placas de conexão governa a capacidade a baixas velocidades. A publicação *Chains for Power Transmission and Materials Handling* (1982), da American Chain Association (ACA), fornece, para a corrente de fileira única, a potência nominal H_1, limitada pela placa de conexão, como

$$H_1 = 0{,}004 N_1^{1.08} n_1^{0.9} p^{(3-0.07p)} \quad \text{hp} \tag{17-32}$$

Tabela 17-20 Capacidade estimada de potência da corrente de rolo de fileira única – passo único para roda dentada de 17 dentes

Velocidade da roda dentada, rpm	Número de corrente ANSI													
	25	35	40	41	50	60	80	100	120	140	160	180	200	240
50	0,05	0,16	0,37	0,20	0,72	1,24	2,88	5,52	9,33	14,4	20,9	28,9	38,4	61,8
100	0,09	0,29	0,69	0,38	1,34	2,31	5,38	10,3	17,4	26,9	39,1	54,0	71,6	115
150	0,13*	0,41*	0,99*	0,55*	1,92*	3,32	7,75	14,8	25,1	38,8	56,3	77,7	103	166
200	0,16*	0,54*	1,29	0,71	2,50	4,30	10,0	19,2	32,5	50,3	72,9	101	134	215
300	0,23	0,78	1,85	1,02	3,61	6,20	14,5	27,7	46,8	72,4	105	145	193	310
400	0,30*	1,01*	2,40	1,32	4,67	8,03	18,7	35,9	60,6	93,8	136	188	249	359
500	0,37	1,24	2,93	1,61	5,71	9,81	22,9	43,9	74,1	115	166	204	222	0
600	0,44*	1,46*	3,45*	1,90*	6,72*	11,6	27,0	51,7	87,3	127	141	155	169	
700	0,50	1,68	3,97	2,18	7,73	13,3	31,0	59,4	89,0	101	112	123	0	
800	0,56*	1,89*	4,48*	2,46*	8,71*	15,0	35,0	63,0	72,8	82,4	91,7	101		
900	0,62	2,10	4,98	2,74	9,69	16,7	39,9	52,8	61,0	69,1	76,8	84,4		
1000	0,68*	2,31*	5,48	3,01	10,7	18,3	37,7	45,0	52,1	59,0	65,6	72,1		
1200	0,81	2,73	6,45	3,29	12,6	21,6	28,7	34,3	39,6	44,9	49,9	0		
1400	0,93*	3,13*	7,41	2,61	14,4	18,1	22,7	27,2	31,5	35,6	0			
1600	1,05*	3,53*	8,36	2,14	12,8	14,8	18,6	22,3	25,8	0				
1800	1,16	3,93	8,96	1,79	10,7	12,4	15,6	18,7	21,6					
2000	1,27*	4,32*	7,72*	1,52*	9,23*	10,6	13,3	15,9	0					
2500	1,56	5,28	5,51*	1,10*	6,58*	7,57	9,56	0,40						
3000	1,84	5,64	4,17	0,83	4,98	5,76	7,25	0						
	Tipo A		Tipo B		Tipo C			Tipo C'						

* Estimado a partir de tabelas da ANSI por interpolação linear.

Nota: Tipo A – lubrificação manual ou gotejamento; Tipo B – lubrificação de disco ou banho; Tipo C – lubrificação de corrente de óleo; Tipo C' – tipo C, mas essa é uma região difícil; submeta o projeto ao fabricante, para avaliação.

Fonte: Compilada da ANSI B29.1-1975, seção de informação apenas, e da B29.9-1958.

Tabela 17-21 Total de dentes disponíveis de roda dentada de fileira única de um fornecedor*

Nº	Total de dentes disponíveis de roda dentada
25	8-30, 32, 34, 35, 36, 40, 42, 45, 48, 54, 60, 64, 65, 70, 72, 76, 80, 84, 90, 95, 96, 102, 112, 120
35	4-45, 48, 52, 54, 60, 64, 65, 68, 70, 72, 76, 80, 84, 90, 95, 96, 102, 112, 120
41	6-60, 64, 65, 68, 70, 72, 76, 80, 84, 90, 95, 96, 102, 112, 120
40	8-60, 64, 65, 68, 70, 72, 76, 80, 84, 90, 95, 96, 102, 112, 120
50	8-60, 64, 65, 68, 70, 72, 76, 80, 84, 90, 95, 96, 102, 112, 120
60	8-60, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 70, 72, 76, 80, 84, 90, 95, 96, 102, 112, 120
80	8-60, 64, 65, 68, 70, 72, 76, 78, 80, 84, 90, 95, 96, 102, 112, 120
100	8-60, 64, 65, 67, 68, 70, 72, 74, 76, 80, 84, 90, 95, 96, 102, 112, 120
120	9-45, 46, 48, 50, 52, 54, 55, 57, 60, 64, 65, 67, 68, 70, 72, 76, 80, 84, 90, 96, 102, 112, 120
140	9-28, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 39, 40, 42, 43, 45, 48, 54, 60, 64, 65, 68, 70, 72, 76, 80, 84, 96
160	8-30, 32-36, 38, 40, 45, 46, 50, 52, 53, 54, 56, 57, 60, 62, 63, 64, 65, 66, 68, 70, 72, 73, 80, 84, 96
180	13-25, 28, 35, 39, 40, 45, 54, 60
200	9-30, 32, 33, 35, 36, 39, 40, 42, 44, 45, 48, 50, 51, 54, 56, 58, 59, 60, 63, 64, 65, 68, 70, 72
240	9-30, 32, 35, 36, 40, 44, 45, 48, 52, 54, 60

* Morse Chain Company, Ithaca, NY, cubo tipo B de roda dentada.

Tabela 17-22 Fatores de correção de dente, K_1

Número de dentes em roda dentada motora	K_1 Potência pré-extremo	K_1 Potência pós-extremo
11	0,62	0,52
12	0,69	0,59
13	0,75	0,67
14	0,81	0,75
15	0,87	0,83
16	0,94	0,91
17	1,00	1,00
18	1,06	1,09
19	1,13	1,18
20	1,19	1,28
N	$(N_1/17)^{1,08}$	$(N_1/17)^{1,5}$

Tabela 17-23 Fatores de múltiplas fileiras, K_2

Número de fileiras	K_2
1	1,0
2	1,7
3	2,5
4	3,3
5	3,9
6	4,6
8	6,0

e a potência nominal H_2, limitada pelo rolo, como

$$H_2 = \frac{1000 K_r N_1^{1.5} p^{0.8}}{n_1^{1.5}} \quad \text{hp} \tag{17-33}$$

em que N_1 = número de dentes na roda dentada menor
n_1 = velocidade da roda dentada, rpm
p = passo da corrente, in
K_r = 29 para correntes de números 25, 35; 3,4 para corrente 41; e 17 para correntes 40-240

A constante 0,004 torna-se 0,0022 para a corrente nº 41, peso leve. A potência nominal, na Tabela 17-20, é $H_{\text{nom}} = \min(H_1, H_2)$. Por exemplo, para $N_1 = 17$, $n_1 = 1000$ rpm, corrente nº 40 com $p = 0{,}5$ in, a partir da Equação (17-32),

$$H_1 = 0{,}004(17)^{1.08} 1000^{0.9} 0{,}5^{[3-0.07(0.5)]} = 5{,}48 \text{ hp}$$

A partir da Equação (17-33),

$$H_2 = \frac{1000(17)17^{1.5}(0{,}5^{0.8})}{1000^{1.5}} = 21{,}64 \text{ hp}$$

O valor classificado na Tabela 17-20 é $H_{\text{tab}} = \min(5{,}48, 21{,}64) = 5{,}48$ hp.

É preferível ter um número ímpar de dentes na roda dentada motora (17, 19,...) e um número par de passos na corrente, para evitar um elo especial. O comprimento aproximado da corrente L em passos é

$$\frac{L}{p} \doteq \frac{2C}{p} + \frac{N_1 + N_2}{2} + \frac{(N_2 - N_1)^2}{4\pi^2 C/p} \tag{17-34}$$

A distância de centro a centro C é dada por

$$C = \frac{p}{4}\left[-A + \sqrt{A^2 - 8\left(\frac{N_2 - N_1}{2\pi}\right)^2}\right] \tag{17-35}$$

em que

$$A = \frac{N_1 + N_2}{2} - \frac{L}{p} \tag{17-36}$$

A potência admissível H_a é dada por

$$H_a = K_1 K_2 H_{\text{tab}} \tag{17-37}$$

em que K_1 = fator de correção para outro número de dentes que não 17 (Tabela 17-22)
K_2 = correção de fileira (Tabela 17-23)

A potência que deve ser transmitida, H_d, é fornecida por

$$H_d = H_{\text{nom}} K_s n_d \tag{17-38}$$

A Equação (17-32) é a base dos registros de potência de pré-extremo (entradas verticais) da Tabela 17-20, e a potência de corrente está limitada por fadiga de placa de elo. A Equação (17-33), por sua vez, é a base para os registros de potência de pós-extremo dessas tabelas, e o desempenho de potência de corrente está limitado por fadiga de impacto. Os registros destinam-se a correntes de 100 comprimentos de passo e à roda dentada de 17 dentes. Para um desvio destes,

$$H_2 = 1000\left[K_r\left(\frac{N_1}{n_1}\right)^{1.5} p^{0.8}\left(\frac{L_p}{100}\right)^{0.4}\left(\frac{15\,000}{h}\right)^{0.4}\right] \tag{17-39}$$

em que L_p é o comprimento de corrente em passos e h é a vida de corrente em horas. Observada de um ponto de vista de desvio, a Equação (17-39) pode ser escrita como uma equação de compromisso, na seguinte forma:

$$\frac{H_2^{2.5} h}{N_1^{3.75} L_p} = \text{constante} \tag{17-40}$$

Se o fator de correção de dente K_1 for usado, então omita o termo $N_1^{3,75}$. Observe que $(N_1^{1,5})^{2,5} = N_1^{3,75}$.

Na Equação (17-40), esperaria-se o termo h/L_p, uma vez que duplicar as horas pode requerer a duplicação do comprimento de corrente, outras condições constantes, para o mesmo número de ciclos. Nossa experiência com tensões de contato recomenda esperar uma relação de vida de carga (tensão) da forma $F^a L = constante$. Em circunstâncias mais complexas de impacto de rolo e bucha, a Diamond Chain Company identificou $a = 2,5$.

A velocidade máxima (rpm) para uma transmissão de corrente está limitada por escoriação entre o pino e a bucha. Ensaios sugerem

$$n_1 \leq 1000\left[\frac{82,5}{7,95^p(1,0278)^{N_1}(1,323)^{F/1000}}\right]^{1/(1,59\log p+1,873)} \quad \text{rpm}$$

em que F é a tensão de corrente em libras.

EXEMPLO 17-5

Selecione componentes de transmissão para uma redução de 2:1, uma entrada de 90 hp a 300 rpm, um choque moderado, um dia de 18 horas, uma lubrificação pobre, temperaturas frias, arredores sujos e uma transmissão curta $C/p = 25$.

Solução

Função: $H_{nom} = 90$ hp, $n_1 = 300$ rpm, $C/p = 25$, $K_s = 1,3$
Fator de projeto: $n_d = 1,5$
Dentes da roda dentada: $N_1 = 17$ dentes, $N_2 = 34$ dentes, $K_1 = 1$, $K_2 = 1, 1,7, 2,5, 3,3$
Número de fileiras de corrente:

$$H_{tab} = \frac{n_d K_s H_{nom}}{K_1 K_2} = \frac{1,5(1,3)90}{(1)K_2} = \frac{176}{K_2}$$

A partir da tabela:

Número de fileiras	176/K2 (Tabela 17-23)	Número da corrente (Tabela 17-19)	Tipo de lubrificação
1	176/1 = 176	200	C'
2	176/1,7 = 104	160	C
3	176/2,5 = 70,4	140	B
4	176/3,3 = 53,3	140	B

Decisão

Três fileiras de corrente nº 140 (H_{tab} é 72,4 hp).

Número de passos na corrente:

$$\frac{L}{p} = \frac{2C}{p} + \frac{N_1 + N_2}{2} + \frac{(N_2 - N_1)^2}{4\pi^2 C/p}$$

$$= 2(25) + \frac{17 + 34}{2} + \frac{(34 - 17)^2}{4\pi^2(25)} = 75,79 \text{ passos}$$

Decisão

Utilize 76 passos. Assim, $L/p = 76$.

Identifique a distância de centro a centro: a partir da Equação (17-35) e (17-36),

$$A = \frac{N_1 + N_2}{2} - \frac{L}{p} = \frac{17 + 34}{2} - 76 = -50,5$$

$$C = \frac{p}{4}\left[-A + \sqrt{A^2 - 8\left(\frac{N_2 - N_1}{2\pi}\right)^2}\right]$$

$$= \frac{p}{4}\left[50{,}5 + \sqrt{50{,}5^2 - 8\left(\frac{34-17}{2\pi}\right)^2}\right] = 25{,}104p$$

Para uma corrente 140, $p = 1{,}75$ in. Logo,

$$C = 25{,}104p = 25{,}104(1{,}75) = 43{,}93 \text{ in}$$

Lubrificação: Tipo B

Comentário: Esta se encontra operando na porção de pré-extremo de potência; dessa forma, estimativas de durabilidade distintas de 15 000 h não estão disponíveis. Em vista das pobres condições de operação, a vida será muito mais curta.

A lubrificação de correntes de rolo é essencial para se obter uma vida longa e livre de problemas. Tanto uma alimentação de gotejamento como um banho raso no lubrificante são satisfatórios. Um óleo mineral médio ou leve, sem aditivos, deve ser utilizado. Exceto por condições incomuns, óleos pesados e graxas não são recomendados, pois são muito viscosos para adentrar as pequenas folgas nas partes da corrente.

17-6 Corda de Fio

A corda de fio é feita com dois tipos de enrolamento, como mostra a Figura 17-19. O *entrelaçado regular*, que é o padrão aceito, tem o fio torcido em uma direção, para formar os cordões, e os cordões enrolados na direção oposta, para formar a corda. Em uma corda completa, os fios visíveis são aproximadamente paralelos ao eixo dela. As cordas de entrelaçado regular não enroscam nem desenrolam e são fáceis de manipular.

As cordas de *entrelaçado Lang* têm os fios no cordão e os cordões na corda, enrolados na mesma direção – daí os fios mais externos correrem diagonalmente através do eixo dessa corda. As cordas de entrelaçado Lang são mais resistentes ao desgaste abrasivo e à falha decorrente de fadiga que as cordas de entrelaçado regular; no entanto, é mais provável que elas se enrosquem e desenrolem.

As cordas padronizadas são feitas com um núcleo de cânhamo, que suporta e lubrifica os cordões. Quando a corda estiver sujeita a calor, um centro de aço ou de cordão de fio deve ser usado.

A corda de fio é designada como, por exemplo, uma corda de reboque de $1\frac{1}{8}$ in 6×7. O primeiro algarismo é o diâmetro da corda (Figura 17-19(*c*)). O segundo e o terceiro são o número de cordões e o número de fios em cada cordão, respectivamente. A Tabela 17-24 lista algumas das várias cordas que estão disponíveis, juntamente com suas características e propriedades. A área do metal em içamento-padrão e em corda de reboque é $A_m = 0{,}38d^2$.

Quando uma corda de fio passa ao redor de uma polia, existe uma certa quantidade de reajuste dos elementos. Cada um dos fios e dos cordões deve deslizar em vários outros, e presumivelmente ocorre alguma flexão individual. É provável que nessa ação complexa haja alguma concentração de tensão. A tensão em um dos fios de uma corda passando ao redor de uma polia pode ser calculada como segue. A partir da mecânica de sólidos, temos

$$M = \frac{EI}{\rho} \quad \text{e} \quad M = \frac{\sigma I}{c} \tag{a}$$

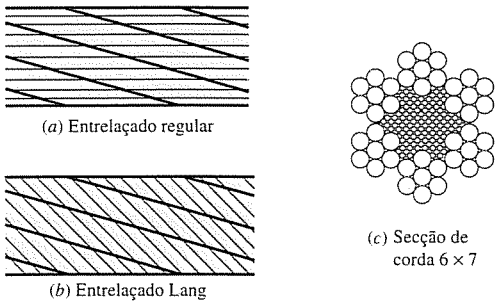


Figura 17-19 Tipos de corda de fio; ambos os entrelaçados estão disponíveis quer para a direita, quer para a esquerda.

Tabela 17-24 Dados de corda de fio

Corda	Peso por pé, lbf	Diâmetro mínimo de polia, in	Tamanhos padronizados d, in	Material	Tamanho de fios mais externos	Módulo de elasticidade*, Mpsi	Resistência†, kpsi
Reboque 6 × 7	$1{,}50d^2$	$42d$	$\frac{1}{4}$-$1\frac{1}{2}$	Aço (monitor steel)	$d/9$	14	100
				Aço de arado	$d/9$	14	88
				Aço brando de arado	$d/9$	14	76
Içamento padronizado 6 × 19	$1{,}60d^2$	26d-34d	$\frac{1}{4}$-$2\frac{3}{4}$	Aço (monitor steel)	$d/13$-$d/16$	12	106
				Aço de arado	$d/13$-$d/16$	12	93
				Aço brando de arado	$d/13$-$d/16$	12	80
Especial flexível 6 × 37	$1{,}55d^2$	$18d$	$\frac{1}{4}$-$3\frac{1}{2}$	Aço (monitor steel)	$d/22$	11	100
				Aço de arado	$d/22$	11	88
Extraflexível 8 × 19	$1{,}45d^2$	21d-26d	$\frac{1}{4}$-$1\frac{1}{2}$	Aço (monitor steel)	$d/15$-$d/19$	10	92
				Aço de arado	$d/15$-$d/19$	10	80
Aeronave 7 × 7	$1{,}70d^2$	—	$\frac{1}{16}$-$\frac{3}{8}$	Aço resistente à corrosão	—	—	124
					—	—	
				Aço carbono	—	—	124
Aeronave 7 × 9	$1{,}75d^2$	—	$\frac{1}{8}$-$1\frac{3}{8}$	Aço resistente à corrosão	—	—	135
					—	—	
				Aço carbono	—	—	143
Aeronave 19	$2{,}15d^2$	—	$\frac{1}{32}$-$\frac{5}{16}$	Aço resistente à corrosão	—	—	165
					—	—	
				Aço carbono	—	—	165

* O módulo de elasticidade é apenas aproximado; ele é afetado por cargas na corda e, em geral, aumenta com a vida desta.

† A resistência é baseada na área nominal da corda. Os algarismos fornecidos são apenas aproximados e baseados em tamanhos de corda de 1 in e em tamanhos de cabo de aeronave de $\frac{1}{4}$ in.

Fonte: Compilada da *American Steel and Wire Company Handbook.*

sendo que as quantidades têm seus significados usuais. Eliminando M e solucionando para a tensão, obtemos

$$\sigma = \frac{Ec}{\rho} \tag{b}$$

Para o raio de curvatura ρ, podemos substituir o raio da polia $D/2$. Ademais, $c = d_w/2$, sendo d_w o diâmetro de fio. Essas substituições resultam em

$$\sigma = E_r \frac{d_w}{D} \tag{c}$$

Para entender essa equação, observe que o fio individual faz uma figura de saca-rolhas no espaço; se você puxá-lo para determinar E, ele esticará ou dará mais do que seu E original sugeriria. Portanto, E é ainda o módulo de elasticidade do *fio*, ainda que, nessa configuração peculiar, conste como parte da corda. Um valor para E igual ao módulo de elasticidade da *corda* produz um valor aproximadamente correto para a tensão σ. Por tal razão, dizemos que E_r, na Equação (*c*), é o módulo de elasticidade da corda, e não do fio, reconhecendo que podemos ser evasivos com relação ao nome usado.

A Equação (*c*) provê a tensão de tração σ nos fios mais externos. O diâmetro de polia é representado por D. Essa equação revela a importância de utilizar um diâmetro grande de polia. Os diâmetros mínimos de polia sugeridos na Tabela 17-24 estão baseados em uma razão de D/d_w de 400. Se possível, as polias devem ser projetadas para uma razão maior. Para elevadores e guinchos de minas, D/d_w é geralmente escolhido entre 800 e 1000. Se a razão for menor que 200, cargas pesadas freqüentemente causarão uma deformação na corda.

Uma tensão de fio de corda dando a mesma tensão de tração que a flexão de polia é denominada *carga equivalente de flexão* F_b, fornecida por

$$F_b = \sigma A_m = \frac{E_r d A_m}{D} \tag{17-41}$$

Uma corda de fio pode falhar porque a carga estática excede à sua resistência última. Uma falha de tal natureza geralmente não é culpa do projetista, mas, pelo contrário, do operador, ao permitir que a corda esteja sujeita a cargas para as quais não foi projetada.

A primeira consideração, ao se selecionar uma corda de fio, é determinar a carga estática. Tal carga é composta dos seguintes itens:

- O peso conhecido ou morto
- Cargas adicionais causadas por paradas repentinas ou arranques
- Cargas de choque
- Fricção de polia de mancal

Quando essas cargas são somadas, o total pode ser comparado à resistência última da corda para encontrar um fator de segurança. Contudo, a resistência última empregada nessa determinação deve ser reduzida pela perda de resistência que ocorre quando a corda passa sobre uma superfície curvada, tal como uma polia estacionária ou um pino; ver Figura 17-20.

Para uma operação média, utilize um fator de segurança de 5. Fatores de até 8 ou 9 são usados se existir perigo à vida humana e para situações muito críticas. A Tabela 17-25 lista os fatores mínimos de segurança para diversos tipos de situações de projeto. Aqui, tal fator é definido como

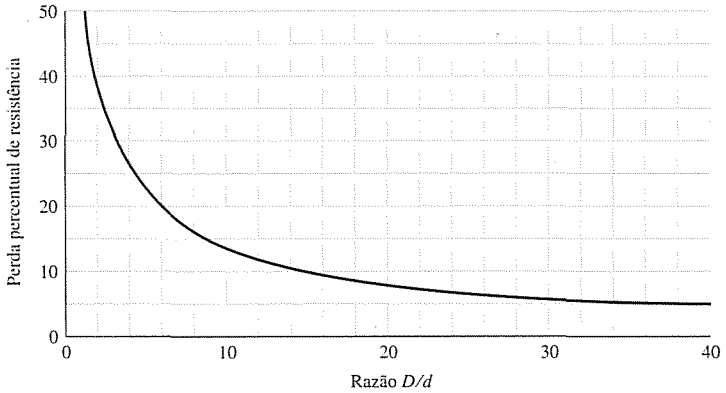


Figura 17-20 Perda percentual de resistência devido a razões distintas de *D/d*; derivada de dados de ensaio padronizados para cordas de classe 6 x 19 e 6 x 17. *(Material fornecido pela Wire Rope Technical Board (WRTB),* Wire Rope Users Manual Third Edition, *Second printing. Reimpressa com autorização.)*

Tabela 17-25 Fatores mínimos de segurança para corda de fio*

Cabos de pista	3,2	Elevadores de passageiros, ft/min:	
Corda de retenção	3,5	50	7,60
Eixos de mineração, ft:		300	9,20
Até 500	8,0	800	11,25
1000-2000	7,0	1200	11,80
2000-3000	6,0	1500	11,90
Mais de 3000	5,0	Elevadores de frete, ft/min:	
Içamento	5,0	50	6,65
Reboque	6,0	300	8,20
Guindastes e guinchos	6,0	800	10,00
Içadores elétricos	7,0	1200	10,50
Elevadores manuais	5,0	1500	10,55
Elevadores privados	7,5	Elevador motorizado de pequenos volumes, ft/min:	
Elevador manual de pequenos valores	4,5	50	4,8
Elevadores de carga	7,5	300	6,6
		500	8,0

Fonte: Compilada de fontes diversas, incluindo ANSI A17.1-1978.

* O uso destes fatores não exclui uma falha por fadiga.

$$n = \frac{F_u}{F_t}$$

em que F_u é a carga última de fio e F_t, a maior tensão de trabalho.

Uma vez que você tenha realizado uma seleção de teste de uma corda com base na resistência estática, a consideração seguinte é assegurar que a vida de desgaste da corda e da(s) polia(s) satisfaça a certos requisitos. Quando uma corda carregada é fletida sobre uma polia, ela se estica como uma mola, se esfrega contra a polia e causa o desgaste de ambas. A quantidade de desgaste que ocorre depende da pressão da corda no sulco da polia. Essa pressão é denominada *pressão de suporte*; uma boa estimativa de sua magnitude é dada por

$$p = \frac{2F}{dD} \tag{17-42}$$

em que F = força de tração na corda
d = diâmetro da corda
D = diâmetro de polia

As pressões admissíveis fornecidas na Tabela 17-26 devem ser utilizadas somente como um indicador grosseiro, pois podem não prevenir uma falha por fadiga ou desgaste intenso. Elas estão aqui apresentadas porque representam uma prática passada e fornecem um ponto de partida em projeto.

Um diagrama de fadiga não diferente de um diagrama *S-N* pode ser obtido para corda de fio. A Figura 17-21 mostra um diagrama desse tipo. Aqui, a ordenada é a razão de pressão por resistência p/S_u, sendo S_u a resistência última de tração do *fio*. A abscissa é o número de flexões que ocorre na vida total da corda. A curva implica que uma corda de fio tem um limite de fadiga, mas isso de forma alguma é verdadeiro. Uma corda de fio que é usada sobre polias acabará falhando por fadiga ou desgaste. Todavia, o gráfico mostra que ela terá uma longa vida se a razão p/S_u for menor que 0,001. A substituição dessa razão na Equação (17-42) produz

$$S_u = \frac{2000F}{dD} \tag{17-43}$$

em que S_u é a resistência última do *fio*, não da corda, e suas unidades estão relacionadas com as unidades de F. Essa interessante equação contém a resistência de fio, a carga e os diâmetros de corda e de polia – todas as quatro variáveis em uma única equação! Dividindo ambos os lados da Equação (17-42) pela resistência última dos fios S_u e solucionando para F, obtemos

$$F_f = \frac{(p/S_u)S_u dD}{2} \tag{17-44}$$

em que F_f é interpretado como a tensão admissível de fadiga, à medida que o fio é flexionado um número de vezes correspondente ao p/S_u selecionado, a partir da Figura 17-21, para uma corda particular e para a expectativa de vida. O fator de segurança pode ser definido em fadiga como

Tabela 17-26 Pressões máximas admissíveis de suporte de cordas em polias (em *psi*)

	Material de polia				
Corda	Madeira[a]	Ferro fundido[b]	Aço fundido[c]	Ferros fundidos resfriados[d]	Aço manganês[e]
Entrelaçado regular:					
6 × 7	150	300	550	650	1470
6 × 19	250	480	900	1100	2400
6 × 37	300	585	1075	1325	3000
8 × 19	350	680	1260	1550	3500
Entrelaçado Lang:					
6 × 7	165	350	600	715	1650
6 × 19	275	550	1000	1210	2750
6 × 37	330	660	1180	1450	3300

Fonte: Wire Rope Users Manual, AISI, 1979.

[a] Em grão de extremidade de faia, nogueira amarga, ou resina.
[b] Para $H_B(min.) = 125$.
[c] Carbono 30-40; H_B(min.) = 160.
[d] Use somente com dureza uniforme de superfície.
[e] Para velocidades elevadas com polias balanceadas tendo superfícies esmerilhadas.

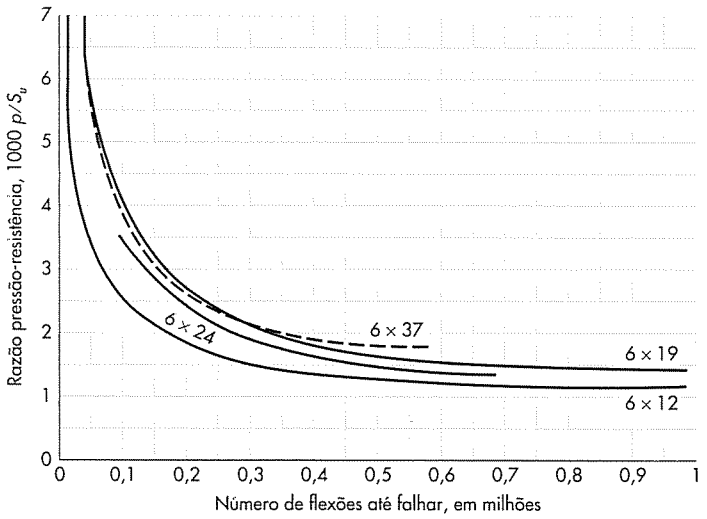


Figura 17-21 Relação determinada experimentalmente entre a vida de fadiga de corda de fio e a pressão de polia.

$$n_f = \frac{F_f - F_b}{F_t} \tag{17-45}$$

em que F_f é a resistência à tração da corda sob flexão e F_t é a tensão no lugar em que a corda está fletindo. Lamentavelmente, o projetista muitas vezes dispõe apenas de informação de vendedor que tabela a tensão última de corda e não provê informação alguma sobre a resistência última S_u concernente ao fios dos quais a corda é feita. Alguma orientação quanto à resistência de fios individuais é

Aço melhorado de arado (monitor)	$240 < S_u < 280$ kpsi
Aço de arado	$210 < S_u < 240$ kpsi
Aço brando de arado	$180 < S_u < 210$ kpsi

No uso de corda de fio, o fator de segurança foi definido, em carregamento estático, como $n = F_u/F_t$ ou $n = (F_u - F_b)/F_t$, em que F_b é a tensão de corda que induziria a mesma tensão de fio mais externo, como aquela dada pela Equação (*c*). O fator de segurança em carregamento de fadiga pode ser definido como na Equação (17-45), ou utilizando-se uma análise estática e compensando com um fator grande de segurança aplicável a carregamento estático, como na Tabela 17-25. Ao utilizar fatores de segurança expressos em códigos padronizados em manuais de projeto corporativos, ou em recomendações de fabricantes de corda de fio ou provenientes da literatura, esteja seguro de averiguar sobre quais bases eles devem ser avaliados e proceda da maneira adequada.

Se a corda é feita de aço de arado, os fios são provavelmente de aço repuxado a frio AISI 1070 ou aço carbono 1080. Referindo-nos à Tabela 10-3, vemos que este de alguma maneira se situa entre o fio de mola repuxado a frio e o fio musical. No entanto, as constantes m e A necessárias para solucionar a Equação (10-14) para S_u estão faltando.

Os engenheiros em exercício que desejarem solucionar a Equação (17-43) devem determinar a resistência de fio S_u para a corda sob consideração, desemaranhando fio suficiente para ensaiar para a dureza Brinnell. Assim, S_u pode ser encontrada utilizando-se a Equação (3-17). A falha de fadiga na corda de fio não é súbita, como em corpos sólidos, mas progressiva, e se mostra tal como a quebra de um fio externo. Isso significa que o começo de fadiga pode ser detectado por inspeção periódica de rotina.

A Figura 17-22 é um outro gráfico que mostra o ganho a ser obtido em vida utilizando-se grandes razões de *D/d*. Em vista do fato de que a vida da corda de fio usado sobre polias é apenas finita, faz-se extremamente importante que o projetista especifique e insista para que inspeção periódica, lubrificação e procedimento de manutenção sejam cumpridos durante a vida da corda. A Tabela 17-27 apresenta propriedades úteis de algumas cordas de fio.

Para um problema de guincho de mina, podemos desenvolver equações de trabalho a partir da apresentação precedente. A tensão de corda de fio F_t decorrente da carga e da aceleração/desaceleração é

$$F_t = \left(\frac{W}{m} + wl\right)\left(1 + \frac{a}{g}\right) \tag{17-46}$$

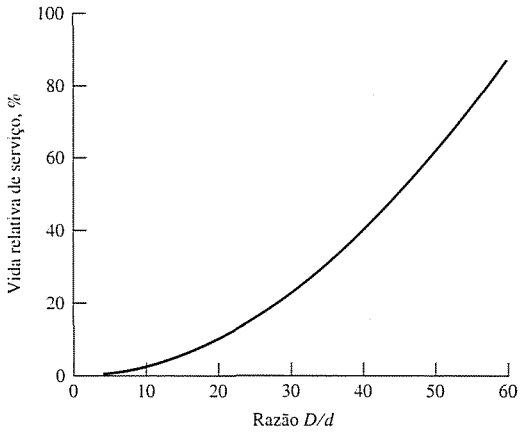


Figura 17-22 Curva serviço-vida baseada somente em tensões de flexão e tração. Essa curva mostra que a vida correspondente a $D/d = 48$ é duas vezes aquela de $D/d = 33$. *(Material fornecido pela Wire Rope Technical Board (WRTB),* Wire Rope Users Manual Third Edition, *Second printing. Reimpressa com autorização.)*

Tabela 17-27 Algumas propriedades úteis de cordas de fio de 6 x 7, 6 x 19 e 6 x 37

Corda de fio	Peso por pé w, lbf/ft	Peso por pé incluindo núcleo w_f, lbf/ft	Diâmetro mínimo de polia D, in	Melhor diâmetro de polia D, in	Diâmetro dos fios d_w, in	Área de metal A_m, in^2	Módulo de Young da corda E_r, psi
6 × 7	$1{,}52d^2$		$42d$	$72d$	$0{,}111d$	$0{,}38d^2$	13×10^6
6 × 19	$1{,}60d^2$	$1{,}76d^2$	$30d$	$45d$	$0{,}067d$	$0{,}40d^2$	12×10^6
6 × 37	$1{,}55d^2$	$1{,}71d^2$	$18d$	$27d$	$0{,}048d$	$0{,}40d^2$	12×10^6

em que W = peso na extremidade da corda (gaiola e carga), lbf
m = número de cordas de fio suportando a carga
w = peso/pé da corda de fio, lbf/ft
l = comprimento suspenso de corda, ft
a = aceleração máxima/desaceleração experimentada, ft/s^2
g = aceleração da gravidade, ft/s^2

A resistência à fadiga de tração F_f em libras, para uma vida especificada, é

$$F_f = \frac{(p/S_u)S_u Dd}{2} \tag{17-47}$$

em que (p/S_u) = vida especificada, a partir da Figura 17-21
S_u = resistência última de tração dos fios, psi
D = diâmetro de polia ou de tambor de guincho, in
d = tamanho nominal de fio de corda, in

A *carga equivalente de flexão* F_b é

$$F_b = \frac{E_r d_w A_m}{D} \tag{17-48}$$

em que E_r = módulo de Young para a corda de fio, Tabelas 17-24 ou 17-28, psi
d_w = diâmetro dos fios, in
A_m = área transversal de metal, Tabelas 17-24 ou 17-28, in^2
D = diâmetro de polia ou de tambor de guincho, in

O fator estático de segurança n_s é

$$n_s = \frac{F_u - F_b}{F_t} \tag{17-49}$$

Seja cuidadoso quando comparar fatores estáticos recomendados de segurança para a Equação (17-49), visto que n_s é às vezes definido como F_u/F_t. O fator de fadiga de segurança n_f é

$$n_f = \frac{F_f - F_b}{F_t} \tag{17-50}$$

EXEMPLO 17-6

Considere uma corda de fio de 6 × 19 de aço monitor (S_u = 240 kpsi).

(*a*) Desenvolva as expressões para tensão de corda F_t, tensão de fadiga F_f, tensões equivalentes de flexão F_b e fator de fadiga de segurança n_f para uma 531,5 ft, talha de mina de gaiola – e – carga de 1 ton com uma aceleração de arranque de 2 ft/s^2, como representado na Figura 17-23. O diâmetro de polia acanalada é de 72 in.

(*b*) Usando as expressões desenvolvidas em (*a*), examine a variação no fator de segurança n_f para vários diâmetros de corda de fio d e número de cordas de apoio m.

Solução (*a*) A tensão de corda F_t, a partir da Equação (17-46), é fornecida por

Resposta

$$F_t = \left(\frac{W}{m} + wl\right)\left(1 + \frac{a}{g}\right) = \left[\frac{2000}{m} + 1{,}60d^2(531{,}5)\right]\left(1 + \frac{2}{32{,}2}\right)$$

$$= \frac{2124}{m} + 903d^2 \text{ lbf}$$

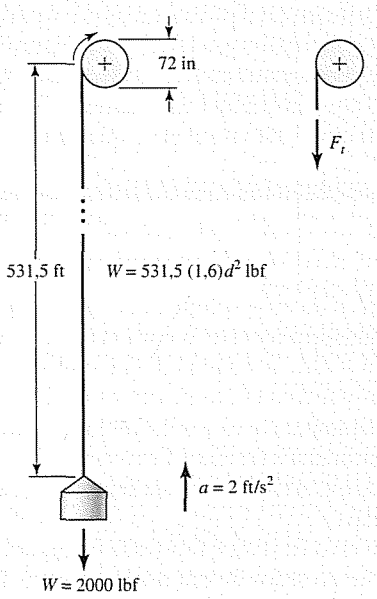


Figura 17-23 Geometria da talha de mina do Exemplo 17-6.

A partir da Figura 17-21, use $p/S_u = 0{,}0014$. A tensão de fadiga F_f, a partir da Equação (17-47), é fornecida por

Resposta
$$F_f = \frac{(p/S_u)S_u Dd}{2} = \frac{0{,}0014(240\,000)72d}{2} = 12\,096d \text{ lbf}$$

A tensão equivalente de flexão F_b, a partir da Equação (17-48) e da Tabela 17-27, é dada por

Resposta
$$F_b = \frac{E_r d_w A_m}{D} = \frac{12(10^6)0{,}067d(0{,}40d^2)}{72} = 4467d^3 \text{ lbf}$$

O fator de segurança n_f em fadiga, a partir da Equação (17-50), é fornecido por

Resposta
$$n_f = \frac{F_f - F_b}{F_t} = \frac{12\,096d - 4467d^3}{2124/m + 903d^2}$$

(*b*) Forme uma tabela como segue:

	n_f			
d	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
0,25	1,355	2,641	3,865	5,029
0,375	1,910	3,617	5,150	6,536
0,500	2,336	4,263	5,879	7,254
0,625	2,612	4,573	6,099	7,331
0,750	2,731	4,578	5,911	6,918
0,875	2,696	4,330	5,425	6,210
1,000	2,520	3,882	4,736	5,320

Os tamanhos de corda de fio são discretos, como o é o número de cordas de suporte. Observe que, para cada m, o fator de segurança exibe um máximo. Previsivelmente, o maior fator de segurança aumenta com m. Se o fator requerido de segurança tivesse de ser 6, somente três ou quatro cordas poderiam satisfazer ao requisito. Os tamanhos são diferentes: cordas de $\frac{5}{8}$ in com três cordas, ou cordas de $\frac{3}{8}$ in cordas com quatro cordas. Os custos incluem não somente os fios, mas também os tambores sulcados de guinchos.

17-7 Eixos Flexíveis

Uma das maiores limitações do eixo sólido é que ele não pode transmitir movimento ou potência ao redor dos cantos. Por isso é necessário recorrer a correias, correntes ou engrenagens, junto com mancais e armação de suporte associados a elas. Freqüentemente o eixo flexível pode ser uma solução econômica para o problema de transmitir movimento em torno dos cantos. Somado à eliminação de peças caras, seu uso pode reduzir ruído consideravelmente.

Existem dois tipos principais de eixos flexíveis: o eixo de potência motora, para transmissão de potência em uma única direção, e o eixo de controle remoto ou de controle manual, para a transmissão de movimento em qualquer direção.

A construção de um eixo flexível é mostrada na Figura 17-24. Esse tipo de eixo é feito por enrolamento de várias camadas de fio ao redor de um núcleo central. Para o eixo de potência motora, a rotação deve ocorrer em uma direção tal que a camada mais externa seja enrolada completamente. Os cabos de controle remoto apresentam uma camada diferente dos fios que formam o cabo, com mais fios em cada camada, de modo que a deflexão torcional é aproximadamente a mesma para qualquer direção de rotação.

Os eixos flexíveis são classificados especificando-se o torque correspondente aos vários raios de curvatura do invólucro. Um raio de curvatura de 15 in, por exemplo, proporcionará 2 a 5 vezes mais capacidade de torque que um raio de 7 in. Quando eixos flexíveis são utilizados em uma transmissão na qual engrenagens também o são, estas devem ser postas de modo que o eixo flexível gire a uma velocidade tão alta quanto possível. Isso permite a transmissão da máxima quantidade de potência.

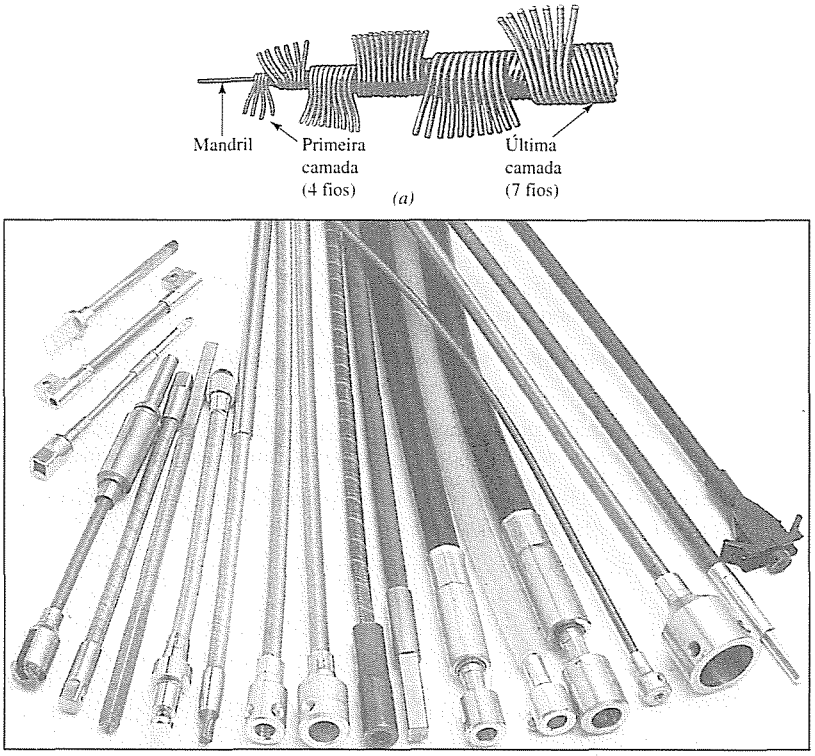


Figura 17-24 Eixo flexível: (*a*) detalhes de construção; (*b*) várias configurações. *(Cortesia da S. S. White Technologies, Inc.)*

PROBLEMAS

ANÁLISE **17-1** Uma correia plana de 6 in de largura de poliamida F-1 é usada para conectar uma polia de 2 in de diâmetro, a fim de mover uma polia maior com uma razão de velocidade angular de 0,5. A distância de centro a centro é de 9 ft. A velocidade angular da polia menor é de 1750 rpm à medida que ela entrega 2 hp. O serviço é tal que um fator de serviço K_s de 1,25 é apropriado.

(*a*) Encontre F_c, F_i, F_{1a} e F_2.

(*b*) Encontre H_a, n_{fs} e o comprimento de correia.

(*c*) Encontre a depressão.

ANÁLISE **17-2** Perspectiva e percepção podem ser ganhos dobrando-se todas as dimensões geométricas e observando o efeito nos parâmetros do problema. Escolha a transmissão do Problema 17-1, dobre as dimensões e compare.

PROJETO **17-3** Uma transmissão de correia plana deve consistir em duas polias de 4 ft de diâmetro de ferro fundido, espaçadas 16 ft uma da outra. Selecione um tipo de correia para transmitir 60 hp a uma velocidade de polia de 380 rpm. Utilize um fator de serviço de 1,1 e um fator de projeto de 1,0.

PROJETO **17-4** Ao solucionar problemas e examinar exemplos, você provavelmente percebeu algumas formas recorrentes:

$$w = 12\gamma bt = (12\gamma t)b = a_1 b,$$

$$(F_1)_a = F_a b C_p C_v = (F_a C_p C_v)b = a_0 b$$

$$F_c = \frac{wV^2}{g} = \frac{a_1 b}{32{,}174}\left(\frac{V}{60}\right)^2 = a_2 b$$

$$(F_1)_a - F_2 = 2T/d = 33\,000H_d/V = 33\,000H_{\text{nom}}K_s n_d/V$$

$$F_2 = (F_1)_a - [(F_1)_a - F_2] = a_0 b - 2T/d$$

$$f\phi = \ln\frac{(F_1)_a - F_c}{F_2 - F_c} = \ln\frac{(a_0 - a_2)b}{(a_0 - a_2)b - 2T/d}$$

De modo que

$$b_{min} = \frac{1}{a_0 - a_2} \frac{33\,000 H_d}{V} \frac{\exp(f\phi)}{\exp(f\phi) - 1}$$

ANÁLISE **17-5** Retorne ao Exemplo 17-1 e complete o seguinte:

(*a*) Encontre a capacidade de torque que poria a transmissão, como construída, no ponto de deslizar, bem como a tensão inicial F_i.

(*b*) Encontre a largura de correia *b* que exibe $n_{fs} = n_d = 1{,}1$.

(*c*) Para (*b*), encontre as correspondentes F_{1a}, F_c, F_i, F_2, a potência e n_{fs}.

(*d*) O que você aprendeu?

ANÁLISE **17-6** Tome a transmissão do Problema 17-5 e dobre a largura de correia. Compare F_c, F_i, F_{1a}, F_2, H_a, n_{fs} e a depressão.

ANÁLISE **17-7** Polias com correias colocam cargas em eixos, induzindo flexão e carregando mancais. Examine a Figura 17-7, desenvolva uma expressão para a carga que a correia coloca na polia e então a aplique ao Exemplo 17-2.

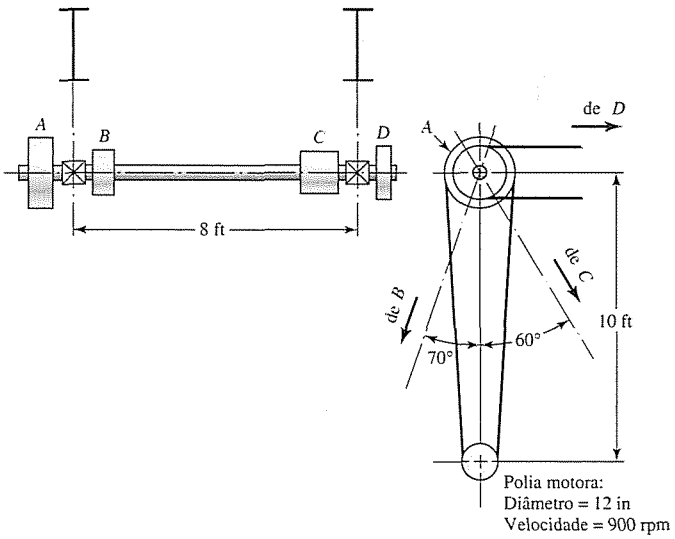
PROJETO **17-8** O Exemplo 17-2 resultou na seleção de uma correia plana de 10 in de largura de poliamida A-3. Mostre que o valor de F_1, restaurando f a 0,80, é

$$F_1 = \frac{(\Delta F + F_c)\exp f\phi - F_c}{\exp f\phi - 1}$$

e compare as tensões iniciais.

PROJETO **17-9** O eixo de linha ilustrado na figura é usado para transmitir potência de um motor elétrico por meio de transmissões de correia plana a várias máquinas. A polia *A* é movida por uma correia vertical da polia do motor. Uma correia da polia *B* controla uma máquina-ferramenta em um ângulo de 70° da vertical e a uma distância de centro a centro de 9 ft. Uma outra correia da polia *C* comanda um triturador a uma distância de centro a centro de 11 ft. A polia *C* tem uma largura dupla, para permitir o câmbio de correia como mostrado na Figura 17-4. A correia da polia *D* comanda um ventilador de extração de poeira cujo eixo está localizado horizontalmente a 8 ft da linha de centro do eixo de linha. Os dados adicionais são

Máquina	Velocidade, rpm	Potência, hp	Polia do eixo de linha	Diâmetro, in
Máquina-ferramenta	400	12,5	*B*	16
Triturador	300	4,5	*C*	14
Extrator de poeira	500	8,0	*D*	18



Problema 17-9
(Cortesia do Dr. Ahmed F. Abdel Azim, Zagazig University, Cairo.)

Os requisitos de potência, listados anteriormente, levam em conta as eficiências globais do equipamento. Os dois mancais do eixo de linha pendem de duas vigas de flauge larga suspensas. Selecione os tipos de correia e os tamanhos de cada uma das quatro transmissões. Faça uma provisão para trocar as correias periodicamente, por causa do desgaste ou do estiramento permanente.

PROJETO **17-10** Dois eixos separados por 20 ft, com eixos no mesmo plano horizontal, devem ser conectados a uma correia plana na qual a polia motora – alimentada por um motor de indução de seis pólos de gaiola de esquilo, com uma potência estimada de freio de 100 hp a 1140 rpm – comanda um segundo eixo à metade de sua velocidade angular. O eixo movido comanda cargas de maquinaria de impacto leve. Selecione uma correia plana.

PROJETO **17-11** A eficiência mecânica de uma transmissão de correia plana é de aproximadamente 98%. Devido ao seu alto valor, tal eficiência é freqüentemente desconsiderada. Se um projetista escolhesse incluí-la, onde a inseriria no protocolo de correia plana?

PROJETO **17-12** Em correias metálicas, a tensão centrífuga F_c é tida como insignificante. Convença-se de que essa é uma simplificação razoável do problema.

17-13 Um projetista tem de selecionar uma transmissão de correia metálica para transmitir uma potência de H_{nom} sob circunstâncias em que um fator de serviço de K_s e um fator de projeto de n_d são apropriados. O objetivo do projeto torna-se $H_d = H_{nom} K_s n_d$. Utilize a Equação (17-8) para mostrar que a largura mínima de correia é fornecida por

$$b_{min} = \frac{1}{a}\left(\frac{33\,000 H_d}{V}\right)\frac{\exp f\theta}{\exp f\theta - 1}$$

em que a é a constante de $F_{1a} = ab$.

PROJETO **17-14** Projete uma transmissão de fricção de correia metálica plana para conectar um motor de 1 hp e quatro pólos de gaiola de esquilo girando a 1750 rpm em direção a um eixo distante 15 in, girando à metade da velocidade. As circunstâncias são tais que um fator de serviço de 1,2 e um fator de projeto de 1,05 são apropriados. O objetivo de vida é de 10^6 passagens da correia, $f = 0{,}35$ e as considerações ambientais requerem uma correia de aço inoxidável.

PROJETO **17-15** Uma correia plana metálica de berílio-cobre com $S_f = 56670$ psi deve transmitir 5 hp a 1125 rpm, com uma meta de vida de 10^6 passagens entre dois eixos separados por 20 in, cujas linhas de centro estão em um plano horizontal. O coeficiente de fricção entre a correia e a polia é de 0,32. As condições são tais que um fator de serviço de 1,25 e um fator de projeto de 1,1 são apropriados. O eixo movido roda a um terço da velocidade da polia do motor. Especifique sua correia, os tamanhos de polia e a tensão inicial na instalação.

PROJETO **17-16** Para as condições do Problema 17-15, utilize uma correia plana termotratada de aço carbono 1095. As condições no cubo da polia motora requerem um diâmetro externo de polia de 3 in ou mais. Especifique sua correia, os tamanhos de polia e a tensão inicial na instalação.

PROJETO **17-17** Uma correia em V única deve ser selecionada para entregar a potência de motor a uma transmissão de comando de roda de um trator. Um motor de 5 hp de cilindro único é usado. No máximo, 60% dessa potência são transmitidos à correia. A polia motora acanalada tem um diâmetro de 6,2 in; a movida, de 12,0 in. A correia selecionada deve ter um comprimento primitivo tão próximo quanto possível de 92 in. A velocidade do motor é controlada para um máximo de 3100 rpm. Selecione uma correia satisfatória e estime o fator de segurança e a vida de polia em passagens.

ANÁLISE **17-18** Duas correias em V B85 são usadas em uma transmissão composta de uma polia motora de 5,4 in, rodando a 1200 rpm, e de uma polia movida de 16 in. Encontre a capacidade de potência da transmissão com base em um fator de serviço de 1,25, bem como a distância de centro a centro.

PROJETO **17-19** Um motor de combustão interna de quatro cilindros de 60 hp é usado para comandar uma máquina de fabricação de tijolos sob uma escala de dois turnos diários. A transmissão consiste em duas polias de 26 in, espaçadas cerca de 12 ft uma da outra, com uma velocidade de polia de 400 rpm. Selecione um arranjo de correias em V. Encontre o fator de segurança e estime a vida em passagens e horas.

PROJETO **17-20** Um compressor alternativo de ar tem um volante com diâmetro de 5 ft e largura de 14 in, e opera a 170 rpm. Um motor de indução de gaiola de esquilo de oito pólos tem 50 bhp de dados de placa a 875 rpm.

(*a*) Projete uma transmissão de correia em V.

(*b*) Pode o corte de sulcos de correia em V no volante ser evitado utilizando-se uma transmissão em V plana?

ANÁLISE **17-21** As implicações geométricas de uma transmissão em V plana são interessantes.

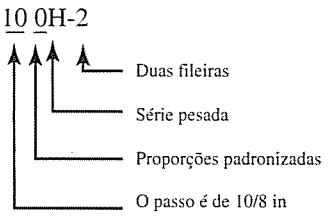
(*a*) Se o equador da Terra fosse um fio inextensível, ajustado à Terra esférica, e você emendasse 6 ft de fio na corda equatorial e providenciasse para que ela fosse concêntrica ao equador, quão distante do chão estaria esse fio?

(*b*) Utilizando a solução de (*a*), formule as modificações para as expressões referentes a m_G, θ_d e θ_D, L_p e C.

(*c*) Como uma aplicação desse exercício, como você reveria sua solução para a parte (*b*) do Problema 17-20?

PROJETO **17-22** Um motor elétrico de 2 hp, girando a 1720 rpm, deve comandar um soprador a uma velocidade de 240 rpm. Selecione uma transmissão de correia em V para essa aplicação e especifique as correias padronizadas em V, os tamanhos de polias e a distância resultante de centro a centro. O tamanho do motor limita essa distância a pelo menos 22 in.

ANÁLISE **17-23** O número padronizado de corrente de rolos indica o passo da corrente em polegadas, as proporções de construção, a série e o número de fileiras, como segue:



A convenção faz o passo diretamente legível a partir do número da corrente. No Exemplo 17-5, averigúe o passo, a partir do número da corrente selecionada, e confirme a partir da Tabela 17-19.

ANÁLISE **17-24** Iguale as Equações (17-32) e (17-33) para encontrar a velocidade de rotação n_1 na qual a potência se iguala e marca a divisão entre pré-máximo e pós-máximo domínios de potência.

(*a*) Mostre que

$$n_1 = \left[\frac{0{,}25(10^6)K_r N_1^{0.42}}{p^{(2.2-0.07p)}}\right]^{1/2.4}$$

(*b*) Encontre a velocidade n_1 para a corrente nº 60, $p = 0{,}75$ in, $N_1 = 17$, $K_r = 17$ e confirme a partir da Tabela 17-20.

(*c*) A quais velocidades a Equação (17-40) é aplicável?

ANÁLISE **17-25** Uma corrente de rolos de duas fileiras nº 60 é usada para transmitir potência entre uma roda dentada motora de 13 dentes, rodando a 300 rpm, e uma roda dentada movida de 52 dentes.

(*a*) Qual é a potência admissível dessa transmissão?

(*b*) Estime a distância de centro a centro, se o comprimento da corrente for de 82 passos.

(*c*) Estime o torque e a força de flexão no eixo motor pela corrente, se a potência real transmitida for 30% menor que a potência correta (admissível).

ANÁLISE **17-26** Uma corrente de rolos de quatro fileiras de nº 40 transmite potência de uma roda dentada motora de 21 dentes a uma roda dentada movida de 84 dentes. A velocidade angular da roda dentada motora é de 2000 rpm.

(*a*) Estime o comprimento da corrente, se a distância de centro a centro tiver que ser de aproximadamente 20 in.

(*b*) Estime o registro de potência tabelada H'_{tab} para uma meta de vida de 20 000 h.

(*c*) Estime a potência avaliada (admissível) que apareceria, na Tabela 17-20, para uma vida de 20 000 h.

(*d*) Estime a tensão na corrente, na potência admissível.

PROJETO **17-27** Um motor de indução de gaiola de esquilo de 25 hp, com velocidade de 700 rpm, deve comandar uma bomba alternante de dois cilindros, externa, sob uma casinha. Um fator de serviço K_s de 1,5 e um fator de projeto de 1,1 são apropriados. A velocidade da bomba é de 140 rpm. Selecione uma corrente conveniente e tamanhos de roda dentada.

PROJETO **17-28** Uma bomba centrífuga é movida por um motor síncrono de 50 hp, a uma velocidade de 1800 rpm. Apesar de tal velocidade, a carga é suave ($K_s = 1{,}2$). Para um fator de projeto de 1,1, especifique uma corrente e as rodas dentadas que alcançarão uma meta de vida de 50 000 h. Sejam as rodas dentadas 19T e 38T.

ANÁLISE **17-29** Uma talha de mina utiliza uma corda de fio de aço monitor de 2 in e 6 × 19. Essa corda é usada para içar cargas de 4 toneladas do eixo a 480 ft de profundidade. O tambor tem um diâmetro de 6 ft e as polias são de aço fundido de boa qualidade, tendo a menor delas 3 ft de diâmetro.

(*a*) Empregando uma velocidade máxima de içamento de 1200 ft/min e uma aceleração máxima de 2 ft/s^2, estime as tensões na corda.

(*b*) Estime os vários fatores de segurança.

PROJETO **17-30** Um elevador temporário de construção deve ser projetado para carregar trabalhadores e materiais até uma altura de 90 ft. A carga máxima estimada para ser içada é de 5000 lbf, a uma velocidade não excedendo a 2 ft/s. Para diâmetros mínimos de polia e aceleração de 4 ft/s^2, especifique o número de cordas requeridas, se uma corda de içamento de 6 × 19 de aço de arar de 1 in for usada.

PROJETO **17-31** Uma talha de mina de 2000 ft opera com um tambor de 72 in utilizando corda de fio de aço monitor de 6 × 19. A gaiola e a carga pesam 8000 lbf, estando a primeira sujeita a uma aceleração de 2 ft/s^2 quando arranca.

(*a*) Para uma talha de um único cordão, como o fator de segurança $n = F_f / F_t$ varia com a escolha do diâmetro de corda?

(*b*) Para uma corda de fio de quatro cordões de suporte atados à gaiola, como o fator de segurança varia com a escolha do diâmetro de corda?

ANÁLISE **17-32** Generalize os resultados do Problema 17-31 representando o fator de segurança n como

$$n = \frac{ad}{(b/m) + cd^2}$$

em que m é o número de cordas suportando a gaiola e a, b e c são constantes. Mostre que o diâmetro ótimo é $d^* = [b/(mc)]^{1/2}$ e que o máximo fator alcançável correspondente de segurança é $n^* = a[m/(bc)]^{1/2}/2$.

ANÁLISE **17-33** A partir dos resultados no Problema 17-32, mostre que, para satisfazer a um fator de fadiga de segurança n_1, a solução ótima é

$$m = \frac{4bcn_1}{a^2} \text{ (cordas)}$$

tendo um diâmetro de

$$d = \frac{a}{2cn_1}$$

Resolva o Problema 17-31, se um fator de segurança de 2 for requerido. Mostre o que fazer para acomodar um caráter discreto necessário no diâmetro da corda d e o número de cordas m.

ANÁLISE **17-34** Para o Problema 17-29, estime a elongação da corda, se um carrinho de mina carregado com 9000 lbf for colocado na gaiola. Os resultados do Problema 5-6 podem ser úteis.

Programas de Computador

Ao abordar os problemas de computador, as seguintes sugestões podem ser úteis:

- Decida se seria mais útil um programa de análise ou um de projeto. Em problemas tão simples como esses, você descobrirá programas semelhantes. Para um máximo benefício instrucional, tente o problema de projeto.
- Criar um programa de projeto sem uma figura de mérito exclui classificar projetos alternativos, mas não impede a obtenção de projetos satisfatórios. Seu instrutor pode suprir a biblioteca de projetos de aula com catálogos comerciais que não têm informação de preço, mas que definem tamanhos disponíveis.
- Entendimento quantitativo e lógica de inter-relações são requeridos para programação. Dificuldades em programação são um aviso a você e a seu instrutor para aumentar seu entendimento. Os seguintes programas podem ser executados em 100 a 500 linhas de código.
- Faça programas interativos e fáceis de entender.
- Deixe o computador fazer aquilo que faz melhor; o usuário, por sua vez, deve fazer o que um humano pode fazer melhor.
- Suponha que o usuário tenha uma cópia do texto e possa responder a pedidos de informação.
- Se interpolar em uma tabela é obrigatório, solicite entradas de tabela na vizinhança e deixe o computador esmigalhar os números.
- Em passos de decisão, permita ao usuário tomar a decisão necessária, mesmo se for indesejável. Isso permite aprender as conseqüências e o uso do programa para análise.
- Exiba muitas informações no sumário. Mostre o conjunto de decisão usado de início para a perspectiva do usuário.
- Quando um sumário estiver completo, a avaliação de adequação poderá ser feita com facilidade; portanto, considere incluir esse aspecto.

17-35 Sua experiência com os Problemas 17-1 a 17-11 o deixou em condições de escrever um programa iterativo de computador para projetar/selecionar componentes de transmissão de correia plana. Um possível conjunto de decisão é

PROJETO

Decisões a priori

- Função: H_{nom}, rpm, razão de velocidade, C aproximado
- Fator de projeto: n_d
- Manutenção de tensão inicial: catenária
- Material de correia: t, d_{min}, tensão admissível, densidade, f
- Geometria de transmissão: d, D
- Espessura de correia: t (em decisão de material)

Decisões de projeto

- Largura de correia: b

17-36 Os Problemas 17-12 a 17-16 deram-lhe alguma experiência com correias planas de fricção de metal, indicando que um programa de computador poderia ser útil no processo de projeto/seleção. Um possível conjunto de decisão é

PROJETO

Decisões a priori

- Função: H_{nom}, rpm, razão de velocidade, C aproximado
- Fator de projeto: n_d
- Material de correia: S_y, E, ν, d_{min}
- Geometria de transmissão: d, D
- Espessura de correia: t

Decisões de projeto

- Largura de correia: b
- Comprimento de correia (freqüentemente, periferia padronizada de curva)

17-37 Os Problemas 17-17 a 17-22 deram-lhe experiência suficiente com correias em V para convencê-lo de que um programa de computador seria útil no projeto/seleção de componentes de transmissão de correia em V. Escreva um programa desse tipo.

17-38 A experiência com os Problemas 17-23 a 17-28 pode sugerir um programa interativo de computador para auxiliar no processo de projeto/seleção de elementos de corrente de rolo. Um possível conjunto de decisão é

PROJETO

Decisões a priori

- Função: potência, velocidade, espaço, K_s, meta de vida
- Fator de projeto: n_d
- Total de dentes da roda dentada: N_1, N_2, K_1, K_2

Decisões de projeto

- Número de corrente
- Total de fileiras
- Sistema de lubrificação
- Comprimento de corrente em passos

(distância de centro a centro por referência)

CAPÍTULO

18 Eixos Rotativos e Eixos Fixos

18-1 Visão Geral 864
18-2 Restrições Geométricas 869
18-3 Restrições de Resistência 874
18-4 Restrições de Resistência – Métodos Adicionais 881
18-5 Materiais de Eixo 884
18-6 Eixos Vazados 885
18-7 Velocidades Críticas 885
18-8 Projeto de Eixo 891

18-1 Visão Geral

Um *eixo* é um membro rotativo, geralmente de secção transversal circular, utilizado para transmitir potência ou movimento. Ele provê a linha de centro de rotação, ou oscilação, de elementos como engrenagens, polias, volantes, manivelas, rodas dentadas e similares, bem como controla a geometria de seus movimentos. Um *eixo fixo* é um membro não-rotativo que não transmite torque e que é usado para suportar rodas girantes, polias e similares. O eixo automotivo não é um eixo fixo verdadeiro; o termo é remanescente da era das charretes, quando as rodas giravam em membros não-rotativos. Uma roca é um eixo curto. Termos como *eixo de linha*, *eixo de comando*, *eixo de ponta*, *eixo de transmissão*, *contra-eixo* (*eixo intermediário*) e *eixo flexível* são nomes associados a usos especiais.

Um projeto de eixo realmente tem início após muito trabalho preliminar. O projeto da máquina em si ditará que certas engrenagens, polias, mancais e outros elementos terão pelo menos sido parcialmente analisados e seus tamanhos e espaçamento, tentativamente determinados. Nesse estágio, o projeto deve ser estudado a partir dos seguintes pontos de vista:

1. Deflexão e rigidez
   - (*a*) Deflexão flexional
   - (*b*) Deflexão torcional
   - (*c*) Inclinação em mancais e em elementos suportados do eixo
   - (*d*) Deflexão de cisalhamento decorrente de carregamento transversal de eixos curtos
2. Tensão e resistência
   - (*a*) Resistência estática
   - (*b*) Resistência de fadiga
   - (*c*) Confiabilidade

A geometria de um eixo é geralmente a de um cilindro escalonado. Engrenagens, mancais e polias devem sempre ser posicionados com precisão, bem como providências devem ser tomadas a fim de aceitar cargas de empuxo. O uso de ressaltos de eixo é um excelente meio para localizar axialmente os elementos desse eixo: tais ressaltos podem ser utilizados para pré-carregar mancais de rolamento e prover as reações necessárias de empuxo a elementos rotativos. Por essas razões, nossa análise normalmente envolverá eixos escalonados.

A Figura 18-1 mostra um eixo escalonado suportando a engrenagem de um redutor de velocidade com engrenagem de par sem-fim. Você deve ser capaz de determinar a razão para cada degrau do eixo e para a manga. Observe, também, como o lubrificante é suprido e escoado. Pode tal redutor ser usado para rotação anti-horária, assim como para horária? Por quê?

Ao se decidir por um procedimento de análise, é necessário compreender que o exame de tensão em um ponto específico de um eixo pode ser feito utilizando-se apenas a geometria desse eixo nas adjacências daquele ponto. Assim, a geometria do eixo completo não se faz necessária. No projeto, geralmente é possível localizar as áreas críticas, dimensioná-las para atender aos requerimentos relativos à resistência e dimensionar o restante do eixo para atender aos requerimentos dos elementos suportados por ele.

Observe que as análises de deflexão e de inclinação não podem ser realizadas até que a geometria do eixo completo tenha sido definida. Desse modo, a deflexão é uma função da geometria *em toda a parte*, ao passo que a tensão em uma secção de interesse é uma função da *geometria local e de momentos*. Por tal razão, o projeto de um eixo permite considerar a tensão e a resistência primeiramente. Então, depois que valores tentativos para as dimensões do eixo tiverem sido estabelecidos, a determinação da deflexão e da inclinação poderá ser feita.

A configuração geométrica do eixo a ser projetado é geralmente determinada a partir de experiência passada, sendo, com mais freqüência, apenas uma revisão de modelos existentes nos quais um número limitado de mudanças deve ser feito. Essas mudanças podem resultar de diversas razões, tais como o uso de um selador recentemente projetado ou de acoplamento, uma mudança na potência ou na velocidade, mancais de tamanho diferente, ou o uso de componentes rotantes projetadas recentemente. Tais mudanças são fáceis para o projetista e não necessitam de explicações adicionais.

Se não existir um projeto anterior para utilizar como ponto de partida, então a determinação da geometria do eixo poderá ter muitas soluções. Esse problema é ilustrado pelos dois exemplos da Figura 18-2. Na Figura 18-2(*a*), uma engrenagem intermediária deve ser suportada por dois mancais. Na Figura 18-2(*c*), um eixo de ventilador deve ser configurado. Diversas soluções deverão lhe ocorrer para cada um desses problemas. As apresentadas não são necessariamente as melhores, mas ilustram o modo como os dispositivos

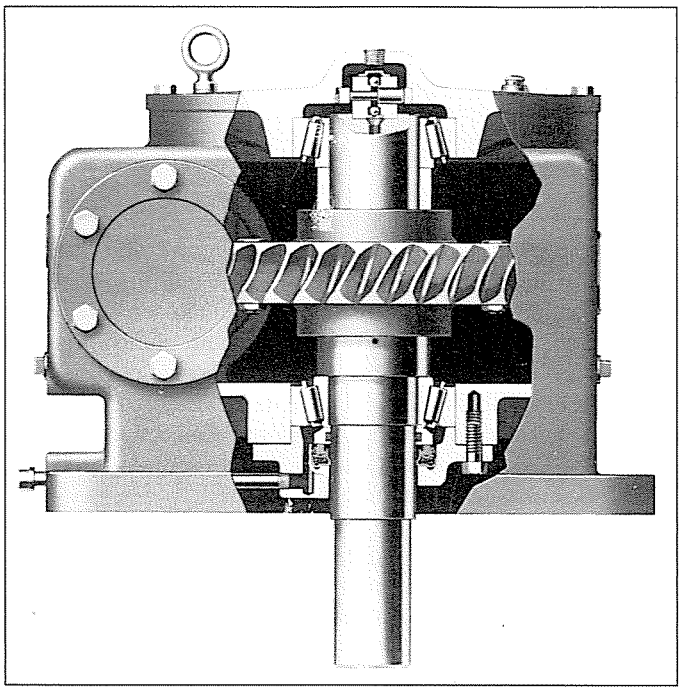


Figura 18-1 Um redutor vertical de velocidade de sem-fim. *(Cortesia da Cleveland Gear Company.)*

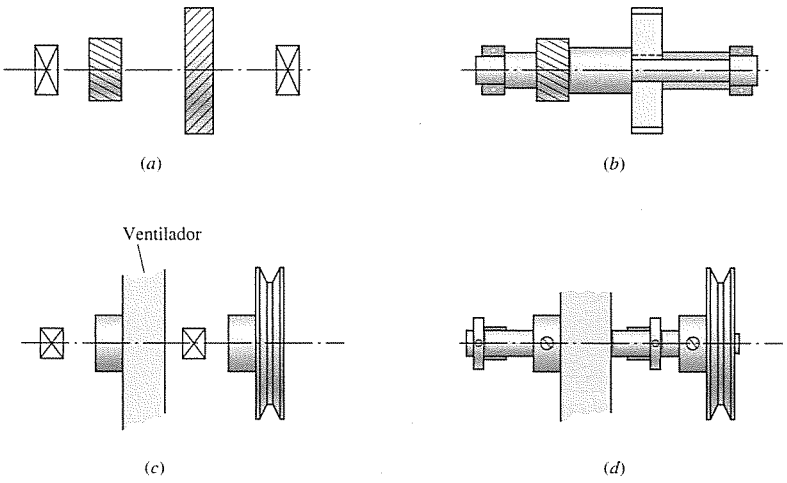


Figura 18-2 (*a*) Escolha uma configuração de eixo para suportar e localizar as duas engrenagens e os dois mancais. (*b*) A solução utiliza um pinhão integral, três ressaltos de eixo, chaveta e rasgo de chaveta, bem como camisa (espaçadora ou separadora). A caixa fixa os mancais em seus anéis externos e recebe as cargas de empuxo. (*c*) Escolha a configuração de eixo de ventilador. (*d*) A solução utiliza mancais de camisa, um eixo reto passante, colares de fixação e conjunto de parafusos para colares, polia de ventilador e ventilador. A caixa compartimento de ventilador suporta os mancais deslizantes.

montados no eixo são fixados e localizados na direção axial, bem como o tipo de provisão feita para transferir torque de um elemento a outro. Observe que o eixo na Figura 18-2(*a*) está sujeito a flexão, torção e cargas axiais. O eixo na Figura 18-2(*c*), por sua vez, está sujeito somente a flexão e torção.

Não existe fórmula mágica para determinar a geometria de um eixo para todas as situações de projeto. A melhor abordagem é a que consiste em estudar os projetos existentes, para aprender como problemas similares foram resolvidos e então, por combinação dos melhores destes, resolver seu próprio problema.

Muitas situações de projeto de eixo incluem o problema da transmissão de torque de um elemento a outro nesse eixo. *Elementos comuns de transferência de torque* são os seguintes:

- Chavetas
- Estrias
- Parafusos de fixação
- Pinos
- Ajustes de pressão e contração
- Ajustes cônicos

Chavetas, pinos e *parafusos de fixação* já foram descritos no Capítulo 8. Os pinos para esse propósito incluem não somente pinos retos e cônicos, mas também diversos tipos de pinos patenteados, muitos dos quais atuam como pinos de mola. Alguns destes servem tão-somente para propósitos de localização – um contrapino, por exemplo, não deve ser usado para transmitir muito torque –, mas outros servirão como bons transmissores de torque. O uso desses dispositivos requer orifícios radiais através do eixo, e daí a concentração de tensão pode ser um problema, dependendo da localização deles.

Estrias de eixo assemelham-se a dentes de engrenagem cortadas ou forjadas na superfície do eixo. Elas são usadas quando grandes quantidades de torque devem ser transmitidas. Quando estrias são utilizadas, a concentração de tensão costuma ser bem moderada.

Ajustes de pressão e contração para segurar cubos em eixos são usados igualmente para transferência de torque e preservação de localização axial. O fator resultante de concentração de tensão é em geral muito pequeno. Um método similar consiste em utilizar um cubo partido com parafusos, para prender o cubo ao eixo. Esse método permite desmontagem e ajustes laterais. Um outro método similar emprega um cubo de duas peças consistindo em um membro partido interno que se assenta a um orifício afunilado. A montagem é então apertada ao eixo com parafusos, o que força a peça mais interna à roda e prende a montagem completa contra o eixo.

Encaixes cônicos simples entre o eixo e o dispositivo montado no eixo são freqüentemente usados em extremidades sobressalentes de um eixo. Roscas de parafuso na extremidade permitem então o uso de uma porca para travar a roda firmemente ao eixo. Esta abordagem é útil porque ela pode ser desmontada, mas ela não permite bom posicionamento axial da roda no eixo.

Todos esses meios de transferência de torque resolvem o problema de ancorar seguramente a roda ou o dispositivo ao eixo, mas nem todos solucionam o problema da localização axial precisa do dispositivo. Alguns dos *dispositivos de localização* mais usados incluem o seguinte:

- Pino e arruela
- Porca e arruela
- Manga
- Ressalto de eixo
- Anel e sulco
- Parafuso de fixação
- Cubo partido ou cubo cônico de duas peças
- Colar e parafuso
- Pinos

Já discutimos alguns desses itens. O uso de um anel ajustado a um sulco de eixo é uma solução econômica para alguns problemas. Os sulcos são muito rasos; muitos dos estilos de anel disponíveis exercem uma força de mola contra o dispositivo a ser ancorado; além disso, os sulcos podem às vezes ser localizados onde o efeito do fator de concentração de tensão é pequeno ou sem importância.

A Figura 18-2(*d*) ilustra a utilização de um colar em que a sustentação é obtida apertando-se os parafusos de fixação contra o eixo. Um arranjo alternativo – e melhor – faz uso de um colar bipartido e de um parafuso para fixar o colar.

As Figuras 18-3 a 18-8 destinam-se a gerar idéias, ilustrando o modo como as características dos eixos se refletem em fixações.[1] Esses projetos exitosos, desenvolvidos e refinados ao longo de muitos anos, refletem ótimas práticas de projeto. Algumas das figuras do Capítulo 11 também auxiliam no desenvolvimento de bons projetos de eixos. Os catálogos e a literatura comercial incluem ilustrações e recomendações, levando a bom hábito de projeto.

[1] As Figuras 18-3 a 18-8 foram redesenhadas a partir de material fornecido por New Departure-Hyatt Division, General Motors Corporation.

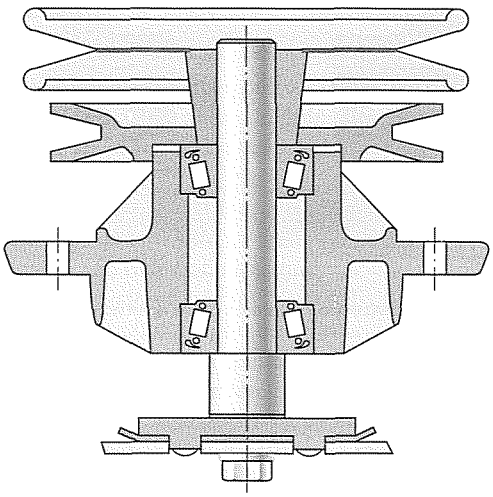


Figura 18-3 Mancais cônicos de rolo usados em um eixo curto de máquina de cortar grama. Esse projeto representa uma boa prática para a situação na qual um ou mais elementos de transferência de torque devem ser montados externamente. *(Fonte: Redesenhada a partir de material fornecido pela The Timken Company.)*

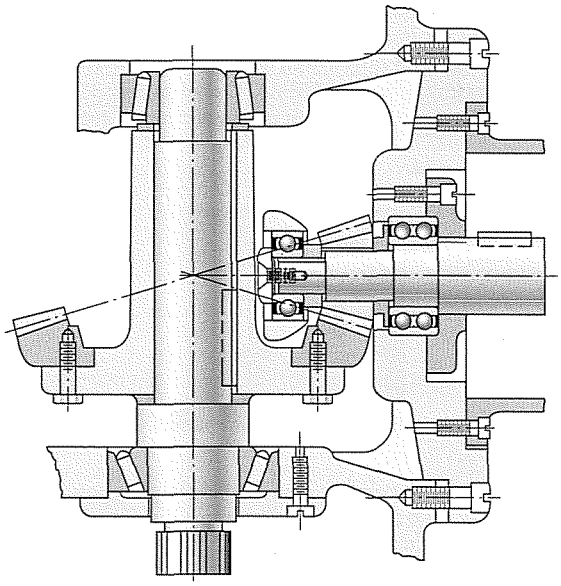


Figura 18-4 Uma transmissão de engrenagens cônicas (reta) na qual ambos, pinhão e engrenagem, são montados internamente. *(Fonte: Redesenhada a partir de material fornecido pela Gleason Machine Division.)*

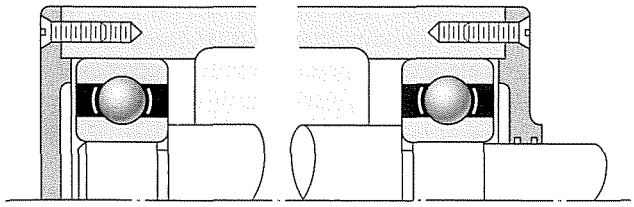


Figura 18-5 Arranjo mostrando o anel interno de mancal ajustado, mediante pressão, ao eixo, enquanto os anéis externos flutuam na caixa. A folga axial deve ser suficiente apenas para permitir vibrações da maquinaria. Observe o vedante de labirinto à direita.

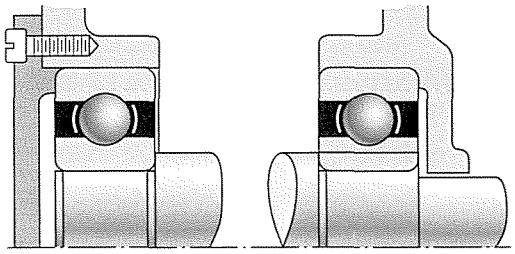


Figura 18-6 Similar ao arranjo da Figura 18-5, à exceção de que os anéis externos dos mancais são pré-carregados. Observe o uso de cunha de extremidade.

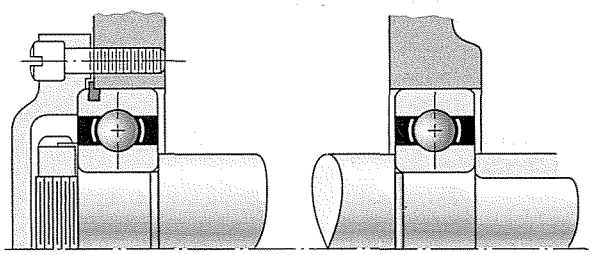


Figura 18-7 Neste arranjo, o anel interno do mancal esquerdo está bloqueado no eixo entre uma porca e um ressalto de eixo. A porca de aperto e a arruela são padronizadas conforme a AFBMA. O anel de pressão na pista externa é utilizado para localizar completamente a montagem do eixo na direção axial. Observe o mancal direito flutuando e os sulcos de retífica do eixo.

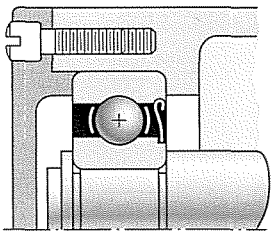


Figura 18-8 Este arranjo é similar ao da Figura 18-7, pelo fato de o mancal esquerdo posicionar a montagem completa de eixo. Nesse caso, o anel interno está preso ao eixo por meio de um anel de pressão. Observe o uso de uma blindagem para prevenir que a sujeira gerada dentro da máquina entre no mancal.

Um Plano para Atacar o Problema de Projeto de Eixo

Os conjuntos de decisão que encontramos até agora têm tido uma ou duas variáveis de decisão, e as restrições sobre elas têm sido freqüentemente ativadas (apertadas) quando concluímos. Um eixo é uma forma geométrica complicada, como você poderá observar após ler esta seção; pode apresentar meia dúzia de diâmetros diferentes e um número similar de comprimentos de ressalto a ressalto. Algumas das posições dos elementos a ele fixados podem envolver relações fixas ou variáveis às outras, e as localizações de mancais podem também ser variáveis de decisão. Rapidamente, podemos acumular uma dúzia dessas últimas.

Para ajudar a reduzir a dimensionalidade de uma dúzia de variáveis independentes a uma ou duas, podemos reconhecer que, se as restrições apertadas forem localizadas antecipadamente, o problema tornar-se-á bastante simplificado. Tal reconhecimento pode ser baseado na experiência ou em procedimentos que auxiliam quando a primeira estiver faltando. Um método de abordar o ótimo, concomitantemente à redução de dimensionalidade do problema, lida com as restrições funcionais associadas à deformação e à tensão. Iniciaremos com restrições de geometria relacionadas com deformação e, então, passaremos às restrições de resistência associadas a tensões críticas.

18-2 Restrições Geométricas

Considere as restrições geométricas para uma tarefa de projeto de eixo de transmissão. O primeiro passo consiste em dimensionar as engrenagens e polias para a velocidade e a potência especificadas. O diâmetro de raiz dos dentes de engrenagem ou sulco de polia, somado ao espaço radial necessário para um rasgo de chaveta, fixa uma restrição no tamanho de eixo. Com o tamanho de engrenagem e polia, as forças no sistema são fixadas. O segundo passo é selecionar mancais para prover vida adequada sob essas forças e velocidades. Após serem selecionados os mancais, a distância entre eles será definida. Ademais, para mancais de rolos, o furo de mancal impõe um limite ao tamanho de eixo. O terceiro passo corresponde a considerar a deflexão de eixo e tensão como delineado a seguir.

Em corpos materiais, a distorção é inevitável sob carga. Buscamos controlá-la de modo a evitar comprometer a funcionalidade. A inclinação de uma linha de centro de eixo, com respeito a uma de centro de anel externo de mancal de rolo, deve ser menor que 0,001 rad, para mancais de rolos cilíndricos, e menor que 0,0005 rad, para mancais de rolos cônicos. Similarmente, deve ser inferior a 0,004 rad, para mancais de rolos de sulco profundo e pista profunda, e, tipicamente, inferior a 0,0087 rad, para mancais de bolas esféricas. Em um engrenamento, a inclinação relativa admissível de duas engrenagens retas com dentes não-coroados deve ser mantida inferior a 0,0005 rad. Aparentemente, existem vários limites de sérias distorções em um eixo de transmissão de potência. O projetista dispõe de uma escolha entre projetar para resistência e verificar a distorção, ou projetar para distorção e verificar para resistência. A maioria dos eixos de transmissão de potência apresenta uma restrição ativa de distorção; assim, projetar para distorção e verificar para resistência é atrativo.

Em perspectiva, o primeiro movimento é o de encontrar um eixo de diâmetro uniforme que satisfaça a todas as restrições de distorção. Seguindo com as vantagens, visto que as restrições de inclinação de mancal costumam ser limitantes, primeiro consideramos a inclinação nos mancais do eixo simplesmente apoiado, ilustrado na Figura 18-9. Podemos utilizar as Tabelas A-9-6 e A-9-8 para desenvolver expressões para a inclinação nos mancais decorrente das cargas F_i e M_i. Assim, utilizando sobreposição, podemos somar os resultados de todas as cargas no eixo. Para o mancal esquerdo, as deflexões das tabelas do Apêndice A são

$$y_{AB} = \frac{F_i b_i x}{6EIl}\left(x^2 + b_i^2 - l^2\right) + \frac{M_i x}{6EIl}\left(x^2 + 3a_i^2 - 6a_i l + 2l^2\right)$$

Diferenciar para obter a inclinação e estabelecer $x = 0$ para o mancal esquerdo resulta em

$$\theta_A = \frac{1}{6EIl}\left[F_i b_i\left(b_i^2 - l^2\right) + M_i\left(3a_i^2 - 6a_i l + 2l^2\right)\right]$$

Se dispusermos de um número de forças concentradas e de momentos no plano xy, então, fazendo uso de sobreposição, somamos os resultados, obtendo

$$\theta_A = \frac{1}{6EIl}\sum\left[F_i b_i\left(b_i^2 - l^2\right) + M_i\left(3a_i^2 - 6a_i l + 2l^2\right)\right]$$

Considerando o plano xy como o plano vertical V e o plano xz como o plano horizontal H, para carregamento em ambos os planos, os resultados podem ser adicionados como vetores, de modo a prover

$$\theta_A = \frac{1}{6EIl}\left\{\left[\sum F_i b_i\left(b_i^2 - l^2\right) + \sum M_i\left(3a_i^2 - 6a_i l + 2l^2\right)\right]_H^2 + \left[\sum F_i b_i\left(b_i^2 - l^2\right) + \sum M_i\left(3a_i^2 - 6a_i l + 2l^2\right)\right]_V^2\right\}^{1/2}$$

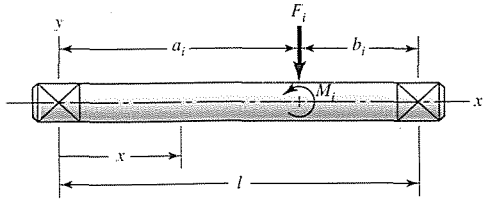


Figura 18-9 Eixo simplesmente apoiado, com força F_i e momento M_i aplicados.

Para um eixo sólido circular de diâmetro d, $I = \pi d^4/64$. Estabeleça $\theta_A = \theta_{all}$ como o valor absoluto da inclinação admissível no mancal e n_d como o fator de projeto. Assim, para a restrição de inclinação do mancal esquerdo,

$$d = \left| \frac{32 n_d}{3\pi E l \theta_{all}} \left\{ \left[\sum F_i b_i (b_i^2 - l^2) + \sum M_i (3a_i^2 - 6a_i l + 2l^2) \right]_H^2 + \left[\sum F_i b_i (b_i^2 - l^2) + \sum M_i (3a_i^2 - 6a_i l + 2l^2) \right]_V^2 \right\}^{1/2} \right|^{1/4} \tag{18-1}$$

De forma semelhante, para a restrição de inclinação do mancal direito,

$$d = \left| \frac{32 n_d}{3\pi E l \theta_{all}} \left\{ \left[\sum F_i a_i (l^2 - a_i^2) + \sum M_i (3a_i^2 - l^2) \right]_H^2 + \left[\sum F_i a_i (l^2 - a_i^2) + \sum M_i (3a_i^2 - l^2) \right]_V^2 \right\}^{1/2} \right|^{1/4} \tag{18-2}$$

Essas equações são dignas de programação.

EXEMPLO 18-1

O eixo de aço ilustrado na Figura 18-10 carrega duas engrenagens retas e dispõe de carregamento, como mostrado. Os mancais localizados em A e B serão mancais de rolos cilíndricos. A inclinação espacial de linha de centro nos mancais está limitada a 0,001 rad, com um fator de projeto de 1,5. Estime o diâmetro de um eixo uniforme que satisfaça às restrições de inclinação impostas pelos mancais.

Solução

A partir da Equação (18-1),

$$d = \left| \frac{32 n_d}{3\pi E l \theta_{all}} \left\{ [F_1 b_1 (b_1^2 - l^2)]_H^2 + [F_2 b_2 (b_2^2 - l^2)]_V^2 \right\}^{1/2} \right|^{1/4}$$

$$= \left| \frac{32(1{,}5)}{3\pi (30) 10^6 16 (0{,}001)} \left\{ [300(6)(6^2 - 16^2)]^2 + [1000(12)(12^2 - 16^2)]^2 \right\}^{1/2} \right|^{1/4}$$

Resposta

= 1,964 in

para a restrição de inclinação do mancal esquerdo. Para a restrição de inclinação do mancal direito, a partir da Equação (18-2),

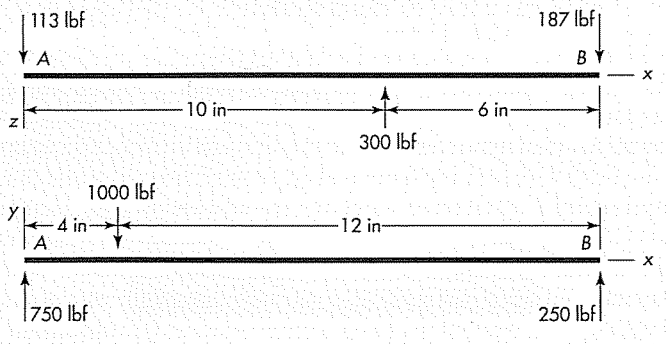


Figura 18-10 Um eixo contemplado deve carregar duas engrenagens cilíndricas de dentes retos entre os mancais A e B. Reações e carregamentos de engrenagem são mostrados em um plano. O eixo y é vertical, os outros dois são horizontais.

$$d = \left| \frac{32 n_d}{3\pi E l \theta_{\text{all}}} \left\{ \left[F_1 a_1 (l^2 - a_1^2) \right]_H^2 + \left[F_2 a_2 (l^2 - a_2^2) \right]_V^2 \right\}^{1/2} \right|^{1/4}$$

$$= \left| \frac{32(1{,}5)}{3\pi (30)(10)^6 16(0{,}001)} \left\{ \left[300(10)(16^2 - 10^2) \right]^2 + \left[1000(4)(16^2 - 4^2) \right]^2 \right\}^{1/2} \right|^{1/4}$$

Resposta

$= 1{,}835$ in

Esse cálculo inicial informa a um projetista que um eixo uniforme de diâmetro 1,964 in satisfará às restrições de inclinação do mancal. Para qualquer diminuição em diâmetro nos munhões de mancal e nos ressaltos, um aumento diametral deve ser realizado em assentos de engrenagem e ressaltos. O projetista tem uma idéia do "peso" do eixo, uma perspectiva útil.

Na Seção 5-4, vários métodos de deflexão de viga foram descritos. Para eixos escalonados, nos quais as deflexões podem ser buscadas em pontos diferentes, a integração fazendo uso de funções singulares ou de integração numérica é prática. Programas de elementos finitos também são aqui muito úteis.

Dados o diagrama de momento flexor e a geometria do eixo, a deflexão e a inclinação em vários pontos podem ser encontradas. Se, ao examinar as deflexões, qualquer valor encontrado for maior que a deflexão admissível y_{all}, um novo diâmetro poderá ser determinado a partir de

$$d_{\text{new}} = d_{\text{old}} \left| \frac{n_d y_{\text{old}}}{y_{\text{all}}} \right|^{1/4} \tag{18-3}$$

onde y_{all} admissível é a deflexão admissível naquela estação e n_d é o fator de projeto. Similarmente, se qualquer inclinação for maior do que a inclinação admissível θ_{all}, um um novo diâmetro pode ser determinado a partir de:

$$d_{\text{new}} = d_{\text{old}} \left| \frac{n_d (dy/dx)_{\text{old}}}{(\text{inclinação})_{\text{all}}} \right|^{1/4} \tag{18-4}$$

em que $(\text{inclinação})_{\text{all}}$ é a inclinação admissível. Como resultado desses cálculos, anote a maior razão $d_{\text{new}} / d_{\text{old}}$ e então multiplique *todos* os diâmetros por ela. A restrição apertada será igualmente apertada, e todas as outras serão folgadas. Não se preocupe muito com os tamanhos de munhão de extremidade, visto que a influência deles costuma ser insignificante. A beleza do método está em que as deflexões necessitam ser completadas somente uma vez e as restrições podem ser afrouxadas, à exceção de uma; os diâmetros, por sua vez, podem ser identificados sem recalcular todas as deflexões. Ademais, essas últimas e as inclinações são em geral exatas. O método presta-se à implementação por computador.

EXEMPLO 18-2

O eixo de aço mostrado na Figura 18-11(*a*) é sobressalente, em balanço no lado do mancal direito. Ele carrega duas engrenagens retas, uma em *B* e a outra em *D*. As forças radiais de 2000 e 1100 lbf situam-se no mesmo plano. O momento flexor *M*, o cisalhamento transversal *V* e o torque *T* apresentam distribuições como mostram as Figuras 18-11(*b*), 18-11(*c*) e 18-11(*d*), respectivamente. Ambas as engrenagens têm um passo diametral de 8; nem suas parceiras em engrenamento, nem detalhes acerca de seus tamanhos são mostrados. Devido ao uso de dentes não-coroados, as inclinações estão limitadas a 0,0005 rad em cada engrenagem. Para um fator de projeto $n_d = 1{,}5$, encontre o diâmetro de um eixo *uniforme* que evite as restrições nas engrenagens e aquelas decorrentes de mancais de rolo cilíndrico cuja utilização é esperada.

Solução

Para um diâmetro uniforme de 1 in,

$$6EIl = 6(30)10^6 \frac{\pi (1^4)}{64} 6 = 5{,}3014(10^7) \text{ lbf} \cdot \text{in}^3$$

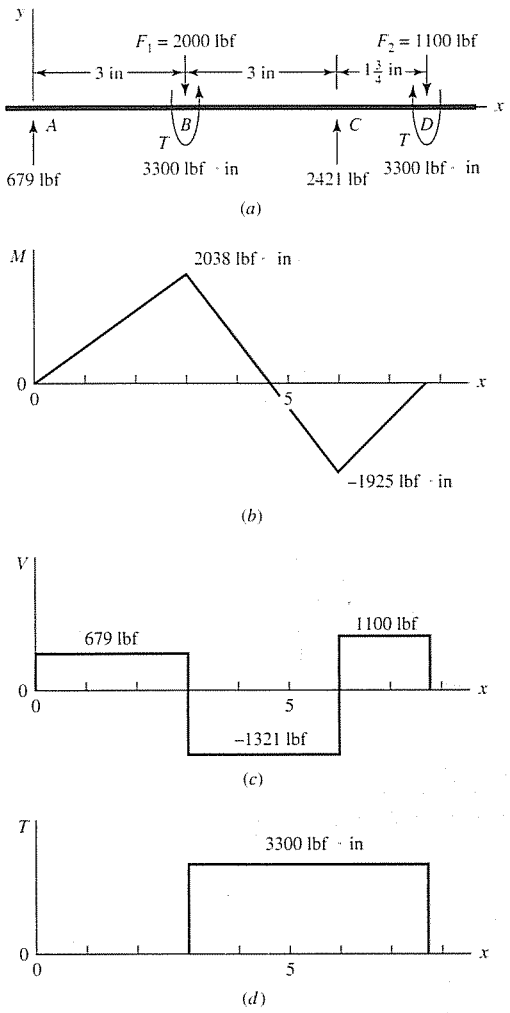


Figura 18-11 (*a*) Um eixo contemplado carregando duas engrenagens e transmitindo torque entre elas. As forças situam-se em um plano. (*b*) Diagrama de momento flexor. (*c*) Diagrama de cisalhamento transversal. (*d*) Diagrama de torque.

Como no desenvolvimento das Equações (18-1) e (18-2), à exceção de que as Tabelas A-9-6 e A-9-10 são utilizadas,

$$y_{AB} = \frac{2000(3)x}{5{,}3014(10^7)}(x^2 + 3^2 - 6^2) + \frac{1100(1{,}75)x}{5{,}3014(10^7)}(6^2 - x^2)$$

$$= 7{,}6866(10^{-5})x^3 - 1{,}7486(10^{-3})x \text{ in}$$

$$\theta_{AB} = \frac{2000(3)}{5{,}3014(10^7)}(3x^2 + 3^2 - 6^2) + \frac{1100(1{,}75)}{5{,}3014(10^7)}(6^2 - 3x^2)$$

$$= 2{,}306(10^{-4})x^2 - 1{,}7486(10^{-3}) \text{ rad}$$

$$y_{BC} = \frac{2000(3)(6 - x)}{5{,}3014(10^7)}[x^2 + 3^2 - 2(6)x] + \frac{1100(1{,}75)x}{5{,}3014(10^7)}(6^2 - x^2)$$

$$= -1{,}4949(10^{-4})x^3 + 2{,}0372(10^{-3})x^2 - 7{,}8601(10^{-3})x + 6{,}1115(10^{-3}) \text{ in}$$

$$\theta_{BC} = \frac{2000(3)}{5{,}3014(10^7)}[-3x^2 + 6(6)x - 2(6^2) - 3^2] + \frac{1100(1{,}75)}{5{,}3014(10^7)}(6^2 - 3x^2)$$

$$= -4{,}4846(10^{-4})x^2 + 4{,}0744(10^{-3})x - 7{,}8601(10^{-3}) \text{ rad}$$

A deflexão da viga A-9-6 para $x \geq l$ é a sua inclinação em l multiplicada por $(x - l)$. Logo,

$$y_{CD} = \frac{2000(3)}{5{,}3014(10^7)}[-3(6^2) + 6(6)6 - 2(6^2) - 3^2](x - 6)$$

$$+ \frac{1100(x - 6)6}{5{,}3014(10^7)}[(x - 6)^2 - 1{,}75(3x - 6)]$$

$$= 1{,}24495(10^{-4})x^3 - 2{,}8945(10^{-3})x^2 + 2{,}173(10^{-2})x - 5{,}3069(10^{-2}) \text{ in}$$

$$\theta_{CD} = \frac{2000(3)}{5{,}3014(10^7)}[-3(6^2) + 6(6)6 - 2(6^2) - 3^2]$$

$$+ \frac{1100(6)}{5{,}3014(10^7)}\{3(x - 6)^2 - 1{,}75[6x - 4(6)]\}$$

$$= 3{,}7349(10^{-4})x^2 - 5{,}789(10^{-3})x + 2{,}173(10^{-2}) \text{ rad}$$

Os deslocamentos e as inclinações em A, B, C e D estão tabelados a seguir.

Posição, in	y, in	θ, rad
$A\ (x = 0)$	0	−0,0017486
$B\ (x = 3)$	−0,003170	0,0003268
$C\ (x = 6)$	0	0,0004414
$D\ (x = 7{,}75)$	−0,0005620	−0,0007024

Inclinação de mancal: a partir da Equação (18-4), com os subscritos de d identificando a localização de posição,

$$d_A = 1\left|\frac{1{,}5(-0{,}001\,749)}{0{,}001}\right|^{1/4} = 1{,}273 \text{ in}$$

$$d_C = 1\left|\frac{1{,}5(0{,}000\,4414)}{0{,}001}\right|^{1/4} = 0{,}902 \text{ in}$$

Inclinação em engrenagens acopladas: a partir da Equação (18-4),

$$d_B = 1\left|\frac{1{,}5(0{,}000\,3268}{0{,}0005}\right|^{1/4} = 0{,}995 \text{ in}$$

$$d_D = 1\left|\frac{1{,}5(-0{,}000\,7024)}{0{,}0005}\right|^{1/4} = 1{,}205 \text{ in}$$

Distância de centro a centro: para engrenagens de passo diametral 8, a expansão da distância de centro a centro em engrenagens de qualidade comercial é de 0,010 in. Dividiremos esta entre engrenagens engrenadas, tornando a deflexão transversal admissível 0,005 in. A partir da Equação (18-3),

$$d_B = 1\left|\frac{1{,}5(-0{,}003\,170)}{0{,}005}\right|^{1/4} = 0{,}988 \text{ in}$$

$$d_D = 1\left|\frac{1{,}5(-0{,}0005620)}{0{,}005}\right|^{1/4} = 0{,}641 \text{ in}$$

O diâmetro de eixo, mantendo todas essas restrições folgadas, exceto uma, é de 1,273 in. Também sabemos que a restrição apertada (com uma margem de 1,5) é o desalinhamento de mancal à esquerda (mancal A).

O cisalhamento transversal V em uma secção de uma viga em flexão impõe uma deflexão de cisalhamento, a qual é sobreposta à deflexão de flexão. Normalmente, tal deflexão de cisalhamento é inferior a 1% da deflexão transversal de flexão – sendo raramente avaliada. Contudo, quando uma razão de comprimento para diâmetro de eixo menor que 10 existe, a componente de cisalhamento da deflexão transversal merece atenção. Existem muitos eixos curtos. Um método tabular[2] é explicado detalhadamente, com exemplos em outro lugar. O método presta-se à implementação computacional.

Para eixos cilíndricos circulares retos em torção, a deflexão angular θ é fornecida na Equação (5-5). Para um eixo escalonado com comprimento individual de cilindro l_i e torque T_i, a deflexão angular pode ser estimada a partir de

$$\theta = \sum \theta_i = \sum \frac{T_i l_i}{G_i J_i} \tag{18-5}$$

ou, para um torque constante através de material homogêneo, a partir de

$$\theta = \frac{T}{G} \sum \frac{l_i}{J_i} \tag{18-6}$$

Se a rigidez torcional é definida como $k_i = T_i/\theta_i$ e, visto que $\theta_i = T_i / k_i$ e $\theta = \Sigma\theta_i = \Sigma(T_i / k_i)$, para torque constante $\theta = T\Sigma(1/k_i)$, segue-se que a rigidez do eixo k, em termos das rigidezes de segmento, é

$$\frac{1}{k} = \sum \frac{1}{k_i} \tag{18-7}$$

Observe que a Equação (18-5) não é precisa, uma vez que a evidência experimental mostra que θ é maior que aquele fornecido pela Equação (18-5).[3]

18-3 Restrições de Resistência

Para carregamento estático, ou quase estático, o leitor deve consultar a Seção 6-12.

Nesta seção, examinaremos a resistência à fadiga de eixos, utilizando os modelos de falha de energia de distorção com curva de Gerber e de energia de distorção com curva elíptica. Esses dois modelos de falha se ajustam melhor aos dados. Outros métodos, ainda empregados na prática, serão discutidos na próxima seção. As análises serão apresentadas sob condições determinísticas (para análise estocástica, o leitor é convidado a rever a Seção 7-17).

Qualquer eixo rotante carregado por momentos flexor e de torção estacionários será tensionado em flexão completamente inversa, devido à rotação do eixo, ao passo que as tensões de torção serão constantes. Utilizando os subscritos a, para a amplitude de tensão alternante σ_a, e m, para a tensão de meio de intervalo, média ou permanente, fixa como em τ_{xym}, podemos expressar as componentes de tensão como

$$\sigma_a = \frac{32M_a}{\pi d^3} \tag{18-8}$$

$$\tau_{xym} = \frac{16T_m}{\pi d^3} \tag{18-9}$$

Expressando a componente média como a tensão normal de von Mises, obtemos

[2] C. R. Mischke, "Tabular Method for Transverse Shear Deflection", Sec. 37.3 em Joseph E. Shigley e Charles R. Mischke (eds-in-chief), *Standard Handbook of Machine Design*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1966.

[3] R. Bruce Hopkins, *Design Analysis of Shafts and Beams*, McGraw-Hill, New York, 1970, p. 93-99.

$$\sigma'_a = \sigma_{xa} \tag{18-10}$$

$$\sigma'_m = \sqrt{3}\tau_{xym} \tag{18-11}$$

Depois que o ajuste de curva a ser usado é determinado, o critério de falha de fadiga é traçado no diagrama de fadiga do projetista, sem os dados, como representado na Figura 18-12. A curva divide o plano em uma área "segura" (abaixo da curva) e uma área insegura (acima da curva).

A curva de falha de fadiga de Gerber passa entre os pontos de ensaio de fadiga e pode ser usada, com muito sucesso, como uma linha de regressão. As chances estatísticas de estar abaixo da curva podem ser estimadas a partir dos dados, e a chance de uma falha por fadiga pode ser quantificada. A curva de Gerber é utilizada em conjunção com a curva de Langer (escoamento de primeiro ciclo), e a função "tipo perna de cachorro" é denominada curva de falha Gerber-Langer. A curva de falha por fadiga elíptica da ASME igualmente passa através dos dados e pode também ser utilizada como uma linha de regressão. As chances estatísticas de estar abaixo da linha podem ser estimadas a partir dos dados, e a chance de uma fadiga pode ser quantificada. A norma ANSI/ASME B106.1M-1985, segunda impressão, é a norma da ASME para eixos. As curvas Gerber-Langer e ASME elíptica com Langer oferecem as melhores predições de falha por fadiga.

A Tabela 18-1 apresenta as relações entre tensão, resistência e fator de projeto (fator de segurança) para alguns modelos. Quando S_a é substituído por $n\sigma_a$ e S_m por $n\sigma_m$, a equação para a curva de falha é obtida para exibição no diagrama de fadiga do projetista.

A condição de tensão na posição crítica descrita por σ_a e σ_m pode ser traçada junto com a linha de carga sobre a qual ela tem seu movimento restringido (se acaso se mover). Esse ponto ajuda a completar a imagem visual.

A literatura (livros-texto, manuais, publicações técnicas e literatura industrial) concernente a eixos apresenta uma ampla série de equações. Em uma análise de engenharia, um *critério de falha* é empregado. Um nome é associado a cada um. Uma equação exibida utiliza o nome na forma adjetiva – por exemplo, critério de falha Gerber ou critério de falha Gerber-Langer. Além disso, se as componentes de tensão forem componentes de von Mises, elas serão identificadas como Von Mises (ou Henckey), ou simplesmente chamadas de energia de distorção (facilmente abreviadas como DE), como em DE-Gerber. Somente por meio de atenção ao vocabulário podemos comunicar informação essencial com precisão. O título curto indica a tensão significativa (a teoria de falha), e então é acrescido um hífen, seguido por um nome de local geométrico de falha (modelo de dados de fadiga). As equações geralmente não conseguem falar por si mesmas.

Equação de Diâmetro de Eixo para o Critério DE-Gerber

A componente de amplitude de tensão de von Mises σ'_a e a componente de tensão média σ'_m são fornecidas por

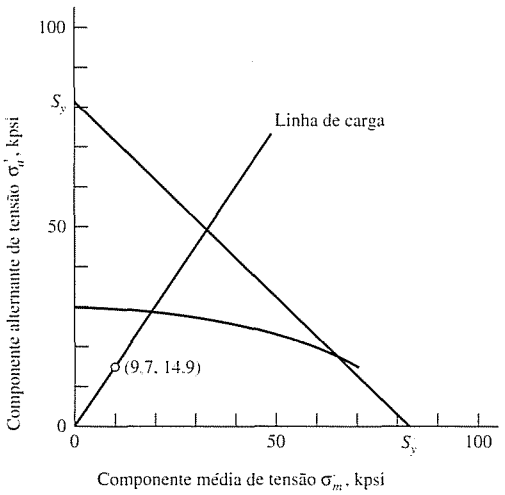


Figura 18-12 O diagrama de falha por fadiga do projetista para o Exemplo 18-3. O *locus* de falha por fadiga é o DE-elíptico. As componentes de condição de tensão para o ressalto são mostradas juntamente com a linha de carga.

Tabela 18-1 Critérios de resistência à fadiga de eixos

Critério de falha	Fórmula básica
Soderberg	$\frac{n\sigma_a}{S_e} + \frac{n\sigma_m}{S_y} = 1$
Goodman	$\frac{n\sigma_a}{S_e} + \frac{n\sigma_m}{S_{ut}} = 1$
Gerber	$\frac{n\sigma_a}{S_e} + \left(\frac{n\sigma_m}{S_{ut}}\right)^2 = 1$
ASME-elíptico	$\left(\frac{n\sigma_a}{S_e}\right)^2 + \left(\frac{n\sigma_m}{S_y}\right)^2 = 1$
Yelding (Langer)	$\frac{n}{S_y}(\sigma_a + \sigma_m) = 1$

Nota: A substituição de S_a por $n\sigma_a$ e de S_m por $n\sigma_m$ produz um *locus* inteiramente em termos de resistências.

$$\sigma'_a = \left(\sigma_{xa}^2 + 3\tau_{xya}^2\right)^{1/2} = \frac{16}{\pi d^3}\sqrt{4(K_f M_a)^2 + 3(K_{fs}T_a)^2} = \frac{16A}{\pi d^3}$$
$$\sigma'_m = \left(\sigma_{xm}^2 + 3\tau_{xym}^2\right)^{1/2} = \frac{16}{\pi d^3}\sqrt{4(K_f M_m)^2 + 3(K_{fs}T_m)^2} = \frac{16B}{\pi d^3} \tag{18-12}$$

em que A e B são definidas pelos radicais nas Equações (18-12). O critério de falha por fadiga de Gerber é definido por

$$\frac{S_a}{S_e} + \left(\frac{S_m}{S_{ut}}\right)^2 = \frac{n\sigma'_a}{S_e} + \left(\frac{n\sigma'_m}{S_{ut}}\right)^2 = \frac{16nA}{\pi d^3 S_e} + \left(\frac{16nB}{\pi d^3 S_{ut}}\right)^2 = 1$$

Solucionando para o diâmetro d, obtemos

$$d = \left(\frac{8nA}{\pi S_e}\left\{1 + \left[1 + \left(\frac{2BS_e}{AS_{ut}}\right)^2\right]^{1/2}\right\}\right)^{1/3} \tag{18-13}$$

ou, solucionando para $1/n$,

$$\frac{1}{n} = \frac{8A}{\pi d^3 S_e}\left\{1 + \left[1 + \left(\frac{2BS_e}{AS_{ut}}\right)^2\right]^{1/2}\right\} \tag{18-14}$$

em que

$$A = \sqrt{4(K_f M_a)^2 + 3(K_{fs}T_a)^2} \qquad B = \sqrt{4(K_f M_m)^2 + 3(K_{fs}T_m)^2}$$
$$r = \sigma'_a/\sigma'_m = A/B \tag{18-15}$$

Expressões para d ou $1/n$ são construídas para o problema em mãos, calculando-se A e B e então substituindo nas Equações (18-13) e (18-14). Por exemplo, com $M_m = 0$ e $T_a = 0$,

$$A = 2K_f M_a \qquad B = \sqrt{3}K_{fs}T_m$$

e as equações precedentes tornam-se

$$d = \left(\frac{16nK_f M_a}{\pi S_e}\left\{1 + \left[1 + 3\left(\frac{K_{fs}T_m S_e}{K_f M_a S_{ut}}\right)^2\right]^{1/2}\right\}\right)^{1/3} \tag{18-16}$$

$$\frac{1}{n} = \frac{16K_f M_a}{\pi d^3 S_e}\left\{1 + \left[1 + 3\left(\frac{K_{fs} T_m S_e}{K_f M_a S_{ut}}\right)^2\right]^{1/2}\right\} \tag{18-17}$$

$$r = \frac{\sigma'_a}{\sigma'_m} = \frac{2K_f M_a}{\sqrt{3} K_{fs} T_m} \tag{18-18}$$

Equação de Diâmetro de Eixo para o Critério DE-Elíptico

As definições prévias para σ'_a, σ'_m, A e B aplicam-se. O critério de falha por fadiga elíptico é definido por

$$\left(\frac{S_a}{S_e}\right)^2 + \left(\frac{S_m}{S_y}\right)^2 = \left(\frac{n\sigma'_a}{S_e}\right)^2 + \left(\frac{n\sigma'_m}{S_y}\right)^2 = \left(\frac{16nA}{\pi d^3 S_e}\right)^2 + \left(\frac{16nB}{\pi d^3 S_y}\right)^2 = 1$$

Solucionando para o diâmetro d, obtemos

$$d = \left(\frac{16n}{\pi}\sqrt{\frac{A^2}{S_e^2} + \frac{B^2}{S_y^2}}\right)^{1/3}$$

A substituição de A e B provê expressões para d, $1/n$ e r:

$$d = \left\{\frac{16n}{\pi}\left[4\left(\frac{K_f M_a}{S_e}\right)^2 + 3\left(\frac{K_{fs} T_a}{S_e}\right)^2 + 4\left(\frac{K_f M_m}{S_y}\right)^2 + 3\left(\frac{K_{fs} T_m}{S_y}\right)^2\right]^{1/2}\right\}^{1/3} \tag{18-19}$$

$$\frac{1}{n} = \frac{16}{\pi d^3}\left[4\left(\frac{K_f M_a}{S_e}\right)^2 + 3\left(\frac{K_{fs} T_a}{S_e}\right)^2 + 4\left(\frac{K_f M_m}{S_y}\right)^2 + 3\left(\frac{K_{fs} T_m}{S_y}\right)^2\right]^{1/2} \tag{18-20}$$

$$r = \frac{\sigma'_a}{\sigma'_m} = \frac{A}{B} = \sqrt{\frac{4(K_f M_a)^2 + 3(K_{fs} T_a)^2}{4(K_f M_m)^2 + 3(K_{fs} T_m)^2}}$$

Para o caso em que $M_m = 0$ e $T_a = 0$, as relações precedentes tornam-se

$$d = \left\{\frac{16n}{\pi}\left[4\left(\frac{K_f M_a}{S_e}\right)^2 + 3\left(\frac{K_{fs} T_m}{S_y}\right)^2\right]^{1/2}\right\}^{1/3} \tag{18-21}$$

$$\frac{1}{n} = \frac{16}{\pi d^3}\left[4\left(\frac{K_f M_a}{S_e}\right)^2 + 3\left(\frac{K_{fs} T_m}{S_y}\right)^2\right]^{1/2} \tag{18-22}$$

$$r = \frac{\sigma'_a}{\sigma'_m} = \frac{2K_f M_a}{\sqrt{3} K_{fs} T_m}$$

Em um ressalto, as Figuras A-15-8 e A-15-9 provêem informação acerca de K_t e K_{ts}. Para um orifício em um eixo sólido, as Figuras A-15-10 e A-15-11 fornecem informação sobre K_t e K_{ts}. Para um orifício em um eixo sólido, utilize a Tabela A-16. Para sulcos, utilize as Figuras A-15-14 e A-15-15.

O valor da inclinação na qual a linha de carga intercepta a junção das curvas de falha é designado por r_{crit}. Ele nos indica se a ameaça é de fadiga ou de escoamento de primeiro ciclo. Se $r > r_{crit}$, a ameaça é de fadiga; se $r < r_{crit}$, a ameaça é de escoamento de primeiro ciclo. Para a intersecção Gerber-Langer, as componentes de resistência S_a e S_m são fornecidas, na Tabela 7-10, como

$$S_m = \frac{S_{ut}^2}{2S_e}\left[1 - \sqrt{1 + \left(\frac{2S_e}{S_{ut}}\right)^2\left(1 - \frac{S_y}{S_e}\right)}\right]$$

$$S_a = S_y - S_m \tag{18-23}$$

$$r_{\text{crit}} = \frac{S_a}{S_m} = \frac{S_y - S_m}{S_m}$$

Para a intersecção DE-elíptica-Langer,

$$S_a = \frac{2S_y S_e^2}{S_e^2 + S_y^2}$$

$$S_m = S_y - S_a \tag{18-24}$$

$$r_{\text{crit}} = \frac{S_a}{S_m} = \frac{S_a}{S_y - S_a}$$

Como visto no Exemplo 18-3, o DE-ASME-elíptico apresenta uma complicação que envolve o uso de S_y em vez de S_{ut}. Uma comparação direta com outros métodos não é possível sem o conhecimento de S_y/S_{ut}. No domínio da maioria dos eixos de transmissão de potência, o ASME-elíptico usa uma curva de falha de fadiga que é praticamente coincidente com a curva de Gerber na porção esquerda, na qual a maioria dos eixos de transmissão de potência tem seu ponto de operação no diagrama de fadiga do projetista. Nesse domínio, podem-se utilizar o DE-Gerber ou o DE-ASME-elíptico, com praticamente os mesmos resultados.

EXEMPLO 18-3

Em um ressalto usinado de eixo, o diâmetro menor d é de 1,100 in, o diâmetro maior D é de 1,65 in e o raio do filete é de 0,11 in. O momento flexor é de 1260 lbf · in, e o momento permanente de torção é de 1100 lbf · in. O eixo de aço termotratado apresenta uma resistência final de $S_{ut} = 105$ kpsi e uma resistência ao escoamento de $S_y = 82$ kpsi. A meta de confiabilidade é de 0,99.

(*a*) Determine o fator de segurança à fadiga do projeto utilizando o critério DE-elíptico.

(*b*) Determine o fator de segurança à fadiga do projeto utilizando o critério DE-Gerber.

(*c*) Trace o diagrama de fadiga do projetista para *(a)*.

Solução

(*a*) $D/d = 1{,}65/1{,}100 = 1{,}50$, $r/d = 0{,}11/1{,}100 = 0{,}10$, $Kt = 1{,}68$ (Figura A-15-9), $K_{ts} = 1{,}42$ (Figura A-15-8). Então, a partir da Equação (7-35),

$$K_f = \frac{1{,}68}{1 + \dfrac{2(1{,}68 - 1)}{1{,}68}\dfrac{4/105}{\sqrt{0{,}11}}} = 1{,}54$$

$$K_{fs} = \frac{1{,}42}{1 + \dfrac{2(1{,}42 - 1)}{1{,}42}\dfrac{4/105}{\sqrt{0{,}11}}} = 1{,}33$$

Equação (7-8): $S'_e = 0{,}504(105) = 52{,}92$ kpsi

Equação (7-18): $k_a = 2{,}70(105)^{-0{,}265} = 0{,}787$

Equação (7-19): $k_b = \left(\dfrac{1{,}100}{0{,}30}\right)^{-0{,}107} = 0{,}870$

$$k_c = k_d = k_f = 1$$

Tabela 7-7: $k_e = 0{,}814$

$$S_e = 0{,}787(0{,}870)0{,}814(52{,}92) = 29{,}49 \text{ kpsi}$$

$$r = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1{,}54}{1{,}33}\frac{1260}{1100} = 1{,}53$$

Resposta Equação (18-22):
$$\frac{1}{n} = \frac{16}{\pi(1{,}1)^3}\left\{4\left[\frac{1{,}54(1260)}{29\,490}\right]^2 + 3\left[\frac{1{,}33(1100)}{82\,000}\right]^2\right\}^{1/2} = 0{,}517$$

$$n = 1{,}93$$

(*b*) A partir da Equação (18-17),

$$\frac{1}{n} = \frac{16(1{,}54)1260}{\pi(1{,}1^3)29\,490}\left\{1 + \sqrt{1 + 3\left[\frac{1{,}33(1100)29\,490}{1{,}54(1260)105\,000}\right]}\right\} = 0{,}574$$

Resposta
$$n = 1{,}74$$

(*c*)
$$\sigma_a' = \frac{32(1{,}54)1260}{\pi(1{,}1)^3} = 14\,850 \text{ psi}$$

$$\sigma_m' = \frac{16\sqrt{3}(1{,}33)1100}{\pi(1{,}1)^3} = 9696 \text{ psi}$$

Equação (18-28):
$$S_a = \frac{2(82\,000)29\,490^2}{29\,490^2 + 82\,000^2} = 18\,780 \text{ psi}$$

$$S_m = 82\,000 - 18\,780 = 63\,220 \text{ psi}$$

$$r_{\text{crit}} = \frac{18\,780}{63\,220} = 0{,}297$$

O diagrama de fadiga do projetista é visto na Figura 18-12. O local geométrico de fadiga é traçado a partir de $(S_a/29{,}5)^2 + (S_m/82)^2 = 1$.

Se escrevermos o critério de falha de Gerber como

$$\frac{S_a}{S_e} + \left(\frac{S_m}{S_{ut}}\right)^2 = 1$$

e o critério de falha ASME-elíptico como

$$\left(\frac{S_a}{S_e}\right)^2 + \left(\frac{S_m}{S_{ut}}\frac{S_{ut}}{S_y}\right)^2 = 1$$

e então igualarmos S_a/S_e a partir de ambas as expressões, a equação resultante será

$$\left(\frac{S_m}{S_{ut}}\right)^4 + \left(\frac{S_m}{S_{ut}}\right)^2\left[\left(\frac{S_{ut}}{S_y}\right)^2 - 2\right] = 0$$

a partir da qual as coordenadas S_m dos pontos de intersecção das duas curvas serão

$$\frac{S_m}{S_{ut}} = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{S_m}{S_{ut}} = \sqrt{2 - \left(\frac{S_{ut}}{S_y}\right)^2}$$

A primeira intersecção ocorre em $S_a = S_e$ e $S_m = 0$. A segunda ocorre se $S_{ut}/S_y < \sqrt{2}$. Em outras palavras, se S_{ut}/S_m é menor que $\sqrt{2}$, o local geométrico da ASME está acima do de Gerber e então cruza na abscissa não-nula fornecida. Se S_{ut}/S_y é $> \sqrt{2}$, então não existe cruzamento (real), e o ASME-elíptico está abaixo do Gerber para $S_m > 0$. Para o Exemplo 18-3, $S_{ut}/S_y = 105/82 = 1{,}28$, que é menor que $\sqrt{2}$. Logo, a curva ASME está acima da de Gerber, explicando por que o fator de segurança foi maior para a ASME do que para Gerber, no exemplo.

Flexão Variável Combinada e Torção Variável

Quando os ensaios são executados com tensão de flexão variável σ_a e tensão de torção variável τ_a, em fase, os resultados são traçados como mostra a Figura 18-13(*b*). Para as coordenadas normalizadas da figura, os dados caem proximamente a um arco circular, que seria um arco elíptico em um diagrama $\sigma_a \tau_a$. A elipse de ensaio de falha é expressa como

$$\left(\frac{\sigma_a}{S_e}\right)^2 + \left(\frac{\tau_a}{S_{se}}\right)^2 = \frac{1}{n^2}$$

Substituindo $\sigma_a = 32M_a/(\pi d^3)$, $\tau_a = 16T_a/(\pi d^3)$, $S_{se} = S_e/\sqrt{3}$ e incluindo os fatores de concentração de tensão de fadiga K_f e K_{fs}, associados multiplicativamente a suas tensões nominais, obtemos o diâmetro d como

$$d = \left\{\frac{16n}{\pi S_e}\left[4(K_f M_a)^2 + 3(K_{fs} T_a)^2\right]^{1/2}\right\}^{1/3} \tag{18-25}$$

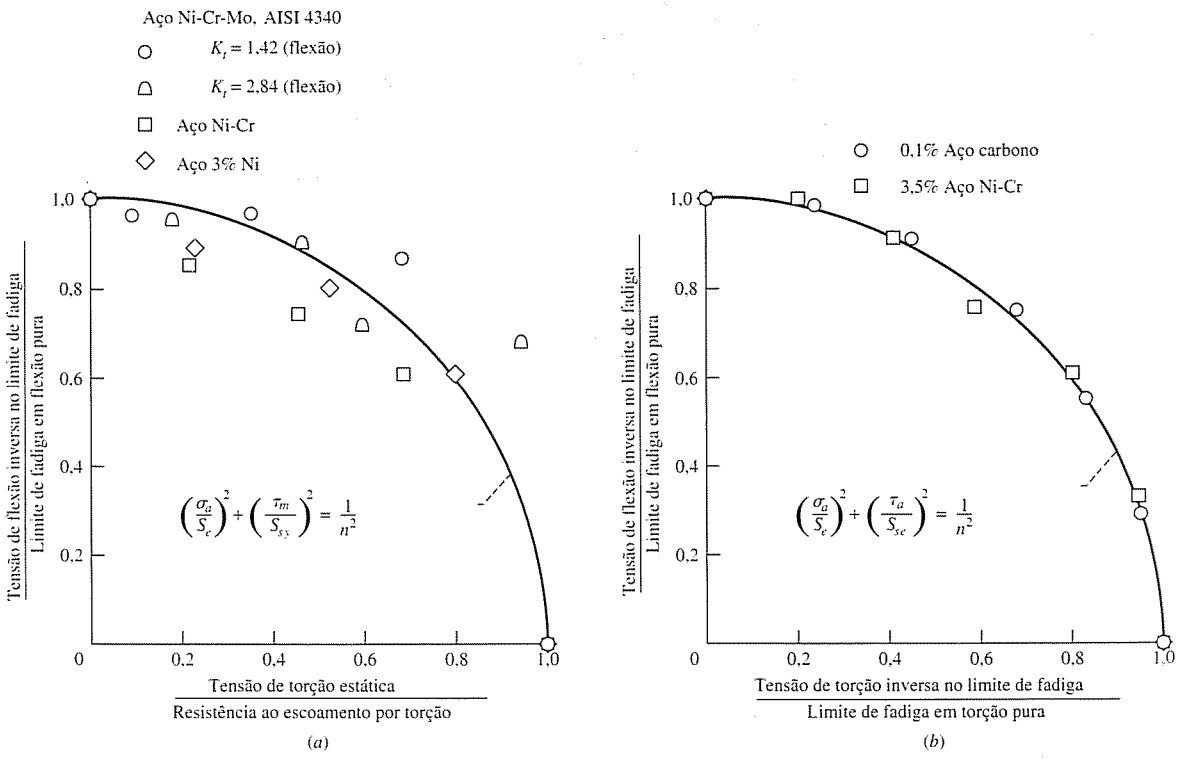


Figura 18-13 Diagramas normalizados de falha por fadiga do projetista com dados de ensaio para (*a*) flexão inversa, oposta e com torção fixa (modelo DE-elíptico) e (*b*) flexão inversa, oposta e com torção inversa, oposta em fase. *(Fonte: ANSI/ASME Standard B106.1.M-1985, segunda impressão, "Design of Transmission Shafting".)*

Ademais, a solução para $1/n$ provê

$$\frac{1}{n} = \frac{16}{\pi d^3 S_e}\left[4(K_f M_a)^2 + 3(K_{fs} T_a)^2\right]^{1/2} \tag{18-26}$$

Essas mesmas equações podem ser obtidas simplificando-se as Equações (18-19) e (18-20) do DE-elíptico, bem como as Equações (18-13) e (18-14) do DE-Gerber com $B = 0$. Ambas as equações de fadiga concordam exatamente porque $r \to \infty$. As Equações (18-13) e (18-14), para o DE-Gerber, e as Equações (18-19) e (18-20), para o DE-elíptico, constituem casos gerais que podem ser simplificados para uma aplicação particular.

18-4 Restrições de Resistência – Métodos Adicionais

Na seção anterior, os critérios de falha por fadiga DE-Gerber e ASME-elíptico foram caracterizados somente porque são considerados os mais precisos na previsão de falhas. A Figura 18-14 mostra algumas curvas de falha de fadiga traçadas em escala para o mesmo material. As curvas rotuladas *C* e *D* são as curvas de falha por fadiga DE-Gerber e DE-elíptico. Observe que a curva de Gerber cruza a de Langer uma vez e que a curva elíptica a cruza duas vezes. As equações para Soderberg e Goodman foram apresentadas na Tabela 18-1. Suas curvas são também ilustradas, na Figura 18-14, como curvas *A* e *B*, respectivamente. Elas parecem ser mais conservadoras que os critérios Gerber e elíptico. Embora não tenham sido discutidos na seção precedente, esses métodos são empregados em algumas comunidades de projeto. Por tal razão, eles são aqui apresentados.

Soderberg

Considere um eixo com tensões de flexão σ_a, σ_m e tensões de cisalhamento por torção τ_a, τ_m. Levando em conta tão-somente a flexão, a linha de resistência de Soderberg é dada por

$$\frac{\sigma_m}{S_y} + \frac{\sigma_a}{S_e} = \frac{1}{n}$$

Multiplicando ambos os lados por S_y, obtemos uma tensão normal estática equivalente σ_e,

$$S_y = \sigma_e = n\left(\sigma_m + \frac{S_y}{S_e}\sigma_a\right) \tag{a}$$

Repetindo isso, levando em conta somente a torção, obtemos

$$\tau_e = n\left(\tau_m + \frac{S_y}{S_e}\tau_a\right) \tag{b}$$

em que se assume que $S_{sy}/S_{se} = S_y/S_e$. A tensão máxima de cisalhamento para um elemento contendo uma tensão normal e uma de cisalhamento é fornecida por

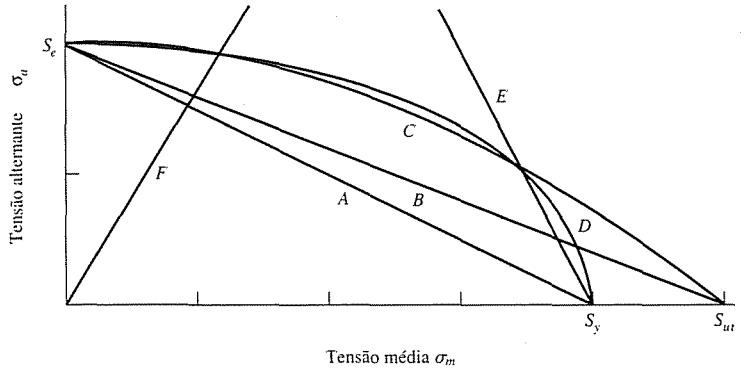


Figura 18-14 Um diagrama de fadiga de projetista desenhado sob escala, para mostrar as relações entre alguns modelos de fadiga bem conhecidos. *A*, Soderberg; *B*, Goodman; *C*, Gerber; *D*, ASME-elíptico; *E*, *locus* de escoamento de primeiro ciclo; *F*, linha de carga. Observe que o *locus* de Langer, curva *E*, realiza um ângulo de 45° com a abscissa apenas quando as escalas de ordenadas e abscissas são idênticas.

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_e}{2}\right)^2 + \tau_e^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_e^2 + 4\tau_e^2} \tag{c}$$

A falha, de acordo com a teoria da tensão máxima de cisalhamento (MSS), ocorre quando $\tau_{max} = S_y/2$. Reunindo isso com as Equações (*a*), (*b*) e (*c*), e rearranjando, obtemos

$$\left[\left(\sigma_m + \frac{S_y}{S_e}\sigma_a\right)^2 + 4\left(\tau_m + \frac{S_y}{S_e}\tau_a\right)^2\right]^{1/2} = \frac{S_y}{n} \tag{d}$$

Para um eixo circular sólido em flexão e torção, $\sigma = 32K_f M/(\pi d^3)$ e $\tau = 16K_{fs}T/(\pi d^3)$. Utilizando essas relações e dividindo a Equação (*d*) por S_y, obtemos

$$\frac{1}{n} = \frac{32}{\pi d^3}\left[K_f^2\left(\frac{M_m}{S_y} + \frac{M_a}{S_e}\right)^2 + K_{fs}^2\left(\frac{T_m}{S_y} + \frac{T_a}{S_e}\right)^2\right]^{1/2} \tag{18-27}$$

ou, se solucionarmos para *d*,

$$d = \left\{\frac{32n}{\pi}\left[K_f^2\left(\frac{M_m}{S_y} + \frac{M_a}{S_e}\right)^2 + K_{fs}^2\left(\frac{T_m}{S_y} + \frac{T_a}{S_e}\right)^2\right]^{1/2}\right\}^{1/3} \tag{18-28}$$

A Equação (18-28) é às vezes referida (talvez de uma forma menos completa) como *fórmula de código Westinghouse*. Novamente, um problema comum ocorre quando $M_m = T_a = 0$, e as Equações (18-27) e (18-28) tornam-se

$$\frac{1}{n} = \frac{32}{\pi d^3}\left[\left(K_f\frac{M_a}{S_e}\right)^2 + \left(K_{fs}\frac{T_m}{S_y}\right)^2\right]^{1/2} \tag{18-29}$$

$$d = \left\{\frac{32n}{\pi}\left[\left(K_f\frac{M_a}{S_e}\right)^2 + \left(K_{fs}\frac{T_m}{S_y}\right)^2\right]^{1/2}\right\}^{1/3} \tag{18-30}$$

As Equações (18-27) a (18-30) são baseadas em uma abordagem de falha por tensão máxima de cisalhamento. Se a teoria da energia de distorção (DE) for usada em vez da Equação (*c*), as Equações (18-27) a (18-30) serão modificadas mudando-se 32 para 48.

DE-Goodman

As tensões alternante e média de von Mises são fornecidas por

$$\sigma_a' = \left(\sigma_a^2 + 3\tau_a^2\right)^{1/2} = \left[\left(\frac{32K_f M_a}{\pi d^3}\right)^2 + 3\left(\frac{16K_{fs}T_a}{\pi d^3}\right)^2\right]^{1/2} \tag{e}$$

$$\sigma_m' = \left(\sigma_m^2 + 3\tau_m^2\right)^{1/2} = \left[\left(\frac{32K_f M_m}{\pi d^3}\right)^2 + 3\left(\frac{16K_{fs}T_m}{\pi d^3}\right)^2\right]^{1/2} \tag{f}$$

O critério de Goodman é fornecido por

$$\frac{\sigma_a'}{S_e} + \frac{\sigma_m'}{S_{ut}} = \frac{1}{n} \tag{g}$$

A substituição das Equações (*e*) e (*f*) resulta em

$$\frac{1}{n} = \frac{16}{\pi d^3}\left\{\frac{1}{S_e}\left[4(K_f M_a)^2 + 3(K_{fs} T_a)^2\right]^{1/2} + \frac{1}{S_{ut}}\left[4(K_f M_m)^2 + 3(K_{fs} T_m)^2\right]^{1/2}\right\} \tag{18-31}$$

ou, para d,

$$d = \left(\frac{16n}{\pi}\left\{\frac{1}{S_e}\left[4(K_f M_a)^2 + 3(K_{fs} T_a)^2\right]^{1/2} + \frac{1}{S_{ut}}\left[4(K_f M_m)^2 + 3(K_{fs} T_m)^2\right]^{1/2}\right\}\right)^{1/3} \tag{18-32}$$

Para o caso $M_m = T_a = 0$, as Equações (18-31) e (18-32) tornam-se

$$\frac{1}{n} = \frac{16}{\pi d^3}\left(2\frac{K_f M_a}{S_e} + \sqrt{3}\frac{K_{fs} T_m}{S_{ut}}\right) \tag{18-33}$$

$$d = \left[\frac{16n}{\pi}\left(2\frac{K_f M_a}{S_e} + \sqrt{3}\frac{K_{fs} T_m}{S_{ut}}\right)\right]^{1/3} \tag{18-34}$$

EXEMPLO 18-4

Considerando $M_m = T_a = 0$, $M_a = 1260$ lbf · in, $T_m = 1100$ lbf · in, $S_{ut} = 105$ kpsi, $S_y = 82$ kpsi, um completamente corrigido $S_e = 36$ kpsi, $n = 2$, $k_f = 1{,}73$ e $K_{fs} = 1{,}31$, determine d empregando o seguinte critério de falha por fadiga:

(*a*) MSS-Soderberg.

(*b*) DE-Goodman.

(*c*) ASME-elíptico.

(*d*) DE-Gerber.

Solução A partir da Equação (18-31),

Resposta
$$d = \left\{\frac{32n}{\pi}\left[\left(K_f\frac{M_a}{S_e}\right)^2 + \left(K_{fs}\frac{T_m}{S_y}\right)^2\right]^{1/2}\right\}^{1/3}$$
$$= \left\{\frac{32(2)}{\pi}\left[\left(1{,}73\frac{1260}{36\,000}\right)^2 + \left(1{,}31\frac{1100}{82\,000}\right)^2\right]^{1/2}\right\}^{1/3} = 1{,}087 \text{ in}$$

A partir da Equação (18-34),

Resposta
$$d = \left[\frac{16n}{\pi}\left(2\frac{K_f M_a}{S_e} + \sqrt{3}\frac{K_{fs} T_m}{S_{ut}}\right)\right]^{1/3}$$
$$= \left\{\frac{16(2)}{\pi}\left[2\frac{1{,}73(1260)}{36\,000} + \sqrt{3}\frac{1{,}31(1100)}{105\,000}\right]\right\}^{1/3} = 1{,}138 \text{ in}$$

A partir da Equação (18-21),

$$d = \left\{\frac{16n}{\pi}\left[4\left(K_f\frac{M_a}{S_e}\right)^2 + 3\left(K_{fs}\frac{T_m}{S_y}\right)^2\right]^{1/2}\right\}^{1/3}$$

$$= \left\{ \frac{16(2)}{\pi} \left[4\left(1{,}73\frac{1260}{36\,000}\right)^2 + 3\left(1{,}31\frac{1100}{82\,000}\right)^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/3} = 1{,}083 \text{ in}$$

A partir da Equação (18-16),

Resposta

$$d = \left(\frac{16nK_f M_a}{\pi S_e} \left\{ 1 + \left[1 + 3\left(\frac{K_{fs} T_m S_e}{K_f M_a S_{ut}} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} \right)^{1/3}$$

$$= \left\{ \frac{16(2)1{,}73(1260)}{\pi(36\,000)} \left(1 + \left[1 + 3\left(\frac{1{,}31(1100)36}{1{,}73(1260)105} \right)^2 \right]^{1/2} \right) \right\}^{1/3} = 1{,}086 \text{ in}$$

Tabelados, os resultados são

Critério	d, in
MSS-Soderberg	1,087
DE-Goodman	1,138
ASME-elíptico	1,083
DE-Gerber	1,086

A partir dos resultados do Exemplo 18-4, verificamos que os critérios MSS-Soderberg, ASME-elíptico e DE-Gerber são virtualmente idênticos, sendo que o DE-Goodman é bastante conservador. À exceção do MSS-Soderberg, os resultados concordam com a Figura 18-14. A curva *B* é bastante baixa, se comparada à de Gerber (*C*) e à ASME-elíptica (*D*). Portanto, o resultado conservador é o de Goodman. A razão pela qual MSS-Soderberg não é mais conservador que Goodman, como a Figura 18-14 parece indicar, está em que esta se baseia na teoria de energia de distorção. Utilizando a Equação (18-30) e substituindo 32 por 48, obtemos $d = 1{,}244$ in para o critério DE-Soderberg, que *é* mais conservador que o resultado de DE-Goodman. À primeira vista, pareceria que o critério MSS-Soderberg seria mais conservador que o DE-Soderberg, uma vez que a teoria MSS é mais conservadora que a DE, e é dessa forma que as tensões equivalentes foram formuladas separadamente. Retornando à Equação (*d*), com o caso especial $\sigma_m = \tau_a = 0$, encontramos

$$\left[\left(\frac{S_y}{S_e} \sigma_a \right)^2 + 4\tau_m^2 \right]^{1/2} = \frac{S_y}{n} \quad \text{ou} \quad \left(\frac{\sigma_a}{S_e} \right)^2 + \left(\frac{2\tau_m}{S_y} \right)^2 = \frac{1}{n^2} \tag{h}$$

Empregando a teoria da máxima tensão de cisalhamento, podemos aproximar $2\tau_m \doteq \sigma_{em}$, em que σ_{em} é uma tensão equivalente média normal. Assim, observamos que a Equação (*h*) reverte a uma forma similar à da equação ASME-elíptica,

$$\left(\frac{\sigma_a}{S_e} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{em}}{S_y} \right)^2 \doteq \frac{1}{n^2}$$

Eis por que, no Exemplo 18-4, os dois resultados foram quase idênticos e o método MSS-Soderberg é um critério aceitável a se empregar.

18-5 Materiais de Eixo

Vários aços têm módulos de Young comparáveis. Por essa razão, a rigidez não pode ser controlada por meio de decisões relativas ao material, mas somente por decisões geométricas. A resistência necessária para re-

sistir às tensões de carregamento afeta a escolha dos materiais e seus tratamentos. Aços ANSI 1020-1050 são uma escolha comum, como o é um aço 11xx sem usinagem. Tratamentos térmicos aumentam o dispêndio; se utilizados, incluir 1340-50, 3140-50, 4140, 4340, 5140 e 8650. Devem ser usados somente se não existir outra forma de obter as resistências necessárias. Graus de carbonetação de 1020, 4320, 4820 e 8620 são escolhidos quando a dureza de superfície é importante.

Secções laminadas a frio estão disponíveis para diâmetros de até cerca de $3\frac{1}{2}$ in, e secções laminadas a quente de até 6 in podem ser obtidas. Tamanhos maiores requerem forjamento antes da usinagem.

Ao abordar a seleção do material, a quantidade a ser produzida é um fator saliente. Para uma pequena produção, torneamento é o processo usual primário de forma. Do ponto de vista econômico, pode-se requerer remover o mínimo de material. Uma alta produção pode permitir um método de moldagem conservador de volume (forjamento a quente ou a frio, fundição), e um mínimo de material no eixo pode se tornar uma meta de projeto. As propriedades do eixo localmente dependem de sua história: trabalho a frio, forjamento a frio, laminação de características de filete, tratamento térmico, incluindo meio de têmpera, agitação e regime de revenido.[4]

18-6 Eixos Vazados

Um eixo vazado pode reduzir peso e permitir a fluidos circular para partes móveis, visando a resfriamento ou lubrificação. Tubos de parede espessa sem costura estão disponíveis para eixos mais simples, menores.

- Tubos de parede espessa podem não conter material de parede suficiente para mangas de eixo. Colares de eixo de anel partido, cubos afunilados ou outros métodos comuns de localização e aperto podem ter de ser utilizados.
- Em eixos vazados, quer a geometria do tubo seja criada por um processo de repuxe, furação ou brocado, terá ela de ser verificada para balanço e corrigida, se necessário.

As equações desenvolvidas neste capítulo podem ser convenientemente modificadas para se aplicarem a eixos vazados. Se o diâmetro externo for d_o e o diâmetro interno, d_i, defina $K = d_i/d_o$. Para carregamento de torção e flexão, a quantidade $d_o\,(1 - K^4)^{1/3}$ pode ser substituída pelo diâmetro d nas Equações (18-12) a (18-21), por exemplo, como aplicável. A álgebra das equações permite soluções para o diâmetro externo d_o quando K é conhecido. Contudo, quando d_i está fixo, então K não é conhecido, e procedimentos iterativos são necessários para encontrar o diâmetro externo d_o.

18-7 Velocidades Críticas

Quando um eixo está girando, a excentricidade causa uma deflexão por força centrífuga, que é resistida pela rigidez flexural do eixo EI. Contanto que as deflexões sejam pequenas, nenhum dano será infligido. Um outro problema potencial, todavia, denomina-se *velocidades críticas*: a certas velocidades, o eixo é instável, com deflexões aumentando sem um limite superior. Afortunadamente, embora a forma de deflexão dinâmica seja desconhecida, utilizar uma curva de deflexão estática provê uma excelente estimativa da velocidade crítica mais baixa. Uma curva dessa natureza satisfaz à condição de contorno da equação diferencial (momento zero e deflexão em ambos os mancais), e a energia de eixo não é particularmente sensível à forma exata da curva de deflexão. Os projetistas costumam buscar as primeiras velocidades críticas a pelo menos duas vezes a velocidade operacional.

O eixo, devido à sua própria massa, tem uma velocidade crítica. Os acessórios fixados em um eixo similarmente apresentam uma velocidade crítica que é muito menor que a velocidade crítica intrínseca desse eixo. Estimar tais velocidades críticas (e harmônicas) é uma tarefa do projetista. Quando a geometria é simples, como em um eixo de diâmetro uniforme, suportado de modo simples, a tarefa é fácil. Ela pode ser expressa[5] como

$$\omega_1 = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m}} = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{gEI}{A\gamma}} \tag{18-35}$$

[4] Ver Joseph E. Shigley e Charles R. Mischke (eds-in-chief), *Standard Handbook of Machine Design*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1996. Para previsão de propriedades trabalhadas a frio, ver o Capítulo 8 e, para propriedades termotratadas, ver os Capítulos 8 e 13.

[5] William T. Thomson e Marie Dillon Dahleh, *Theory of Vibration with Applications*, Prentice Hall, 5th ed., 1998, p. 273.

em que m é a massa por unidade de comprimento; A, a área de secção transversal; e γ, o peso específico. Para um conjunto de acessórios, o método de Rayleigh para massas discretizadas fornece[6]

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g \sum w_i y_i}{\sum w_i y_i^2}} \tag{18-36}$$

em que w_i é o peso na i-ésima localidade e y_i, a deflexão na i-ésima localidade do corpo. É possível utilizar a Equação (18-36) para o caso da Equação (18-35) partilhando-se o eixo em segmentos e colocando suas forças de peso (gravitacional) no centróide de segmento, como visto na Figura 18-15. Assistência computacional é freqüentemente usada para diminuir a dificuldade de encontrar as deflexões transversais de um eixo escalonado. A equação de Rayleigh superestima a velocidade crítica.

Para contrabalançar a complexidade crescente de detalhes, adotamos um ponto de vista útil. Na medida em que o eixo é um corpo elástico, podemos utilizar *coeficientes de influência*. Um coeficiente de influência é a deflexão transversal na posição i, em um eixo, devido a uma carga unitária na posição j, nesse mesmo eixo. A partir da Tabela A-9-6, obtemos, para uma viga simplesmente suportada com uma única carga unitária, como mostrado na Figura 18-16,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} \dfrac{b_j x_i}{6EIl}\left(l^2 - b_j^2 - x_i^2\right) & x_i \le a_i \\ \dfrac{a_j(l - x_i)}{6EIl}\left(2lx_i - a_j^2 - x_i^2\right) & x_i > a_i \end{cases} \tag{18-37}$$

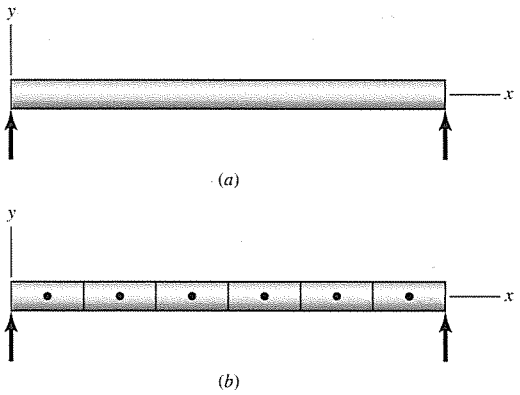


Figura 18-15 (*a*) Um eixo de diâmetro uniforme para a Equação (18-39). (*b*) Um eixo segmentado de diâmetro uniforme para a Equação (18-40).

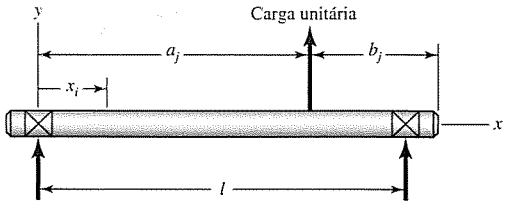


Figura 18-16 O coeficiente de influência δ_{ij} é a deflexão em i, devido a uma carga unitária em j.

[6] Thomson, *op. cit.*, p. 357.

Para três cargas, os coeficientes de influência podem ser dispostos como

	i		
i	1	2	3
1	δ_{11}	δ_{12}	δ_{13}
2	δ_{21}	δ_{22}	δ_{23}
3	δ_{31}	δ_{32}	δ_{33}

O teorema de reciprocidade de Maxwell[7] afirma que existe uma simetria ao redor da diagonal principal, composta de δ_{11}, δ_{22} e δ_{33}, da forma $\delta_{ij} = \delta_{ji}$. Essa relação reduz o trabalho de encontrar os coeficientes de influência. A partir dos coeficientes de influência supracitados, podem-se encontrar as deflexões y_1, y_2 e y_3 da Equação (18-36), como segue:

$$\begin{aligned} y_1 &= F_1\delta_{11} + F_2\delta_{12} + F_3\delta_{13} \\ y_2 &= F_1\delta_{21} + F_2\delta_{22} + F_3\delta_{23} \\ y_3 &= F_1\delta_{31} + F_2\delta_{32} + F_3\delta_{33} \end{aligned} \tag{18-38}$$

As forças F_i podem surgir a partir dos pesos fixados w_i ou das forças centrífugas $m_i\omega^2 y_i$. O conjunto de equações (18-38), escrito com forças inerciais, pode ser exibido como

$$\begin{aligned} y_1 &= m_1\omega^2 y_1\delta_{11} + m_2\omega^2 y_2\delta_{12} + m_3\omega^2 y_3\delta_{13} \\ y_2 &= m_1\omega^2 y_1\delta_{21} + m_2\omega^2 y_2\delta_{22} + m_3\omega^2 y_3\delta_{23} \\ y_3 &= m_1\omega^2 y_1\delta_{31} + m_2\omega^2 y_2\delta_{32} + m_3\omega^2 y_3\delta_{33} \end{aligned}$$

que pode ser escrito como

$$\begin{aligned} (m_1\delta_{11} - 1/\omega^2)y_1 + (m_2\delta_{12})y_2 + (m_3\delta_{13})y_3 &= 0 \\ (m_1\delta_{21})y_1 + (m_2\delta_{22} - 1/\omega^2)y_2 + (m_3\delta_{23})y_3 &= 0 \\ (m_1\delta_{31})y_1 + (m_2\delta_{32})y_2 + (m_3\delta_{33} - 1/\omega^2)y_3 &= 0 \end{aligned} \tag{a}$$

O conjunto de equações (*a*) contém três equações simultâneas em termos de y_1, y_2 e y_3. Para evitar a solução trivial $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, o determinante dos coeficientes de y_1, y_2 e y_3 deve ser zero (problema de autovalor). Logo,

$$\begin{vmatrix} (m_1\delta_{11} - 1/\omega^2) & m_2\delta_{12} & m_3\delta_{13} \\ m_1\delta_{21} & (m_2\delta_{22} - 1/\omega^2) & m_3\delta_{23} \\ m_1\delta_{31} & m_2\delta_{32} & (m_3\delta_{33} - 1/\omega^2) \end{vmatrix} = 0 \tag{18-39}$$

o que diz que uma outra deflexão que não zero existe somente em três valores distintos de ω, as velocidades críticas. Expandindo o determinante, obtemos

$$\left(\frac{1}{\omega^2}\right)^3 - (m_1\delta_{11} + m_2\delta_{22} + m_3\delta_{33})\left(\frac{1}{\omega^2}\right)^2 + \cdots = 0 \tag{18-40}$$

As três raízes da Equação (18-40) podem ser expressas como $1/\omega_2^1$, $1/\omega_2^2$ e $1/\omega_3^2$. Logo, a Equação (18-40) pode ser escrita na forma

$$\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega_1^2}\right)\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega_2^2}\right)\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega_3^2}\right) = 0$$

[7] Thomson, *op.cit.*, p.167.

ou

$$\left(\frac{1}{\omega^2}\right)^3 - \left(\frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \frac{1}{\omega_3^2}\right)\left(\frac{1}{\omega^2}\right)^2 + \cdots = 0 \tag{18-41}$$

Comparando as Equações (18-40) e (18-41), observamos que

$$\frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \frac{1}{\omega_3^2} = m_1\delta_{11} + m_2\delta_{22} + m_3\delta_{33} \tag{18-42}$$

Se tivéssemos uma única massa m_1 sozinha, a velocidade crítica seria dada por $1/\omega^2 = m_1\delta_{11}$. Denote essa velocidade crítica como ω_{11} (que considera somente m_1 agindo sozinha). Tal como para m_2 ou m_3 agindo sozinhas, similarmente definimos os termos $1/\omega_{22}^2 = m_2\delta_{22}$ ou $1/\omega_{33}^2 = m_3\delta_{33}$, respectivamente. Logo, a Equação (18-42) pode ser reescrita como

$$\frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \frac{1}{\omega_3^2} = \frac{1}{\omega_{11}^2} + \frac{1}{\omega_{22}^2} + \frac{1}{\omega_{33}^2} \tag{18-43}$$

Se ordenarmos as velocidades críticas de tal forma que $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$, então $1/\omega_1^2 >> 1/\omega_2^2$ e $1/\omega_3^2$. Assim, a primeira velocidade crítica, ou a velocidade crítica fundamental ω_1, pode ser aproximada por

$$\frac{1}{\omega_1^2} \doteq \frac{1}{\omega_{11}^2} + \frac{1}{\omega_{22}^2} + \frac{1}{\omega_{33}^2} \tag{18-44}$$

Tal idéia pode ser estendida a um eixo de n-corpos:

$$\frac{1}{\omega_1^2} \doteq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\omega_{ii}^2} \tag{18-45}$$

Essa equação é denominada *equação de Dunkerley*. Ignorando o(s) termo(s) do(s) modo(s) mais elevado(s), a estimativa de primeira velocidade crítica é *menor* do que realmente ocorre.

Haja vista que a Equação (18-45) não apresenta cargas aparecendo na equação, segue-se que, se cada carga puder ser posta em alguma posição conveniente transformada em uma carga equivalente, então a velocidade crítica de uma série de cargas poderá ser encontrada somando-se as cargas equivalentes, todas colocadas em uma única localização conveniente. Para a carga na estação 1, disposta no centro do tramo, denotada com o subscrito c, a carga equivalente é encontrada a partir de

$$\omega_{11}^2 = \frac{g}{w_1\delta_{11}} = \frac{g}{w_{1c}\delta_{cc}}$$

ou

$$w_{1c} = w_1\frac{\delta_{11}}{\delta_{cc}} \tag{18-46}$$

EXEMPLO 18-5

Considere um eixo de aço simplesmente apoiado, como representado na Figura 18-17, com diâmetro de 1 in e um vão de 31 in entre mancais, carregando duas engrenagens que pesam 35 e 55 lbf.

(*a*) Encontre os coeficientes de influência.

(*b*) Encontre $\sum wy$ e $\sum wy^2$, bem como a primeira velocidade crítica, utilizando a equação de Rayleigh, Equação (18-36).

(*c*) A partir dos coeficientes de influência, encontre ω_{11} e ω_{22}.

(*d*) Utilizando a equação de Dunkerley, Equação (18-45), estime a primeira velocidade crítica.

(*e*) Utilize sobreposição para estimar a primeira velocidade crítica.

(*f*) Estime a velocidade crítica intrínseca do eixo. Sugira uma modificação para a equação de Dunkerley, a fim de incluir o efeito da massa de eixo na primeira velocidade crítica dos acessórios.

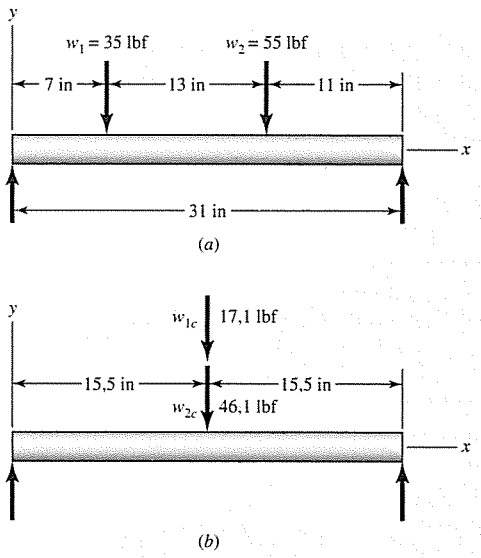


Figura 18-17 (*a*) Um eixo de diâmetro uniforme de 1 in para o Exemplo 18-5. (*b*) Sobreposição de cargas equivalentes no centro do eixo, para o propósito de encontrar a primeira velocidade crítica.

Solução (*a*)
$$I = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi(1)^4}{64} = 0{,}049\,09 \text{ in}^4$$

$$6EIl = 6(30)10^6(0{,}049\,09)31 = 0{,}2739(10^9) \text{ lbf} \cdot \text{in}^3$$

A partir do conjunto de Equações (18-37),

$$\delta_{11} = \frac{24(7)(31^2 - 24^2 - 7^2)}{0{,}2739(10^9)} = 2{,}061(10^{-4}) \text{ in/lbf}$$

$$\delta_{22} = \frac{11(20)(31^2 - 11^2 - 20^2)}{0{,}2739(10^9)} = 3{,}534(10^{-4}) \text{ in/lbf}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{11(7)(31^2 - 11^2 - 7^2)}{0{,}2739(10^9)} = 2{,}224(10^{-4}) \text{ in/lbf}$$

Resposta

i	j = 1	j = 2
1	$2{,}061(10^{-4})$	$2{,}234(10^{-4})$
2	$2{,}234(10^{-4})$	$2{,}534(10^{-4})$

$$y_1 = w_1\delta_{11} + w_2\delta_{12} = 35(2{,}061)10^{-4} + 55(2{,}234)10^{-4} = 0{,}01950 \text{ in}$$

$$y_2 = w_1\delta_{21} + w_2\delta_{22} = 35(2{,}234)10^{-4} + 55(3{,}534)10^{-4} = 0{,}02726 \text{ in}$$

(*b*)
$$\sum w_i y_i = 35(0{,}01950) + 55(0{,}02726) = 2{,}181 \text{ lbf} \cdot \text{in}$$

Resposta
$$\sum w_i y_i^2 = 35(0{,}01950)^2 + 55(0{,}02726)^2 = 0{,}05418 \text{ lbf} \cdot \text{in}^2$$

Resposta
$$\omega = \sqrt{\frac{386{,}1(2{,}181)}{0{,}05418}} = 124{,}7 \text{ rad/s, ou } 1191 \text{ rpm}$$

(*c*)

Resposta
$$\frac{1}{\omega_{11}^2} = \frac{w_1}{g}\delta_{11}$$
$$\omega_{11} = \sqrt{\frac{g}{w_1\delta_{11}}} = \sqrt{\frac{386{,}1}{35(2{,}061)10^{-4}}} = 231{,}4 \text{ rad/s, ou } 2210 \text{ rpm}$$

Resposta
$$\omega_{22} = \sqrt{\frac{g}{w_2\delta_{22}}} = \sqrt{\frac{386{,}1}{55(3{,}534)10^{-4}}} = 140{,}9 \text{ rad/s, ou } 1346 \text{ rpm}$$

(*d*)
$$\frac{1}{\omega_1^2} \doteq \sum \frac{1}{\omega_{ii}^2} = \frac{1}{231{,}4^2} + \frac{1}{140{,}9^2} = 6{,}905(10^{-5}) \qquad (1)$$

Resposta
$$\omega_1 \doteq \sqrt{\frac{1}{6{,}905(10^{-5})}} = 120{,}3 \text{ rad/s, ou } 1149 \text{ rpm}$$

que é menor que a parte *b*, como esperado.

(*e*) A partir da Equação (18-37),

$$\delta_{cc} = \frac{b_{cc}x_{cc}(l^2 - b_{cc}^2 - x_{cc}^2)}{6EIl} = \frac{15{,}5(15{,}5)(31^2 - 15{,}5^2 - 15{,}5^2)}{0{,}2739(10^9)}$$
$$= 4{,}215(10^{-4}) \text{ in/lbf}$$

A partir da Equação (18-46),

$$w_{1c} = w_1\frac{\delta_{11}}{\delta_{cc}} = 35\frac{2{,}061(10^{-4})}{4{,}215(10^{-4})} = 17{,}11 \text{ lbf}$$
$$w_{2c} = w_2\frac{\delta_{22}}{\delta_{cc}} = 55\frac{3{,}534(10^{-4})}{4{,}213(10^{-4})} = 46{,}11 \text{ lbf}$$

Resposta
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\delta_{cc}\sum w_{ic}}} = \sqrt{\frac{386{,}1}{4{,}215(10^{-4})(17{,}11 + 46{,}11)}} = 120{,}4 \text{ rad/s, ou } 1150 \text{ rpm}$$

que, exceto pelo arredondamento, concorda com a parte (*d*), como esperado.

(*f*) Para o eixo, $E = 30(10^6)$ psi, $\gamma = 0{,}282$ lbf/in^3 e $A = \pi(1^2)/4 = 0{,}7854$ in^2.

Considerando o eixo unicamente, a velocidade crítica, a partir da Equação (18-35), é

Resposta
$$\omega_s = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2\sqrt{\frac{gEI}{A\gamma}} = \left(\frac{\pi}{31}\right)^2\sqrt{\frac{386{,}1(30)10^6(0{,}049\ 09)}{0{,}7854(0{,}282)}}$$
$$= 520{,}4 \text{ rad/s, ou } 4970 \text{ rpm}$$

Podemos simplesmente adicionar $1/\omega_s^2$ ao lado direito da equação de Dunkerley, Equação (1), para incluir a contribuição do eixo.

Resposta
$$\frac{1}{\omega_1^2} \doteq \frac{1}{520{,}4^2} + 6{,}905(10^{-5}) = 7{,}274(10^{-5})$$
$$\omega_1 \doteq 117{,}3 \text{ rad/s, ou } 1120 \text{ rpm}$$

que é ligeiramente menor que a parte (*d*), como esperado.

A primeira velocidade crítica do eixo ω_s é apenas mais um efeito isolado a adicionar à equação de Dunkerley. Visto que ele não cabe dentro da somatória, é geralmente escrito adiante.

Resposta

$$\frac{1}{\omega_1^2} \doteq \frac{1}{\omega_s^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\omega_{ii}^2} \tag{18-47}$$

Eixos comuns são complicados pela geometria escalonada cilíndrica, o que torna a determinação dos coeficientes de influência parte de uma solução numérica.

18-8 Projeto de Eixo

Muitos projetos de eixo são modificações de eixos existentes. A modificação resulta de mudanças menores no grosso da geometria de redutores de velocidade, de pequenas mudanças na razão de engrenamento, da substituição de engrenagens helicoidais por engrenagens retas ou de engrenagens espinha de peixe por engrenagens helicoidais. O ponto é que o projetista dispõe de uma direção de começo. Ele conhece a geometria prévia do eixo e tem tato para o tamanho geral do novo projeto. O eixo a ser projetado é, a princípio, nebuloso. Além do mais, outros projetos de eixo são esforços de primeira viagem, e nenhuma aproximação está disponível para auxiliar na visualização.

Um eixo incorpora muitas decisões. Enxergar todas essas decisões como "abertas" é criar um espaço de projeto que não pode ser facilmente visualizado. Como resultado, a ferramenta mais valiosa de um projetista – o pensamento geométrico – é muito exigida.

Uma abordagem para o projetista consiste em se aproximar da posição do engenheiro que tem de modificar um projeto existente e que dispõe de uma figura aproximada do resultado inicial. Visto que a restrição ativa provavelmente procede de deformação, considere primeiro a deformação.

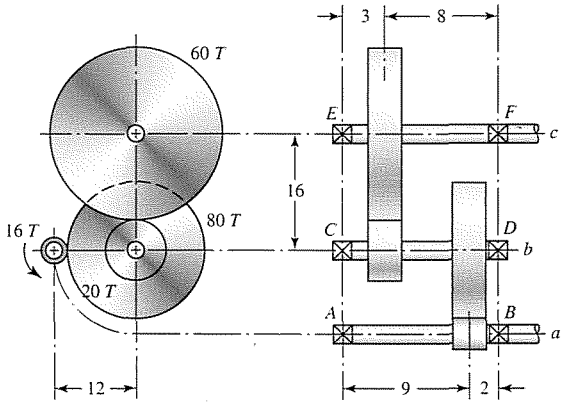
- Encontre o diâmetro do eixo de diâmetro uniforme que satisfaz à deflexão e às inclinações nos mancais e nos elementos de transmissão de potência. As Equações (18-1) e (18-2) serão úteis. Encontrar aquele diâmetro fornecerá a você um tamanho médio para o eixo. Assentos de mancal e ressaltos criarão elementos geométricos nas posições de mancal. Se as posições deste forem "externas" aos elementos de transmissão de potência, o diâmetro do munhão de mancal terá pouca influência na deflexão e na inclinação; dessa forma, estabelece-se o seguinte: ou ele pode ser ignorado, ou o diâmetro central pode ser ligeiramente aumentado.
- Considere os elementos de transmissão de potência, os ressaltos e os orifícios de cubo e tome algumas decisões provisórias com relação à geometria de ressaltos (diâmetros e comprimentos). Agora, a geometria ficará mais clara.
- Tome sua idéia aproximada da geometria de eixo e proceda a uma análise de deflexão e inclinação. Utilize as Equações (18-3) e (18-4) para encontrar a maior razão d_{new} / d_{old} e então multiplique *todos* os diâmetros por essa razão. Veja o Exemplo 18-2. Você terá um eixo escalonado que satisfaz a todas as restrições de deflexão e inclinação. Verifique os novos ressaltos (especialmente com mancais de rolo de contato), a fim de conferir se a altura do ressalto ainda se encontra dentro do intervalo recomendado pelo fabricante. Se ajustes forem necessários, construa uma nova tabela.
- Inicie a análise de resistência empregando a teoria DE-Gerber ou DE-elíptica. Utilize um material de eixo desejável que não venha a necessitar de tratamento térmico. Este poderá aumentar a resistência, mas seu custo elevará várias vezes o custo do eixo. Examine, por exemplo, elemento por elemento, ressalto do mancal esquerdo, ressalto da engrenagem esquerda, rasgo de chaveta da engrenagem direita, ressalto da engrenagem direita, rasgo de chaveta da engrenagem direita, localização de colares de eixo, localização de anéis de pressão. Examine esses elementos com relação ao diâmetro adequado, para ver se a resistência do material ou do diâmetro necessita de melhoria. Esse exame de elemento a elemento dirá ao projetista onde está o local crítico. Se o elemento crítico for de resistência suficiente, o projetista terá uma imagem mais clara do projeto final. O engenheiro poderá, agora, contar com um eixo satisfatório. Se algum material puder ser aparado do eixo em outros elementos (ainda mantendo restrições relevantes folgadas), considere-o. Em corridas com produções menores, em que métodos de conformação inicial conservadores de volume não são utilizados, o custo de torneamento adicional para remover material (fazer cavaco) pode operar contra qualquer redução de tamanho.

PROBLEMAS

PROJETO **18-1** O pinhão de 16 dentes da figura move um trem de engrenagens de redução dupla, como mostrado. Todas as engrenagens têm ângulo de pressão de 25°. O pinhão roda, em sentido anti-horário, a 1200 rpm e transmite 50 hp ao trem de engrenagens. Nosso foco está no eixo do pinhão. Nenhum dos eixos foi projetado.

(*a*) Para o eixo do pinhão, desenvolva o diagrama de momento.

(*b*) Para mancais de rolos cilíndricos, a inclinação do eixo no munhão deve ser menor que 0,001 rad. Para um fator de projeto de $n_d = 2$, estime o diâmetro uniforme do eixo que satisfaria às restrições de deflexão.



Problema 18-1
Dimensões em polegadas.

PROJETO **18-2** Investigue os resultados do Problema 18-1 para a resistência à fadiga de uma forma preliminar, caso a resistência ou a deflexão controlem. Utilize um aço 1030 laminado a quente para esse propósito. A meta de confiabilidade provável para esse eixo é de 0,999. Suponha um rasgo de chaveta no eixo com K_t e K_{ts} dados na página 440 e um raio de filete de 0,02 in.

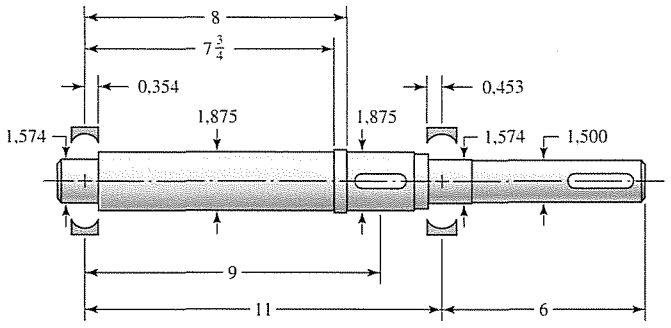
(*a*) Utilize o critério de falha de fadiga DE-elíptico para estimar seu fator de segurança.

(*b*) Utilize o critério de falha de fadiga DE-Gerber em sua estimativa.

PROJETO **18-3** Tendo descoberto que o eixo de pinhão dos Problemas 18-1 e 18-2 tem uma restrição apertada de deflexão, projete a partir desse eixo tanto quanto puder. O balanço para montar um acoplamento pode assumir uma extensão de 6 in do eixo além do mancal. Desenhe seu eixo, mostrando todas as decisões dimensionais.

PROJETO **18-4** Todos os projetos completados em resposta ao Problema 18-3 diferirão. Para manter a discussão, considere o projeto mostrado na figura. O projetista especificou um mancal de esfera de 02 a 40 mm à esquerda e um mancal de rolo cilíndrico de 03 a 40 mm à direita. Verifique esse projeto para adequação relativamente à deformação.

Raios de ressalto de mancal 1030 laminado a quente de 0,030. Raios de filete de chaveta 0,10



Problema 18-4
Filetes de ressalto no raio de 0,030 in do assento de mancal, outros raios de $\frac{1}{8}$ in, exceto na transição de assento de mancal direito, $\frac{1}{4}$ in. O material é de 1030 laminado a quente. Rasgos de chaveta de largura de $\frac{3}{8}$ in por $\frac{3}{16}$ in de profundidade. Dimensões em polegadas.

PROJETO **18-5** Verifique o projeto no Problema 18-4, para adequação relativamente à resistência de fadiga, utilizando o critério de falha de fadiga DE-elíptico.

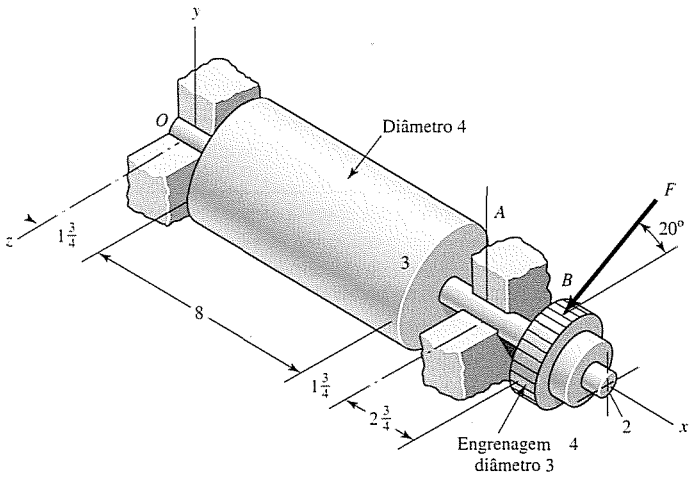
PROJETO **18-6** Agora você tem a oportunidade de verificar como seu projeto (Problema 18-3) se sai. Utilizando-o completado, em resposta ao Problema em questão, realize a verificação de adequação sugerida nos Problemas 18-4 e 18-5.

PROJETO **18-7** A experiência que você ganhou com os Problemas 18-1 a 18-6 tornará o projeto de eixo *c* do Problema 18-1 mais fácil. Projete o eixo *c* do Problema 18-1 utilizando um fator de projeto de 2 com uma meta de confiabilidade de 0,995.

PROJETO **18-8** O projeto do eixo intermediário *b* do redutor de velocidade do Problema 18-1 é mais difícil. O diagrama de momento não se situa em um plano. É necessário utilizar os diagramas de momento em planos ortogonais. Projete o eixo *b* do Problema em questão para $R = 0{,}995$ e um fator de projeto de 2.

ANÁLISE **18-9** Quer você tenha ou não tido tempo de completar o projeto dos eixos *a*, *b* e *c* do Problema 18-1, é útil considerar a interconexão à geometria dos eixos, a qual os mancais de rolo de contato terão. Evite entrar em uma situação iterativa de projeto desnecessariamente. Haverá uma meta de confiabilidade de mancal para os seis mancais do redutor. Planeje uma estratégia para identificar as confiabilidades individuais de mancal. O trabalho de projeto que você economizará será o seu próprio.

PROJETO **18-10** O rolo industrial de engrenagens mostrado na figura é movido a 300 rpm por uma força *F* atuando em um círculo de diâmetro primitivo de 3 in, como ilustrado. Tal rolo exerce uma força normal de 30 lbf/in de seu comprimento sobre o material sendo puxado. O material passa sob ele. O coeficiente de fricção é de 0,40. Desenvolva os diagramas de momento e cisalhamento para o eixo modelando a força do rolo como (*a*) uma força concentrada no centro dele e (*b*) uma força uniformemente distribuída ao longo dele. Esses diagramas deverão aparecer em dois planos ortogonais.



Problema 18-10
O material se move sob o rolo.
Dimensões em polegadas.

PROJETO **18-11** Utilizando um aço 1035 laminado a quente, estime os diâmetros necessários nas posições de pico de momento flexor mediante o uso de um fator de projeto de 2. Devem existir provavelmente filetes em ambas as extremidades do assento do mancal direito, onde o momento flexor é ligeiramente menor do que no local extremo. Estimando o fator de concentração de tensão de fadiga como 2, e empregando um fator de projeto de 2, qual é o diâmetro aproximado necessário do assento de mancal usando o critério de falha de fadiga DE-elíptico do Problema 18-10?

PROJETO **18-12** Para a situação apresentada no Problema 18-10, que eixo de diâmetro uniforme satisfará a uma inclinação de deflexão de mancal de (*a*) 0,001 rad e (*b*) 0,0005 rad?

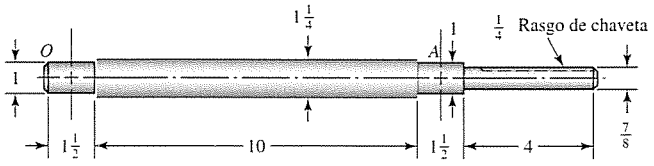
PROJETO **18-13** Para o Problema 18-10, encontre o diâmetro de um eixo uniforme que satisfaça à limitação de inclinação de 0,0005 rad no acoplamento de engrenagens. Qual é o diâmetro adequado para satisfazer à inclinação com um fator de segurança de 2?

PROJETO **18-14** Projete um eixo para a situação do eixo industrial do Problema 18-10 com um fator de projeto de 2 e uma meta de confiabilidade de 0,999 contra falha de fadiga. Planeje para um mancal de esfera à esquerda e um rolo cilíndrico à direita. Para deformação, utilize um fator de segurança de 2.

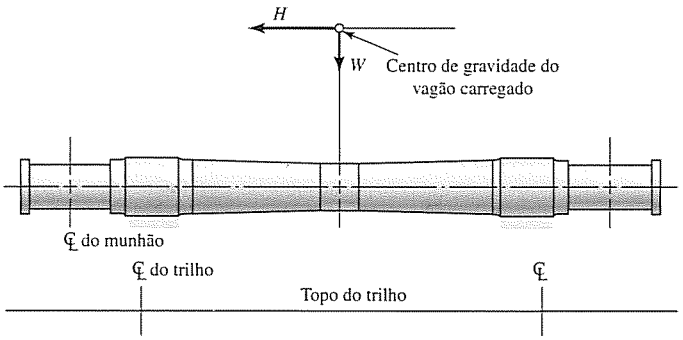
ANÁLISE **18-15** A figura mostra um projeto proposto para o eixo do rolo industrial do Problema 18-10. Mancais de filme hidrodinâmico devem ser usados. Todas as superfícies são usinadas, exceto os munhões, que são esmerilhados e polidos. O material é aço 1035 laminado a quente. Execute uma avaliação do projeto. Você o considera satisfatório?

ANÁLISE **18-16** Como mostrado na figura, o eixo fixo de um vagão de ferrovia é afunilado, com o menor diâmetro entre os trilhos. Esse problema lançará alguma luz sobre a razão disso. Um eixo fixo de vagão é ajustado à força a suas rodas, com os munhões externos a elas e com centros de munhão cerca de 80 in separados. O medidor

Problema 18-15
Filetes de ressalto de mancal de 0,030 in, outros de $\frac{1}{10}$ in. O rasgo de chaveta deslizante tem $3\frac{1}{2}$ in de comprimento. Dimensões em polegadas.



de pista é de $56\frac{1}{2}$ in entre os trilhos, e, assim, o vão entre os centros de trilho é de cerca de $59\frac{1}{2}$ in. As rodas de vagão apresentam normalmente diâmetro de 33 in para vagões de até 70 toneladas de capacidade. Considere a condição de pior posição do centro de massa do vagão e de a carga estar 72 in acima dos trilhos. A carga vertical de pior caso deve ser de 42 750 lbf por eixo. A carga horizontal de pior caso, devido a ventos cruzados e à curvatura de trilho, é de 17 100 lbf por eixo, passando pelo centro de massa. Construa o diagrama de momento flexor para o eixo.

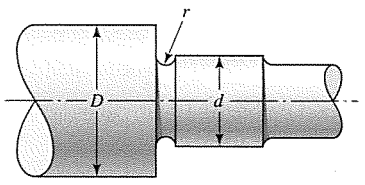


Problema 18-16
Um eixo de vagão de ferrovia.

ANÁLISE **18-17** Em um eixo fixo padronizado classe C da American Association of Railroads, o diâmetro do assento de roda é de 7 in e o diâmetro do eixo na metade do vão é de $5\frac{3}{8}$ in. Utilizando os resultados do Problema 18-16, compare o nível de tensão de flexão no centro do assento de roda e no meio do vão do eixo fixo. Tal diferença deve ser esperada?

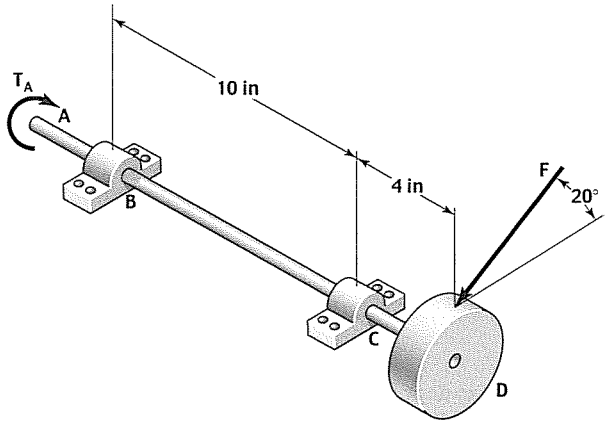
PROJETO **18-18** A secção do eixo mostrado na figura deve ser projetada em tamanhos relativos aproximados de $d = 0{,}75D$ e $r = D/20$, com o diâmetro d conformando-se àquele dos tamanhos de orifícios de mancais de rolamento métrico padronizados. O eixo deve ser de aço SAE 2340, termotratado, para obter resistências mínimas na área de ressalto de 1226 MPa de resistência final de tração e de resistência ao escoamento de 1130 MPa, com uma dureza Brinell não menor que 368. No ressalto, o eixo está sujeito a um momento flexor completamente inverso de 70 N · m, acompanhado por uma torção permanente de 45 N · m. Utilize um fator de projeto de 2,5 e dimensione o eixo para uma vida infinita. Os resultados devem estar baseados no critério de falha de fadiga DE-elíptico.

Problema 18-18
Secção de um eixo contendo um sulco esmerilhado de alívio. A menos que especificado de outra forma, o diâmetro da raiz do sulco é $d_r = d - 2r$, e, embora a secção de diâmetro d seja esmerilhada, a raiz do sulco é ainda uma superfície usinada.



ANÁLISE **18-19** Repita o Problema 18-18 utilizando o critério MSS-Soderberg.

ANÁLISE **18-20** Um eixo de aço sólido rotativo é simplesmente suportado por mancais nos pontos B e C e movido por uma engrenagem (não mostrada) que engranza com a engrenagem reta em D, a qual apresenta um diâmetro primitivo de 6 in. A força F da engrenagem reta atua em um ângulo de pressão de 20°. O eixo transmite um torque ao ponto A de $T_A = 3000$ lbf · in. O eixo é usinado a partir de aço com $S_y = 60$ kpsi e $S_{ut} = 80$ kpsi. Utilizando um fator de segurança de 2,5, determine o diâmetro mínimo admissível do eixo, com base em (*a*) uma análise estática de escoamento mediante a teoria da energia de distorção e (*b*) uma análise de falha por fadiga mediante os quatro critérios fornecidos nas Seções 18-3 e 18-4. Utilize fatores de concentração de tensão de fadiga de $K_f = 1{,}8$ e $K_{fs} = 1{,}3$.



Problema 18-20

ANÁLISE **18-21** Um eixo está carregado com flexão e torção, de tal forma que $M_a = 600$ lbf · in, $T_a = 400$ lbf · in, $M_m = 500$ lbf · in e $T_m = 300$ lbf · in. Para o eixo, $S_u = 100$ kpsi e $S_y = 80$ kpsi, e um limite de resistência completamente corrigido de $S_e = 30$ kpsi é suposto. Estabeleça $K_f = 2{,}2$ e $K_{fs} = 1{,}8$. Com um fator de projeto de 2,0, determine o diâmetro mínimo aceitável do eixo utilizando o

(*a*) critério DE-Gerber.

(*b*) critério DE-elíptico.

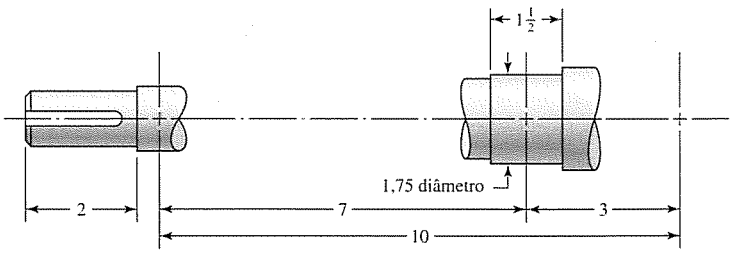
(*c*) critério MSS-Soderberg.

(*d*) critério DE-Goodman.

Discuta e compare os resultados.

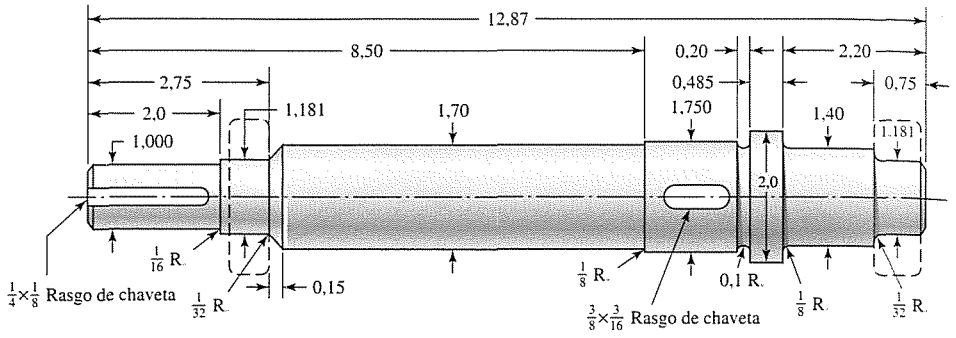
ANÁLISE **18-22** Um orifício transversal furado e escareado pode ser usado em um eixo sólido para segurar um pino que localiza e sustenta um elemento mecânico, tal como o cubo de uma engrenagem em posição axial, bem como permite transmissão de torque. Visto que um orifício de diâmetro pequeno introduz elevada concentração de tensão e que um orifício de diâmetro grande erode a área resistindo à flexão e à torção, investigue a existência de um diâmetro de pino com mínimo efeito adverso no eixo. Formule, então, uma regra de projeto. (*Dica:* Use a Tabela A-16.)

PROJETO **18-23** Uma engrenagem reta de baixa velocidade, com um orifício de 1,75 in e um cubo de $1\frac{1}{2}$ in de comprimento, tem um diâmetro primitivo de 8 in e dentes de evolvente de ângulo de pressão de 20°, transmitindo 4,5 hp a 112 rpm. O eixo deve ter um vão entre mancais de 10 in, com a engrenagem disposta a 3 in do mancal direito. Mancais de esfera de sulco profundo devem ser usados. Um trecho em balanço de 2 in, para um acoplamento com um assento de 1 in de diâmetro, deve ser provido à esquerda do mancal esquerdo. Para um fator de projeto de 2, a vida do mancal deve ser de 10 kh, com uma confiabilidade de 0,995 para o par de mancais. Algumas decisões *a priori* são exibidas na figura. Selecione mancais apropriados e então dimensione o eixo em suas adjacências.



Problema 18-23
Dimensões em polegadas.

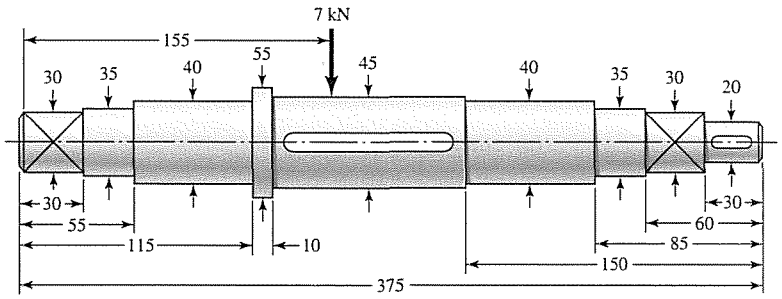
PROJETO **18-24** O projeto do Problema 18-23 foi completado, resultando em um eixo que tem $12\frac{7}{8}$ in de comprimento global. É importante ter convicção de que a deflexão está dentro dos limites necessários para o funcionamento do engranzamento de engrenagens e da vida de mancal. Uma máquina de ensaio que pode aplicar com precisão uma carga de flexão está disponível, mas a área de garganta é tal que um espécime e um dispositivo de somente 8 in de comprimento podem ser manipulados. Para um modelo de escala feito a meio tamanho, que carga deve ser aplicada? Como deve uma medida de deflexão ou inclinação ser interpretada se o modelo for feito do mesmo material que o protótipo?



Problema 18-24
Dimensões em polegadas.

AVALIAÇÃO DE PROJETO **18-25**

Um eixo de aço AISI 1020 repuxado a frio, com sua geometria mostrada na figura, suporta uma carga transversal de 7 kN e um torque de 107 N · m. Examine o eixo para a resistência e a deflexão. Se a inclinação maior admissível nos mancais é de 0,001 rad e, no engranzamento de engrenagens, de 0,0005 rad, qual é o fator de segurança que protege contra distorção de dano? Qual é o fator de segurança que protege contra uma falha de fadiga? Se o eixo viesse a ser insatisfatório, o que você recomendaria para corrigir o problema?



Todos os filetes de 2 mm

Problema 18-25
Dimensões em milímetros.

ANÁLISE **18-26**

Um eixo uniforme de aço de 1 in de diâmetro tem comprimento de 24 in entre os mancais.

(*a*) Encontre a menor velocidade crítica do eixo.

(*b*) Se a meta é duplicar a velocidade crítica, encontre o novo diâmetro.

(*c*) Um modelo de meio tamanho do eixo original tem que velocidade crítica?

ANÁLISE **18-27**

Demonstre quão rapidamente o método de Rayleigh converge para o eixo sólido de diâmetro uniforme do Problema 18-26 partilhando o eixo primeiro em um, depois em dois e, por fim, em três elementos.

ANÁLISE **18-28**

Compare a Equação (18-40), para a freqüência angular de um eixo de dois discos, com a Equação (18-41) e observe que as constantes nas duas equações são iguais.

(*a*) Desenvolva uma expressão para a *segunda* velocidade crítica.

(*b*) Estime a segunda velocidade crítica do eixo tratado no Exemplo 18-5, partes *a* e *b*.

ANÁLISE **18-29**

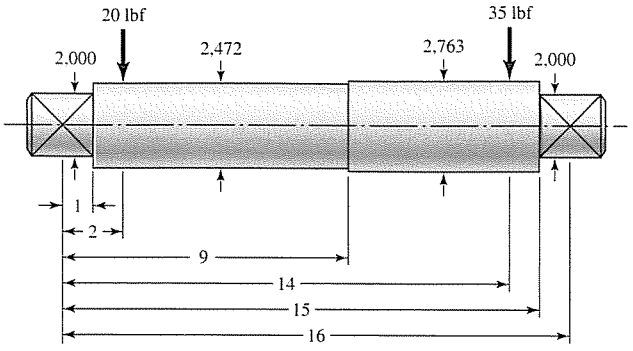
Para um eixo de diâmetro uniforme, seu vazamento aumenta ou diminui a velocidade crítica?

18-30

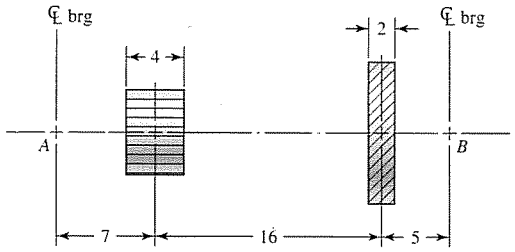
O eixo mostrado na figura carrega uma engrenagem de 20 lbf à esquerda e uma engrenagem de 35 lbf à direita. Estime a primeira velocidade crítica decorrente das cargas, a velocidade crítica do eixo sem as cargas e a velocidade crítica da combinação.

PROJETO **18-31**

Um eixo deve ser projetado para suportar o pinhão reto e a engrenagem helicoidal, ambos mostrados na figura em dois mancais espaçados em 28 in de centro a centro. O mancal *A* é de rolo cilíndrico e deve receber somente carga radial; o mancal *B* deve receber a carga de empuxo de 200 lbf produzida pela engrenagem helicoidal e sua porção da carga radial. O mancal em *B* pode ser um mancal de esferas. As cargas radiais de ambas as engrenagens estão no mesmo plano e são de 660 lbf para o pinhão e de 220 lbf para a engrenagem. Os mancais devem ter uma vida de 2000 h, com uma confiabilidade combinada de 0,995. A velocidade do eixo é de 1150 rpm. Selecione os mancais e projete o eixo. Faça um esboço em escala do eixo, mostrando os tamanhos de todos os filetes, os rasgos de chavetas, os ressaltos e os diâmetros. Especifique o material e seu tratamento térmico.

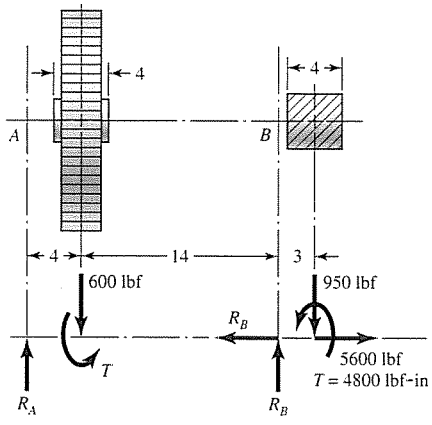


Problema 18-30
Dimensões em polegadas.



Problema 18-31
Dimensões em polegadas.

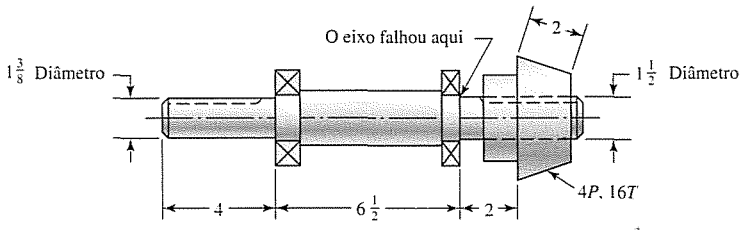
PROJETO **18-32** Um eixo de aço termotratado deve ser projetado para suportar a engrenagem reta e a sem-fim, em balanço, mostradas na figura. Um mancal em *A* recebe carga radial pura. O mancal em *B* recebe a carga de empuxo do sem-fim para qualquer direção de rotação. As dimensões e o carregamento estão ilustrados na figura; observe que as cargas radiais situam-se no mesmo plano. Realize um projeto completo do eixo, incluindo um esboço deste mostrando todas as dimensões. Identifique o material e seu tratamento térmico (se necessário). Proveja uma avaliação de seu projeto final. A velocidade de eixo é de 310 rpm.



Problema 18-32
Dimensões em polegadas.

REPROJETO **18-33** Um eixo de engrenagem cônica, montado em dois mancais de esferas de série 02 com 40 mm, é movido a 1720 rpm por um motor conectado mediante um acoplamento flexível. A figura exibe o eixo, a engrenagem e os mancais. O primeiro tem acarretado problemas – de fato, dois deles já falharam –, e o tempo parado da máquina é tão caro que você tem de decidir redesenhar o eixo você mesmo, em vez de ordenar reposições, as quais, mais do que provavelmente, também falhariam em alguns meses. Você não foi capaz de reunir tal informação. Um teste de dureza dos dois eixos nos arredores da fratura de ambos apontou uma média de 198 Bhn para um e de 204 Bhn para o outro. Tão próximo quanto você pôde estimar, os dois eixos falharam a uma vida medida entre 600.000 e 1.200.000 ciclos de operação. As superfícies do eixo foram usinadas, mas não esmerilhadas. Os tamanhos de filetes não foram medidos, mas correspondem às recomendações para os mancais de esferas utilizados. Você tem conhecimento de que a carga é pulsante ou do tipo

choque, mas não tem idéia da magnitude, porque o eixo move um mecanismo indicador, e as forças são inerciais. Os rasgos de chaveta são de $\frac{3}{8}$ in de largura por $\frac{3}{16}$ in de profundidade. O pinhão cônico de dentes retos move uma engrenagem cônica de 48 dentes. Especifique um novo eixo com detalhes suficientes para assegurar uma vida longa e sem problemas.



Problema 18-33
Dimensões em polegadas.

APÊNDICE

A Tabelas Úteis

A-1 Prefixos Padronizados do Sistema Internacional (SI) **900**

A-2 Fatores de Conversão **901**

A-3 Unidades Opcionais SI para Tensão de Flexão, Tensão de Torção, Tensão Axial e Tensão de Cisalhamento Direto **902**

A-4 Unidades Opcionais SI para Deflexão de Flexão e Deflexão de Torção **902**

A-5 Constantes Físicas de Materiais **902**

A-6 Propriedades do Perfil L (Ângulo ou Cantoneira) de Aço Estrutural **903**

A-7 Propriedades do Perfil U (Canal) de Aço Estrutural **904**

A-8 Propriedades de Tubulação Redonda **906**

A-9 Cisalhamento, Momento e Deflexão de Vigas **907**

A-10 Função Cumulativa de Distribuição da Distribuição Normal (Gaussiana) **915**

A-11 Uma Seleção de Classes Internacionais de Tolerância – Série Métrica **916**

A-12 Desvios Fundamentais para Eixos – Série Métrica **917**

A-13 Uma Seleção de Classes Internacionais de Tolerância – Série Polegar **917**

A-14 Desvios Fundamentais para Eixos – Série Polegar **918**

A-15 Diagramas de Fatores Teóricos de Concentração de Tensão Kt **919**

A-16 Fatores Aproximados de Concentração de Tensão para Flexão de uma Barra Redonda ou Tubo com um Furo Transversal Redondo **924**

A-17 Tamanhos Preferenciais e Números de Renard (Série R) **925**

A-18 Propriedades Geométricas **926**

A-19 Cano Padronizado Americano **929**

A-20 Resistências Determinísticas da ASTM Mínimas de Tração e Escoamento para Aços Laminados a Quente e Repuxados a Frio **930**

A-21 Propriedades Mecânicas Médias de Alguns Aços Termotratados **931**

A-22 Resultados de Ensaios de Tração de Alguns Metais **933**

A-23 Propriedades Médias Monotônicas e Cíclicas de Tensão-Deformação de Aços Selecionados **934**

A-24 Propriedades Mecânicas de Três Metais Diferentes do Aço **936**

A-25 Resistências Estocásticas Última e ao Escoamento para Materiais Selecionados **938**

A-26 Parâmetros Estocásticos para Ensaios de Fadiga de Vida Finita em Metais Selecionados **939**

A-27 Resistências de Fadiga de Vida Finita de Aços Comuns Selecionados de Carbono 940
A-28 Equivalentes Decimais de Bitola de Fio e de Chapa de Metal 941
A-29 Dimensões de Parafusos de Porca Quadrada e Hexagonal 943
A-30 Dimensões de Parafusos de Calota Hexagonal e Parafusos Hexagonais Pesados 944
A-31 Dimensões de Porcas Hexagonais 945
A-32 Dimensões Básicas de Arruelas Planas do Padrão Americano 946
A-33 Dimensões de Arruelas Planas Métricas 947
A-34 Função Gama 948

Tabela A-1 Prefixos padronizados do Sistema Internacional (SI)*†

Nome	Símbolo	Fator
exa	E	$1\,000\,000\,000\,000\,000\,000 = 10^{18}$
peta	P	$1\,000\,000\,000\,000\,000 = 10^{15}$
tera	T	$1\,000\,000\,000\,000 = 10^{12}$
giga	G	$1\,000\,000\,000 = 10^{9}$
mega	M	$1\,000\,000 = 10^{6}$
kilo	k	$1\,000 = 10^{3}$
hecto‡	h	$100 = 10^{2}$
deka‡	da	$10 = 10^{1}$
deci‡	d	$0{,}1 = 10^{-1}$
centi‡	c	$0{,}01 = 10^{-2}$
milli	m	$0{,}001 = 10^{-3}$
micro	μ	$0{,}000\,001 = 10^{-6}$
nano	n	$0{,}000\,000\,001 = 10^{-9}$
pico	p	$0{,}000\,000\,000\,001 = 10^{-12}$
femto	f	$0{,}000\,000\,000\,000\,001 = 10^{-15}$
atto	a	$0{,}000\,000\,000\,000\,000\,001 = 10^{-18}$

* Se possível, use prefixos múltiplos e submúltiplos em escala de 1000.
† Espaços são usados no SI em vez de vírgulas para agrupar números a fim de evitar confusão com o costume em alguns países europeus de usar vírgulas para pontos decimais.
‡ Não recomendado, mas às vezes encontrado.

Tabela A-2 Fatores de conversão *A* para converter a entrada *X* à saída *Y* usando a fórmula $Y = AX$*

Multiplique a entrada X	Pelo fator A	Para obter a saída Y	Multiplique a entrada X	Pelo fator A	Para obter a saída Y
Unidade térmica britânica, Btu	1055	joule, J	Milha/hora, mi/h	1,61	quilômetro/hora, km/h
Btu/segundo, Btu/s	1,05	quilowatt, kW	Milha/hora, mi/h	0,447	metro/segundo, m/s
Caloria	4,19	joule, J	Momento de inércia, lbm · ft^2	0,0421	quilograma-metro^2, kg-m^2
Centímetros de mercúrio (0°C)	1,333	quilopascal, kPa	Momento de inércia, lbm · in^2	293	quilograma-milímetro^2, kg-mm^2
Centipoise, cP	0,001	pascal-segundo, Pa · s	Momento da secção (segundo momento de área), in^4	41,6	centímetro^4, cm^4
Grau (ângulo)	0,0174	radiano, rad	Onça-força, oz	0,278	Newton, N
Pé, ft	0,305	metro, m	Onça-massa	0,0311	quilograma, kg
Pé^2, ft^2	0,0929	metro^2, m^2	Libra, lbf†	4,45	Newton, N
Pé/minuto, ft/min	0,0051	metro/segundo, m/s	Libra-pé, lbf · ft	1,36	Newton-metro, N-m
Pé-libra, ft · lbf	1,35	joule, J	Libra/pé^2, lbf/ft^2	47,9	pascal, Pa
Pé-libra/segundo, ft · lbf/s	1,35	watt, W	Libra-polegada, lbf · in	0,113	joule, J
Pé/segundo, ft/s	0,305	metro/segundo, m/s	Libra-polegada, lbf · in	0,113	Newton-metro, N · m
Galão (EUA), gal	3,785	litro, l	Libra/polegada, lbf · in	175	Newton/metro, N/m
Cavalo de potência, hp	0,746	quilowatt, kW	Libra/polegada^2, psi (lbf/in^2)	6,89	quilopascal, kPa
Polegada, in	0,0254	metro, m	Libra-massa, lbm	0,454	quilograma, kg
Polegada, in	25,4	milímetro, mm	Libra-massa/ Segundo, lbm/s	0,454	quilograma/segundo Kg/s
Polegada^2, in^2	645	milímetro^2, mm^2	Quarto (líquido, EUA), qt	946	mililitro, mL
Polegada de mercúrio (32°F)	3,386	quilopascal, kPa	Módulo da secção, in^3	16,4	centímetro^3, cm^3
Quilolibra, kip	4,45	quilonewton, kN	*Slug**	14,6	quilograma, kg
Quilolibra/polegada^2, kpsi(ksi)	6,89	megapascal, MPa (N/mm^2)	Tonelada (curta 2.000 lbm)	907	quilograma, kg
Massa, lbf · s^2/in	175	quilograma, kg	Jarda, yd	0,914	metro, m
Milha, mi	1,610	quilômetro, km			

* Aproximado.

† A unidade do sistema habitual da libra-força nos Estados Unidos é freqüentemente abreviada como lbf para distinguir de libra-massa, que é abreviada como lbm.

Tabela A-3 Unidades opcionais SI para tensão de flexão $\sigma = Mc/I$, tensão de torção $\tau = Tr/J$, tensão axial $\sigma = F/A$ e tensão de cisalhamento direto $\tau = F/A$

Flexão e torção				Cisalhamento axial e direto		
M, T	I, J	c, r	σ, τ	F	A	σ, τ
N · m*	m^4	m	Pa	N*	m^2	Pa
N · m	cm^4	cm	MPa (N/mm^2)	N†	mm^2	MPa (N/mm^2)
N · m†	mm^4	mm	GPa	kN	m^2	kPa
kN · m	cm^4	cm	GPa	kN†	mm^2	GPa
N · mm†	mm^4	mm	MPa (N/mm^2)			

* Relação básica.
† Freqüentemente preferida.

Tabela A-4 Unidades opcionais SI para deflexão de flexão $y = f(Fl^3/EI)$ ou $y = f(wl^4/EI)$ e deflexão de torção $\theta = Tl/GJ$

Deflexão de flexão						Deflexão de torção			
F, wl	l	I	E	y	T	l	J	G	θ
N*	m	m^4	Pa	m	N · m*	m	m^4	Pa	rad
kN†	mm	mm^4	GPa	mm	N · m†	mm	mm^4	GPa	rad
kN	m	m^4	GPa	μm	N · mm	mm	mm^4	MPa (N/mm^2)	rad
N	mm	mm^4	kPa,	m	N · m	cm	cm^4	MPa (N/mm^2)	rad

* Relação básica.
† Freqüentemente preferida.

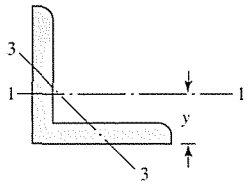
Tabela A-5 Constantes físicas de materiais

Material	Módulo de elasticidade E		Módulo de rigidez G		Coeficiente de Poisson ν	Peso unitário w		
	Mpsi	GPa	Mpsi	GPa		lbf/in^3	lbf/ft^3	kN/m^3
Alumínio (todas as ligas)	10,4	71,7	3,9	26,9	0,333	0,098	169	26,6
Berílio – cobre	18,0	124,0	7,0	48,3	0,285	0,297	513	80,6
Bronze	15,4	106,0	5,82	40,1	0,324	0,309	534	83,8
Aço carbono	30,0	207,0	11,5	79,3	0,292	0,282	487	76,5
Ferro fundido (cinza)	14,5	100,0	6,0	41,4	0,211	0,260	450	70,6
Cobre	17,2	119,0	6,49	44,7	0,326	0,322	556	87,3
Madeira de pinheiro (pseudotsuga)	1,6	11,0	0,6	4,1	0,33	0,016	28	4,3
Vidro	6,7	46,2	2,7	18,6	0,245	0,094	162	25,4
Inconel	31,0	214,0	11,0	75,8	0,290	0,307	530	83,3
Chumbo	5,3	36,5	1,9	13,1	0,425	0,411	710	111,5
Magnésio	6,5	44,8	2,4	16,5	0,350	0,065	112	17,6
Molibdênio	48,0	331,0	17,0	117,0	0,307	0,368	636	100,0
Metal de Monel*	26,0	179,0	9,5	65,5	0,320	0,319	551	86,6
Níquel – prata	18,5	127,0	7,0	48,3	0,322	0,316	546	85,8
Aço níquel	30,0	207,0	11,5	79,3	0,291	0,280	484	76,0
Bronze – fósforo	16,1	111,0	6,0	41,4	0,349	0,295	510	80,1
Aço inoxidável (18-8)	27,6	190,0	10,6	73,1	0,305	0,280	484	76,0
Ligas de titânio	16,5	114,0	6,2	42,4	0,340	0,160	276	43,4

* N. de T.: Nome comercial de liga predominantemente de níquel e cobre, muito resistente à corrosão.

Tabela A-6 Propriedades do perfil L (ângulo ou cantoneira) de aço estrutural *†

w = peso por pé, lbf/ft
m = massa por metro, kg/m
A = área, in^2 (cm^2)
I = segundo momento de inércia, in^4 (cm^4)
k = raio de giração, in (cm)
y = distância do centróide, in (cm)
Z = módulo da secção, in^3 (cm^3)



Medida, in	w	A	I_{1-1}	k_{1-1}	Z_{1-1}	y	k_{3-3}
$1 \times 1 \times \frac{1}{8}$	0,80	0,234	0,021	0,298	0,029	0,290	0,191
$\times \frac{1}{4}$	1,49	0,437	0,036	0,287	0,054	0,336	0,193
$1\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{2} \times \frac{1}{8}$	1,23	0,36	0,074	0,45	0,068	0,41	0,29
$\times \frac{1}{4}$	2,34	0,69	0,135	0,44	0,130	0,46	0,29
$2 \times 2 \times \frac{1}{8}$	1,65	0,484	0,190	0,626	0,131	0,546	0,398
$\times \frac{1}{4}$	3,19	0,938	0,348	0,609	0,247	0,592	0,391
$\times \frac{3}{8}$	4,7	1,36	0,479	0,594	0,351	0,636	0,389
$2\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$	4,1	1,19	0,703	0,769	0,394	0,717	0,491
$\times \frac{3}{8}$	5,9	1,73	0,984	0,753	0,566	0,762	0,487
$3 \times 3 \times \frac{1}{4}$	4,9	1,44	1,24	0,930	0,577	0,842	0,592
$\times \frac{3}{8}$	7,2	2,11	1,76	0,913	0,833	0,888	0,587
$\times \frac{1}{2}$	9,4	2,75	2,22	0,898	1,07	0,932	0,584
$3\frac{1}{2} \times 3\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$	5,8	1,69	2,01	1,09	0,794	0,968	0,694
$\times \frac{3}{8}$	8,5	2,48	2,87	1,07	1,15	1,01	0,687
$\times \frac{1}{2}$	11,1	3,25	3,64	1,06	1,49	1,06	0,683
$4 \times 4 \times \frac{1}{4}$	6,6	1,94	3,04	1,25	1,05	1,09	0,795
$\times \frac{3}{8}$	9,8	2,86	4,36	1,23	1,52	1,14	0,788
$\times \frac{1}{2}$	12,8	3,75	5,56	1,22	1,97	1,18	0,782
$\times \frac{5}{8}$	15,7	4,61	6,66	1,20	2,40	1,23	0,779
$6 \times 6 \times \frac{3}{8}$	14,9	4,36	15,4	1,88	3,53	1,64	1,19
$\times \frac{1}{2}$	19,6	5,75	19,9	1,86	4,61	1,68	1,18
$\times \frac{5}{8}$	24,2	7,11	24,2	1,84	5,66	1,73	1,18
$\times \frac{3}{4}$	28,7	8,44	28,2	1,83	6,66	1,78	1,17

(continua)

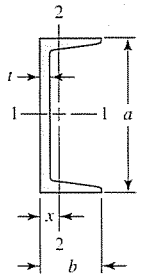
Tabela A-6 Propriedades do perfil L (ângulo ou cantoneira) de aço estrutural *† *(continuação)*

Medida, mm	m	A	I_{1-1}	k_{1-1}	Z_{1-1}	y	k_{3-3}
25 × 25 × 3	1,11	1,42	0,80	0,75	0,45	0,72	0,48
× 4	1,45	1,85	1,01	0,74	0,58	0,76	0,48
× 5	1,77	2,26	1,20	0,73	0,71	0,80	0,48
40 × 40 × 4	2,42	3,08	4,47	1,21	1,55	1,12	0,78
× 5	2,97	3,79	5,43	1,20	1,91	1,16	0,77
× 6	3,52	4,48	6,31	1,19	2,26	1,20	0,77
50 × 50 × 5	3,77	4,80	11,0	1,51	3,05	1,40	0,97
× 6	4,47	5,59	12,8	1,50	3,61	1,45	0,97
× 8	5,82	7,41	16,3	1,48	4,68	1,52	0,96
60 × 60 × 5	4,57	5,82	19,4	1,82	4,45	1,64	1,17
× 6	5,42	6,91	22,8	1,82	5,29	1,69	1,17
× 8	7,09	9,03	29,2	1,80	6,89	1,77	1,16
× 10	8,69	11,1	34,9	1,78	8,41	1,85	1,16
80 × 80 × 6	7,34	9,35	55,8	2,44	9,57	2,17	1,57
× 8	9,63	12,3	72,2	2,43	12,6	2,26	1,56
× 10	11,9	15,1	87,5	2,41	15,4	2,34	1,55
100 ×100 × 8	12,2	15,5	145	3,06	19,9	2,74	1,96
× 12	17,8	22,7	207	3,02	29,1	2,90	1,94
× 15	21,9	27,9	249	2,98	35,6	3,02	1,93
150 × 150 × 10	23,0	29,3	624	4,62	56,9	4,03	2,97
× 12	27,3	34,8	737	4,60	67,7	4,12	2,95
× 15	33,8	43,0	898	4,57	83,5	4,25	2,93
× 18	40,1	51,0	1050	4,54	98,7	4,37	2,92

* Medidas métricas estão também disponíveis em tamanhos de 45, 70, 90, 120 e 200 mm.
† Estas medidas estão também disponíveis em liga de alumínio.

Tabela A-7 Propriedades do perfil U (canal) de aço estrutural *

a, b = medida, in (mm)
w = peso por pé, lbf/ft
m = massa por metro, kg/m
t = espessura de aba, in (mm)
A = área, in^2 (cm^2)
I = segundo momento de área, in^4 (cm^4)
k = raio de giração, in (cm)
x = distância do centróide, in (cm)
Z = módulo da secção, in^3 (cm^3)



(continua)

Tabela A-7 Propriedades do perfil U (canal) de aço estrutural *† *(continuação)*

a, in	b, in	t	A	w	I_{1-1}	k_{1-1}	Z_{1-1}	I_{2-2}	k_{2-2}	Z_{2-2}	x
3	1,410	0,170	1,21	4,1	1,66	1,17	1,10	0,197	0,404	0,202	0,436
3	1,498	0,258	1,47	5,0	1,85	1,12	1,24	0,247	0,410	0,233	0,438
3	1,596	0,356	1,76	6,0	2,07	1,08	1,38	0,305	0,416	0,268	0,455
4	1,580	0,180	1,57	5,4	3,85	1,56	1,93	0,319	0,449	0,283	0,457
4	1,720	0,321	2,13	7,25	4,59	1,47	2,29	0,433	0,450	0,343	0,459
5	1,750	0,190	1,97	6,7	7,49	1,95	3,00	0,479	0,493	0,378	0,484
5	1,885	0,325	2,64	9,0	8,90	1,83	3,56	0,632	0,489	0,450	0,478
6	1,920	0,200	2,40	8,2	13,1	2,34	4,38	0,693	0,537	0,492	0,511
6	2,034	0,314	3,09	10,5	15,2	2,22	5,06	0,866	0,529	0,564	0,499
6	2,157	0,437	3,83	13,0	17,4	2,13	5,80	1,05	0,525	0,642	0,514
7	2,090	0,210	2,87	9,8	21,3	2,72	6,08	0,968	0,581	0,625	0,540
7	2,194	0,314	3,60	12,25	24,2	2,60	6,93	1,17	0,571	0,703	0,525
7	2,299	0,419	4,33	14,75	27,2	2,51	7,78	1,38	0,564	0,779	0,532
8	2,260	0,220	3,36	11,5	32,3	3,10	8,10	1,30	0,625	0,781	0,571
8	2,343	0,303	4,04	13,75	36,2	2,99	9,03	1,53	0,615	0,854	0,553
8	2,527	0,487	5,51	18,75	44,0	2,82	11,0	1,98	0,599	1,01	0,565
9	2,430	0,230	3,91	13,4	47,7	3,49	10,6	1,75	0,669	0,962	0,601
9	2,485	0,285	4,41	15,0	51,0	3,40	11,3	1,93	0,661	1,01	0,586
9	2,648	0,448	5,88	20,0	60,9	3,22	13,5	2,42	0,647	1,17	0,583
10	2,600	0,240	4,49	15,3	67,4	3,87	13,5	2,28	0,713	1,16	0,634
10	2,739	0,379	5,88	20,0	78,9	3,66	15,8	2,81	0,693	1,32	0,606
10	2,886	0,526	7,35	25,0	91,2	3,52	18,2	3,36	0,676	1,48	0,617
10	3,033	0,673	8,82	30,0	103	3,43	20,7	3,95	0,669	1,66	0,649
12	3,047	0,387	7,35	25,0	144	4,43	24,1	4,47	0,780	1,89	0,674
12	3,170	0,510	8,82	30,0	162	4,29	27,0	5,14	0,763	2,06	0,674

(continua)

Tabela A-7 Propriedades do perfil U (canal) de aço estrutural *† *(continuação)*

a × b, mm	m	t	A	I_{1-1}	k_{1-1}	Z_{1-1}	I_{2-2}	k_{2-2}	Z_{2-2}	x
76 x 38	6,70	5,1	8,53	74,14	2,95	19,46	10,66	1,12	4,07	1,19
102 x 51	10,42	6,1	13,28	207,7	3,95	40,89	29,10	1,48	8,16	1,51
127 x 64	14,90	6,4	18,98	482,5	5,04	75,99	67,23	1,88	15,25	1,94
152 x 76	17,88	6,4	22,77	851,5	6,12	111,8	113,8	2,24	21,05	2,21
152 x 89	23,84	7,1	30,36	1166	6,20	153,0	215,1	2,66	35,70	2,86
178 x 76	20,84	6,6	26,54	1337	7,10	150,4	134,0	2,25	24,72	2,20
178 x 89	26,81	7,6	34,15	1753	7,16	197,2	241,0	2,66	39,29	2,76
203 x 76	23,82	7,1	30,34	1950	8,02	192,0	151,3	2,23	27,59	2,13
203 x 89	29,78	8,1	37,94	2491	8,10	245,2	264,4	2,64	42,34	2,65
229 x 76	26,06	7,6	33,20	2610	8,87	228,3	158,7	2,19	28,22	2,00
229 x 89	32,76	8,6	41,73	3387	9,01	296,4	285,0	2,61	44,82	2,53
254 x 76	28,29	8,1	36,03	3367	9,67	265,1	162,6	2,12	28,21	1,86
254 x 89	35,74	9,1	45,42	4448	9,88	350,2	302,4	2,58	46,70	2,42
305 x 89	41,69	10,2	53,11	7061	11,5	463,3	325,4	2,48	48,49	2,18
305 x 102	46,18	10,2	58,83	8214	11,8	539,0	499,5	2,91	66,59	2,66

* Estas medidas também estão disponíveis em liga de alumínio.

Tabela A-8 Propriedades de tubulação redonda

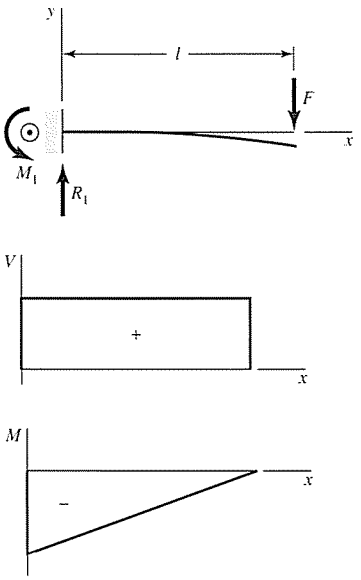
w_a = peso unitário de tubulação de alumínio, lbf/ft
w_s = peso unitário de tubulação de aço, lbf/ft
m = massa unitária, kg/m
A = área, in^2 (cm^2)
I = segundo momento de área, in^4 (cm^4)
J = segundo momento polar de área, in^4 (cm^4)
k = raio de giração, in (cm)
Z = módulo de secção, in^3 (cm^3)
d, t = tamanho (OD) e espessura, in (mm)

Medida, in	w_a	w_s	A	I	k	Z	J
$1 \times \frac{1}{8}$	0,416	1,128	0,344	0,034	0,313	0,067	0,067
$1 \times \frac{1}{4}$	0,713	2,003	0,589	0,046	0,280	0,092	0,092
$1\frac{1}{2} \times \frac{1}{8}$	0,653	1,769	0,540	0,129	0,488	0,172	0,257
$1\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$	1,188	3,338	0,982	0,199	0,451	0,266	0,399
$2 \times \frac{1}{8}$	0,891	2,670	0,736	0,325	0,664	0,325	0,650
$2 \times \frac{1}{4}$	1,663	4,673	1,374	0,537	0,625	0,537	1,074
$2\frac{1}{2} \times \frac{1}{8}$	1,129	3,050	0,933	0,660	0,841	0,528	1,319
$2\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$	2,138	6,008	1,767	1,132	0,800	0,906	2,276
$3 \times \frac{1}{4}$	2,614	7,343	2,160	2,059	0,976	1,373	4,117
$3 \times \frac{3}{8}$	3,742	10,51	3,093	2,718	0,938	1,812	5,436
$4 \times \frac{3}{16}$	2,717	7,654	2,246	4,090	1,350	2,045	8,180
$4 \times \frac{3}{8}$	5,167	14,52	4,271	7,090	1,289	3,544	14,180

Medida, mm	m	A	I	k	Z	J
12 × 2	0,490	0,628	0,082	0,361	0,136	0,163
16 × 2	0,687	0,879	0,220	0,500	0,275	0,440
16 × 3	0,956	1,225	0,273	0,472	0,341	0,545
20 × 4	1,569	2,010	0,684	0,583	0,684	1,367
25 × 4	2,060	2,638	1,508	0,756	1,206	3,015
25 × 5	2,452	3,140	1,669	0,729	1,336	3,338
30 × 4	2,550	3,266	2,827	0,930	1,885	5,652
30 × 5	3,065	3,925	3,192	0,901	2,128	6,381
42 × 4	3,727	4,773	8,717	1,351	4,151	17,430
42 × 5	4,536	5,809	10,130	1,320	4,825	20,255
50 × 4	4,512	5,778	15,409	1,632	6,164	30,810
50 × 5	5,517	7,065	18,118	1,601	7,247	36,226

Tabela A-9 Cisalhamento, momento e deflexão de vigas

1 Balanço – carga na extremidade



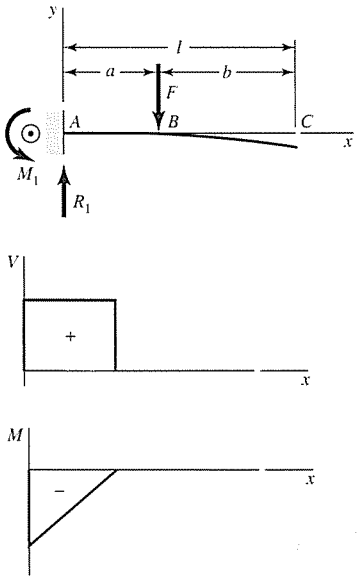
$$R_1 = V = F \qquad M_1 = Fl$$

$$M = F(x - l)$$

$$y = \frac{Fx^2}{6EI}(x - 3l)$$

$$y_{\max} = -\frac{Fl^3}{3EI}$$

2 Balanço – carga intermediária



$$R_1 = V = F \qquad M_1 = Fa$$

$$M_{AB} = F(x - a) \qquad M_{BC} = 0$$

$$y_{AB} = \frac{Fx^2}{6EI}(x - 3a)$$

$$y_{BC} = \frac{Fa^2}{6EI}(a - 3x)$$

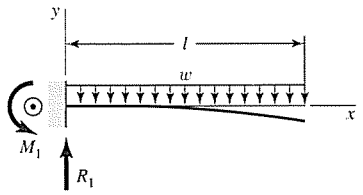
$$y_{\max} = \frac{Fa^2}{6EI}(a - 3l)$$

Nota: As *reações* de *força e momento* são positivas nas direções mostradas; as equações para força de cisalhamento V e momento flexor M seguem as convenções de sinais dadas na Seção 4-2.

(continua)

Tabela A-9 Cisalhamento, momento e deflexão de vigas *(continuação)*

3 Balanço – carga uniforme

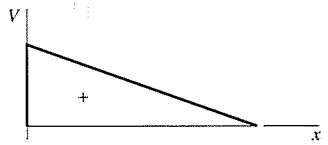


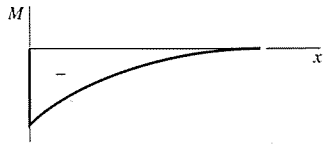
$$R_1 = wl \qquad M_1 = \frac{wl^2}{2}$$

$$V = w(l - x) \qquad M = -\frac{w}{2}(l - x)^2$$

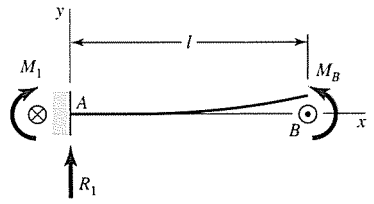
$$y = \frac{wx^2}{24EI}(4lx - x^2 - 6l^2)$$

$$y_{max} = -\frac{wl^4}{8EI}$$



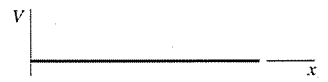


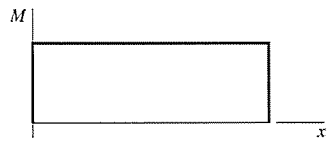
4 Balanço – carga de momento flexor



$$R_1 = 0 \qquad M_1 = M_B \qquad M = M_B$$

$$y = \frac{M_B x^2}{2EI} \qquad y_{max} = \frac{M_B l^2}{2EI}$$



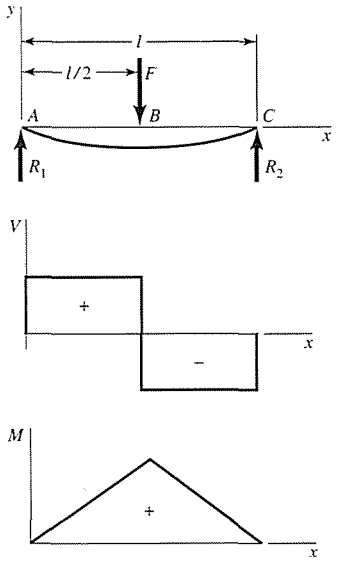


Nota: As *reações* de *força e momento* são positivas nas direções mostradas; as equações para força de cisalhamento *V* e momento flexor *M* seguem as convenções de sinais dadas na Seção 4-2.

(continua)

Tabela A-9 Cisalhamento, momento e deflexão de vigas *(continuação)*

5 Apoios simples – carga central



$$R_1 = R_2 = \frac{F}{2} \qquad V_{AB} = R_1$$

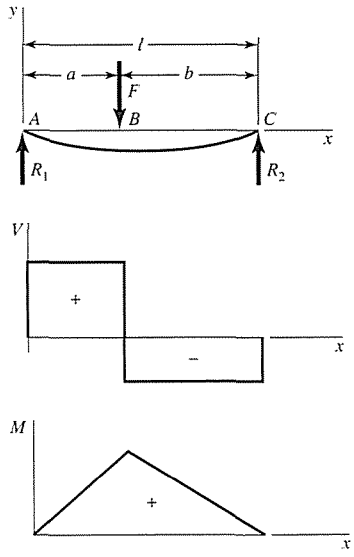
$$V_{AB} = R_1 \qquad V_{BC} = -R_2$$

$$M_{AB} = \frac{Fx}{2} \qquad M_{BC} = \frac{F}{2}(l - x)$$

$$y_{AB} = \frac{Fx}{48EI}(4x^2 - 3l^2)$$

$$y_{\max} = -\frac{Fl^3}{48EI}$$

6 Apoios simples – carga intermediária



$$R_1 = \frac{Fb}{l} \qquad R_2 = \frac{Fa}{l}$$

$$V_{AB} = R_1 \qquad V_{BC} = -R_2$$

$$M_{AB} = \frac{Fbx}{l} \qquad M_{BC} = \frac{Fa}{l}(l - x)$$

$$y_{AB} = \frac{Fbx}{6EIl}(x^2 + b^2 - l^2)$$

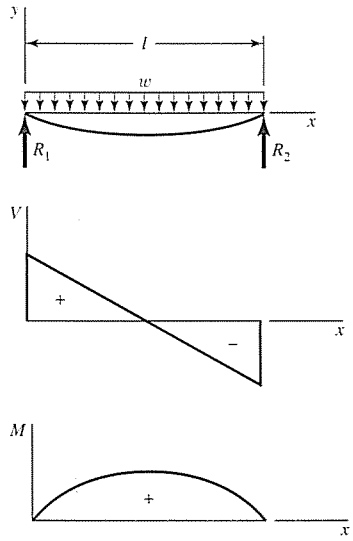
$$y_{BC} = \frac{Fa(l - x)}{6EIl}(x^2 + a^2 - 2lx)$$

Nota: As *reações de força e momento* são positivas nas direções mostradas; as equações para força de cisalhamento V e momento flexor M seguem as convenções de sinais dadas na Seção 4-2.

(continua)

Tabela A-9 Cisalhamento, momento e deflexão de vigas *(continuação)*

7 Apoios simples – carga uniforme



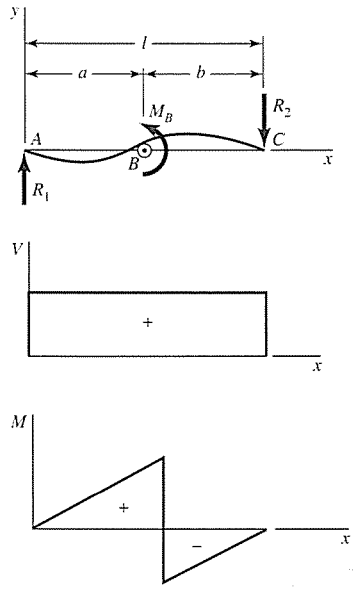
$$R_1 = R_2 = \frac{wl}{2} \qquad V = \frac{wl}{2} - wx$$

$$M = \frac{wx}{2}(l - x)$$

$$y = \frac{wx}{24EI}(2lx^2 - x^3 - l^3)$$

$$y_{max} = -\frac{5wl^4}{384EI}$$

8 Apoios simples – carga de momento flexor



$$R_1 = R_2 = \frac{M_B}{l} \qquad V = \frac{M_B}{l}$$

$$M_{AB} = \frac{M_B x}{l} \qquad M_{BC} = \frac{M_B}{l}(x - l)$$

$$y_{AB} = \frac{M_B x}{6EIl}(x^2 + 3a^2 - 6al + 2l^2)$$

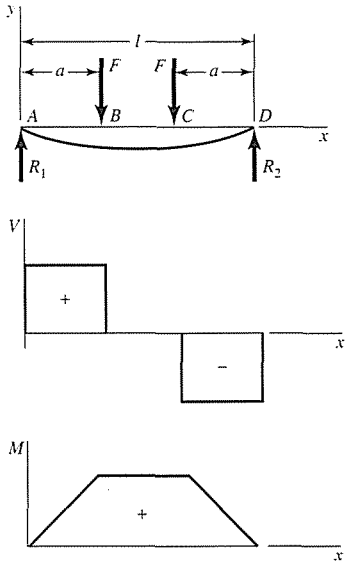
$$y_{BC} = \frac{M_B}{6EIl}[x^3 - 3lx^2 + x(2l^2 + 3a^2) - 3a^2 l]$$

Nota: As *reações* de *força e momento* são positivas nas direções mostradas; as equações para força de cisalhamento V e momento flexor M seguem as convenções de sinais dadas na Seção 4-2.

(continua)

Tabela A-9 Cisalhamento, momento e deflexão de vigas *(continuação)*

9 Apoios simples – cargas irmãs



$$R_1 = R_2 = F \qquad V_{AB} = F \qquad V_{BC} = 0$$

$$V_{CD} = -F$$

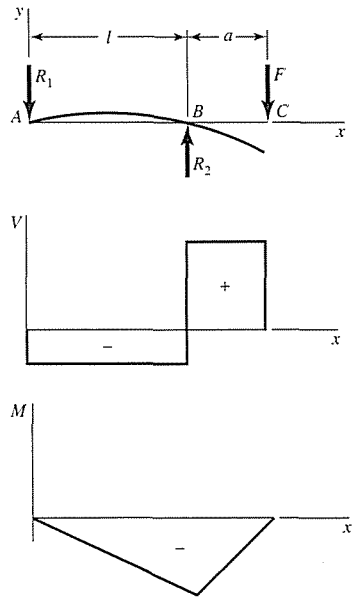
$$M_{AB} = Fx \qquad M_{BC} = Fa \qquad M_{CD} = F(l - x)$$

$$y_{AB} = \frac{Fx}{6EI}(x^2 + 3a^2 - 3la)$$

$$y_{BC} = \frac{Fa}{6EI}(3x^2 + a^2 - 3lx)$$

$$y_{\max} = \frac{Fa}{24EI}(4a^2 - 3l^2)$$

10 Apoios simples – carga de balanço (sobressalente)



$$R_1 = \frac{Fa}{l} \qquad R_2 = \frac{F}{l}(l + a)$$

$$V_{AB} = -\frac{Fa}{l} \qquad V_{BC} = F$$

$$M_{AB} = -\frac{Fax}{l} \qquad M_{BC} = F(x - l - a)$$

$$y_{AB} = \frac{Fax}{6EIl}(l^2 - x^2)$$

$$y_{BC} = \frac{F(x - l)}{6EI}[(x - l)^2 - a(3x - l)]$$

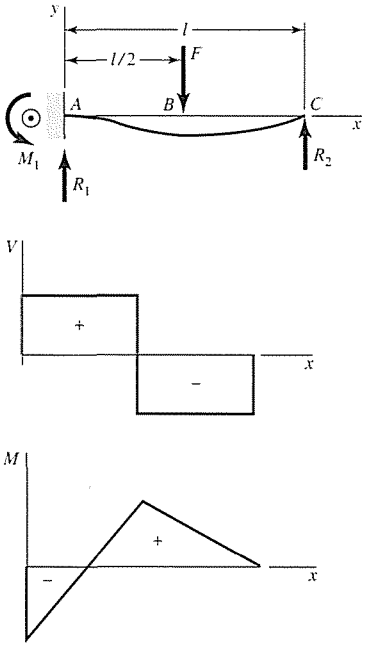
$$y_c = -\frac{Fa^2}{3EI}(l + a)$$

Nota: As *reações* de *força e momento* são positivas nas direções mostradas; as equações para força de cisalhamento V e momento flexor M seguem as convenções de sinais dadas na Seção 4-2.

(continua)

Tabela A-9 Cisalhamento, momento e deflexão de vigas *(continuação)*

11 Um apoio fixo e um apoio simples – carga central



$$R_1 = \frac{11F}{16} \qquad R_2 = \frac{5F}{16} \qquad M_1 = \frac{3Fl}{16}$$

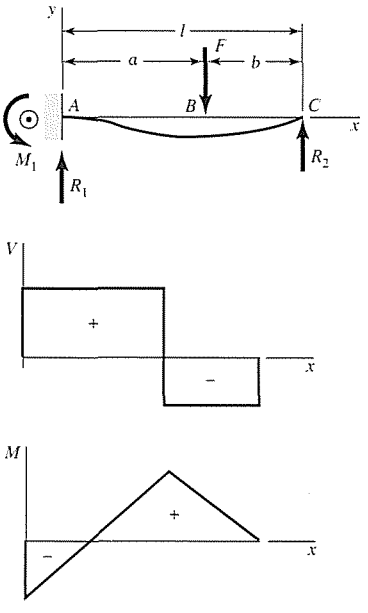
$$V_{AB} = R_1 \qquad V_{BC} = -R_2$$

$$M_{AB} = \frac{F}{16}(11x - 3l) \qquad M_{BC} = \frac{5F}{16}(l - x)$$

$$y_{AB} = \frac{Fx^2}{96EI}(11x - 9l)$$

$$y_{BC} = \frac{F(l - x)}{96EI}(5x^2 + 2l^2 - 10lx)$$

12 Um apoio fixo e um apoio simples – carga intermediária



$$R_1 = \frac{Fb}{2l^3}(3l^2 - b^2) \qquad R_2 = \frac{Fa^2}{2l^3}(3l - a)$$

$$M_1 = \frac{Fb}{2l^2}(l^2 - b^2)$$

$$V_{AB} = R_1 \qquad V_{BC} = -R_2$$

$$M_{AB} = \frac{Fb}{2l^3}[b^2l - l^3 + x(3l^2 - b^2)]$$

$$M_{BC} = \frac{Fa^2}{2l^3}(3l^2 - 3lx - al + ax)$$

$$y_{AB} = \frac{Fbx^2}{12EIl^3}[3l(b^2 - l^2) + x(3l^2 - b^2)]$$

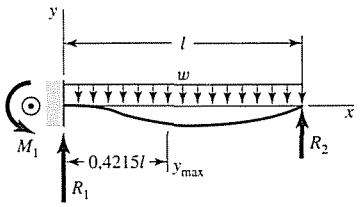
$$y_{BC} = y_{AB} - \frac{F(x - a)^3}{6EI}$$

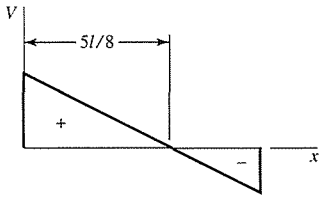
Nota: As *reações de força e momento* são positivas nas direções mostradas; as equações para força de cisalhamento V e momento flexor M seguem as convenções de sinais dadas na Seção 4-2.

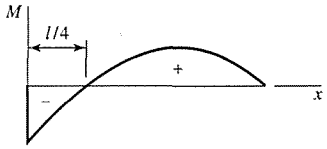
(continua)

Tabela A-9 Cisalhamento, momento e deflexão de vigas *(continuação)*

13 Um apoio fixo e um apoio simples – carga uniforme







$$R_1 = \frac{5wl}{8} \qquad R_2 = \frac{3wl}{8} \qquad M_1 = \frac{wl^2}{8}$$

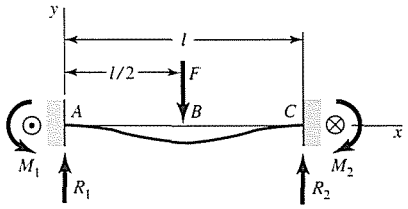
$$V = \frac{5wl}{8} - wx$$

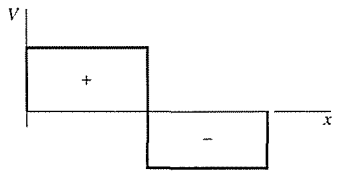
$$M = -\frac{w}{8}(4x^2 - 5lx + l^2)$$

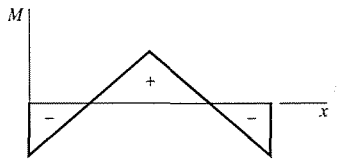
$$y = \frac{wx^2}{48EI}(l - x)(2x - 3l)$$

$$y_{max} = -\frac{wl^4}{185EI}$$

14 Apoios fixos – carga central







$$R_1 = R_2 = \frac{F}{2} \qquad M_1 = M_2 = \frac{Fl}{8}$$

$$V_{AB} = -V_{BC} = \frac{F}{2}$$

$$M_{AB} = \frac{F}{8}(4x - l) \qquad M_{BC} = \frac{F}{8}(3l - 4x)$$

$$y_{AB} = \frac{Fx^2}{48EI}(4x - 3l)$$

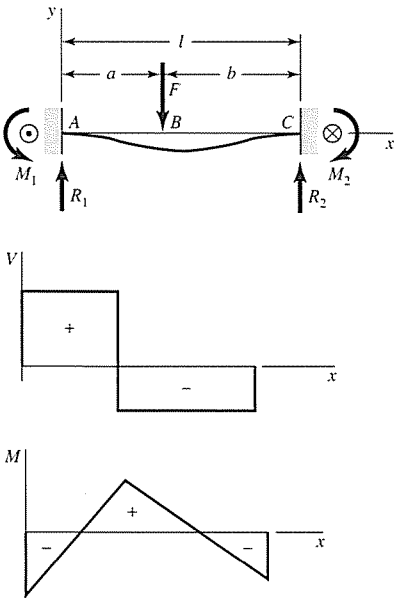
$$y_{max} = -\frac{Fl^3}{192EI}$$

Nota: As *reações* de *força e momento* são positivas nas direções mostradas; as equações para força de cisalhamento V e momento flexor M seguem as convenções de sinais dadas na Seção 4-2.

(continua)

Tabela A-9 Cisalhamento, momento e deflexão de vigas *(continuação)*

15 Apoios fixos – carga intermediária



$$R_1 = \frac{Fb^2}{l^3}(3a + b) \qquad R_2 = \frac{Fa^2}{l^3}(3b + a)$$

$$M_1 = \frac{Fab^2}{l^2} \qquad M_2 = \frac{Fa^2b}{l^2}$$

$$V_{AB} = R_1 \qquad V_{BC} = -R_2$$

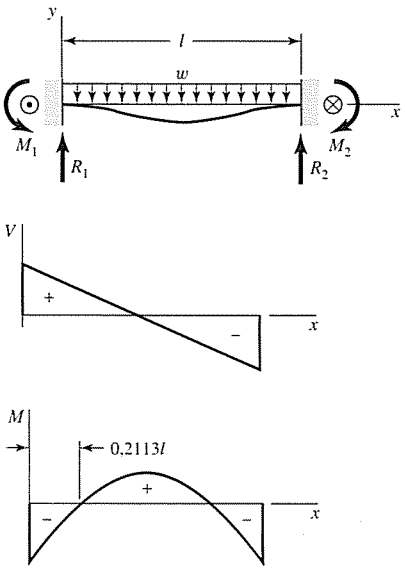
$$M_{AB} = \frac{Fb^2}{l^3}[x(3a + b) - al]$$

$$M_{BC} = M_{AB} - F(x - a)$$

$$y_{AB} = \frac{Fb^2x^2}{6EIl^3}[x(3a + b) - 3al]$$

$$y_{BC} = \frac{Fa^2(l - x)^2}{6EIl^3}[(l - x)(3b + a) - 3bl]$$

16 Apoios fixos – carga uniforme



$$R_1 = R_2 = \frac{wl}{2} \qquad M_1 = M_2 = \frac{wl^2}{12}$$

$$V = \frac{w}{2}(l - 2x)$$

$$M = \frac{w}{12}(6lx - 6x^2 - l^2)$$

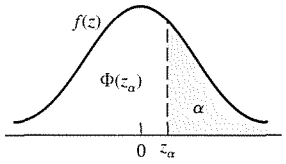
$$y = -\frac{wx^2}{24EI}(l - x)^2$$

$$y_{\max} = -\frac{wl^4}{384EI}$$

Nota: As *reações* de *força e momento* são positivas nas direções mostradas; as equações para força de cisalhamento V e momento flexor M seguem as convenções de sinais dadas na Seção 4-2.

Tabela A-10 Função cumulativa de distribuição da distribuição normal (gaussiana)

$$\Phi(z_\alpha) = \int_{-\infty}^{z_\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$
$$= \begin{cases} \alpha & z_\alpha \leq 0 \\ 1-\alpha & z_\alpha > 0 \end{cases}$$



z_α	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3238	0,3192	0,3156	0,3121
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,00990	0,00964	0,00939	0,00914	0,00889	0,00866	0,00842
2,4	0,00820	0,00798	0,00776	0,00755	0,00734	0,00714	0,00695	0,00676	0,00657	0,00639
2,5	0,00621	0,00604	0,00587	0,00570	0,00554	0,00539	0,00523	0,00508	0,00494	0,00480
2,6	0,00466	0,00453	0,00440	0,00427	0,00415	0,00402	0,00391	0,00379	0,00368	0,00357
2,7	0,00347	0,00336	0,00326	0,00317	0,00307	0,00298	0,00289	0,00280	0,00272	0,00264
2,8	0,00256	0,00248	0,00240	0,00233	0,00226	0,00219	0,00212	0,00205	0,00199	0,00193
2,9	0,00187	0,00181	0,00175	0,00169	0,00164	0,00159	0,00154	0,00149	0,00144	0,00139

(continua)

Tabela A-10 Função cumulativa de distribuição da distribuição normal (gaussiana) *(continuação)*

z_α	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
3	0,00135	$0,0^3968$	$0,0^3687$	$0,0^3483$	$0,0^3337$	$0,0^3233$	$0,0^3159$	$0,0^3108$	$0,0^4723$	$0,0^4481$
4	$0,0^4317$	$0,0^4207$	$0,0^4133$	$0,0^5854$	$0,0^5541$	$0,0^5340$	$0,0^5211$	$0,0^5130$	$0,0^6793$	$0,0^6479$
5	$0,0^6287$	$0,0^6170$	$0,0^7996$	$0,0^7579$	$0,0^7333$	$0,0^7190$	$0,0^7107$	$0,0^8599$	$0,0^8332$	$0,0^8182$
6	$0,0^9987$	$0,0^9530$	$0,0^9282$	$0,0^9149$	$0,0^{10}777$	$0,0^{10}402$	$0,0^{10}206$	$0,0^{10}104$	$0,0^{11}523$	$0,0^{11}260$
z_α	−1,282	−1,643	−1,960	−2,326	−2,576	−3,090	−3,291	−3,891	−4,417	
$F(z_\alpha)$	0,10	0,05	0,025	0,010	0,005	0,001	0,005	0,00005	0,000005	
$R(z_\alpha)$	0,90	0,95	0,975	0,999	0,995	0,999	0,9995	0,9999	0,999995	

Tabela A-11 Uma seleção de classes internacionais de tolerância – série métrica (intervalos de medida para cima do limite inferior e *incluindo* o limite superior. Todos os valores em milímetros)

Medidas básicas	Classes de tolerância IT6	IT7	IT8	IT9	IT10	IT11
0-3	0,006	0,010	0,014	0,025	0,040	0,060
3-6	0,008	0,012	0,018	0,030	0,048	0,075
6-10	0,009	0,015	0,022	0,036	0,058	0,090
10-18	0,011	0,018	0,027	0,0,43	0,070	0,110
18-30	0,013	0,021	0,033	0,052	0,084	0,130
30-50	0,016	0,025	0,039	0,062	0,100	0,160
50-80	0,019	0,030	0,046	0,074	0,120	0,190
80-120	0,022	0,035	0,054	0,087	0,140	0,220
120-180	0,025	0,040	0,063	0,100	0,160	0,250
180-250	0,029	0,046	0,072	0,115	0,185	0,290
250-315	0,032	0,052	0,081	0,130	0,210	0,320
315-400	0,036	0,057	0,089	0,140	0,230	0,360

Fonte: Preferred Metric Limits and Fits, ANSI B4.2-1978. Ver também BSI 4500.

Tabela A-12 Desvios fundamentais para eixos – série métrica (intervalos de medida para cima do limite inferior e *incluindo* o limite superior. Todos os valores em milímetros)

Medidas básicas	Letra do desvio superior						Letra do desvio inferior			
	c	d	f	g	h	k	n	p	s	u
0-3	–0,060	–0,020	–0,006	–0,002	0	0	+0,004	+0,006	+0,014	+0,018
3-6	–0,070	–0,030	–0,010	–0,004	0	+0,001	+0,008	+0,012	+0,019	+0,023
6-10	–0,080	–0,040	–0,013	–0,005	0	+0,001	+0,010	+0,015	+0,023	+0,028
10-14	–0,095	–0,050	–0,016	–0,006	0	+0,001	+0,012	+0,018	+0,028	+0,033
14-18	–0,095	–0,050	–0,016	–0,006	0	+0,001	+0,012	+0,018	+0,028	+0,033
18-24	–0,110	–0,065	–0,020	–0,007	0	+0,002	+0,015	+0,022	+0,035	+0,041
24-30	–0,110	–0,065	–0,020	–0,007	0	+0,002	+0,015	+0,022	+0,035	+0,048
30-40	–0,120	–0,080	–0,025	–0,009	0	+0,002	+0,017	+0,026	+0,043	+0,060
40-50	–0,130	–0,080	–0,025	–0,009	0	+0,002	+0,017	+0,026	+0,043	+0,070
50-65	–0,140	–0,100	–0,030	–0,010	0	+0,002	+0,020	+0,032	+0,053	+0,087
65-80	–0,150	–0,100	–0,030	–0,010	0	+0,002	+0,020	+0,032	+0,059	+0,102
80-100	–0,170	–0,120	–0,036	–0,012	0	+0,003	+0,023	+0,037	+0,071	+0,124
100-120	–0,180	–0,120	–0,036	–0,012	0	+0,003	+0,023	+0,037	+0,079	+0,144
120-140	–0,200	–0,145	–0,043	–0,014	0	+0,003	+0,027	+0,043	+0,092	+0,170
140-160	–0,210	–0,145	–0,043	–0,014	0	+0,003	+0,027	+0,043	+0,100	+0,190
160-180	–0,230	–0,145	–0,043	–0,014	0	+0,003	+0,027	+0,043	+0,108	+0,210
180-200	–0,240	–0,170	–0,050	–0,015	0	+0,004	+0,031	+0,050	+0,122	+0,236
200-225	–0,260	–0,170	–0,050	–0,015	0	+0,004	+0,031	+0,050	+0,130	+0,258
225-250	–0,280	–0,170	–0,050	–0,015	0	+0,004	+0,031	+0,050	+0,140	+0,284
250-280	–0,300	–0,190	–0,056	–0,017	0	+0,004	+0,034	+0,056	+0,158	+0,315
280-315	–0,330	–0,190	–0,056	–0,017	0	+0,004	+0,034	+0,056	+0,170	+0,350
315-355	–0,360	–0,210	–0,062	–0,018	0	+0,004	+0,037	+0,062	+0,190	+0,390
355-400	–0,400	–0,210	–0,062	–0,018	0	+0,004	+0,037	+0,062	+0,208	+0,435

Fonte: Preferred Metric Limits and Fits, ANSI B4.2-1978. Ver também BSI 4500.

Tabela A-13 Uma seleção das classes internacionais de tolerância – série polegar (intervalos de medida para cima do limite inferior e *incluindo* o limite superior. Todos os valores em polegadas, convertidos da Tabela A-11)

Medidas básicas	Classes de tolerância					
	IT6	IT7	IT8	IT9	IT10	IT11
0-0,12	0,0002	0,0004	0,0006	0,0010	0,0016	0,0024
0,12-0,24	0,0003	0,0005	0,0007	0,0012	0,0019	0,0030
0,24-0,40	0,0004	0,0006	0,0009	0,0014	0,0023	0,0035
0,40-0,72	0,0004	0,0007	0,0011	0,0017	0,0028	0,0043
0,72-1,20	0,0005	0,0008	0,0013	0,0020	0,0033	0,0051
1,20-2,00	0,0006	0,0010	0,0015	0,0024	0,0039	0,0063
2,00-3,20	0,0007	0,0012	0,0018	0,0029	0,0047	0,0075
3,20-4,80	0,0009	0,0014	0,0021	0,0034	0,0055	0,0087
4,80-7,20	0,0010	0,0016	0,0025	0,0039	0,0063	0,0098
7,20-10,00	0,0011	0,0018	0,0028	0,0045	0,0073	0,0114
10,00-12,60	0,0013	0,0020	0,0032	0,0051	0,0083	0,0126
12,60-16,00	0,0014	0,0022	0,0035	0,0055	0,0091	0,0142

Tabela A-14 Desvios fundamentais para eixos – série polegar (intervalos de medida para cima do limite inferior e *incluindo* o limite superior. Todos os valores em polegadas, convertidos da Tabela A-12)

Medidas básicas	Letra do desvio superior						Letra do desvio inferior			
	c	*d*	*f*	*g*	*h*	*k*	*n*	*p*	*s*	*u*
0-0,12	−0,0024	−0,0008	−0,0002	−0,0001	0	0	+0,0002	+0,0002	+0,0006	+0,0007
0,12-0,24	−0,0028	−0,0012	−0,0004	−0,0002	0	0	+0,0003	+0,0005	+0,0007	+0,0009
0,24-0,40	−0,0031	−0,0016	−0,0005	−0,0002	0	0	+0,0004	+0,0006	+0,0009	+0,0011
0,40-0,72	−0,0037	−0,0020	−0,0006	−0,0002	0	0	+0,0005	+0,0007	+0,0011	+0,0013
0,72-0,96	−0,0043	−0,0026	−0,0008	−0,0003	0	+0,0001	+0,0006	+0,0009	+0,0014	+0,0016
0,96-1,20	−0,0043	−0,0026	−0,0008	−0,0003	0	+0,0001	+0,0006	+0,0009	+0,0014	+0,0019
1,20-1,60	−0,0047	−0,0031	−0,0010	−0,0004	0	+0,0001	+0,0007	+0,0010	+0,0017	+0,0024
1,60-2,00	−0,0051	−0,0031	−0,0010	−0,0004	0	+0,0001	+0,0007	+0,0010	+0,0017	+0,0028
2,00-2,60	−0,0055	−0,0039	−0,0012	−0,0004	0	+0,0001	+0,0008	+0,0013	+0,0021	+0,0034
2,60-3,20	−0,0059	−0,0039	−0,0012	−0,0004	0	+0,0001	+0,0008	+0,0013	+0,0023	+0,0040
3,20-4,00	−0,0067	−0,0047	−0,0014	−0,0005	0	+0,0001	+0,0009	+0,0015	+0,0028	+0,0049
4,00-4,80	−0,0071	−0,0047	−0,0014	−0,0005	0	+0,0001	+0,0009	+0,0015	+0,0031	+0,0057
4,80-5,60	−0,0079	−0,0057	−0,0017	−0,0006	0	+0,0001	+0,0011	+0,0017	+0,0036	+0,0067
5,60-6,40	−0,0083	−0,0057	−0,0017	−0,0006	0	+0,0001	+0,0011	+0,0017	+0,0039	+0,0075
6,40-7,20	−0,0091	−0,0057	−0,0017	−0,0006	0	+0,0001	+0,0011	+0,0017	+0,0043	+0,0083
7,20-8,00	−0,0094	−0,0067	−0,0020	−0,0006	0	+0,0002	+0,0012	+0,0020	+0,0048	+0,0093
8,00-9,00	−0,0102	−0,0067	−0,0020	−0,0006	0	+0,0002	+0,0012	+0,0020	+0,0051	+0,0102
9,00-10,00	−0,0110	−0,0067	−0,0020	−0,0006	0	+0,0002	+0,0012	+0,0020	+0,0055	+0,0112
10,00-11,20	−0,0118	−0,0075	−0,0022	−0,0007	0	+0,0002	+0,0013	+0,0022	+0,0062	+0,0124
11,20-12,60	−0,0130	−0,0075	−0,0022	−0,0007	0	+0,0002	+0,0013	+0,0022	+0,0067	+0,0130
12,60-14,20	−0,0142	−0,0083	−0,0024	−0,0007	0	+0,0002	+0,0015	+0,0024	+0,0075	+0,0154
14,20-16,00	−0,0157	−0,0083	−0,0024	−0,0007	0	+0,0002	+0,0015	+0,0024	+0,0082	+0,0171

Tabela A-15 Diagramas de fatores teóricos de concentração de tensão K_t^*

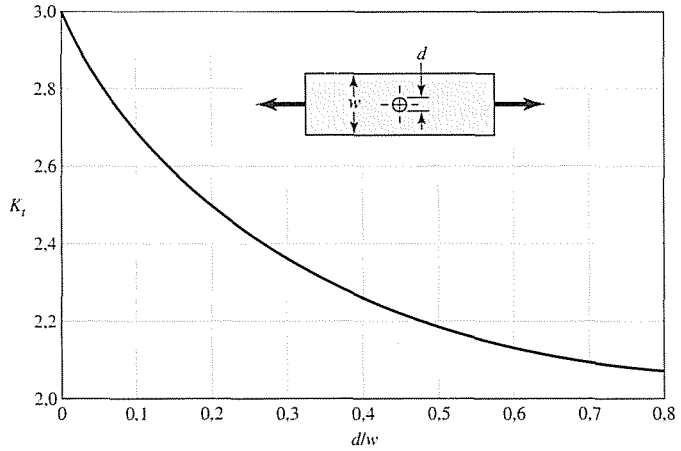


Figura A-15-1 Barra em tração ou compressão simples com um furo transversal. $\sigma_0 = F/A$, sendo $A = (w - d)t$ e t a espessura.

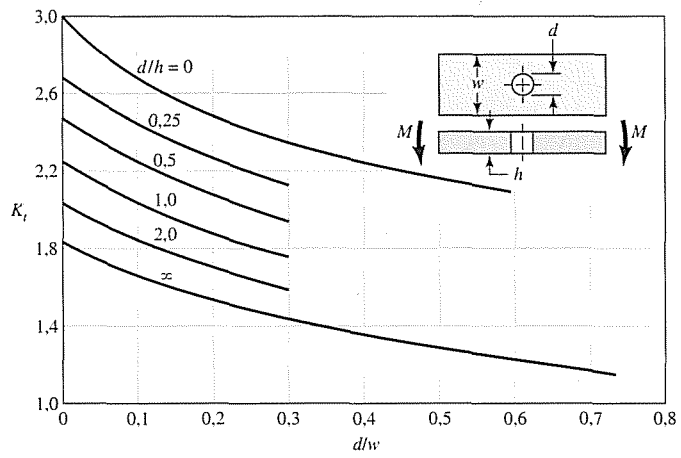


Figura A-15-2 Barra retangular com um furo transversal em flexão. $\sigma_0 = Mc/I$, sendo $I = (w - d)h^3/12$.

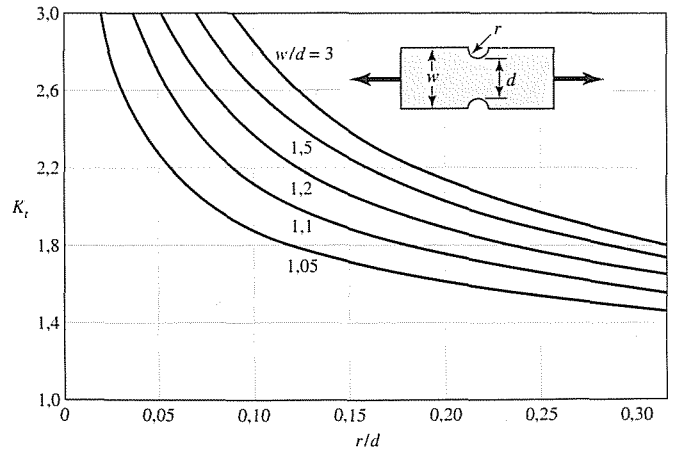


Figura A-15-3 Barra retangular entalhada em tração ou compressão simples. $\sigma_0 = F/A$ sendo $A = dt$ e t a espessura.

* Fatores de R. E. Peterson, "Design Factors for Stress Concentration", *Machine Design*, vol. 23, nº 2, Fevereiro de 1951, p. 169; nº 3, Março de 1951, p. 161; nº 5, Maio de 1951, p.159; nº 6, Junho de 1951, p. 173; nº 7, Julho 1951, p. 155. Reimpressa com permissão de *Machine Design*, uma publicação da Penton Media Inc.

(continua)

Tabela A-15 Diagramas de fatores teóricos de concentração de tensão K_t^* *(continuação)*

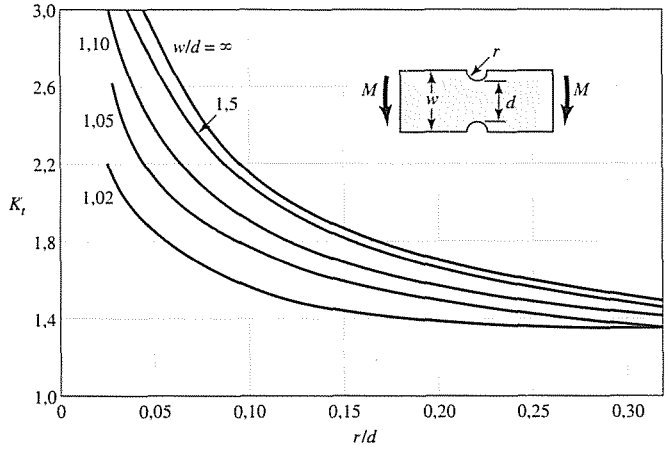


Figura A-15-4 Barra retangular entalhada em flexão. $\sigma_0 = Mc/I$, sendo $c = d/2$, $I = td^3/12$ e t a espessura.

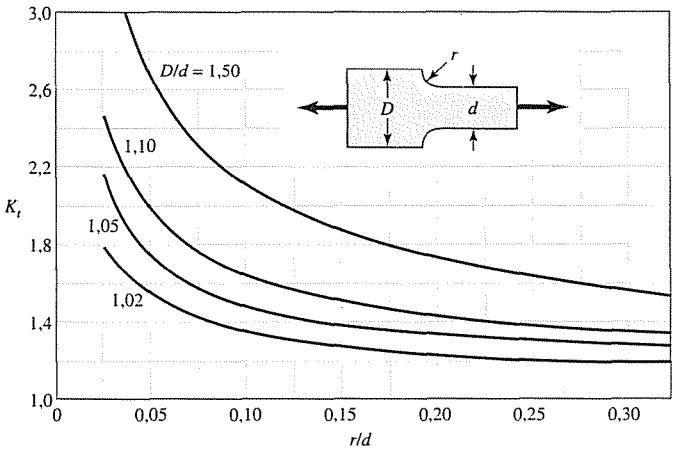


Figura A-15-5 Barra retangular filetada (adelgaçada) em tração ou compressão simples. $\sigma_0 = F/A$, sendo $A = dt$ e t a espessura.

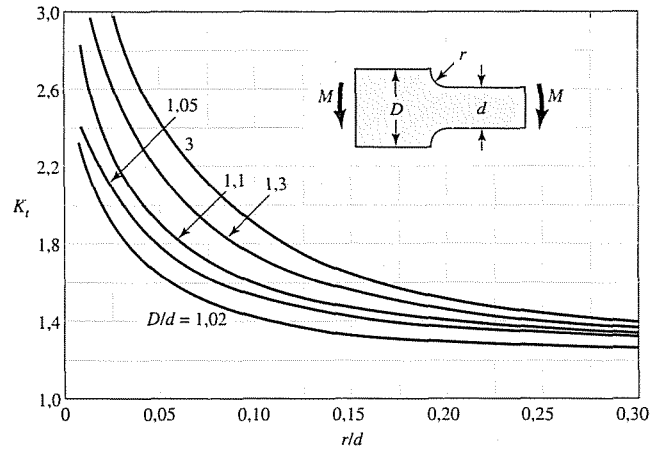


Figura A-15-6 Barra retângula filetada (adelgaçada) em flexão. $\sigma_0 = Mc/I$, sendo $c = d/2$, $I = td^3/12$ t e a espessura.

* Fatores de R. E. Peterson, "Design Factors for Stress Concentration," *Machine Design*, vol. 23, nº 2, Fevereiro de 1951, p. 169; nº 3, Março de 1951, p. 161; nº 5, Maio de 1951, p.159; nº 6, Junho de 1951, p. 173; nº 7, Julho 1951, p. 155. Reimpressa com permissão de *Machine Design*, uma publicação da Penton Media Inc.

(continua)

Tabela A-15 Diagramas de fatores teóricos de concentração de tensão K_t* *(continuação)*

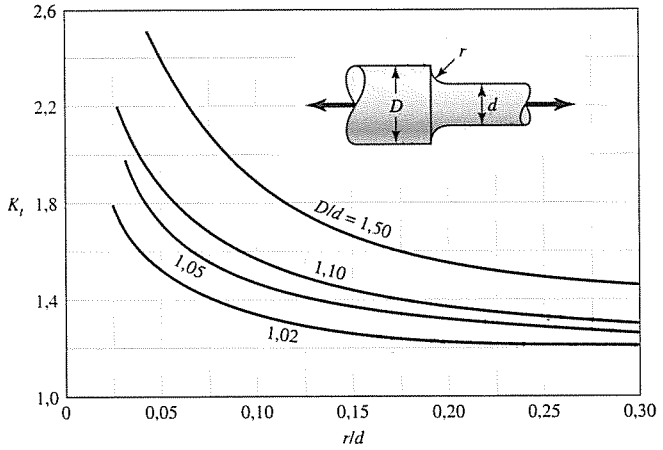


Figura A-15-7 Eixo redondo com filetagem (adelgaçamento) do ressalto em tração. $\sigma_0 = F/A$, sendo $A = \pi d^2/4$.

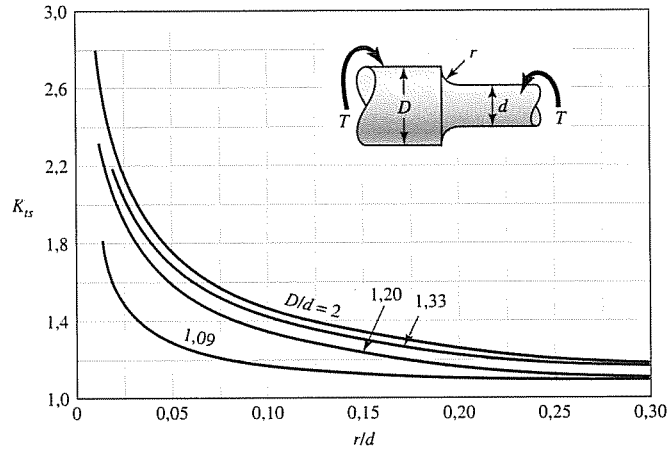


Figura A-15-8 Eixo redondo com filetagem (adelgaçamento) do ressalto em torção. $\tau_0 = Tc/J$, sendo $c = d/2$ e $J = \pi d^4/32$.

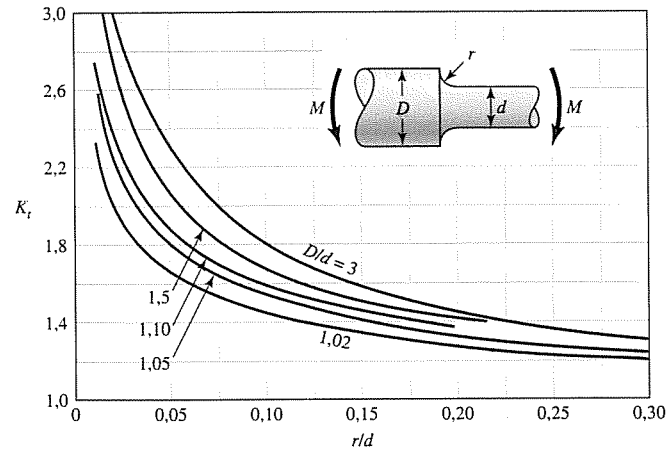


Figura A-15-9 Eixo redondo com filetagem (adelgaçamento) do ressalto em flexão. $\sigma_0 = Mc/I$, sendo $c = d/2$ e $I = \pi d^4/64$.

* Fatores de R. E. Peterson, "Design Factors for Stress Concentration," *Machine Design*, vol. 23, nº 2, Fevereiro de 1951, p. 169; nº 3, Março de 1951, p. 161; nº 5, Maio de 1951, p.159; nº 6, Junho de 1951, p. 173; nº 7, Julho 1951, p. 155. Reimpressa com permissão de *Machine Design*, uma publicação da Penton Media Inc.

(continua)

Tabela A-15 Diagramas de fatores teóricos de concentração de tensão K_t^* *(continuação)*

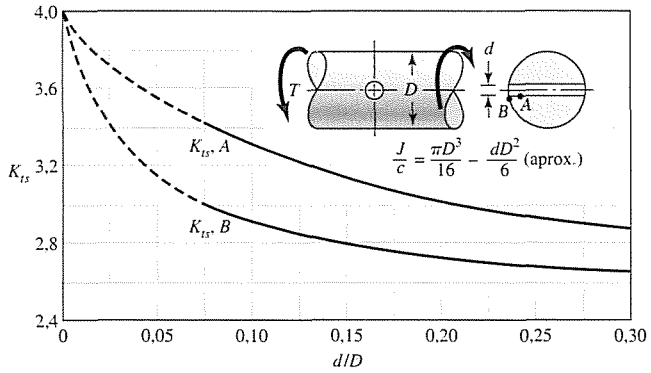


Figura A-15-10 Eixo redondo em torção com furo transversal.

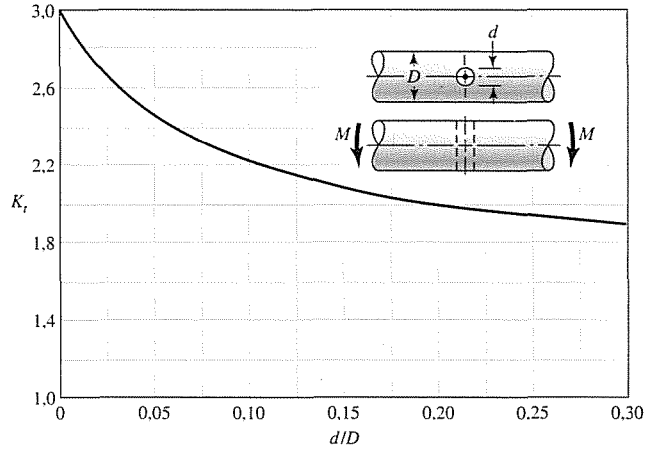


Figura A-15-11 Eixo redondo em flexão com um furo transversal. $\sigma_0 = M/[(\pi D^3/32) - (dD^2/6)]$, aproximadamente.

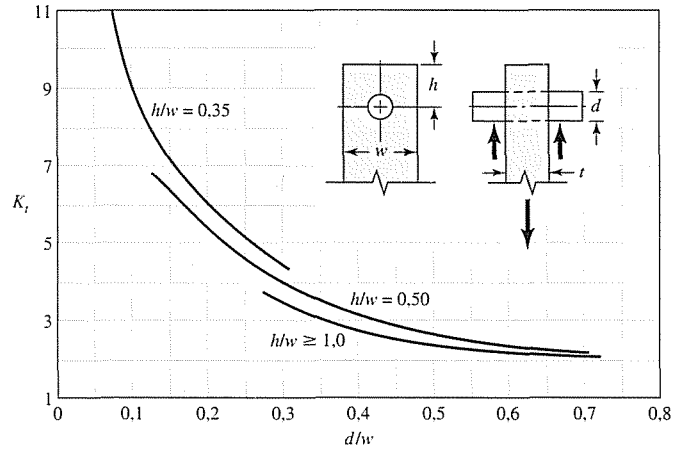


Figura A-15-12 Chapa carregada em tração por um pino através de um orifício. $\sigma_0 = F/A$, sendo $A = (w - d)t$. Quando folga existir, aumente K_t em 35 a 50%.

(M. M. Frocht. e H. N. Hill, "Stress Concentration Factors around a Central Circular Hole in a Plate Loaded through a Pin in Hole," J. Appl. Mechanics, vol. 7, no. 1, March 1940, p.A-5.)

* Fatores de R. E. Peterson, "Design Factors for Stress Concentration", *Machine Design*, vol. 23, nº 2, Fevereiro de 1951, p. 169; nº 3, Março de 1951, p. 161; nº 5, Maio de 1951, p.159; nº 6, Junho de 1951, p. 173; nº 7, Julho 1951, p. 155. Reimpressa com permissão de *Machine Design*, uma publicação da Penton Media Inc.

(continua)

Tabela A-15 Diagramas de fatores teóricos de concentração de tensão K_t^* *(continuação)*

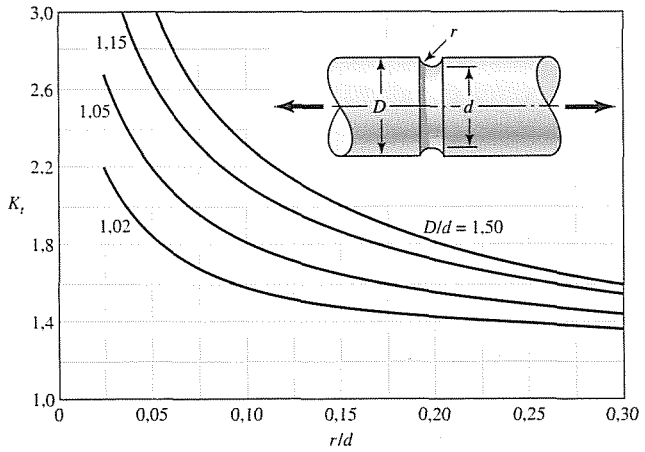


Figura A-15-13 Barra redonda sulcada em tração. $\sigma_0 = F/A$, sendo $A = \pi d^2/4$.

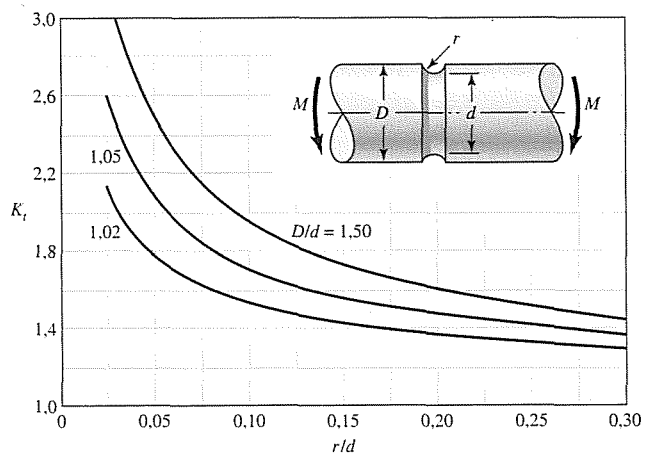


Figura A-15-14 Barra redonda sulcada em flexão. $\sigma_0 = Mc/I$, sendo $c = d/2$ e $I = \pi d^4/64$.

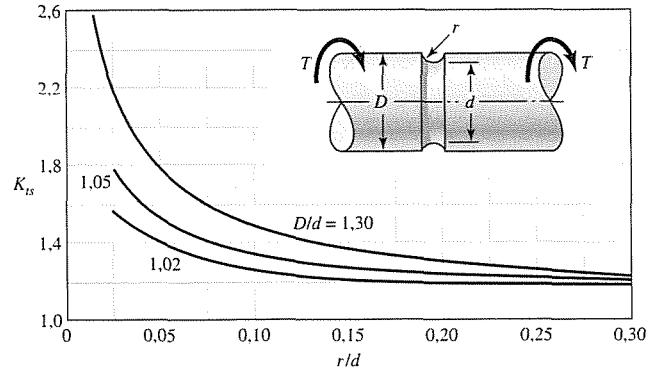
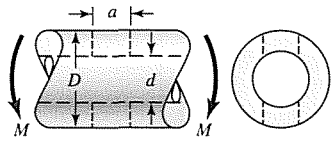


Figura A-15-15 Barra redonda sulcada em torção. $\tau_0 = Tc/J$, sendo $c = d/2$ e $J = \pi d^4/32$.

* Fatores de R. E. Peterson, "Design Factors for Stress Concentration," *Machine Design*, vol. 23, nº 2, Fevereiro de 1951, p. 169; nº 3, Março de 1951, p. 161; nº 5, Maio de 1951, p.159; nº 6, Junho de 1951, p. 173; nº 7, Julho 1951, p. 155. Reimpressa com permissão de *Machine Design*, uma publicação da Penton Media Inc.

Tabela A-16 Fatores aproximados de concentração de tensão para flexão de uma barra redonda ou tubo com um furo transversal redondo



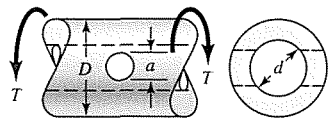
A tensão nominal de flexão é $\sigma_0 = M/Z_{net}$ sendo Z_{net} um valor reduzido do módulo da secção e definido por

$$Z_{net} = \frac{\pi A}{32D}(D^4 - d^4)$$

Valores de A estão listados na tabela. Use $d = 0$ para uma barra sólida.

	d/D					
	0,9		0,6		0	
a/D	A	K_t	A	K_t	A	K_t
0,050	0,92	2,63	0,91	2,55	0,88	2,42
0,075	0,89	2,55	0,88	2,43	0,86	2,35
0,10	0,86	2,49	0,85	2,36	0,83	2,27
0,125	0,82	2,41	0,82	2,32	0,80	2,20
0,15	0,79	2,39	0,79	2,29	0,76	2,15
0,175	0,76	2,38	0,75	2,26	0,72	2,10
0,20	0,73	2,39	0,72	2,23	0,68	2,07
0,225	0,69	2,40	0,68	2,21	0,65	2,04
0,25	0,67	2,42	0,64	2,18	0,61	2,00
0,275	0,66	2,48	0,61	2,16	0,58	1,97
0,30	0,64	2,52	0,58	2,14	0,54	1,94

Fonte: R. E. Peterson, Stress Concentration Factors, Wiley, New York, 1974, p. 146, 235.



A tensão máxima ocorre na parte interna do orifício, ligeiramente abaixo da superfície do eixo. A tensão nominal de cisalhamento é $\tau_0 = T\,D/2J_{net}$ sendo J_{net} um valor reduzido do segundo momento polar de área e definido por

$$J_{net} = \frac{\pi A(D^4 - d^4)}{32}$$

Valores de A estão listados na tabela. Use $d = 0$ para uma barra sólida.

Tabela A-16 Fatores aproximados de concentração de tensão para flexão de uma barra redonda ou tubo com um furo transversal redondo

	d/D									
	0,9		0,8		0,6		0,4		0	
a/D	A	K_{ts}	A	K_{ts}	A	K_{ts}	A	K_{ts}	A	K_{ts}
0,05	0,96	1,78							0,95	1,77
0,075	0,95	1,82							0,93	1,71
0,10	0,94	1,76	0,93	1,74	0,92	1,72	0,92	1,70	0,92	1,68
0,125	0,91	1,76	0,91	1,74	0,90	1,70	0,90	1,67	0,89	1,64
0,15	0,90	1,77	0,89	1,75	0,87	1,69	0,87	1,65	0,87	1,62
0,175	0,89	1,81	0,88	1,76	0,87	1,69	0,86	1,64	0,85	1,60
0,20	0,88	1,96	0,86	1,79	0,85	1,70	0,84	1,63	0,83	1,58
0,25	0,87	2,00	0,82	1,86	0,81	1,72	0,80	1,63	0,79	1,54
0,30	0,80	2,18	0,78	1,97	0,77	1,76	0,75	1,63	0,74	1,51
0,35	0,77	2,41	0,75	2,09	0,72	1,81	0,69	1,63	0,68	1,47
0,40	0,72	2,67	0,71	2,25	0,68	1,89	0,64	1,63	0,63	1,44

Fonte: R. E. Peterson, *Stress Concentration Factors*, Wiley, New York, 1974, p. 148, 244.

Tabela A-17 Tamanhos preferenciais e números de Renard (Série R) (Quando uma escolha puder ser feita, use um dos seguintes tamanhos; contudo, nem todas as peças ou itens estão disponíveis em todos os tamanhos mostrados na tabela)

Fração de polegadas

$\frac{1}{64}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{3}{32}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{5}{32}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{16}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{16}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{11}{16}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$, 1, $1\frac{1}{4}$, $1\frac{1}{2}$, $1\frac{3}{4}$, 2, $2\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{2}$, $2\frac{3}{4}$, 3, $3\frac{1}{4}$, $3\frac{1}{2}$, $3\frac{3}{4}$, 4, $4\frac{1}{4}$, $4\frac{1}{2}$, $4\frac{3}{4}$, 5, $5\frac{1}{4}$, $5\frac{1}{2}$, $5\frac{3}{4}$, 6, $6\frac{1}{2}$, 7, $7\frac{1}{2}$, 8, $8\frac{1}{2}$, 9, $9\frac{1}{2}$, 10, $10\frac{1}{2}$, 11, $11\frac{1}{2}$, 12, $12\frac{1}{2}$, 13, $13\frac{1}{2}$, 14, $14\frac{1}{2}$, 15, $15\frac{1}{2}$, 16, $16\frac{1}{2}$, 17, $17\frac{1}{2}$, 18, $18\frac{1}{2}$, 19, $19\frac{1}{2}$, 20

Polegadas decimais

0,010, 0,012, 0,016, 0,020, 0,025, 0,032, 0,040, 0,05, 0,06, 0,08, 0,10, 0,12, 0,16, 0,20, 0,24, 0,30, 0,40, 0,50, 0,60, 0,80, 1,00, 1,20, 1,40, 1,60, 1,80, 2,0, 2,4, 2,6, 2,8, 3,0, 3,2, 3,4, 3,6, 3,8, 4,0, 4,2, 4,4, 4,6, 4,8, 5,0, 5,2, 5,4, 5,6, 5,8, 6,0, 7,0, 7,5, 8,5, 9,0, 9,5, 10,0, 10,5, 11,0, 11,5, 12,0, 12,5, 13,0, 13,5, 14,0, 14,5, 15,0, 15,5, 16,0, 16,5, 17,0, 17,5, 18,0, 18,5, 19,0, 19,5, 20

Milímetros

0,05, 0,06, 0,08, 0,10, 0,12, 0,16, 0,20, 0,25, 0,30, 0,40, 0,50, 0,60, 0,70, 0,80, 0,90, 1,0, 1,1, 1,2, 1,4, 1,5, 1,6, 1,8, 2,0, 2,2, 2,5, 2,8, 3,0, 3,5, 4,0, 4,5, 5,0, 5,5, 6,0, 6,5, 7,0, 8,0, 9,0, 10, 11, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 25, 28, 30, 32, 35, 40, 45, 50, 60, 80, 100, 120, 140, 160, 180, 200, 250, 300

Números decimais*

1ª escolha, R5: 1, 1,6, 2,5, 4, 6,3, 10

2ª escolha, R10: 1,25, 2, 3,15, 5, 8

3ª escolha, R20: 1,12, 1,4, 1,8, 2,24, 2,8, 3,55, 4,5, 5,6, 7,1, 9

4ª escolha, R40: 1,06, 1,18, 1,32, 1,5, 1,7, 1,9, 2,12, 2,36, 2,65, 3, 3,35, 3,75, 4,25, 4,75, 5,3, 6, 6,7, 7,5, 8,5, 9,5

* Podem ser multiplicados ou divididos por potências de 10.

Tabela A-18 Propriedades geométricas

Parte 1 Propriedades das secções

A = área

G = localização do centróide

$I_x = \int x^2\, dA$ = segundo momento de área ao redor do eixo x

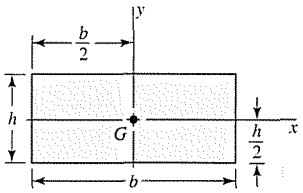
$I_{xy} = \int xy\, dA$ = momento misto de área ao redor dos eixos x e y

$J_G = \int r^2\, dA = \int (x^2 + y^2)\, dA = I_x + I_y$

= segundo momento polar de área ao redor de um eixo G

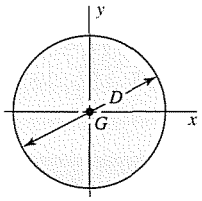
$k_x^2 = I_x/A$ = através de raio de giração ao quadrado ao redor do eixo x

Retângulo



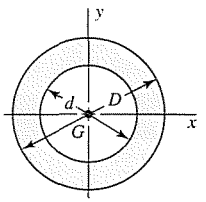
$A = bh \qquad I_x = \dfrac{bh^3}{12} \qquad I_y = \dfrac{b^3h}{12} \qquad I_{xy} = 0$

Círculo



$A = \dfrac{\pi D^2}{4} \qquad I_x = I_y = \dfrac{\pi D^4}{64} \qquad I_{xy} = 0$

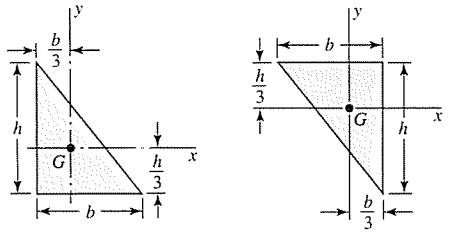
Círculo vazado (furado)



$A = \dfrac{\pi}{4}(D^2 - d^2) \qquad I_x = I_y = \dfrac{\pi}{64}(D^4 - d^4) \qquad I_{xy} = 0$

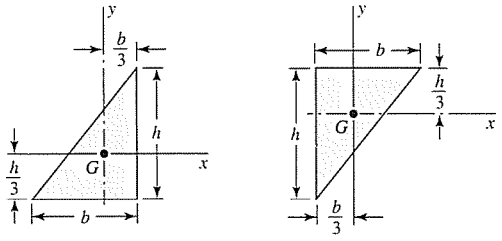
Tabela A-18 Propriedades geométricas *(continuação)*

Triângulos retângulos



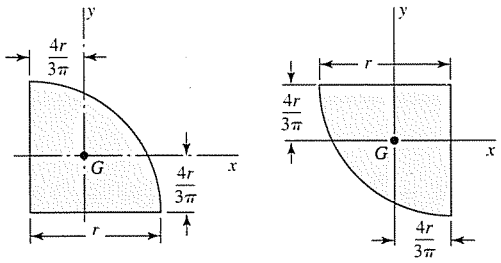
$$A = \frac{bh}{2} \qquad I_x = \frac{bh^3}{36} \qquad I_y = \frac{b^3h}{36} \qquad I_{xy} = \frac{-b^2h^2}{72}$$

Triângulos retângulos



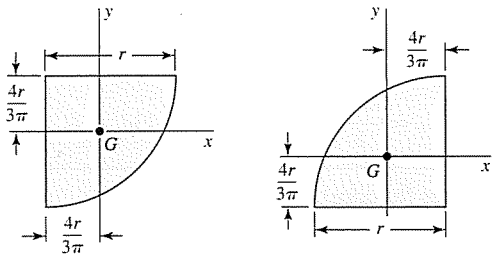
$$A = \frac{bh}{2} \qquad I_x = \frac{bh^3}{36} \qquad I_y = \frac{b^3h}{36} \qquad I_{xy} = \frac{b^2h^2}{72}$$

Quartos de círculo



$$A = \frac{\pi r^2}{4} \qquad I_x = I_y = r^4\left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right) \qquad I_{xy} = r^4\left(\frac{1}{8} - \frac{4}{9\pi}\right)$$

Quartos de círculo



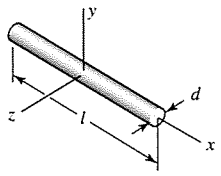
$$A = \frac{\pi r^2}{4} \qquad I_x = I_y = r^4\left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right) \qquad I_{xy} = r^4\left(\frac{4}{9\pi} - \frac{1}{8}\right)$$

(continua)

Tabela A-18 Propriedades geométricas *(continuação)*

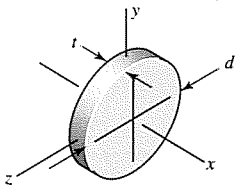
Parte 2 Propriedades dos sólidos (ρ = densidade, peso por unidade de volume)

Varetas



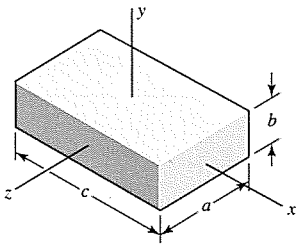
$$m = \frac{\pi d^2 l \rho}{4g} \qquad I_y = I_z = \frac{ml^2}{12}$$

Discos redondos



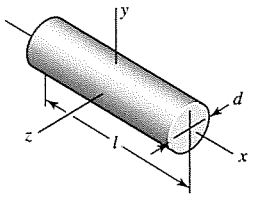
$$m = \frac{\pi d^2 t \rho}{4g} \qquad I_x = \frac{md^2}{8} \qquad I_y = I_z = \frac{md^2}{16}$$

Prismas regulares



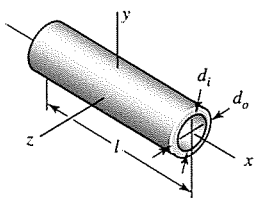
$$m = \frac{abc\rho}{g} \qquad I_x = \frac{m}{12}(a^2 + b^2) \qquad I_y = \frac{m}{12}(a^2 + c^2)\ I_z = \frac{m}{12}(b^2 + c^2)$$

Cilindros



$$m = \frac{\pi d^2 l \rho}{4g} \qquad I_x = \frac{md^2}{8} \qquad I_y = I_z = \frac{m}{48}(3d^2 + 4l^2)$$

Cilindros vazados (furados)



$$m = \frac{\pi\left(d_o^2 - d_i^2\right) l\rho}{4g} \qquad I_x = \frac{m}{8}\left(d_o^2 + d_i^2\right) \qquad I_y = I_z = \frac{m}{48}\left(3d_o^2 + 3d_i^2 + 4l^2\right)$$

Tabela A-19 Cano padronizado americano

Tamanho nominal, in	Diâmetro externo, in	Roscas por polegadas	Espessura de parede, in		
			Padrão nº 40	Extra forte nº 80	Dobro da extra forte
$\frac{1}{8}$	0,405	27	0,070	0,098	
$\frac{1}{4}$	0,540	18	0,090	0,122	
$\frac{3}{8}$	0,675	18	0,093	0,129	
$\frac{1}{2}$	0,840	14	0,111	0,151	0,307
$\frac{3}{4}$	1,050	14	0,115	0,157	0,318
1	1,315	$11\frac{1}{2}$	0,136	0,183	0,369
$1\frac{1}{4}$	1,660	$11\frac{1}{2}$	0,143	0,195	0,393
$1\frac{1}{2}$	1,900	$11\frac{1}{2}$	0,148	0,204	0,411
2	2,375	$11\frac{1}{2}$	0,158	0,223	0,447
$2\frac{1}{2}$	2,875	8	0,208	0,282	0,565
3	3,500	8	0,221	0,306	0,615
$3\frac{1}{2}$	4,000	8	0,231	0,325	
4	4,500	8	0,242	0,344	0,690
5	5,563	8	0,263	0,383	0,768
6	6,625	8	0,286	0,441	0,884
8	8,625	8	0,329	0,510	0,895

Tabela A-20 Resistências determinísticas da ASTM mínimas de tração e escoamento para aços laminados a quente (HR) e repuxados a frio (CD) [As resistências listadas são valores mínimos estimados da ASTM no intervalo de medida de 18 a 32 mm ($\frac{3}{4}$ a $1\frac{1}{4}$ in). Essas resistências são apropriadas para uso com o fator de projeto definido na Seção 1-10, provido que os materiais conformem aos requisitos da ASTM A6 ou A568 ou são requeridos em especificações de compra. Lembre-se de que um sistema de numeração não é uma especificação. Veja a Tabela A-1 para alguns aços da ASTM]

1 UNS nº	2 Nº SAE e/ou AISI	3 Processamento	4 Resistência à tração MPa (kpsi)	5 Resistência ao escoamento MPa (kpsi)	6 Alongamento em 2 in, %	7 Redução em área, %	8 Dureza Brinell
G10060	1006	HR	300 (43)	170 (24)	30	55	86
		CD	330 (48)	280 (41)	20	45	95
G10100	1010	HR	320 (47)	180 (26)	28	50	95
		CD	370 (53)	300 (44)	20	40	105
G10150	1015	HR	340 (50)	190 (27,5)	28	50	101
		CD	390 (56)	320 (47)	18	40	111
G10180	1018	HR	400 (58)	220 (32)	25	50	116
		CD	440 (64)	370 (54)	15	40	126
G10200	1020	HR	380 (55)	210 (30)	25	50	111
		CD	470 (68)	390 (57)	15	40	131
G10300	1030	HR	470 (68)	260 (37,5)	20	42	137
		CD	520 (76)	440 (64)	12	35	149
G10350	1035	HR	500 (72)	270 (39,5)	18	40	143
		CD	550 (80)	460 (67)	12	35	163
G10400	1040	HR	520 (76)	290 (42)	18	40	149
		CD	590 (85)	490 (71)	12	35	170
G10450	1045	HR	570 (82)	310 (45)	16	40	163
		CD	630 (91)	530 (77)	12	35	179
G10500	1050	HR	620 (90)	340 (49,5)	15	35	179
		CD	690 (100)	580 (84)	10	30	197
G10600	1060	HR	680 (98)	370 (54)	12	30	201
G10800	1080	HR	770 (112)	420 (61,5)	10	25	229
G10950	1095	HR	830 (120)	460 (66)	10	25	248

Fonte: 1986 SAE Handbook, p. 2.15.

Tabela A-21 Propriedades mecânicas médias de alguns aços termotratados
[Estas são propriedades típicas de materiais normalizados e recozidos. As propriedades de aços temperados e revenidos (Q&T) são de um único tratamento. Por causa das muitas variáveis, as propriedades listadas são médias globais. Em todos os casos, os dados foram obtidos de espécimes de diâmetro de 0,505 in, usinados de peças brutas de 1in, e de comprimento de calibre de 2 in. A menos que mencionado, todos os espécimes foram temperados em banho de óleo]

1 AISI nº	2 Tratamento	3 Temperatura °C (°F)	4 Resistência à tração MPa (kpsi)	5 Resistência ao escoamento MPa (kpsi)	6 Alongamento %	7 Redução em área, %	8 Dureza Brinell
1030	Q&T*	205 (400)	848 (123)	648 (94)	17	47	495
	Q&T*	315 (600)	800 (116)	621 (90)	19	53	401
	Q&T*	425 (800)	731 (106)	579 (84)	23	60	302
	Q&T*	540 (1000)	669 (97)	517 (75)	28	65	255
	Q&T*	650 (1200)	586 (85)	441 (64)	32	70	207
	Normalizado	925 (1700)	521 (75)	345 (50)	32	61	149
	Recozido	870 (1600)	430 (62)	317 (46)	35	64	137
1040	Q&T	205 (400)	779 (113)	593 (86)	19	48	262
	Q&T	425 (800)	758 (110)	552 (80)	21	54	241
	Q&T	650 (1200)	634 (92)	434 (63)	29	65	192
	Normalizado	900 (1650)	590 (86)	374 (54)	28	55	170
	Recozido	790 (1450)	519 (75)	353 (51)	30	57	149
1050	Q&T*	205 (400)	1120 (163)	807 (117)	9	27	514
	Q&T*	425 (800)	1090 (158)	793 (115)	13	36	444
	Q&T*	650 (1200)	717 (104)	538 (78)	28	65	235
	Normalizado	900 (1650)	748 (108)	427 (62)	20	39	217
	Recozido	790 (1450)	636 (92)	365 (53)	24	40	187
1060	Q&T	425 (800)	1080 (156)	765 (111)	14	41	311
	Q&T	540 (1000)	965 (140)	669 (97)	17	45	277
	Q&T	650 (1200)	800 (116)	524 (76)	23	54	229
	Normalizado	900 (1650)	776 (112)	421 (61)	18	37	229
	Recozido	790 (1450)	626 (91)	372 (54)	22	38	179
1095	Q&T	315 (600)	1260 (183)	813 (118)	10	30	375
	Q&T	425 (800)	1210 (176)	772 (112)	12	32	363
	Q&T	540 (1000)	1090 (158)	676 (98)	15	37	321
	Q&T	650 (1200)	896 (130)	552 (80)	21	47	269
	Normalizado	900 (1650)	1010 (147)	500 (72)	9	13	293
	Recozido	790 (1450)	658 (95)	380 (55)	13	21	192
1141	Q&T	315 (600)	1460 (212)	1280 (186)	9	32	415
	Q&T	540 (1000)	896 (130)	765 (111)	18	57	262

Fonte: ASM Metals Reference Book, 2d ed., American Society of Metal, Metals Park, Ohio, 1983.
* Temperado em banho de água.

(continua)

Tabela A-21 Propriedades mecânicas médias de alguns aços termotratados

[Estas são propriedades típicas de materiais normalizados e recozidos. As propriedades de aços temperados e revenidos (Q&T) são de um único tratamento. Por causa das muitas variáveis, as propriedades listadas são médias globais. Em todos os casos, os dados foram obtidos de espécimes de diâmetro de 0,505 in, usinados de peças brutas de 1 in, e de comprimento de calibre de 2 in. A menos que mencionado, todos os espécimes foram temperados em banho de óleo]

(continuação)

1 AISI nº	2 Tratamento	3 Temperatura °C (°F)	4 Resistência à tração MPa (kpsi)	5 Resistência ao escoamento MPa (kpsi)	6 Alongamento %	7 Redução em área, %	8 Dureza Brinell
4130	Q&T*	205 (400)	1630 (236)	1460 (212)	10	41	467
	Q&T*	315 (600)	1500 (217)	1380 (200)	11	43	435
	Q&T*	425 (800)	1280 (186)	1190 (173)	13	49	380
	Q&T*	540 (1000)	1030 (150)	910 (132)	17	57	315
	Q&T*	650 (1200)	814 (118)	703 (102)	22	64	245
	Normalizado	870 (1600)	670 (97)	436 (63)	25	59	197
	Recozido	865 (1585)	560 (81)	361 (52)	28	56	156
4140	Q&T	205 (400)	1770 (257)	1640 (238)	8	38	510
	Q&T	315 (600)	1550 (225)	1430 (208)	9	43	445
	Q&T	425 (800)	1250 (181)	1140 (165)	13	49	370
	Q&T	540 (1000)	951 (138)	834 (121)	18	58	285
	G&T	650 (1200)	758 (110)	655 (95)	22	63	230
	Normalizado	870 (1600)	1020 (148)	655 (95)	18	47	302
	Recozido	815 (1500)	655 (95)	417 (61)	26	57	197
4340	Q&T	315 (600)	1720 (250)	1590 (230)	10	40	486
	O&T	425 (800)	1470 (213)	1360 (198)	10	44	430
	Q&T	540 (1000)	1170 (170)	1080 (156)	13	51	360
	Q&T	650 (1200)	965 (140)	855 (124)	19	60	280

Fonte: ASM Metals Reference Book, 2d ed., American Society of Metal, Metals Park, Ohio, 1983.

* Temperado em banho de água

Tabela A-22 Resultados de ensaios de tração de alguns metais*

Número	Material	Condição	Resistência (tração) Escoamento S_y, MPa (kpsi)	Último S_u, MPa (kpsi)	Fratura σ_f, MPa (kpsi)	Coeficiente σ_0, MPa (kpsi)	Expoente m, resistência à deformação	Deformação de fratura ε_f
1018	Aço	Recozido	220 (32,0)	341 (49,5)	628 (91,1)†	620 (90,0)	0,25	1,05
1144	Aço	Recozido	358 (52,0)	646 (93,7)	898 (130)†	992 (144)	0,14	0,49
1212	Aço	Laminado a quente	193 (28,0)	424 (61,5)	729 (106)†	758 (110)	0,24	0,85
1045	Aço	Temperado e revenido a 600°F	1520 (220)	1580 (230)	2380 (345)	1880 (273)†	0,041	0,81
4142	Aço	Temperado e revenido a 600°F	1720 (250)	1930 (210)	2340 (340)	1760 (255)†	0,048	0,43
303	Aço inoxidável	Recozido	241 (35,0)	601 (87,3)	1520 (221)†	1410 (205)	0,51	1,16
304	Aço inoxidável	Recozido	276 (40,0)	568 (82,4)	1600 (233)†	1270 (185)	0,45	1,67
2011	Liga de alumínio	T6	169 (24,5)	324 (47,0)	325 (47,2)†	620 (90)	0,28	0,10
2024	Liga de alumínio	14	296 (43,0)	446 (64,8)	533 (77,3)†	689 (100)	0,15	0,18
7075	Liga de alumínio	T6	542 (78,6)	593 (86,0)	706 (102)†	882 (128)	0,13	0,18

Fonte: J. Datsko, "Solid Materials," chap. 7 em Joseph E. Shigley e Charles R. Mischke (eds.-in-chief), *Standard Handbook of Machine Design*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1996, p. 7.47-7.50

* Valores de um ou dois tratamentos térmicos e que se acredita serem obteníveis usando especificações apropriadas de compra. A deformação de fratura pode variar tanto quanto 100%.

† Valor derivado.

Tabela A-23 Propriedades médias monotônicas e cíclicas de tensão-deformação de aços selecionados

Classe (a)	Orientação (e)	Descrição (f)	Dureza HB	Resistência à tração S_{ut} MPa	Resistência à tração S_{ut} ksi	Redução em área %	Deformação verdadeira na fratura ε_f	Módulo de elasticidade E GPa	Módulo de elasticidade E 10^6 psi	Coeficiente de resistência à fadiga σ'_f MPa	Coeficiente de resistência à fadiga σ'_f ksi	Expoente de resistência à fadiga b	Coeficiente de ductilidade de fadiga ε'_f	Expoente de ductilidade de fadiga c
A538A (b)	L	STA	405	1515	220	67	1,10	185	27	1655	240	−0,065	0,30	−0,62
A538B (b)	L	STA	460	1860	270	56	0,82	185	27	2135	310	−0,071	0,80	−0,71
A538C (b)	L	STA	480	2000	290	55	0,81	180	26	2240	325	−0,07	0,60	−0,75
AM-350 (c)	L	HR, A		1315	191	52	0,74	195	28	2800	406	−0,14	0,33	−0,84
AM-350 (c)	L	CD	496	1905	276	20	0,23	180	26	2690	390	−0,102	0,10	−0,42
Gainex (c)	LT	HR lâmina		530	77	58	0,86	200	29,2	805	117	−0,07	0,86	−0,65
Gainex (c)	L	HR lâmina		510	74	64	1,02	200	29,2	805	117	−0,071	0,86	−0,68
H-11	L	Conformação austenítica	660	2585	375	33	0,40	205	30	3170	460	−0,077	0,08	−0,74
RQC-100 (c)	LT	HR chapa	290	940	136	43	0,56	205	30	1240	180	−0,07	0,66	−0,69
RQC-100 (c)	L	HR chapa	290	930	135	67	1,02	205	30	1240	180	−0,07	0,66	−0,69
10B62	L	Q&T	430	1640	238	38	0,89	195	28	1780	258	−0,067	0,32	−0,56
1005-1009	LT	HR lâmina	90	360	52	73	1,3	205	30	580	84	−0,09	0,15	−0,43
1005-1009	LT	CD lâmina	125	470	68	66	1,09	205	30	515	75	−0,059	0,30	−0,51
1005-1009	L	CD lâmina	125	415	60	64	1,02	200	29	540	78	−0,073	0,11	−0,41
1005-1009	L	HR lâmina	90	345	50	80	1,6	200	29	640	93	−0,109	0,10	−0,39
1015	L	Normalizado	80	415	60	68	1,14	205	30	825	120	−0,11	0,95	−0,64
1020	L	HR chapa	108	440	64	62	0,96	205	29,5	895	130	−0,12	0,41	−0,51
1040	L	Tal como forjado	225	620	90	60	0,93	200	29	1540	223	−0,14	0,61	−0,57
1045	L	Q&T	225	725	105	65	1,04	200	29	1225	178	−0,095	1,00	−0,66
1045	L	Q&T	410	1450	210	51	0,72	200	29	1860	270	−0,073	0,60	−0,70
1045	L	Q&T	390	1345	195	59	0,89	205	30	1585	230	−0,074	0,45	−0,68
1045	L	Q&T	450	1585	230	55	0,81	205	30	1795	260	−0,07	0,35	−0,69
1045	L	Q&T	500	1825	265	51	0,71	205	30	2275	330	−0,08	0,25	−0,68
1045	L	Q&T	595	2240	325	41	0,52	205	30	2725	395	−0,081	0,07	−0,60
1144	L	CDSR	265	930	135	33	0,51	195	28,5	1000	145	−0,08	0,32	−0,58
1144	L	DAT	305	1035	150	25	0,29	200	28,8	1585	230	−0,09	0,27	−0,53
1541F	L	Q&T forjamento	290	950	138	49	0,68	205	29,9	1275	185	−0,076	0,68	−0,65
1541F	L	Q&T forjamento	260	890	129	60	0,93	205	29,9	1275	185	−0,071	0,93	−0,65
4130	L	Q&T	258	895	130	67	1,12	220	32	1275	185	−0,083	0,92	−0,63
4130	L	Q&T	365	1425	207	55	0,79	200	29	1695	246	−0,081	0,89	−0,69

(continua)

Tabela A-23 Propriedades médias monotônicas e cíclicas de tensão-deformação de aços selecionados *(continuação)*

Classe (a)	Orientação (e)	Descrição (f)	Dureza HB	Resistência à tração S_{ut} MPa	Resistência à tração S_{ut} ksi	Redução em área %	Deformação verdadeira na fratura ε_f	Módulo de elasticidade E GPa	Módulo de elasticidade E 10^4 psi	Coeficiente de resistência à fadiga σ'_f MPa	Coeficiente de resistência à fadiga σ'_f ksi	Expoente de resistência à fadiga b	Coeficiente de ductilidade de fadiga ε'_f	Expoente de ductilidade de fadiga c
4140	L	Q&T, DAT	310	1075	156	60	0,69	200	29,2	1825	265	−0,08	1,2	−0,59
4142	L	DAT	310	1060	154	29	0,35	200	29	1450	210	−0,10	0,22	−0,51
4142	L	DAT	335	1250	181	28	0,34	200	28,9	1250	181	−0,08	0,06	−0,62
4142	L	Q&T	380	1415	205	48	0,66	205	30	1825	265	−0,08	0,45	−0,75
4142	L	Q&T e deformado	400	1550	225	47	0,63	200	29	1895	275	−0,09	0,50	−0,75
4142	L	Q&T	450	1760	255	42	0,54	205	30	2000	290	−0,08	0,40	−0,73
4142	L	Q&T e derfomado	475	2035	295	20	0,22	200	29	2070	300	−0,082	0,20	−0,77
4142	L	Q&T e deformado	450	1930	280	37	0,46	200	29	2105	305	−0,09	0,60	−0,76
4142	L	Q&T	475	1930	280	35	0,43	205	30	2170	315	−0,081	0,09	−0,61
4142	L	Q&T	560	2240	325	27	0,31	205	30	2655	385	−0,089	0,07	−0,76
4340	L	HR, A	243	825	120	43	0,57	195	28	1200	174	−0,095	0,45	−0,54
4340	L	Q&T	409	1470	213	38	0,48	200	29	2000	290	−0,091	0,48	−0,60
4340	L	Q&T	350	1240	180	57	0,84	195	28	1655	240	−0,076	0,73	−0,62
5160	L	Q&T	430	1670	242	42	0,87	195	28	1930	280	−0,071	0,40	−0,57
52100	L	SH, Q&T	518	2015	292	11	0,12	205	30	2585	375	−0,09	0,18	−0,56
9262	L	A	260	925	134	14	0,16	205	30	1040	151	−0,071	0,16	−0,47
9262	L	Q&T	280	1000	145	33	0,41	195	28	1220	177	−0,073	0,41	−0,60
9262	L	Q&T	410	565	227	32	0,38	200	29	1855	269	−0,057	0,38	−0,65
950C (d)	LT	HR chapa	159	565	82	64	1,03	205	29,6	1170	170	−0,12	0,95	−0,61
950C (d)	L	HR barra	150	565	82	69	1,19	205	30	970	141	−0,11	0,85	−0,59
950X (d)	L	Canal de chapa	150	440	64	65	1,06	205	30	625	91	−0,075	0,35	−0,54
950X (d)	L	HR chapa	156	530	77	72	1,24	205	29,5	1005	146	−0,10	0,85	−0,61
950X (d)	L	Canal de chapa	225	695	101	68	1,15	195	28,2	1055	153	−0,08	0,21	−0,53

Fonte: ASM Metals Reference Book, 2nd ed., American Society of Metals, Metals Park, Ohio, 1983, p. 217.

Notas: (a) Classe da AISI/SAE, a menos que indicado do contrário. (b) Designação da ASTM. (c) Designação de propriedade. (d) Classe da SAE HSLA. (e) Orientação do eixo do espécime, relativo à direção de laminação; L é longitudinal (paralelo à direção de laminação); LT é transversal da longitudinal (perpendicular à direção de laminação). (f) STA, tratado em solução e envelhecido; HR, laminado a quente; CD, repuxado a frio; Q&T, temperado e revenido; CDSR, repuxado a frio com deformação aliviada; DAT, repuxado à temperatura; A, recozido.

Da *ASM Metals Reference Book, 2nd edition,* 1983; ASM International, Materials Park, OH 44073-0002; tabela 217. Reimpressa com permissão da ASM International ®, www.asminternational.org.

Tabela A-24 Propriedades mecânicas de três metais diferentes do aço
(a) Propriedades típicas do ferro fundido cinza
[O sistema de numeração da American Society of Testing and Materials (ASTM) para o ferro fundido cinza é tal que os números correspondem à *resistência mínima à tração* em kpsi. Assim, um ferro fundido ASTM nº 20 tem uma resistência mínima à tração de 20 kpsi. Note particularmente que as classificações são *típicas* de vários aquecimentos]

Número da ASTM	Resistência à tração S_{ut}, kpsi	Resistência à compressão S_{uc}, kpsi	Módulo de cisalhamento de ruptura S_{su}, kpsi	Módulo de elasticidade, Mpsi tração†	Módulo de elasticidade, Mpsi torção	Limite de resistência* S_e, kpsi	Dureza Brinell HB	Fator de concentração de tensão de fadiga K_f
20	22	83	26	9,6-14	3,9-,6	10	156	1,00
25	26	97	32	11,5-14,8	4,6-6,0	11,5	174	1,05
30	31	109	40	13-16,4	5,2-6,6	14	201	1,10
35	36,5	124	48,5	14,5-17,2	5,8-6,9	16	212	1,15
40	42,5	140	57	16-20	6,4-7,8	18,5	235	1,25
50	52,5	164	73	18,8-22,8	7,2-8,0	21,5	262	1,35
60	62,5	187,5	88,5	20,4-23,5	7,8-8,5	24,5	302	1,50

* Espécimes polidos ou usinados.
† O módulo de elasticidade do ferro fundido em compressão corresponde aproximadamente ao valor superior no intervalo dado para tração e é mais invariante que aquele para tração.

Tabela A-24 Propriedades mecânicas de três metais diferentes do aço
(b) Propriedades mecânicas de algumas ligas de alumínio
[Estas são propriedades *típicas* para medidas de cerca de $\frac{1}{2}$ in; propriedades similares podem ser obtidas usando-se especificações de compra apropriadas. Os valores dados para resistência à fadiga correspondem a $50(10^7)$ ciclos de tensão completamente reversa. Ligas de alumínio não têm um limite de resistência. As resistências ao escoamento foram calculadas pelo método de 0,2% de deformação x] *(continuação)*

Número de associação do alumínio	Revenido	Escoamento, S_y, MPA (kpsi)	Revenido Tração, S_u, MPa (kpsi)	Fadiga, S_f, MPa (kpsi)	Alongamento em 2 in, %	Dureza Brinell H_B
Ferro forjado:						
2017	O	70 (10)	179 (26)	90 (13)	22	45
2024	O	76 (11)	186 (27)	90 (13)	22	47
	T3	345 (50)	482 (70)	138 (20)	16	120
3003	H12	117 (17)	131 (19)	55 (8)	20	35
	H16	165 (24)	179 (26)	65 (9,5)	14	47
3004	H34	186 (27)	234 (34)	103 (15)	12	63
	H38	234 (34)	276 (40)	110 (16)	6	77
5052	H32	186 (27)	234 (34)	117 (17)	18	62
	H36	234 (34)	269 (39)	124 (18)	10	74
Fundido:						
319,0*	T6	165 (24)	248 (36)	69 (10)	2,0	80
333,0†	T5	172 (25)	234 (34)	83 (12)	1,0	100
	T6	207 (30)	289 (42)	103 (15)	1,5	105
335,0*	T6	172 (25)	241 (35)	62 (9)	3,0	80
	T7	248 (36)	262 (38)	62 (9)	0,5	85

* Fundição em areia.
† Fundição em molde permanente.

Tabela A-24 (c) Propriedades mecânicas de algumas ligas de titânio

Liga de titânio	Condição	Escoamento, S_y, (0,2% de deformação) MPA (kpsi)	Resistência à tração, S_u, MPa (kpsi)	Alongamento em 2 in, %	Dureza (Brinell ou Rockwell)
Ti-35A†	Recozido	210 (30)	275 (40)	30	135 HB
Ti-50A†	Recozido	310 (45)	380 (55)	25	215 HB
Ti-0,2 Pd	Recozido	280 (40)	340 (50)	28	200 HB
Ti-5 Al-2,5 Sn	Recozido	760 (110)	790 (115)	16	36 HRC
Ti-8 Al-1 Mo-1 V	Recozido	900 (130)	965 (140)	15	39 HRC
Ti-6 Al-6 V-2 Sn	Recozido	970 (140)	1030 (150)	14	38 HRC
Ti-6Al-4V	Recozido	900 (130)	830 (120)	14	36 HRC
Ti-13 V-11 Cr-3 Al	Solução + envelhecimento	1207 (175)	1276 (185)	8	40 HRC

† Titânio alfa comercializante puro.

Tabela A-25 Resistências estocásticas última e ao escoamento para materiais selecionados

Material		μ_{Sut}	σ_{Sut}	x_0	θ	b	μ_{Sy}	σ_{Sy}	x_0	θ	b	C_{Sut}	C_{Sy}
1018	CD	87,6	5,74	30,8	90,1	12	78,4	5,90	56	80,6	4,29	0,0655	0,0753
1035	HR	86,2	3,92	72,6	87,5	3,86	49,6	3,81	39,5	50,8	2,88	0,0455	0,0768
1045	CD	117,7	7,13	90,2	120,5	4,38	95,5	6,59	82,1	97,2	2,14	0,0606	0,0690
1117	CD	83,1	5,25	73,0	84,4	2,01	81,4	4,71	72,4	82,6	2,00	0,0632	0,0579
1137	CD	106,5	6,15	96,2	107,7	1,72	98,1	4,24	92,2	98,7	1,41	0,0577	0,0432
12L14	CD	79,6	6,92	70,3	80,4	1,36	78,1	8,27	64,3	78,8	1,72	0,0869	0,1059
1038	Parafusos de porca HT	133,4	3,38	122,3	134,6	3,64						0,0253	
ASTM40		44,5	4,34	27,7	46,2	4,38						0,0975	
35018	Maleável	53,3	1,59	48,7	53,8	3,18	38,5	1,42	34,7	39,0	2,93	0,0298	0,0369
32510	Maleável	53,4	2,68	44,7	54,3	3,61	34,9	1,47	30,1	35,5	3,67	0,0502	0,0421
Maleável	Perlítico	93,9	3,83	80,1	95,3	4,04	60,2	2,78	50,2	61,2	4,02	0,0408	0,0462
604515	Nodular	64,8	3,77	53,7	66,1	3,23	49,0	4,20	33,8	50,5	4,06	0,0582	0,0857
100-70-04	Nodular	122,2	7,65	47,6	125,6	11,84	79,3	4,51	64,1	81,0	3,77	0,0626	0,0569
201SS	CD	195,9	7,76	180,7	197,9	2,06						0,0396	
301SS	CD	191,2	5,82	151,9	193,6	8,00	166,8	9,37	139,7	170,0	3,17	0,0304	0,0562
	A	105,0	5,68	92,3	106,6	2,38	46,8	4,70	26,3	48,7	4,99	0,0541	0,1004
304SS	A	85,0	4,14	66,6	86,6	5,11	37,9	3,76	30,2	38,9	2,17	0,0487	0,0992
31OSS	A	84,8	4,23	71,6	86,3	3,45						0,0499	
403SS		105,3	3,09	95,7	106,4	3,44	78,5	3,91	64,8	79,9	3,93	0,0293	0,0498
17-7PSS		198,8	9,51	163,3	202,3	4,21	189,4	11,49	144,0	193,8	4,48	0,0478	0,0607
AM350SS	A	149,1	8,29	101,8	152,4	6,68	63,0	5,05	38,0	65,0	5,73	0,0556	0,0802
Ti-6AL-4V		175,4	7,91	141,8	178,5	4,85	163,7	9,03	101,5	167,4	8,18	0,0451	0,0552
2024	0	28,1	1,73	24,2	28,7	2,43						0,0616	
2024	T4	64,9	1,64	60,2	65,5	3,16	40,8	1,83	38,4	41,0	1,32	0,0253	0,0449
	T6	67,5	1,50	55,9	68,1	9,26	53,4	1,17	51,2	53,6	1,91	0,0222	0,0219
7075	T6,025"	75,5	2,10	68,8	76,2	3,53	63,7	1,98	58,9	64,3	2,63	0,0278	0,0311

Fonte: Dados compilados de "Some Property Data and Corresponding Weibull Parameters for Stochastic Mechanical Design," Trans, *ASME Journal of Mechanical Design*, vol. 114 (Março de 1992), p. 29-34.

Tabela A-26 Parâmetros estocásticos para ensaios de fadiga de vida finita em metais selecionados

1	2	3	4	5		6	7	8	9
						Ciclos de tensão até falha			
Número	Condição	TS MPa (kpsi)	YS MPa (kpsi)	Distribuição		10^4	10^5	10^6	10^7
1046	WQ&T, 1210°F	723 (105)	565 (82)	W	x_0	544 (79)	462 (67)	391 (56,7)	
					θ	594 (86,2)	503 (73,0)	425 (61,7)	
					b	2,60	2,75	2,85	
2340	OQ&T 1200°F	799 (116)	661 (96)	W	x_0	579 (84)	510 (74)	420 (61)	
					θ	699 (101,5)	588 (85,4)	496 (72,0)	
					b	4,3	3,4	4,1	
3140	OQ&T, 1300°F	744 (108)	599 (87)	W	x_0	510 (74)	455 (66)	393 (57)	
					θ	604 (87,7)	528 (76,7)	463 (67,2)	
					b	5,2	5,0	5,5	
2024	T-4	489 (71)	365 (53)	N	σ	26,3 (3,82)	21,4 (3,11)	17,4 (2,53)	14,0 (2,03)
Aluminum					μ	143 (20,7)	116 (16,9)	95 (13,8)	77 (11,2)
Ti-6A1-4V	HT-46	1040 (151)	992 (144)	N	σ	39,6 (5,75)	38,1 (5,53)	36,6 (5,31)	35,1 (5,10)
					μ	712 (108)	684 (99,3)	657 (95,4)	493 (71,6)

Fonte: E. B. Haugen, *Probabilistic Mechanical Design*, Wiley, New York, 1980. Apêndice 10-B.

Parâmetros estatísticos de muitos ensaios de fadiga são listados. A distribuição de Weibull é denotada por *W* e os parâmetros são: resistência à fadiga "garantida," resistência característica à fadiga e fator de forma. A distribuição normal é denotada por *N* e os parâmetros são: resistência média à fadiga e desvio-padrão da resistência à fadiga. TS = resistência à tração, YS = resistência ao escoamento. Todos os ensaios por espécime de viga rotativa.

Tabela A-27 Resistências de fadiga de vida finita de aços comuns selecionados de carbono

Material	Condição	BHN*	Resistência à tração kpsi	Resistência ao escoamento kpsi	RA*	Ciclos de tensão até falha 10^4	$4(10^4)$	10^5	$4(10^5)$	10^6	$4(10^6)$	10^7	10^8
1020	Esfriado em forno		58	30	0,63			37	34	30	28	25	
1030	Air-cooled	135	80	45	0,62		51	47	42	38	38	38	
1035	Normal	132	72	35	0,54			44	40	37	34	33	33
	WQT	209	103	87	0,65		80	72	65	60	57	57	57
1040	Forjado	195	92	53	0,23				40	47	33	33	
1045	HR, N		107	63	0,49	80	70	56	47	47	47	47	
1050	N, AC	164	92	47	0,40	50	48	46	40	38	34	34	
	WQT												
	1200	196	97	70	0,58		60	57	52	50	50	50	50
,56 MN	N	193	98	47	0,42	61	55	51	47	43	41	41	41
	WQT	277	111	84	0,57	94	81	73	62	57	55	55	55
	1200												
1060	Como recozido	67 Rb	134	65	0,20	65	60	55	50	48	48	48	
1095		162	84	33	0,37	50	43	40	34	31	30	30	30
	OQT	227	115	65	0,40	77	68	64	57	56	56	56	56
	1200												
10120		224	117	59	0,12		60	56	51	50	50	50	
	OQT	369	180	130	0,15		102	95	91	91	91	91	
	860												

Fonte: Compilado da Tabela 4 em H. J. Grover, S. A. Gordon e L. R. Jackson, *Fatigue of Metals and Structures*, Bureau of Naval Weapons Document NAVWEPS 00-25-534, 1960.

* BHN = número de dureza Brinell; RA = redução fracionária em área.

Tabela A-28 Equivalentes decimais de bitola de fio e de chapa de metal (todas as medidas em polegadas)

Nome da bitola: Uso principal:	Americana ou Brown & Sharpe Chapa não-ferrosa, fio ou bastão	Birmingham ou Stubs Iron Wire Cano, tira ferrosa, fio achatado e aço de mola	Norma dos Estados Unidos† Chapa ferrosa e placa, 480 lbf/ft³	Norma dos fabricantes Chapa ferrosa	Fio de aço ou Washburn & Moen Fio ferroso, exceto fio de música	Fio de Música Fio de música	Fio de aço Stubs Vareta de broca de aço	Broca de sulcos espiralados Broca de sulcos espiralados e aço de broca
7/0			0,500		0,490			
6/0	0,580 0		0,468 75		0,461 5	0,004		
5/0	0,516 5		0,437 5		0,430 5	0,005		
4/0	0,460 0	0,454	0,406 25		0,393 8	0,006		
3/0	0,409 6	0,425	0,375		0,362 5	0,007		
2/0	0,364 8	0,380	0,343 75		0,331 0	0,008		
0	0,324 9	0,340	0,312 5		0,306 5	0,009		
1	0,289 3	0,300	0,281 25		0,283 0	0,010	0,227	0,228 0
2	0,257 6	0,284	0,265 625		0,262 5	0,011	0,219	0,221 0
3	0,229 4	0,259	0,25	0,239 1	0,243 7	0,012	0,212	0,213 0
4	0,204 3	0,238	0,234 375	0,224 2	0,225 3	0,013	0,207	0,209 0
5	0,181 9	0,220	0,218 75	0,209 2	0,207 0	0,014	0,204	0,205 5
6	0,162 0	0,203	0,203 125	0,194 3	0,192 0	0,016	0,201	0,204 0
7	0,144 3	0,180	0,187 5	0,179 3	0,177 0	0,018	0,199	0,201 0
8	0,128 5	0,165	0,171 875	0,164 4	0,162 0	0,020	0,197	0,199 0
9	0,114 4	0,148	0,156 25	0,149 5	0,148 3	0,022	0,194	0,196 0
10	0,101 9	0,134	0,140 625	0,134 5	0,135 0	0,024	0,191	0,193 5
11	0,090 74	0,120	0,125	0,119 6	0,120 5	0,026	0,188	0,191 0
12	0,080 81	0,109	0,109 357	0,104 6	0,105 5	0,029	0,185	0,189 0
13	0,071 96	0,095	0,093 75	0,089 7	0,091 5	0,031	0,182	0,185 0
14	0,064 08	0,083	0,078 125	0,074 7	0,080 0	0,033	0,180	0,182 0
15	0,057 07	0,072	0,070 312 5	0,067 3	0,072 0	0,035	0,178	0,180 0
16	0,050 82	0,065	0,062 5	0,059 8	0,062 5	0,037	0,175	0,177 0
17	0,045 26	0,058	0,056 25	0,053 8	0,054 0	0,039	0,172	0,173 0

* Especifique a chapa, o fio e a placa declarando o número de bitola, o nome da bitola e o equivalente decimal em parênteses.
† Reflete a média presente e os pesos de aço de chapa.

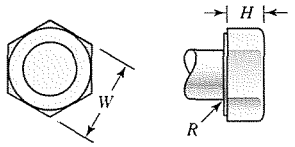
(continua)

Tabela A-28 Equivalentes decimais de bitola de fio e de chapa de metal (todas as medidas em polegadas) *(continuação)*

Nome da Bitola: Uso principal:	Americana ou Brown & Sharpe Chapa não-ferrosa, fio ou bastão	Birmingham ou Stubs Iron Wire Cano, tira ferrosa, fio achatado e aço de mola	Norma dos Estados Unidos† Chapa ferrosa e placa, 480 lbf/ft³	Norma dos fabricantes Chapa ferrosa	Fio de aço ou Washburn & Moen Fio ferroso, exceto fio de música	Fio de Música Fio de música	Fio de aço Stubs Vareta de broca de aço	Broca de sulcos espiralados Broca de sulcos espiralados e aço de broca
18	0,040 30	0,049	0,05	0,047 8	0,047 5	0,041	0,168	0,169 5
19	0,035 89	0,042	0,043 75	0,041 8	0,041 0	0,043	0,164	0,166 0
20	0,031 96	0,035	0,037 5	0,035 9	0,034 8	0,045	0,161	0,161 0
21	0,028 46	0,032	0,034 375	0,032 9	0,031 7	0,047	0,157	0,159 0
22	0,025 35	0,028	0,031 25	0,029 9	0,028 6	0,049	0,155	0,157 0
23	0,022 57	0,025	0,028 125	0,026 9	0,025 8	0,051	0,153	0,154 0
24	0,020 10	0,022	0,025	0,023 9	0,023 0	0,055	0,151	0,152 0
25	0,017 90	0,020	0,021 875	0,020 9	0,020 4	0,059	0,148	0,149 5
26	0,015 94	0,018	0,018 75	0,017 9	0,018 1	0,063	0,146	0,147 0
27	0,014 20	0,016	0,017 187 5	0,016 4	0,017 3	0,067	0,143	0,144 0
28	0,012 64	0,014	0,015 625	0,014 9	0,016 2	0,071	0,139	0,140 5
29	0,011 26	0,013	0,014 062 5	0,013 5	0,015 0	0,075	0,134	0,136 0
30	0,010 03	0,012	0,012 5	0,012 0	0,014 0	0,080	0,127	0,128 5
31	0,008 928	0,010	0,010 937 5	0,010 5	0,013 2	0,085	0,120	0,120 0
32	0,007 950	0,009	0,010 156 25	0,009 7	0,012 8	0,090	0,115	0,116 0
33	0,007 080	0,008	0,009 375	0,009 0	0,011 8	0,095	0,112	0,113 0
34	0,006 305	0,007	0,008 593 75	0,008 2	0,010 4		0,110	0,111 0
35	0,005 615	0,005	0,007 812 5	0,007 5	0,009 5		0,108	0,110 0
36	0,005 000	0,004	0,007 031 25	0,006 7	0,009 0		0,106	0,106 5
37	0,004 453		0,006 640 625	0,006 4	0,008 5		0,103	0,104 0
38	0,003 965		0,006 25	0,006 0	0,008 0		0,101	0,101 5
39	0,003 531				0,007 5		0,099	0,099 5
40	0,003 145				0,007 0		0,097	0,098 0

* Especifique a chapa, o fio e a placa declarando o número de bitola, o nome da bitola e o equivalente decimal em parênteses.
† Reflete a média presente e os pesos de aço de chapa.

Tabela A-29 Dimensões de parafusos de porca quadrada e hexagonal



Medida nominal, in	Quadrada		Tipo de cabeça: Hexagonal regular			Hexagonal pesada			Hexagonal estrutural		
	W	H	W	H	R_{min}	W	H	R_{min}	W	H	R_{min}
$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{11}{64}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{11}{64}$	0,01						
$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{13}{64}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{32}$	0,01						
$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{4}$	0,01						
$\frac{7}{16}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{19}{64}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{19}{64}$	0,01						
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{21}{64}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{11}{32}$	0,01	$\frac{7}{8}$	$\frac{11}{32}$	0,01	$\frac{7}{8}$	$\frac{5}{16}$	0,09
$\frac{5}{8}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{27}{64}$	0,02	$1\frac{1}{16}$	$\frac{27}{64}$	0,02	$1\frac{1}{16}$	$\frac{25}{64}$	0,021
$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	0,02	$1\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0,02	$1\frac{1}{4}$	$\frac{15}{32}$	0,021
1	$1\frac{1}{2}$	$\frac{21}{32}$	$1\frac{1}{2}$	$\frac{43}{64}$	0,03	$1\frac{5}{8}$	$\frac{43}{64}$	0,03	$1\frac{5}{8}$	$\frac{39}{64}$	0,062
$1\frac{1}{8}$	$1\frac{11}{16}$	$\frac{3}{4}$	$1\frac{11}{16}$	$\frac{3}{4}$	0,03	$1\frac{13}{16}$	$\frac{3}{4}$	0,03	$1\frac{13}{16}$	$\frac{11}{16}$	0,062
$1\frac{1}{4}$	$1\frac{7}{8}$	$\frac{27}{32}$	$1\frac{7}{8}$	$\frac{27}{32}$	0,03	2	$\frac{27}{32}$	0,03	2	$\frac{25}{32}$	0,062
$1\frac{3}{8}$	$2\frac{1}{16}$	$\frac{29}{32}$	$2\frac{1}{16}$	$\frac{29}{32}$	0,03	$2\frac{3}{16}$	$\frac{29}{32}$	0,03	$2\frac{3}{16}$	$\frac{27}{32}$	0,062
$1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$	1	$2\frac{1}{4}$	1	0,03	$2\frac{3}{8}$	1	0,03	$2\frac{3}{8}$	$\frac{15}{16}$	0,062
Medida nominal, mm											
M5	8	3,58	8	3,58	0,2						
M6			10	4,38	0,3						
M8			13	5,68	0,4						
M10			16	6,85	0,4						
M12			18	7,95	0,6	21	7,95	0,6			
M14			21	9,25	0,6	24	9,25	0,6			
M16			24	10,75	0,6	27	10,75	0,6	27	10,75	0,6
M20			30	13,40	0,8	34	13,40	0,8	34	13,40	0,8
M24			36	15,90	0,8	41	15,90	0,8	41	15,90	1,0
M30			46	19,75	1,0	50	19,75	1,0	50	19,75	1,2
M36			55	23,55	1,0	60	23,55	1,0	60	23,55	1,5

Tabela A-30 Dimensões de parafusos de calota hexagonal e parafusos hexagonais pesados [*W* = largura entre superfícies planas paralelas; *H* = altura da cabeça. Veja Figura na Tabela A-29]

Medida nominal, in	Raio mínimo de filete	Tipo de parafuso		
		Calota W	Pesado W	Altura H
$\frac{1}{4}$	0,015	$\frac{7}{16}$		$\frac{5}{32}$
$\frac{5}{16}$	0,015	$\frac{1}{2}$		$\frac{13}{64}$
$\frac{3}{8}$	0,015	$\frac{9}{16}$		$\frac{15}{64}$
$\frac{7}{16}$	0,015	$\frac{5}{8}$		$\frac{9}{32}$
$\frac{1}{2}$	0,015	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{5}{16}$
$\frac{5}{8}$	0,020	$\frac{15}{16}$	$1\frac{1}{16}$	$\frac{25}{64}$
$\frac{3}{4}$	0,020	$1\frac{1}{8}$	$1\frac{1}{4}$	$\frac{15}{32}$
$\frac{7}{8}$	0,040	$1\frac{5}{16}$	$1\frac{7}{16}$	$\frac{35}{64}$
1	0,060	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{8}$	$\frac{39}{64}$
$1\frac{1}{4}$	0,060	$1\frac{7}{8}$	2	$\frac{25}{32}$
$1\frac{3}{8}$	0,060	$2\frac{1}{16}$	$2\frac{3}{16}$	$\frac{27}{32}$
$1\frac{1}{2}$	0,060	$2\frac{1}{4}$	$2\frac{3}{8}$	$\frac{15}{16}$
Medida nominal, mm				
M5	0,2	8		3,65
M6	0,3	10		4,15
M8	0,4	13		5,50
M10	0,4	16		6,63
M12	0,6	18	21	7,76
M14	0,6	21	24	9,09
M16	0,6	24	27	10,32
M20	0,8	30	34	12,88
M24	0,8	36	41	15,44
M30	1,0	46	50	19,48
M36	1,0	55	60	23,38

Tabela A-31 Dimensões de porcas hexagonais

Medida nominal, in	Largura W	Altura H Hexagonal regular	Altura H Espessa ou de fenda	Altura H JAM
$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{5}{32}$
$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{17}{64}$	$\frac{21}{64}$	$\frac{3}{16}$
$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{21}{64}$	$\frac{13}{32}$	$\frac{7}{32}$
$\frac{7}{16}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{29}{64}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{5}{16}$
$\frac{9}{16}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{31}{64}$	$\frac{39}{64}$	$\frac{5}{16}$
$\frac{5}{8}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{35}{64}$	$\frac{23}{32}$	$\frac{3}{8}$
$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{8}$	$\frac{41}{64}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{27}{64}$
$\frac{7}{8}$	$1\frac{5}{16}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{29}{32}$	$\frac{31}{64}$
1	$1\frac{1}{2}$	$\frac{55}{64}$	1	$\frac{35}{64}$
$1\frac{1}{8}$	$1\frac{11}{16}$	$\frac{31}{32}$	$1\frac{5}{32}$	$\frac{39}{64}$
$1\frac{1}{4}$	$1\frac{7}{8}$	$1\frac{1}{16}$	$1\frac{1}{4}$	$\frac{23}{32}$
$1\frac{3}{8}$	$2\frac{1}{16}$	$1\frac{11}{64}$	$1\frac{3}{8}$	$\frac{25}{32}$
$1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$	$1\frac{9}{32}$	$1\frac{1}{2}$	$\frac{27}{32}$

Medida nominal, mm				
M5	8	4,7	5,1	2,7
M6	10	5,2	5,7	3,2
M8	13	6,8	7,5	4,0
M10	16	8,4	9,3	5,0
M12	18	10,8	12,0	6,0
M14	21	12,8	14,1	7,0
M16	24	14,8	16,4	8,0
M20	30	18,0	20,3	10,0
M24	36	21,5	23,9	12,0
M30	46	25,6	28,6	15,0
M36	55	31,0	34,7	18,0

Tabela A-32 Dimensões básicas de arruelas planas do padrão americano [todas as dimensões em polegadas]

Medida do fixador	Medida da arruela	Diâmetro ID	Diâmetro OD	Espessura
#6	0,138	0,156	0,375	0,049
#8	0,164	0,188	0,438	0,049
#10	0,190	0,219	0,500	0,049
$\frac{3}{16}$	0,188	0,250	0,562	0,049
#12	0,216	0,250	0,562	0,065
$\frac{1}{4}$ N	0,250	0,281	0,625	0,065
$\frac{1}{4}$ W	0,250	0,312	0,734	0,065
$\frac{5}{16}$ N	0,312	0,344	0,688	0,065
$\frac{5}{16}$ W	0,312	0,375	0,875	0,083
$\frac{3}{8}$ N	0,375	0,406	0,812	0,065
$\frac{3}{8}$ W	0,375	0,438	1,000	0,083
$\frac{7}{16}$ N	0,438	0,469	0,922	0,065
$\frac{7}{16}$ W	0,438	0,500	1,250	0,083
$\frac{1}{2}$ N	0,500	0,531	1,062	0,095
$\frac{1}{2}$ W	0,500	0,562	1,375	0,109
$\frac{9}{16}$ N	0,562	0,594	1,156	0,095
$\frac{9}{16}$ W	0,562	0,625	1,469	0,109
$\frac{5}{8}$ N	0,625	0,656	1,312	0,095
$\frac{5}{8}$ W	0,625	0,688	1,750	0,134
$\frac{3}{4}$ N	0,750	0,812	1,469	0,134
$\frac{3}{4}$ W	0,750	0,812	2,000	0,148
$\frac{7}{8}$ N	0,875	0,938	1,750	0,134
$\frac{7}{8}$ W	0,875	0,938	2,250	0,165
1 N	1,000	1,062	2,000	0,134
1 W	1,000	1,062	2,500	0,165
$1\frac{1}{8}$ N	1,125	1,250	2,250	0,134
$1\frac{1}{8}$ W	1,125	1,250	2,750	0,165
$1\frac{1}{4}$ N	1,250	1,375	2,500	0,165
$1\frac{1}{4}$ W	1,250	1,375	3,000	0,165
$1\frac{3}{8}$ N	1,375	1,500	2,750	0,165
$1\frac{3}{8}$ W	1,375	1,500	3,250	0,180
$1\frac{1}{2}$ N	1,500	1,625	3,000	0,165
$1\frac{1}{2}$ W	1,500	1,625	3,500	0,180
$1\frac{5}{8}$	1,625	1,750	3,750	0,180
$1\frac{3}{4}$	1,750	1,875	4,000	0,180
$1\frac{7}{8}$	1,875	2,000	4,250	0,180
2	2,000	2,125	4,500	0,180
$2\frac{1}{4}$	2,250	2,375	4,750	0,220
$2\frac{1}{2}$	2,500	2,625	5,000	0,238
$2\frac{3}{4}$	2,750	2,875	5,250	0,259
3	3,000	3,125	5,500	0,284

N = estreita; W= larga; use W quando não especificado.

Tabela A-33 Dimensões de arruelas planas métricas [todas as dimensões em milímetros]

Medida da arruela*	Mínimo ID	Máximo OD	Espessura mínima	Medida da arruela*	Mínimo ID	Máximo OD	Espessura mínima
1,6 N	1,95	4,00	0,70	10 N	10,85	20,00	2,30
1,6 R	1,95	5,00	0,70	10 R	10,85	28,00	2,80
1,6 W	1,95	6,00	0,90	10 W	10,85	39,00	3,50
2 N	2,50	5,00	0,90	12 N	13,30	25,40	2,80
2 R	2,50	6,00	0,90	12 R	13,30	34,00	3,50
2 W	2,50	8,00	0,90	12 W	13,30	44,00	3,50
2,5 N	3,00	6,00	0,90	14 N	15,25	28,00	2,80
2,5 R	3,00	8,00	0,90	14 R	15,25	39,00	3,50
2,5 W	3,00	10,00	1,20	14 W	15,25	50,00	4,00
3 N	3,50	7,00	0,90	16 N	17,25	32,00	3,50
3 R	3,50	10,00	1,20	16 R	17,25	44,00	4,00
3 W	3,50	12,00	1,40	16 W	17,25	56,00	4,60
3,5 N	4,00	9,00	1,20	20 N	21,80	39,00	4,00
3,5 R	4,00	10,00	1,40	20 R	21,80	50,00	4,60
3,5 W	4,00	15,00	1,75	20 W	21,80	66,00	5,10
4 N	4,70	10,00	1,20	24 N	25,60	44,00	4,60
4 R	4,70	12,00	1,40	24 R	25,60	56,00	5,10
4 W	4,70	16,00	2,30	24 W	25,60	72,00	5,60
5 N	5,50	11,00	1,40	30 N	32,40	56,00	5,10
5 R	5,50	15,00	1,75	30 R	32,40	72,00	5,60
5 W	5,50	20,00	2,30	30 W	32,40	90,00	6,40
6 N	6,65	13,00	1,75	36 N	38,30	66,00	5,60
6 R	6,65	18,80	1,75	36 R	38,30	90,00	6,40
6 W	6,65	25,40	2,30	36 W	38,30	110,00	8,50
8 N	8,90	18,80	2,30				
8 R	8,90	25,40	2,30				
8 W	8,90	32,00	2,80				

N = estreita; R = regular; W = larga.
* Mesmas medidas dos parafusos e parafusos de porca.

Tabela A-34 Função gama*

Valores de $\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx$; $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$

n	$\Gamma(n)$	n	$\Gamma(n)$	n	$\Gamma(n)$	n	$\Gamma(n)$
1,00	1,000 00	1,25	,906 40	1,50	,886 23	1,75	,919 06
1,01	,994 33	1,26	,904 40	1,51	,886 59	1,76	,921 37
1,02	,988 84	1,27	,902 50	1,52	,887 04	1,77	,923 76
1,03	,983 55	1,28	,900 72	1,53	,887 57	1,78	,926 23
1,04	,978 44	1,29	,899 04	1,54	,888 18	1,79	,928 77
1,05	,973 50	1,30	,897 47	1,55	,888 87	1,80	,931 38
1,06	,968 74	1,31	,896 00	1,56	,889 64	1,81	,934 08
1,07	,964 15	1,32	,894 64	1,57	,890 49	1,82	,936 85
1,08	,959 73	1,33	,893 38	1,58	,891 42	1,83	,939 69
1,09	,955 46	1,34	,892 22	1,59	,892 43	1,84	,942 61
1,10	,951 35	1,35	,891 15	1,60	,893 52	1,85	,945 61
1,11	,947 39	1,36	,890 18	1,61	,894 68	1,86	,948 69
1,12	,943 59	1,37	,889 31	1,62	,895 92	1,87	,951 84
1,13	,939 93	1,38	,888 54	1,63	,897 24	1,88	,955 07
1,14	,936 42	1,39	,887 85	1,64	,898 64	1,89	,958 38
1,15	,933 04	1,40	,887 26	1,65	,900 12	1,90	,961 77
1,16	,929 80	1,41	,886 76	1,66	,901 67	1,91	,965 23
1,17	,936 70	1,42	,886 36	1,67	,903 30	1,92	,968 78
1,18	,923 73	1,43	,886 04	1,68	,905 00	1,93	,972 40
1,19	,920 88	1,44	,885 80	1,69	,906 78	1,94	,976 10
1,20	,918 17	1,45	,885 65	1,70	,908 64	1,95	,979 88
1,21	,915 58	1,46	,885 60	1,71	,910 57	1,96	,983 74
1,22	,913 11	1,47	,885 63	1,72	,912 58	1,97	,987 68
1,23	,910 75	1,48	,885 75	1,73	,914 66	1,98	,991 71
1,24	,908 52	1,49	,885 95	1,74	,916 83	1,99	,995 81
						2,00	1,000 00

Fonte: Reimpressa com permissão de William H. Beyer (ed.), *Handbook of Tables for Probability and Statistics*, 2nd ed., 1966. Copyright CRC Press, Boca Raton, Florida.

* Para valores grandes positivos de x, aproxima a série assimptótica.

$$x^x e^{-x}\sqrt{\frac{2x}{x}}\left[1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} - \frac{139}{51\,840x^3} - \frac{571}{2\,488\,320x^4} + \cdots\right]$$

APÊNDICE

B Respostas de Problemas Selecionados

B-1 Capítulo 1

1-8 $10 \le F \le 10{,}5$ lbf, $13{,}5 \le N \le 14{,}2$ lbf, $K = 0{,}967$, $19{,}3 \le T \le 20{,}3$ lbf · in

1-12 (a) $e_1 = 0{,}006\,067\,977$, $e_2 = 0{,}009\,489\,743$, $e = 0{,}015\,557\,720$, (b) $e_1 = -0{,}003\,932\,023$, $e_2 = -0{,}000\,510\,257$, $e = -0{,}004\,442\,280$

1-15 (a) $\sigma = 13{,}1$ MPa, (b) $\sigma = 70$ MPa, (c) $y = 15{,}5$ mm, (d) $\theta = 5{,}18°$

B-2 Capítulo 2

2-1 $\bar{x} = 122{,}9$ kilociclos, $s_x = 30{,}3$ kilociclos

2-2 $\bar{x} = 198{,}55$ kpsi, $s_x = 9{,}55$ kpsi

2-3 $\bar{x} = 78{,}4$ kpsi, $s_x = 6{,}57$ kpsi

2-11 (a) $\bar{F}_i = 5{,}979$ lbf, $s_{Fi} = 0{,}396$ lbf; (b) $\bar{k} = 9{,}766$ lbf/in, $s_k = 0{,}390$ lbf/in

2-19 $L_{10} = 84{,}1$ kciclos

2-23 $R = 0{,}987$

2-25 (a) $w = 0{,}020 \pm 0{,}015$ in, (b) $w = 0{,}020 \pm 0{,}005$ in

2-32 $\bar{D}_0 = 4{,}012$ in, $t_{D0} = 0{,}036$ in; $D_0 = 4{,}012 \pm 0{,}036$ in

2-39 $\bar{x} = 98{,}26$ kpsi, $s_x = 4{,}30$ kpsi

2-46 $\mu_n = 122{,}9$ kciclos, $\hat{\sigma}_n = 34{,}8$ kciclos

B-3 Capítulo 3

3-9 $E = 30$ Mpsi, $S_y = 45{,}5$ kpsi, $S_{ut} = 85{,}5$ kpsi, redução de área = 45,8%

3-11 $(S_y)_{0.001} \doteq 35$ kpsi, $E_{\sigma=0} = 25$ Mpsi, $E_{\sigma=20\text{ kpsi}} = 14$ Mpsi

3-14 $G = 77{,}3$ GPa, $S_{ys} \doteq 200$ MPa

3-18 $\bar{S}_{ut} = 125{,}2$ kpsi, $\hat{\sigma}_{Sut} = 1{,}9$ kpsi

3-20 (a) $u_R \doteq 34{,}5$ in · lbf/in^3, (b) $u_T \doteq 66{,}7(10^3)$ in · lbf/in^3

B-4 Capítulo 4

4-4 (a) $V(x) = -1{,}43 - 40\langle x-4\rangle^0 + 30\langle x-8\rangle^0 + 71{,}43\langle x-14\rangle^0 - 60\langle x-18\rangle^0$ lbf
$M(x) = -1{,}43x - 40\langle x-4\rangle^1 + 30\langle x-8\rangle^1 + 71{,}43\langle x-14\rangle^1 - 60\langle x-18\rangle^1$ lbf · in

4-6 (a) $M_{max} = 253$ lbf · in, (b) $(a/l)^* = 0{,}207$, $M^* = 214$ lbf · in

4-8 (a) $\sigma_1 = 14$, $\sigma_2 = 4$, $\sigma_3 = 0$, $2\theta = 53{,}1°$ horário;
(b) $\sigma_1 = 18{,}6$, $\sigma_2 = 6{,}4$, $\sigma_3 = 0$, $2\theta = 55°$ anti-horário;
(c) $\sigma_1 = 26{,}2$, $\sigma_2 = 7{,}78$, $\sigma_3 = 0$, $2\theta = 139{,}7°$ horário;
(d) $\sigma_1 = 23{,}4$, $\sigma_2 = 4{,}57$, $\sigma_3 = 0$, $2\theta = 122°$ horário;

4-13 $\sigma = 10{,}2$ kpsi, $\delta = 0{,}0245$ in, $\epsilon_1 = 0{,}000\,340$, $\upsilon = 0{,}292$, $\epsilon_2 = -0{,}000\,099\,1$, $\Delta d = -0{,}000\,049\,6$ in

4-18 $\sigma_1 = 30$ MPa, $\sigma_2 = 10$ MPa, $\sigma_3 = -20$ MPa, $\tau_{max} = 25$ MPa

4-22 (a) $M_{max} = 21\,600$ kip · in, (b) $x_{max} = 523$ in dos apoios esquerdo ou direito

4-23 (a) $\sigma_A = 42$ kpsi, $\sigma_B = 18{,}5$ kpsi, $\sigma_C = 2{,}7$ kpsi, $\sigma_D = -52{,}7$ kpsi

4-27 $M_{max} = 219$ lbf · in, $\sigma = 17{,}8$ kpsi, $\tau_{max} = 3{,}4$ kpsi, ambos os modelos

4-33 O mesmo

4-37 Duas tiras de espessura de $\frac{1}{16}$ in: $T_{max} = 29{,}95$ lbf · in, $\theta = 0{,}192$ rad, $k_t = 156$ lbf · in/rad. Uma tira de espessura de $\frac{1}{8}$ in: $T_{max} = 59{,}90$ lbf · in, $\theta = 0{,}0960$ rad, $k_t = 624$ lbf · in/rad

4-43 $d_C = 45$ mm

4-47 $\sigma_{max} = 11{,}79$ kpsi, $\tau_{max} = 7{,}05$ kpsi

4-53 $p_i = 639$ psi

4-57 $(\sigma_r)_{max} = 3656$ psi

4-65 $\delta_{max} = 0{,}038$ mm, $\delta_{min} = 0{,}0175$ mm, $p_{max} = 147{,}5$ MPa, $p_{min} = 67{,}9$ MPa

4-69 Para δ_{max}, $p = 33{,}75$ kpsi, $(\sigma_t)_o = 56{,}25$ kpsi, $(\sigma_t)_i = -33{,}75$ kpsi, $\delta_o = 0{,}001\,11$ in, $\delta_i = -0{,}000\,398$ in

4-72 $\sigma_i = 26{,}3$ kpsi, $\sigma_o = -15{,}8$ kpsi

4-77 $\sigma_i = 71{,}3$ kpsi, $\sigma_o = -34{,}2$ kpsi

4-81 $p_{max} = 399F^{1/3}$ MPa, $\sigma_{max} = 399F^{1/3}$ MPa, $\tau_{max} = 120F^{1/3}$ MPa

B-5 Capítulo 5

5-1 (a) $k = (1/k_1 + 1/k_2 + 1/k_3)$, (b) $k = k_1 + k_2 + k_3$, (c) $k = [1/k_1 + 1/(k_2 + k_3)]^{-1}$

5-10 $\lambda = 8a^2/(3l)$

5-12 $\sigma_{max} = -20{,}4$ kpsi, $y = -0{,}908$ in

5-15 $y_{esquerdo} = -0{,}0506$ in, $y_{direito} = -0{,}0506$ in, $y_{midspan} = 0{,}0190$ in

5-18 $y_{max} = -0{,}0130$ in

5-20 $z_A = 0{,}0368$ in, $z_B = 0{,}00430$ in

5-26 Use $d = 1\frac{3}{8}$ in

5-30 $y_B = 0{,}0459$ in

5-37 $y_A = -0{,}101$ in, $y_{x=20\text{ in}} = -0{,}104$ in

5-45 $y_A = -0{,}133$ in

5-48 $y_{x=10\text{ in}} = -0{,}0167$ in

5-51 (a) $\sigma_b = 76{,}5$ kpsi, $\sigma_c = -15{,}2$ kpsi, (b) $\sigma_b = 78{,}4$ kpsi, $\sigma_c = -13{,}3$ kpsi

5-56 $R_O = 3{,}89$ kip, $R_C = 1{,}11$ kip, ambos na mesma direção

5-59 $\sigma_{BE} = 140$ MPa, $\sigma_{DF} = 71{,}2$ MPa, $y_B = -0{,}670$ mm, $y_C = -2{,}27$ mm, $y_D = -0{,}341$ mm

5-64 $\delta_A = (\pi + 4)PR^3/(4EI)$, $\delta_B = \pi PR^3/(4EI)$

5-67 $\delta = 0{,}476$ mm

5-73 (a) $t = 0{,}5$ in, (b) Não

5-81 $y_{max} = 2k_1 a/(k_1 + k_2)$

B-6 Capítulo 6

6-2 (a) MSS: $n = 4{,}17$, DE: $n = 4{,}17$, (b) MSS: $n = 4{,}17$, DE: $n = 4{,}81$, (c) MSS: $n = 2{,}08$, DE: $n = 2{,}41$, (c) MSS: $n = 4{,}17$, DE: $n = 4{,}81$

6-3 (a) MSS: $n = 2{,}17$, DE: $n = 2{,}50$, (b) MSS: $n = 1{,}45$, DE: $n = 1{,}56$, (c) MSS: $n = 1{,}52$, DE: $n = 1{,}65$, (c) MSS: $n = 1{,}27$, DE: $n = 1{,}50$

6-9 (a) DE: $\sigma' = 12{,}29$ kpsi, $n = 3{,}42$

6-10 (a) DCM: $\sigma_1 = 90$ kpsi, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -50$ kpsi, $r = -0{,}56$, $n = 1{,}77$

6-12 (a) M2M: $n = 3{,}89$

6-13 (a) $\sigma_A = \sigma_B = 20$ kpsi, $r = 1$, $n = 1{,}5$

6-18 $(\sigma_t)_{max}$ 13,21 kpsi, $\sigma_l = 6{,}42$ kpsi, $\sigma_r = -500$ psi, $\sigma' = 11{,}9$ kpsi, $n = 3{,}87$

6-21 Usando BCM, selecione $d = 1\frac{3}{8}$ in

6-25 $d = 18$ mm

6-32 (a) $\delta = 0{,}0005$ in, $p = 3516$ psi, $(\sigma_t)_i = -5860$ psi, $(\sigma_r)_i = -3516$ psi, $(\sigma_t)_o = -9142$ psi, $(\sigma_r)_o = -3516$ psi

6-35 $n_o = 2{,}81$, $n_i = 2{,}41$

6-40 $p = 29{,}2$ MPa

B-7 Capítulo 7

7-1 $S_e = 94{,}4$ kpsi

7-3 $S'_e = 33{,}4$ kpsi, $\sigma'_F = 112{,}4$ kpsi, $b = -0{,}0836$, $f = 0{,}899$, $a = 106{,}1$ kpsi, $S_f = 48{,}2$ kpsi, $N = 409\,530$ ciclos

7-5 $(S_f)_{ax} = 162N^{-0.0851}$ kpsi, $10^3 \le N \le 10^6$ ciclos

7-6 $S_e = 243$ MPa

7-10 $S'_e = 221{,}8$ MPa, $k_a = 0{,}899$, $k_b = 1$, $k_c = 0{,}85$, $S_e = 169{,}5$ MPa, $K_t = 2{,}5$, $K_f = 2{,}09$, $F_a = 21{,}6$ kN, $F_y = 98{,}7$ kN

7-12 Escoamento: $n_y = 1{,}18$. Fadiga: (a) $n_f = 1{,}06$, (b) $n_f = 1{,}31$, (c) $n_f = 1{,}32$

7-17 $n_y = 5{,}06$, (a) $n_f = 2{,}44$, (b) $n_f = 2{,}55$

7-23 No filete $n_f = 1{,}70$

7-24 (a) $T = 3{,}42$ N · m, (b) $T = 4{,}21$ N · m, (c) $n_y = 1{,}91$

7-27 (a) $P_{all} = 16{,}1$ kN, $n_y = 5{,}69$, (b) $P_{all} = 51{,}4$ kN, $n_y = 3{,}87$

7-29 (a) 24 900 ciclos, (b) 27 900 ciclos

7-34 Rotação suposta. $S'_e = 55{,}7$ **LN**(1, 0,138) kpsi, $k_a = 0{,}768$ **LN**(1, 0,058), $k_b = 0{,}879$, $S_e = 37{,}6$ **LN**(1, 0,150) kpsi, $K_f = 1{,}598$ **LN**(1, 0,15), $\sigma = 22{,}8$ **LN**(1, 0,15) kpsi, $z = -2{,}373$, $R = 0{,}991$

B-8 Capítulo 8

8-1 (a) Profundidade de rosca: 2,5 mm; largura de rosca: 2,5 mm; $d_m = 22{,}5$ mm, $d_r = 20$ mm, $l = p = 5$ mm

8-4 $T_R = 16{,}23$ N · m, $T_L = 6{,}62$ N · m, $e = 0{,}294$

8-8 $T = 16{,}5$ lbf · in, $d_m = 0{,}5417$ in, $l = 0{,}1667$ in, sec $\alpha = 1{,}033$, $T = 0{,}0696F$, $T_c = 0{,}0328F$, $T_{total} = 0{,}1024F$, $F = 161$ lbf

8-11 $L_T = 1{,}25$ in, $L_G = 1{,}109$ in, $H = 0{,}4375$ in, $L_G + H = 1{,}5465$ in, use 1,75 in, $l_d = 0{,}500$ in, $l_t = 0{,}609$ in

8-13 $L_T = 1{,}25$ in, $L > h + 1{,}5d = 1{,}625$ in, use 1,75 in, $l_d = 0{,}500$ in, $l_t = 0{,}625$

8-15 (a) $A_d = 0{,}442$ in^2, $A_{tube} = 0{,}552$ in^2, $k_b = 1{,}02(10^6)$ lbf/in, $k_m = 1{,}27(10^6)$ lbf/in, $C = 0{,}445$, (b) $F_i = 11\,810$ lbf

8-18 Razões entre expressões frusta e de Wileman é 1,11/1,08

8-22 $n = 4{,}73$

8-23 $n = 5{,}84$

8-27 $k_b = 4{,}63$ Mlbf/in, $k_m = 7{,}99$ Mlbf/in usando frusta

8-34 (a) $L = 2{,}5$ in, (b) $k_b = 6{,}78$ Mlbf/in, $k_m = 14{,}41$ Mlbf/in, $C = 0{,}320$

8-37 Carga: $n = 3{,}19$. Separação: $n = 4{,}71$. Fadiga: $n = 3{,}27$

8-43 Cisalhamento do parafuso de porca: $n = 3{,}26$. Suporte do parafuso de porca: $n = 5{,}99$. Suporte do membro: $n = 3{,}71$, Tração do membro: $n = 5{,}36$

8-48 $F = 2{,}22$ kN

8-50 Suporte no parafuso de porca, $n = 9{,}58$; cisalhamento do parafuso de porca, $n = 5{,}79$; suporte nos membros, $n = 5{,}63$; flexão dos membros, $n = 2{,}95$

B-9 Capítulo 9

9-1 $F = 17{,}7$ kip

9-3 $F = 11{,}3$ kip

9-5 (a) $\tau' = 1{,}13F$ kpsi, $\tau''_x = \tau''_y = 5{,}93F$ kpsi, $\tau_{max} = 9{,}22F$ kpsi, $F = 2{,}17$ kip; (b) $\tau_{all} = 11$ kpsi, $F_{all} = 1{,}19$ kip

9-8 $\tau' = 0$ (por quê?), $F = 49{,}2$ kN

9-9 Um cordão de dois caminhos** primeiro, contas verticais paralelas e contas quadradas

9-10 Primeiro: contas horizontais paralelas. Segundo: contas quadradas

9-11 Decisões: padrão; quadrado em todo arredor
Eletrodo: E60XX
Tipo: dois filetes paralelos, dois filetes transversais
Comprimento de contas: 12 in,
Perna: $\frac{1}{4}$ in

9-20 $\tau_{max} = 18$ kpsi

9-22 $n = 3{,}57$

B-10 Capítulo 10

10-3 (a) $L_0 = 5{,}17$ in, (b) $F_{S_y} = 45{,}2$ lbf, (c) $k = 11{,}55$ lbf/in, (d) $(L_0)_{cr} = 5{,}89$ in, mola com guia

10-5 (a) $L_0 = 47{,}7$ mm, (b) $p = 5{,}61$ mm, (c) $F_S = 81{,}1$ N, (d) $k = 2643$ N/m, (e) $(L_0)_{cr} = 105{,}2$ mm, necessita guia

10-9 Não segura compacta, $L_0 \leq 0{,}577$ in

10-15 Não segura compacta, $L_0 \leq 66{,}6$ mm

10-19 (a) $p = 10$ mm, $L_s = 44{,}2$ mm, $N_a = 12$ voltas, (b) $k = 1080$ N/m, (c) $F_s = 81{,}9$ N, (d) $\tau_s = 271$ MPa

10-29 (a) $L_0 = 16{,}12$ in, (b) $\tau_i = 14{,}95$ kpsi, (c) $k = 4{,}855$ lbf/in, (d) $F = 85{,}8$ lbf, (e) $y = 14{,}4$ in

10-33 (a) $k' = 24{,}7$ lbf · in/cada volta, (b) 297 kpsi

10-34 $k = 2EI / [R^2(19\pi R + 18l)]$

B-11 Capítulo 11

11-1 $x_D = 540$, $F_D = 2{,}278$ kN, $C_{10} = 18{,}59$ kN, 02-30 mm mancal de esferas de sulco profundo, $R = 0{,}919$

11-4 $R = R_1R_2 = 0{,}927(0{,}942) = 0{,}873$, meta não atingida

11-8 $x_D = 180$, $C_{10} = 57{,}0$ kN

11-11 $C_{10} = 8{,}88$ kN

11-13 $R_O = 195$ N, $R_E = 196$ N, sulco profundo, 02-25 mm em O e C

11-18 $l_2 = 0{,}267(10^6)$ rev

B-12 Capítulo 12

12-1 $c_{min} = 0{,}000\,75$ in, $r = 0{,}500$ in, $r/c = 667$, $N_j = 18{,}3$ r/s, $S = 0{,}261$, $h_0/c = 0{,}595$, $rf/c = 5{,}8$, $Q/(rcNl) = 3{,}98$, $Q_s/Q = 0{,}5$, $h_0 = 0{,}000\,446$ in, $H = 0{,}0134$ Btu/s, $Q = 0{,}0274$ in^3/s, $Q_S = 0{,}0137$ in^3/s

12-3 SAE 10: $h_0 = 0{,}000\,275$ in, $p_{max} = 847$ psi, $c_{min} = 0{,}0025$ in

12-7 $h_0 = 0{,}0165$ mm, $f = 0{,}007\,65$, $Q = 1263$ mm^3/s

12-9 $h_0 = 0{,}010$ mm, $H = 34{,}3$ W, $Q = 1072$ mm^3/s, $Q_s = 793$ mm^3/s

12-11 $T_{av} = 65$°C, $h_0 = 0{,}0272$ mm, $H = 45{,}2$ W, $Q_s = 1712$ mm^3/s

12-20 15,2 mPa · s

B-13 Capítulo 13

13-1 35 dentes, 3,25 in

13-2 400 rpm, $p = 3\pi$ mm, $C = 112{,}5$ mm

13-4 $a = 0{,}3333$ in, $b = 0{,}4167$ in, $c = 0{,}0834$ in, $p = 1{,}047$ in, $t = 0{,}523$ in, $d_1 = 7$ in, $d_{1b} = 6{,}578$ in, $d_2 = 9{,}333$ in, $d_{2b} = 8{,}77$ in, $p_b = 0{,}984$ in

13-5 $d_P = 2{,}333$ in, $d_G = 5{,}333$ in, $\gamma = 23{,}63°$, $\Gamma = 66{,}37°$, $A_0 = 2{,}911$ in, $F = 0{,}873$ in

13-8 (a) 13, (b) 15, (c) 18, (d) 16

13-10 10:20 e mais

13-13 (a) $p_n = 3\pi$ mm, $p_t = 10{,}40$ mm, $p_x = 22{,}30$ mm, (b) $m_t = 3{,}310$ mm, $\phi_t = 21{,}88°$, (c) $d_P = 59{,}58$ mm, $d_G = 105{,}92$ mm

13-15 $e = 4/51$, $n_d = 47{,}06$ rpm horário

13-22 $n_A = 68{,}57$ rpm horário

13-27 $n_b/n_a = 11/36$ mesmo sentido

13-33 $\mathbf{F}_A = 71{,}5\,\mathbf{i} + 53{,}4\,\mathbf{j} + 350{,}5\,\mathbf{k}$ lbf, $\mathbf{F}_B = -149{,}5\,\mathbf{i} - 590{,}4\,\mathbf{k}$ lbf

13-40 $\mathbf{F}_C = 1565\,\mathbf{i} + 672\,\mathbf{j}$ lbf; $\mathbf{F}_D = 1610\,\mathbf{i} - 425\,\mathbf{j} + 154\,\mathbf{k}$ lbf

B-14 Capítulo 14

14-1 $\sigma = 7{,}63$ kpsi

14-4 $\sigma = 82{,}6$ MPa

14-7 $F = 2{,}5$ in

14-10 $m = 2$ mm, $F = 25$ mm

14-14 $\sigma_c = -617$ MPa

14-17 $W^t = 16\,890$ N, $H = 97{,}2$ kW (flexão do pinhão); $W^t = 3433$ N, $H = 19{,}8$ kW (desgaste do pinhão e engrenagem)

14-18 $W^t = 1356$ lbf, $H = 34{,}1$ hp (flexão do pinhão); $W^t = 1720$ lbf, $H = 43{,}3$ hp (flexão da engrenagem); $W^t = 265$ lbf, $H = 6{,}67$ hp (desgaste do pinhão e engrenagem)

14-22 $W^t = 775$ lbf, $H = 19{,}5$ hp (flexão do pinhão); $W^t = 300$ lbf, $H = 7{,}55$ hp (desgaste do pinhão). mé-

todo da AGMA é responsável pela maioria das condições

14-24 Potência de especificação = min(157,5, 192,9, 53,0, 59,0) = 53 hp

14-28 Potência de especificação = min(270, 335, 240, 267) = 240 hp

14-34 $H = 69{,}7$ hp

B-15 Capítulo 15

15-1 $W_P^t = 690$ lbf, $H_1 = 16{,}4$ hp, $W_G^t = 620$ lbf, $H_2 = 14{,}8$ hp

15-2 $W_P^t = 464$ lbf, $H_3 = 11{,}0$ hp, $W_G^t = 531$ lbf, $H_4 = 12{,}6$ hp

15-8 Núcleo do pinhão, 300 Bhn; superfície, 373 Bhn. Núcleo da engrenagem, 339 Bhn; superfície, 345 Bhn

15-9 Todos os quatro $W^t = 690$ lbf

15-11 Núcleo do pinhão, 180 Bhn; superfície, 266 Bhn. Núcleo da engrenagem, 180 Bhn; superfície, 266 Bhn

B-16 Capítulo 16

16-1 (a) Sapata direita: $p_a = 111{,}4$ psi rotação horária. (b) Sapata direita: $T = 2530$ lbf · in; sapata esquerda: 1310 lbf · in; total $T = 3840$ lbf · in. (c) sapata direita: $R^x = -229$ lbf, $R^y = 940$ lbf, $R = 967$ lbf; sapata esquerda: $R^x = 130$ lbf, $R^y = 171$ lbf, $R = 215$ lbf

16-3 Sapata esquerda: $T = 161{,}4$ N · m, $p_a = 610$ kPa; sapata direita: $T = 59{,}0$ N · m, $p_a = 222{,}8$ kPa, $T_{total} = 220{,}4$ N · m

16-5 $p_a = 203$ kN, $T = 38{,}76$ N · m

16-8 $a' = 1{,}209r$, $a = 1{,}170r$

16-10 $P = 1560$ lbf, $T = 29\,980$ lbf · in

16-14 (a) $T = 8200$ lbf · in, $P = 504$ lbf, $H = 26$ hp; (b) $R = 901$ lbf; (c) $p|_{\theta=0} = 70$ psi, $p|_{\theta=270°} = 27{,}3$ psi

16-17 (a) $F = 1885$ lbf, $T = 7125$ lbf · in; (c) a capacidade de torque exibe um ponto estacionário máximo

16-18 (a) $d^* = D/\sqrt{3}$; (b) $d^* = 3{,}75$ in, $T^* = 7173$ lbf · in; (c) $(d/D)^* = 1/\sqrt{3} = 0{,}577$

16-19 (a) Desgaste uniforme: $p_a = 82{,}2$ kPa, $F = 949$ N. (b) Pressão uniforme: $p_a = 79{,}1$ kPa, $F = 948$ N

16-23 $C_S = 0{,}08$, $t = 5{,}30$ in

16-26 (b) $I_e = I_M + I_P + n^2 IP + IL/n^2$; (c) $I_e = 10 + 1 + 10^2(1) + 100/10^2 = 112$

16-27 (c) $n^* = 2{,}430$, $m^* = 4{,}115$, que são independentes de I_L

B-17 Capítulo 17

17-1 (a) $F_c = 0{,}913$ lbf, $F_i = 101{,}1$ lbf, $F_{1a} = 147$ lbf, $F_2 = 57$ lbf; (b) $H_a = 2{,}5$ hp, $n_{fs} = 1{,}0$; (c) 0,151 in

17-3 Correia A-3 de poliamida, $b = 6$ in, $F_c = 77{,}4$ lbf, $T = 10\,946$ lbf · in, $F_1 = 573{,}7$ lbf, $F_2 = 117{,}6$ lbf, $F_i = 268{,}3$ lbf, dip = 0,562 in

17-5 (a) $T = 742{,}8$ lbf · in, $F_i = 148{,}1$ lbf; (b) $b = 4{,}13$ in; (c) $F_1 = 293{,}4$ lbf, $F_c = 17{,}7$ lbf, $F_i = 147{,}6$ lbf, $F_2 = 41{,}5$ lbf, $H = 20{,}6$ hp, $n_{fs} = 1{,}1$

17-7 $R^x = (F_1 + F_2)\{1 - 0{,}5[(D-d)/(2C)]^2\}$, $R^y = (F_1 - F_2)(D-d)/(2C)$. A partir do Ex. 17-2, $R^x = 1214{,}4$ lbf, $R^y = 34{,}6$ lbf

17-14 Com $d = 2$ in, $D = 4$ in, vida de 10^6 passagens, $b = 4{,}5$ in, $n_{fs} = 1{,}05$

17-17 Selecione uma correia B90

17-20 Selecione nove correias C270, vida > 10^9 passagens, vida > 150 000 h

17-24 (b) $n_1 = 1227$ rpm. A tabela 17-20 confirma que este ponto ocorre no intervalo 1200 ± 200 rpm, (c) Eq. (17-40) aplicável a velocidades excedendo 1227 rpm para corrente nº 60

17-25 (a) $H_a = 7{,}91$ hp; (b) $C = 18$ in; (c) $T = 1164$ lbf · in, $F = 744$ lbf

17-27 Corrente de quatro cordões nº 60, $N_1 = 17$ dentes, $N_2 = 84$ dentes, arredondado $L/p = 134$, $n_{fs} = 1{,}17$, vida 15 000 h (pré-extremo)

B-18 Capítulo 18

18-1 (a) Momento flexor máximo 2371 lbf · in, (b) $d_A = 1{,}625$ in, $d_B = 1{,}810$ in, diâmetro médio ≥ 1,810 in

18-2 (a) $d = 1{,}725$ in, (b) $d = 1{,}687$ in

18-13 $d = 1{,}371$ in; $d = 1{,}630$ in para $n_d = 2$

18-18 $d = 24$ mm, $D = 32$ mm, $r = 1{,}6$ mm

18-20 (a) Estático: $d = 1{,}526$ in; (b) DE-Gerber: $d = 1{,}929$ in; ASME-elíptico: $d = 1{,}927$ in; MSS-Soderberg: $d = 1{,}932$ in; DE-Goodman: $d = 2{,}008$ in

18-24 Inclinação: $y'_m = y'$; deflexão: $y_m = sy = y/2$; momento: $M_m = s^3 M = M/8$; Força: $F_m = s^2 F = F/4$; mesmo material, mesmos níveis de tensão

18-26 (a) $\omega = 868$ rad/s; (b) $d = 2$ in; (c) $\omega = 1736$ rad/s (dobro)

18-28 (b) $\omega = 466$ rad/s = 4450 rpm

Índice

A

abscissa de McKee, 582-583
ação conjugada, 630-631
aceitabilidade, 28-29
aço, 42-43. *Veja também* propriedades do *material*;
  dureza, 93-95
  elasticidade, 86-87
  endurecimento superficial e, 102-103
  estimativa quantitativa do, 102-104
  fórmula parabólica e, 223-224
  fundição em areia e, 98
  fundição, 105-106
  inoxidável, 104
  liga, 103-104
  propriedade do perfil cantoneira, 903-904
  propriedades de tubulações redondas, 906
  propriedades do perfil canal, 904-905
  recozimento e, 101-102
  repuxado a frio, 930
  resistência de tração do, 930, 933
  resistente à corrosão, 104
  sistema de numeração para, 97-98
  soldagem,
  têmpera e, 101-102
  tensão e, 934-935
  termotratado, 931-932
acoplamentos, 800-893
adelgaçamento, 638, 644-646
adendo, 629-630, 633-634
adequabilidade, 28-29
adesivos, 473. *Veja também* fixadores
  distribuições de tensão e, 473-479
  projeto de junção e, 477-479
  tipos de, 473-475
  união soldada e, 478-479
ajustes de pressão (forçados) e contração, 158-160
ajustes, 71-74
  à pressão e encolhimento, 158-160
  mancais e, 568-569
alcance, 398-400, 402
alumínio, 105-110, 906, 937
American Bearing Manufacturers Association (ABMA), 538-540, 544-545
American Chain Association (ACA), 845, 847
American Gear Manufacturers Association (AGMA), 362-363, 682
  coeficiente elástico e, 690-691
  engrenagens cônicas e, 730, 733-745
  engrenagens helicoidais e, 691-719
  engrenagens retas e, 691-719
  engrenagens sem-fim e, 750-753
  equações de flexão, 692-693, 696-697, 711-719
  equações de resistência da, 693-698
  equações de tensão da, 691-693
  fator de condição de superfície e, 703-704
  fator de confiabilidade e, 708
  fator de distribuição de carga e, 704-707
  fator de espessura de borda e, 709-710
  fator de razão de dureza e, 706-708
  fator de sobrecarga, 703-704, 730, 733-734
  fator de tamanho e, 704-705
  fator de temperatura e, 709
  fator dinâmico e, 685-687, 701, 703-704
  fatores de segurança e, 709-710
  fatores de vida dos ciclos de tensão e, 706-708
  fatores geométricos e, 697-701, 703
  normas da, 682-686, 709-719
  razão (coeficiente) de Poisson e, 690-691
American Institute of Steel Construction (AISC), 42-45, 460
American Society for Testing and Materials (ASTM), 98, 286
  adesivos e, 477-479
  resistência de parafuso de porca e, 405-406
  soldagem e, 460
American Society of Mechanical Engineers (ASME), 579-580
  eixos e, 874-880, 882-885, 891-892
  juntas de tração e, 416-419
  linha elíptica e, 340-341, 343, 370-371
American Welding Society (AWS), 448
análise de força
  cargas e, 42-45 (*veja também* cargas)
  carregamento súbito e, 231-233
  choque e, 230-231
  cisalhamento e, 118-120 (*veja também* cisalhamento)
  compressão, 87-89, 192-194
  engrenagens retas e, 655-658
  engrenamento cônico (biselado) e, 657-661
  engrenamento helicoidal e, 660-663
  engrenamento sem-fim e, 663-668
  fadiga e, 302-303, 305, 308 (*veja também* fadiga)
  falhas e, 252, 260-273, 276-278 (*veja também* falhas)
  fator de serviço , 43-44
  forças. *Veja também* deflexão; deformação; tensão, teorema de Castigliano e, 205-211
  fricção, 771-780 (*veja também* fricção)
  funções de singularidade e, 120-123, 199-203
  impacto, 94-96, 230-231
  inércia, 793-795, 803-805
  junções e, 420-426 (*veja também* junções)
  limite de resistência e, 317-319, 321-328, 363-367
  mecânica de fratura e, 280-289
  momentos e, 118-120
  parafusos de regulagem e, 425-428
  sistema de unidades e, 192-194
  teoria da energia de distorção e, 261-267
  teoria da tensão normal máxima e, 272-274
  teoria de Mohr e, 274-276
  torção, 192-194
  tração e, 197-199
  velocidade crítica e, 885-891
análise estocástica,
  cartas de ensaios para, 938-939
  caso lognormal-lognormal, 290-294
  caso normal-normal, 289-290
  fadiga, 363-377
  inferência, 293-295
  junções, 433-434
  limite de resistência, 363-367
  sensibilidade a entalhe, 366-371
  tensão flutuante, 370-374
  variáveis, 54-56
anéis, 157-159
anéis rotativos, 157-159
ângulo de articulação, 842-844
apreçamento, 26-27, 32-33
ar condicionado, 27-28
arruelas, 401, 403-404, 614-616, 946-947
asbestos, 800
assimetria, 137-139
avaliação de adequação, 26, 30, 39-41

B

Bairstow, L., 311-312
Barth, Carl G., 686-687
berílio-bronze, 108-110
bibliotecas, 34-35
bitolas de fio, 941-942
bitolas de metal em chapa, 941-942
Boyd, John, 589-590, 601-602
  diagramas de viscosidade e, 590-592, 595
brechas, 75-78
Broghamer, E. I., 690
Bronze, 108-110
bronze-fósforo, 107-108
buchas, 613-616. *Veja também* mancais
  desgaste de, 617-621
  razão de folga radial e, 580-584
Buckingham, Earle, 359-363
Budynas, Richard G., vii

C

cálculos, 48-49
carbonetos, 100-104
carga de desgaste de Buckingham, 759-761
cargas, 295-300
  adesivos e, 473-479
  admissível, 44-45
  análise estocástica e, 288-295, 363-377
  aplicadas subitamente, 231-233
  área e, 119-120
  central, 220-225
  chavetas e, 426-433
  choque e, 230-231
  colunas e, 220-230
  combinações modais de, 352-355
  combinadas radial/axial (empuxo), 544-549
  corda de fio e, 849-851
  correias e, 819-821
  corrente de rolos e, 844-845, 847
  deflexão e, 192 (*veja também* deflexão)
  deformação lenta e, 95-98
  desgaste de Buckingham, 759-761
  dinâmica, 42-44
  durabilidade de superfície e, 690-692
  eixos e, 873-885 (*veja também* eixos)
  elástica, 92
  empuxo induzido, 555-556
  engrenagens e, 704-707 (*veja também* engrenagens)
  equação de Petroff e, 580-582
  estática, 154-155, 252, 411-416 (*veja também* cargas estáticas)
  excêntrica, 224-229
  fadiga e, 302-303, 305, 308, 324-325 (*veja também* fadiga)
  falhas e, 252 (*veja também* falhas)
  fator de distribuição, 704-707
  fator de projeto e, 43-45, 411-412
  fator de serviço, 43-44
  fórmula de coluna de Euler e, 221-222
  fraturas e, 280-289
  funções de singularidade e, 120-123, 199-203
  impacto, 94-96, 230-231
  intensidade, 119-120
  lubrificação e, 611-614
  mancais e, 538-552, 556, 559-565
  máxima admissível, 41-42
  morta, 42-43
  parafusos de porca e, 407-410 (*veja também* parafusos)
  parafusos de potência e, 387-388, 390-397
  pilaretes e, 228-230
  pinos e, 426-433
  pré-carga e, 407-410, 411-416, 564-565, 571-573
  propriedades de materiais e, 89-90 (*veja também* propriedades de materiais)
  radial equivalente, 544
  resistência e, 41-44 (*veja também* resistência)
  reversa, 741-742
  rigidez e, 86-89
  sensibilidade a entalhe e, 327-336
  soldagem e, 448-469
  superposição e, 197-199
  temperatura e, 95-98
  tensão e, 41-45, 86-89 (*veja também* tensão)
  tração e, 681-410, 415-421 (*veja também* tração; torção)
  unidade crítica, 221-222
  variável, 548-552
  velocidade crítica e, 885-891
  viva, 42-43
cargas estáticas, 154-155, 295-300
  análise estocástica e, 288-295
  cordas de fio e, 852-854
  definidas, 252
  ductilidade e, 260-273
  eixos e, 277-280
  fragilidade e, 272-277
  fraturas e, 280-289
  junções de tração e, 411-415
  molas e, 498-505
  pré-carga e, 411-415
  quase, 277-280
  resistência e, 252, 257-258
  soldas e, 463-467
cargas quase estáticas, 277-280
cavitação, 735-737, 739-741
centros instantâneos, 653

Chains for Power Transmission and Materials Handling (ACA), 845, 847
chapeamento eletrolítico, 327-328
chaveta Woodruff, 427-429
chavetas, 426-433, 865-866
choque, 230-231
Church, Irving, 116-117
ciência, 27-28
cilindros, 155-158. *Veja também* engrenagens
  chavetas e, 426-433
  durabilidade da superfície e, 359-363, 690-692
  eixos e, 864-898
  equação de Petroff e, 580-582
  equações de Smith-Liu e, 171-172
  mancais de rolos e, 552-555
  pinos e, 426-433
  tensão de contato e, 167-173
círculo de base, 630-631, 633-634
cisalhamento, 42-43. *Veja também* tensão
  garganta, 458-460
  junções e, 420-426
  modelo defasado e, 474-476
  molas e, 490-491
  parafusos de porca e, 468-472
  primário, 453-454
  rebites e, 468-472
  secundário, 453-454
  soldagem e, 448-469
  tangencial, 123-124
  teorema de Castigliano e, 205-211
  teoria da tensão de cisalhamento máximo e, 260-262
  vigas e, 118-120, 138-143, 907-914
clientes, 26
códigos, 37-38. *Veja também* normas
  fator de serviço , 43-44
  junções soldadas e, 460-462
  mancais e, 544-546
  organizações para, 37-38
  resistência e, 41-44
  séries de dimensões, 544-546
coeficiente de elasticidade, 701-703, 739-741
coeficiente de flutuações de velocidade, 803-805
coeficiente de fricção, 595-597
coeficiente de variação, 57-58, 291-292
coeficientes de influência, 886-887
Collins, J. A., 359-361
colunas
  cargas centrais e, 220-225
  cargas excêntricas e, 224-229
  fórmula de Euler e, 221-222
  fórmula parabólica e, 223-224
  pilarete e, 228-230
  razão de esbeltez, 221-224, 229-230
  segurança e, 222-224
companhia Timken, 538-539, 554-561
componentes cartesianas, 123-124
  círculo de Mohr e, 124-130
compostos, 110-111
compressão, 87-89, 132-133, 192-194
  cargas centrais e, 220-225
  cargas excêntricas e, 224-229
  colunas e, 220-230
  condições de contorno e, 221-222
  constante de condição de extremidade e, 222-223
  deflexão e, 219-230
  energia potencial e, 220-221
  estabilidade e, 219-221
  flambagem e, 221-222
  fórmula parabólica e, 223-224
  helicoidal, 498-505, 508-512
  molas e, 491-493
  parafusos de regulagem e, 425-428
  pilaretes e, 228-230
  segurança e, 222-224
compressão pura, 132-133
computadores, 870-871, 885-886
  engenharia auxiliada por computador (-CAE), 34-35
  programa NASA/FLAGRO, 315-317
  projeto auxiliado por computador (CAD), 34-35
  simulações de Monte Carlo, 76-77
comunicação, 35-36
  diagrama de corpo livre e, 116-119
condição de aperto razoável, 426-428
condições de contorno, 194-195
  compressão e, 221-222
  desgaste de deslizamento linear e, 616-619
  lubrificação e, 578-579, 615-623
confiabilidade, 26-27, 45-46
  análise estocástica e, 363-377
  engrenagens e, 708, 738-741
  fadiga e, 325-326
  falhas e, 280-289 (*veja também* falhas)
  limite de endurança (fadiga), 325-326
  mancais e, 538-543, 556, 559-562, 565-568
conjunto de especificações, 28-30
constante de condição de extremidade, 222-223, 493-496, 519-521
constante de Neuber, 329-330
corda de fio,
  aumentando a vida da, 853-855
  carga de flexão equivalente e, 849-851
  cargas estáticas e, 852-854
  elasticidade e, 849-851, 854-855
  enrolamento de, 849-850
  entrelaçamento *lang*, 849-850
  entrelaçamento regular, 849-850
  fadiga e, 855-856
  padrões de, 851-852, 853-854
  roldanas e, 849-853
  segurança e, 851-854
cordas de disposição regular, 849-850
cordas, 849-850
correias
  arco efetivo e, 819-821
  coeficiente de Poisson e, 830-832
  comprimento de passo e, 830-831
  condutividade elétrica e, 830-831
  deformação lenta e, 816
  depressão de, 827-829
  deslizamento e, 816
  eficiência e, 819-820, 841-842
  equação de correias, 821-824
  falhas e, 831-832
  fator de Marin e, 831-832
  materiais para, 816, 818-820, 830-834, 840-842
  metal, 830-834
  módulo de Young e, 830-833
  normas para, 82-826, 832-839
  peso de, 827-829
  potência de projeto de, 835-836
  pressão e, 820-821
  segurança e, 823-824, 831-832
  sincronização, 840-842
  temperatura e, 830-831
  tensão centrífuga e, 836
  teoria de catenária e, 827-829
  torque de polia e, 821-823
  tração do lado apertado e, 820-822
  tração inicial e, 827-828
  transmissão de potência e, 819-821
  transmissões de correias planas e, 819-834
  transmissões de correias redondas e, 819-831
  transmissões retrocedentes / não-retrocedentes e, 816-817
  usos comuns de, 816-820
  V, 833-841
  velocidade e, 820-821
  vida de, 838-839
correntes de rolos,
  ângulo de articulação e, 842-844
  capacidades de, 844-845, 847
  características de, 841-842
  lubrificação de, 848-849
  normas de, 841-843, 845-847
  potência admissível, 847-848
  sistemas dentados e, 844-845, 847
  velocidade e, 842-845
corrosão, 104, 106-107, 326-328, 568-569
corrosão de roçamento, 327-328
cortadores de forma, 99-100
cortadores de geratrizes 639-640
critério de falha de Gerber
  eixos e, 875-877, 879-880, 891-892
  engrenagens e, 688-689
  fadiga e, 340-344, 347-350, 356-357, 370-371 (*veja também* fadiga)
  junções de tração e, 416-419
  molas e, 518-519
  soldagem e, 466-467
critério de falha de Sines, 506-509
cromo, 103-104
custo, 38-39, 98

D

Datsko, Joseph, 91-92
dedendo, 629-630, 633-634
deflexão
  cargas aplicadas subitamente e, 231-233
  cargas centrais, 220-225
  cargas excêntricas, 224-230
  choques e, 230-231
  compressão e, 192-194, 219-230
  eixos e, 870-875
  energia de deformação e, 202-206
  flexão e, 193-198 (*veja também* flexão)
  função delta de Dirac, 196-197
  funções de singularidade e, 199-203
  impacto e, 230-231
  membros curvos e, 210-214
  molas e, 192-193, 491-492
  pilaretes e, 228-230
  problemas estaticamente indeterminados e, 214-220
  problemas para, 232-248
  séries de Fourier, 196-197
  superposição e, 197-199
  teorema de Castigliano, 205-211
  torção e, 192-194
  tração e, 192-194
  unidades SI para, 902
  valores de contorno e, 194-195
  vigas e, 196-203, 210-214, 907-914
deformação
  aço e, 934-935
  comprimento corrente de bitola e, 87-88
  dureza e, 90-91
  elástica, 86-87, 131-133
  energia potencial e, 202-206, 220-221
  espescoçamento e, 91-92
  fadiga e, 311-314
  lei de Hooke, 86-87
  limite de resistência (fadiga) e, 317-319, 321-328, 363-367
  logarítmica, 87-88
  módulo de Young, 86-87
  plástica, 336-338
  rigidez e, 86-89
  teorema de Castigliano e, 205-211
  trabalho a frio e, 90-92, 99-101
deformação lenta, 95-98, 816
deformação logarítmica, 87-88
deformação plástica, 336-338
deformação verdadeira, 87-88
dentes. *Veja também* engrenagens
  acabamento de, 642-643
  correntes de rolos e, 844-845, 847
  formação de, 639-643
  fresamento de, 640-641
  fresamento em caracol de, 641-642
  geração de, 640-642
  interferência e, 638-640, 644-647
  número virtual de, 643-646
  passo e, 628-631, 635-638, 642-643, 644-645, 647-648
  sistemas de, 648-651
depressão, 827-829
desempenho, 26-27
desenho, 101-102
desgaste linear de escorregamento (deslizamento), 616-619
deslizamento, 816
deslocamento de cristal, 313-315
desvio inferior, 72-74
desvio-padrão
  distribuição e, 60-67
  estatística e, 55-60
  propagação de erro e, 66-69
  regressão linear, 68-72
diagrama de Goodman
  análise de tensão e, 336-352
  critério de falha de Gerber e, 340-341
  fatores de Marin e, 340-341
  segurança e, 339-342
  simplicidade do, 339-340
diagrama de Goodman modificado
  análise de tensão e, 336-352
  cargas estáticas e, 277-280 (*veja também* cargas estáticas)
  círculo de Mohr, 124-126
    convenção de cisalhamento do, 127-130
    diagrama de, 125-130
  cisalhamento e, 138-143, 453-458
  compressão e, 219-230
  critério de falha de Gerber e, 340-341
  eixos e, 864
  embreagens e, 771-780
  falhas e, 272-277 (*veja também* falhas)
  fatores de Marin e, 340-341
  freios e, 771-780
  junções e, 420-426 (*veja também* junções)
  módulo de elasticidade, 86-87
    deformação e, 131-133
    resistência superficial e, 359-363
  módulo de rigidez, 88-89
  módulo de ruptura, 88-89
  moldagem, 639-640
  molibdênio 104
  momentos, 140-141. *Veja também* deflexão: tensão
    flexão, 118-120, 133-138, 458-460 (*veja também* flexão)
    vigas e 137-139, 160-168, 907-914
  segurança e, 339-342
  simplicidade de, 339-340
  soldagem e, 453-458
  teorema do eixo paralelo e, 454-455
  teoria de Mohr, 274-276
diagramas de corpo livre, 116-119, 208-209
diagramas torque-torção, 88-89
dígitos significativos, 48-49
dimensões. *Veja* normas, padronizações, normas de tolerância de séries dimensionais, 544-546
dispositivos de travamento, 778-780
distribuição associada, 62-63
distribuição de Bowman, 413-414
distribuição de Weibull de três parâmetros, 64-67
distribuição gaussiana, 54-56, 60-62, 915-916
  ação conjugada, 630-631
  adendo (*addendum*), 629-634
  análise de força de, 655-668
  ângulo de aproximação e, 635-636
  biselada reta, 699-700
  biselada, 728-749
  centros instantâneos e, 653
  chavetas e, 426-433
  círculo de base, 630-631, 633-634
  círculo de folga, 629-630
  confiabilidade e, 708, 738-741
  critério de falha de Gerber e, 688-689
  dedendo (*dedendum*) e, 629-630, 633-634
  eixos e, 867-869 (*veja também* engrenagens retas)
  elasticidade e, 701-703
  engrenagens
  equação de Barth e, 686-687
  equação de flexão de Lewis e, 682, 684-690

equações da AGMA 691-698, 711-719 (*veja também* American Gear Manufacturers Association [AGMA])
espessura de borda e, 709-710
fator de distribuição de carga, 704-707
fator de Marin, 687-689
fator de razão de dureza e, 706-708
fator de sobrecarga, 703-704, 730, 733-734
fator de velocidade e, 685-686
fatores de condição de superfície, 690-692, 703-704
fatores de vida de ciclagem de tensão, 707-708
fatores dinâmicos e, 701, 703-704
fatores geométricos e, 697-701, 703
fundamentos de, 631-638
helicoidal paralela, 643-648
helicoidal, 628, 660-663 (*veja também* engrenagens helicoidais)
hipóide, 628
largura do espaçamento, 628-629
linha de ação, 630-631, 635-636
módulo de, 629-630
nomenclatura para, 628-630, 683-684
passo de, 628-631, 635-638, 642-645, 647-648
pinhão, 628-629
pinos e, 426-433
pressão e, 632-633, 639-640, 757
problemas de, 668-679, 723-726, 760-763
projeto de engrenamento, 718-724
razão de contato e, 637-638, 697-698
razão de Poisson, 690-691
recuo, 629-630
relação de Goodman e, 688-689
segurança e, 709-710
sem-fim, 628-629, 647-648, 663-668, 750-761
sistemas de dentado e, 639-643, 648-651
temperatura e, 709, 737-739
tipos de, 628-629
trens e, 650-655
undercutting e, 638
distribuição lognormal, 62-64
distribuição normal, 60-62
distribuição subsidiária, 62-63
distribuição uniforme, 64-65
distribuições de probabilidade,
análise estocástica e, 288-295
companhia, 62-63
função de densidade cumulativa (CDF), 54-56, 915-916
função de, 54-55
função de densidade e, 60-67, 88-89
Gaussiana, 54-56, 60-62, 915-916
lognormal, 62-64
normal, 60-62
simulações de Monte Carlo, 76-77
subsidiária, 62-63
tensão e, 132-134 (*veja também* tensão)
uniforme, 64-65
variáveis aleatórias, 54-56
Weibull, 64-67
Dolan, T. J., 690
Dowling, M. E., 336-338
ductilidade, 91-252
coeficiente, 312-313
expoente, 312-313
fadiga e, 302-303, 312-313, 331-332 (*veja também* fadiga)
falhas e, 260-273
ferro fundido e, 105
latão e, 107-110
temperatura e, 95-98
teoria da energia de distorção e, 261-267
teoria da tensão máxima de cisalhamento e, 260-262
teoria de Coulomb-Mohr e, 266-269
valor de impacto e, 94-96
duplicação, 570-571
dureza
escala Rockwell, 93, 706-708
plásticos, 109
propriedades do material e, 90-91, 93-95
razão, 706-708, 737-738
dureza Brinell, 93

E

economia, 37-39
mercados, 26-27, 32-33, 98
eficiência
correias e, 819-820, 841-842
engrenagens sem-fim e, 752-755
eixos curtos, 864
eixos fixos, 864. *Veja também* eixos
eixos intermediários, 864
eixos, 277-280
anéis e, 865-867
base, 72-74
chavetas e, 426-433
critério de falha de Gerber e, 875-877, 879-880, 891-892
critério DE-elíptico e, 874-880, 882-885, 891-892
critério DE-Gerber e, 875-877
definido, 864
deflexão e, 870-875
desvios fundamentais para, 917, 918
dispositivos posicionais para, 865-867
engrenagens e, 867-869 (*veja também* engrenagens)
equação de Petroff e, 580-582
estrias e, 865-866
fadiga e, 874-885
flexão e, 880-881
flexível e, 856-858, 864
geometria de, 864-875, 891-892
linha de Soderberg e, 880-882
mancais e, 569-570 (*veja também* mancais)
materiais para, 884-885
método DE-Goodman e, 881-885
módulo de Young e, 884-885
pinos e, 426-433
projeto e, 864-875, 890-892
resistência e, 874-885, 891-892
teoria de von Mises e, 874-885
torção e, 864-865, 880-881
vazado, 884-885
velocidades críticas para, 885-891
elasticidade 44-45, 92
AGMA e 690-691
coeficiente de, 701-703, 739-741
compósitos e, 110-111
compressão e, 192-194
corda de fio e, 854-855
definido, 192-193
deformação e, 131-133, 311-314
deslocamento de cristal e, 313-315
engrenagens e, 701-703
fadiga e, 313-318
fratura e 280-289
junções e, 400, 402-405 (*veja também* junções)
módulo de, 86-87, 131-133, 359-363
molas e, 192-193, 493-494 (*veja também* molas)
plásticos e 108-110
resistência de cavitação e, 739-741
resistência de superfície e, 359-363
torção e, 192-194
tração e, 192-194
elos, 778-780
embreagens
alívio elevado, 800-802
análise estática de, 766-771
aro externo contrátil, 778-783
aro interno expansível, 771-780
cone, 791-792
considerações inerciais e, 793-795
contato axial, 783-787
contato positivo, 800-802
desgaste uniforme e, 784-786, 791-793
fricção e, 766-780, 783-787, 798-801
mandíbula quadrada, 800-802
pressão e, 771-780, 792-793
pressão uniforme e, 785-787, 792-793
problemas para, 806-813
temperatura e, 794-798
tipo de banda, 782-784
embreagens axiais, 783-787
embreagens centrífugas, 771-772
embreagens de cone, 791-793
embreagens magnéticas, 771-772
embreagens pneumáticas, 771-780
encabeçamento, 100-101
endurecimento de superfície, 102-103
energia cinemática
absorção de, 793-795
coeficiente de flutuação de velocidade, 803-805
dissipação de, 793-795
volantes e, 766, 802-807
energia potencial, 202-206, 220-221
energia rotacional. *Veja também* torque
absorção de, 793-795
acoplamentos e, 800-802
coeficiente de flutuação de velocidade, 803-805
dissipação e, 793-795
energia cinética de, 793-795
engrenagens e, 628-632 (*veja também* engrenagens)
freios, 766-813 (*veja também* freios)
fricção e, 771-780
volantes e, 766, 802-807
engrenagem sol, 651
engrenagens cônicas
análise de, 743-747
classificação de, 728-730
espiral, 728
fatores da equação da AGMA para, 730, 733-745
hipóide, 728-729
projeto de engrenamento e, 747-749
resistência e, 729-730, 733-734
tensão e, 729-730, 733-734
Zerol, 728
Engrenagens cônicas (biseladas) Zerol, 728
engrenagens de dentes retos, 628, 655-658
confiabilidade e, 708
critério de falha de Gerber e, 688-689
elasticidade e, 701-703
equação de Barth e, 686-687
equação de flexão de Lewis, 682, 684-690
equações da AGMA, 691-698, 711-719
espessura-borda e, 709-710
fator de distribuição de carga, 704-707
fator de Marin, 687-689
fator de razão de dureza e, 706-708
fator de sobrecarga, 703-704, 730, 733-734
fator de tamanho e, 704-705
fator de velocidade e, 685-686
fatores de condição da superfície, 690-692, 703-704
fatores de vida de ciclos de tensão, 707-708
fatores dinâmicos e, 701, 703-704
fatores geométricos e, 697-701, 703
nomenclatura de, 683-684
problemas de, 723-726
projeto de engrenamento, 718-724
razão de contato e, 697-698
razão de Poisson e, 690-691
razão de velocidade, 699-700
relação de Goodman e, 688-689
segurança e, 709-710
temperatura e, 709
engrenagens helicoidais, 628-663
base furo, 72-74
capacidade de retenção, 425-426
confiabilidade e, 708
critério de falha de Gerber e, 688-689
elasticidade e, 701-703
embreagens hidráulicas, 771-772, 778-780
engrenagens hipóides, 728-729
equação de Barth e, 686-687
equação de flexão de Lewis e, 682, 684-690
equações da AGMA (*veja também* American Gear Manufacturers Association (AGMA)) 691-698, 711-719
espessura de borda e, 709-710
fadiga de alta ciclagem, 308-309
fator de distribuição de carga, 704-707
fator de Marin, 687-689
fator de sobrecarga, 703-704, 730, 733-734
fator de tamanho e, 704-705
fator de velocidade e, 685-686
fatores de condição de superfície, 690-692, 703-704
fatores de razão de dureza e, 706-708
fatores dinâmicos e, 701, 703-704
fatores geométricos e, 697-701, 703
fresa caracol, 641-642
latão de (concentração) elevada de chumbo, 107-108
lei de Hooke, 44-45, 86-87
lubrificação hidrostática, 578-579
nomenclatura para, 683-684
problemas de, 723-726
projeto de engrenamento, 718-724
razão de contato e, 697-698
razão de Poisson, 690-691
razão de velocidade, 699-700
relação de Goodman e, 688-689
segurança e, 709-710
temperatura e, 709
tensão circunferencial, 156-157
tensão de Hertz, 167-173, 359-362
teoria hidrodinâmica e, 578-579, 583-588
trabalho a quente, 98-100
engrenagens sem-fim,
análise de, 753-756
carga de desgaste de Buckingham e, 759-761
contato linear e, 750
eficiência e, 752-755
equações da AGMA para, 750-753
folga e, 752-753
fundição e, 750-752
helicoidal cruzada, 750
projeto de engrenamento de, 757-760
roscas múltiplas, 753-754
velocidade de deslizamento e, 750-751
engrenamento espiroidal, 728-729
ensaio da barra entalhada, 94-96
ensaios de barras entalhadas de Charpy, 94-96
ensaios de barras entalhadas de Izod, 94-96
equação de Dunkerley, 887-889
equação de flexão de Lewis, 682, 684-690
equação de onda, 504-505
equação de Raimondi-Boyd, 601-602
equações
abscissa de McKee, 582-583
AGMA, 692-693, 696-694, 696-697, 711-712, 734-742, 750-753
análise estocástica, 288-291, 294-295 (*veja também* análise estocástica)
ângulo de articulação, 842-843
ASME-elíptica, 340-341, 343, 416-418
Barth, 686-687
brecha dimensional, 75-78
carga de desgaste de Buckingham 759-760
carga induzida axial (empuxo), 555-556
carga máxima admissível, 41-42
cargas combinadas radial/axial (empuxo), 544
cargas estáticas, 411-414
cargas quase estáticas, 277-280
cargas, 41-42, 86, 324-325 (*veja também* cargas)

cisalhamento, 88-89, 110, 140-141, 143, 421-423, 469-471, 474-475 (*veja também* cisalhamento)
coeficiente de flutuação de velocidade, 803-805
coeficiente de variação, 57-58
compressão, 192-194
comprimento de rosca, 396-397
confiabilidade, 45-46, 325-326, 708
confiabilidade de mancal, 565-566
contagem de voltas corporais, 511-512
correias, 819-824, 827-828, 830-832, 835-836, 838-839
correntes de rolos (roletes), 842-848
Coulomb-Mohr, 266-269, 274
crescimento de trinca, 314-317
de Dunkerley, 887-889
de Petroff, 580-583
deflexão, 192-194, 210-213, 493-494, 520-523 (*veja também* deflexão)
deformação plástica, 312-313
deformação, 86-88, 90-92, 202-205, 312-313
desgaste de bucha, 617-620
desgaste linear, 617-619
desvio-padrão, 56-57, 67-68
diferencial por trechos, 232
distribuição gaussiana, 60-61
distribuição lognormal, 62-63
distribuição normal, 60-61
distribuição uniforme, 64-65
durabilidade superficial 322-323, 361-363, 690-691
dureza 93-94, 706-707
efeito de curvatura, 161-163, 165-166, 490-492
eficiência mecânica, 753-754
eixos, 869-871, 873-889
elasticidade, 131-132, 312-313, 739-741
embreagens, 776-777, 767, 769, 773-776, 780-786, 792-798
energia de distorção, 261-265
energia potencial, 202-205, 220-221
engrenagens, 629-630, 632-636, 638-640, 642-648, 650-652, 655-665 (*veja também* engrenagens)
equilíbrio, 116, 124-125
espessura de aro (borda),709
fadiga, 318-326, 506-507 (*veja também* fadiga)
falhas, 260-277 (*veja também* falhas)
fator de projeto, 41-42, 44-45, 373-374
fator de tamanho, 322-324, 704-705
fatores dinâmicos, 701, 703, 734-736, 737-742
fatores geométricos, 697-701
figura de mérito 30
flexão de Lewis, 682, 684-687, 690
flexão, 119-120, 730, 733-734
fórmula de coluna de Euler, 221-222
fratura, 281-284, 286
freios, 766-767, 769, 773-776, 780-784, 787-790, 792-798
freqüência crítica, 504-506
fricção, 753-754, 774-775
função cumulativa de densidade (CDF), 54-56
função Gama, 948
funções de singularidade, 199-203
Gerber, 340-341, 416-418
Goodman, 340-342, 416-418
Hertz, 361-362
junção de pré-carga, 411-414
junção de sobreposição dupla, 474-475
junções de gaxeta, 415-416
Langer, 340-343
lei de Hooke, 86-87
limite de resistência, 321-322
linha de Soderberg, 340-341
local geométrico de Smith-Dolan, 349-350
Marin, 363-364
Maxwell, 886-887
média aritmética, 55-56
Mohr, 125-127, 274-275
molas, 192-194, 400, 402, 490-491, 493-496 (*veja também* molas)
momento, 140-141
parabólica, 223-224
parafusos de potência, 388, 390-394
Paris, 315-316
potência transmitida, 823-824
pressão, 155-157, 607-611, 617-620
problemas estaticamente indeterminados, 214-219
projeto de engrenamento, 747-748
propagação de erro, 66-68
Raimondi-Boyd, 601-602
Rayleigh, 885-886
razão de contato e livre (sem contato) 697-698
razão de contato frontal (de face), 697-698
razão de esbeltez, 229-230
razão de excentricidade, 583-584
razão de Poisson, 830-832
razão de velocidade, 699-700
regra de Miner, 356-357
regressão linear, 68-70
regressão, 539-540
resistência à cavitação, 739-741
resistência estática, 522-523
Reynolds, 587-588
rigidez de junção, 400, 402-404
segunda lei de Newton, 46-47
segurança, 709-710
sensibilidade a entalhe, 328-332, 366-368
serviço estático, 498-501
sistema gravitacional, 46-47
Smith-Liu, 171-172
tamanho de pino, 426-428
temperatura de lubrificante, 600-601
temperatura de mancal, 621
temperatura, 159-160, 325-326, 366-367, 794-798
tensão de ajuste à pressão (forçado) e contração, 158-160
tensão de anel rotativo, 157-158
tensão de cisalhamento máxima, 260-262
tensão de contato, 729-730, 733-734
tensão de contato esférico, 167-169, 170-172
tensão de tração, 469-470
tensão normal máxima, 272-274
tensão plana, 125-127
tensão, 42-45, 86, 124-127, 130-135, 140-141, 143, 150-156, 258-259, 272-274, 328-330, 449-450, 469-470 (*veja também* tensão)
teorema de Castigliano, 205-208, 210-211
teoria hidrodinâmica, 585-588
torção, 144-145, 192-194, 352-353, 363-364, 410, 512-514
torque de correia, 410
trabalho a frio, 90-92
tração, 192-194, 407-414, 416-419, 823-824, 836
tração centrífuga, 836
transferência de calor, 602-604
variance, 55-58, 66-68, 548-551
velocidade angular, 588-589
velocidade crítica de eixo, 885-889
vida de mancal, 539-543, 559-561
volantes 803-807
equações de Rayleigh, 885-886
equações diferenciais por trechos, 232
equilíbrio
avaliação, 31-33
compressão e, 219-230
corda de fio e, 849-851
definida, 116
deflexão e, 220-222 (*veja também* deflexão)
diagramas de corpo livre e, 116-119
estático, 116
ética, 35-36, 38-40
extrusão, 99-100
fórmula da coluna de Euler, 221-222
instável, 221-222
molas de extensão, 511-519
propagação de erro, 66-69
repouso e, 116
tensão completa e, 124-125 (*veja também* tensão)
equilíbrio estático, 116
escala Rockwell, 93, 706-708
escoamento de Langer, 340-344, 347-348, 875-876, 878-879
escoamento. 86-87. *Veja também* resistência
compressão e, 219-229
fadiga e, 302-326 (*veja também* fadiga)
fraturas e, 280-289
primeiro ciclo de Langer, 340-341
teoria Coulomb-Mohr e, 266-269
teoria da energia de distorção e, 261-267
teoria da tensão de cisalhamento máxima e, 260-262
teoria de Mohr e, 274-276
teoria de tensão normal máxima e, 272-274
trabalho a frio e, 90-92, 99-101
escrever, 35-36
espaço amostral, 54-56
espescoçamento, 91-92
estabilidade, 219-221
Estados Unidos da América
desvio superior, 71-74
responsabilidade estrita e, 38-40
sistemas de unidades e, 46-47
unidades, 46-48
usabilidade, 26-27
estatística
ajustes, 71-74
controle, 75
desvio-padrão, 56-57
dimensões, 75-78
distribuições de probabilidade, 60-67
espaço amostral, 54-56
fadiga e, 309-310 (*veja também* fadiga)
função de densidade cumulativa (CDF), 54-56, 915-916
importância da, 54
limites, 71-74
média aritmética, 55-56
problemas de, 78-84
propagação de erro, 66-69
propriedade do material e, 89-90
regressão linear, 68-72
tolerâncias, 75-78
variância, 55-60
variáveis aleatórias e, 54-56

F

fadiga, 303, 305, 308, 377-382
alta ciclagem, 308-309
análise estocástica de, 363-377
baixa ciclagem, 308-311
cargas combinadas e, 352-355
cartas de ensaio para, 939-940
coeficiente de ductilidade e, 312-313
concentração de tensão e, 327-336, 366-371
corda de fio e, 855-856
corrosão e, 326-328
critério de falha de Sines e, 506-509
dano cumulativo (acumulado) e, 355-361
diagrama de Goodman e, 337-352
efeitos diversos (mistos) e, 325-328
eixos e, 864, 874-885 (*veja também* eixos)
engrenagens e, 688-689, 697-701, 703, 709-710 (*veja também* engrenagens)
equação de Paris, 315-316
escorregamento cristalino e, 313-315
estágios de, 302-303
fator de carregamento e, 324-325
fator de confiabilidade e, 325-326
fatores de projeto em, 302-309, 373-377
fixadores e, 396-397
junções de tração e, 415-421
limite de resistência (fadiga) e, 310-311, 317-319, 321-328, 363, 366-367
marcas de concha de mexilhão e, 302
marcas de praia e, 302
metais e, 302-307
método de vida-deformação e, 311-314
método elastolinear, 313-318
métodos de vida sob fadiga e, 308-309
métodos de vida-tensão e, 308-312
molas e, 506-512
razão, 363
região de vida finita e, 310-312
resistência superficial e, 318-324, 359-363
SAE e, 311-314
sensibilidade a entalhe e, 327-336, 366-371
soldas e, 466-468
temperatura e, 324-326
tensão flutuante e, 337-353, 370-374
falhas, 386-300
análise estocástica e, 288-295
concentração de tensão e, 257-260
correias, 831-832
critério de falha de Sines e, 506-509
critério de Gerber, 340-341 (*veja também* critério de falha de Gerber)
definida, 252
diagrama de Goodman e, 336-352
ductilidade e, 260-273
exemplos de, 252-252, 257
fadiga de metal e, 302-307
fadiga, 253, 313-318 (*veja também* fadiga)
fragilidade e, 272-277
fraturas e, 280-289
impacto, 254
linha elíptica da ASME e, 340-341, 343, 370-371, 416-419, 874-880, 882-885, 891-892
modos de fratura (trinca) e, 282-284
resistência estática e, 252, 257-258
seleção de critério para, 276-278
soldagem e, 460-462
tensão flutuante, 337-352
teoria da energia de distorção e, 261-267
teoria da tensão de cisalhamento máxima e, 260-262
teoria da tensão normal máxima e, 272-274
teoria de Coulomb-Mohr e, 266-269
teoria de Mohr e, 274-276
fator de desgaste, 361-362
fator de espessura de borda, 709-710
fator de Marin,
correias e, 831-832
engrenagens e, 688-689
fadiga e, 340-341, 353-354, 363-364
fator de serviço K, 43-44
fator de velocidade, 685-686
fator geométrico de resistência à cavitação, 699-701, 703
fatores de conversão, 901
fatores de superfície, 44-45, 321-324, 361-362, 703-704
fatores dinâmicos, 701, 703-704, 730, 733-735
fatores geométricos, 697-698, 735-736
eixos e, 864-875, 891-892
flexão e, 698-700
propriedades de secção, 926-927
propriedades de sólido e, 864
resistência e, 698-701, 703
fenômeno autotravamento, 767, 769
ferrita, 101-102, 104
ferro fundido branco, 105
ferro fundido cinza (cinzento), 105, 936
ferro fundido maleável, 105-106
ferro fundido nodular, 105
figura de mérito, 30

filler, 110
filmes. *Veja* lubrificação
Firkbank, T. C., 819-821
física, 27-28
fixadores, 397-398
  alcance de aperto (agarramento) e, 398-400, 402
  análise estocástica de, 433-434
  cargas estáticas e, 411-416
  carregamento de fadiga e, 415-421
  cartas dimensionais para, 943-947
  chavetas, 426-433
  condição de aperto confortável e, 409-410
  gaxetas e, 415-416
  junções de cisalhamento e, 420-426
  normas (padronizações) de roscas e, 386-388, 390
  parafusos de potência, 387-388, 390-397
  pinos, 426-433
  problemas de, 433-445
  resistência de parafuso de porca e, 405-409 (*veja também* parafusos)
  rigidez e, 398-405
  torque e, 409-412
  tração e, 407-412, 415-421
flambagem. *Veja* compressão
flexão, 42-43, 118-120
  cargas estáticas e, 441-460
  cisalhamento e, 138-143
  corda de fio e, 849-851, 854-855
  deflexão e, 193-198 (*veja também* deflexão)
  eixos e, 864-865, 880-881
  engrenagens e, 710, 714-715, 717, 719-720, 721-723, 730, 733-737, 741-742
  equação de Lewis e, 682, 684-690
  fatores de geometria e, 698-700
  junções soldadas e, 458-460
  molas e, 520-521
  tensão normal e, 133-138
  unidades do Sistema Internacional (SI) para, 902
  valores de contorno e, 194-195
  vigas curvadas e, 160-168
fluido Newtoniano, 579-580
folga, 629-630
folga, 75
  engrenagens e, 629-630
  engrenagens sem-fim e, 752-753
  lubrificação e, 604-607
força-libra, 46-47
forjamento, 46-48
fórmula parabólica, 223-224
fragilidade, 252. *Veja também* ductilidade (*veja também* falhas)
  análise estocástica e, 370-374
  falhas e, 256, 272-277
  temperatura e, 95-98
  tensão e, 154-155 (*veja também* tensão)
  teoria de Mohr e, 274-276
  teoria de tensão normal máxima e, 272-274
  valor de impacto e, 94-96
fratura quase estática, 281-283
fraturas, 87-88
  cargas quase estáticas e, 281-283
  elasticidade e, 280-289
  fadiga e, 313-315 (*veja também* fadiga)
  fator de intensidade de tensão e, 282-284
  método elastolinear e, 313-318
  modelo de fratura (trinca) e, 282-284
  tenacidade e, 284-289
freios
  análise estática de, 766-771
  aro externo contrátil, 778-783
  aro interno expansível, 771-780
  calibre (calibrador), 787-788, 790-791
  calibre flutuante, 787-788
  cone, 791-792
  considerações inerciais e, 793-795
  desgaste uniforme e, 787-789, 791-793
  disco, 787-791
  fricção e, 766-780, 787-791
  pressão e, 771-780, 789-790, 792-793
  pressão uniforme e, 789-790
  problemas de, 806-813
  temperatura e, 794-798
  tipo de banda, 782-784
freios de calibre de pastilhas circulares, 790-791
freios de sapatas internas, 771-772
freios de tambor, 771-772
freqüência cíclica. *Veja também* tensão para (*veja também* fadiga)
  fadiga cumulativa e, 355-361
  métodos de contagem, 355-357
  molas e, 504-507
  técnica de fluxo de chuva e, 355-357
  torção e, 351-355
freqüência. *Veja também* freqüência
fricção, 171-172 (*veja também* lubrificação)
  carga externa e, 407-410
  coeficiente de, 595-597
  correias e, 816-842
  energia rotacional e, 771-780
  engrenagens sem-fim e, 753-754
  freios e, 766-813 (*veja também* freios; embreagens)
  junções de cisalhamento e, 420-421
  mancais e, 536 (*veja também* mancais)
  parafusos de potência e, 387-388, 390-397
  propriedades do material e, 798-801
  teoria de Coulomb-Mohr e, 266-269
  teoria hidrodinâmica e, 583-585
  viscosidade e, 559-561, 568-569, 578-581, 590-592, 595
função, 26
função de densidade cumulativa (CDF), 54-56, 915-916
função de probabilidade cumulativa, 54-55
função delta de Dirac, 196-197
função densidade
  distribuições e, 60-67
  estatística e, 88-89 (*veja também* estatística)
função Gama, 948
funções de Macaulay, 120-123
  deflexão e, 199-203
funções de singularidade, 120-123
  deflexão de viga e, 199-203
fundição, 98-99
  centrífuga, 630-631
  engrenagens sem-fim e, 750-752
  materiais para, 105-106
fundição de areia, 98, 639-640
fundição de investimento, 98-99, 639-640
fundição de molde (metálico sob pressão), 639-640
fundição em molde permanente, 639-640

G

Gates Rubber Company, 838-839
gaxetas, 415-416
geração, 640-642
graxa, 569
grupo de números, 47

I

Immerli, F. P., 506-507
impacto, 230-231
  falhas e, 254 (*veja também* falhas)
  propriedades de material e, 94-96
incerteza, 40-42, 45-46
inércia, 793-795, 803-805. *Veja também* energia cinética
informação, 34-36
  avaliação de adequação e, 39-41
  regressão linear e, 68-72
interferência, 75, 288-289, 293-295, 638-640
International Bureau of Weights and Measures (BIPM), 47
International Committee of Weights and Measures (CIPM), 579-580
International Standards Organization (ISO), 386, 416-417
International System of Units (SI), 46-48
  fatores de conversão, 901
  graus de tolerância, 916, 917
  prefixos métricos, 900
  unidades de deflexão, 902
  unidades de tensão de flexão, 902
Ito, Y., 400, 402-403

J

Joerres, Robert E., 496
Johnson, J. B., 223-224
junções
  adesivos e, 473-479
  alcance (agarramento) e, 398-401
  análise estocástica de, 433-434
  cargas estáticas e, 411-416
  carregamento de fadiga e, 415-421
  cisalhamento e, 420-426, 468-472
  de gaxeta (de vedação), 415-416
  parafusos de porca e, 405-409, 468-472 (*veja também* parafusos de porca)
  pré-carga e, 411-416
  problemas de, 433-445, 480-487
  razão de mola e, 400, 402-405
  rebites e, 468-196
  rigidez de fixadores e, 398-400, 402 (*veja também* fixadores)
  rigidez do membro e, 400, 402-405
  simetria e, 420-421
  soldada, 448-469
  teorema de eixos paralelos e, 454-455
  tração e, 407-410, 415-421

L

lacre (selo) de labirinto, 571-573
lado da seta, 448-449
Landgraf, R. W., 311-312
Lanza, Gaetano, 116-117n
latão, 107-110
latão de cartucho, 107-108
latão de corte livre, 107-108
latão de gravador, 107-108
lei dos senos, 450-451
ligas, 103-104, 105-110, 937
ligas de base de cobre, 107-110
limite de resistência (fadiga) flexural, 359-361
limite de resistência (limite de fadiga), 317-319
  corrosão e, 326-328
  efeitos mistos e, 325-328
  fadiga e, 363-367
  fator de carregamento e, 324-325
  fator de confiabilidade e, 325-326
  fator de superfície e, 321-323
  fator de tamanho e, 322-325
  fator de temperatura e, 324-326
limites, 71-78
linha de ação, 630-631
linha de Soderberg, 340-341, 880-882
local geométrico de Smith-Dolan, 349-350
lubrificação, 568-569, 623-626
  bucha e, 613-621
  cargas e, 611-614
  coeficiente de fricção e, 595-597
  contorno, 615-623
  correntes de rolos e, 848-849
  desgaste linear de deslizamento e, 616-619
  equação de Petroff e, 580-582
  espessura mínima de filme e, 592, 595-596
  estável, 582-584
  filme espesso, 583-584
  fluxo e, 596-597, 599
  folga e, 604-607
  instável, 582-583
  interpolação de dados e, 601-602
  mancais e, 571-573
  pressão de filme e, 597-600
  pressão e, 606-612
  projeto e, 587-590
  propriedades do material e, 611-614
  razão de excentricidade, 583-584
  razão radial de folga e, 580-584
  relação de variáveis e, 589-602
  temperatura e, 597, 599-602, 621-623
  teoria hidrodinâmica e, 583-588
  tipos de, 578-579
  viscosidade e, 578-581, 590-592, 595
lubrificação elasto-hidrodinâmica (EHD) 569, 578-579

M

Mabie, H. H., 690
magnésio, 106-107
mancais, 42-43, 573-576
  afunilado (cônico), 554-565
  ajuste e, 568-569
  alimentação pressurizada (sob pressão), 606-612
  alinhamento e, 571-573
  autocontido, 602-605
  avaliação de projeto para, 564-569
  bloco almofadado, 602-605
  buchas e, 613-621
  carga radial equivalente e, 544
  cargas combinadas radial/axial e, 544-549
  cargas variáveis e, 548-552
  códigos de série dimensional para, 544-546
  condições de regime permanente e, 602-605
  confiabilidade e, 538-543, 556, 559-562, 565-568
  corrosão de, 568-569
  desgaste linear de deslizamento e, 616-619
  duplicação e, 570-571
  empuxo, 614-616
  enclausuramento de, 569-573
  equação de Petroff e, 580-582
  fatores de desempenho e, 588-589
  folga e, 604-607
  localização da reação e, 556, 559, 563
  lubrificação e, 568-569, 571-573 (*veja também* lubrificação)
  modelo de Weibull e, 556, 559
  montagem de, 554-556, 560-563, 569-573
  normas para, 538-540, 544-545
  número característico, 580-582
  parcial, 583-584
  pedestal, 602-605
  pré-carga e, 564-565, 571-573
  razão de folga radial e, 580-584
  reservatório de rasgo de chaveta, 602
  seladores de feltro e, 571-573
  seleção de, 552-565
  temperatura e, 559-561, 621-623
  tipos de, 536-539
  Trumpler e, 588-590
  vedação e, 571-573
  vida de, 538-543, 556, 559-562
  viscosidade e, 559-561, 568-569
mandris, 803-805
manganês, 103-104
Manson, S. S., 359-360
Manual of Steel Construction Allowable Stress Design (ASD) (AISC), 42
manufatura, 26-27
  cunhagem, 100-101
  extrusão, 99-100
  forjamento, 99-100
  fundição, 98-99
  laminação a quente, 98-100
  metalurgia do pó, 98-99
  trabalho a frio, 90-92, 99-101
máquinas. *Veja também* engrenagens
  eixos e, 864-898
  freios e embreagens, 771-780
  tensão em, 302-312 (*veja também* tensão)
marcas de casca de marisco, 302
marcas de praia, 302
martensita, 101-102

massa de enchimento, 449-453
matemática, 27-28. *Veja também* equações
  análise de força, 655-668
  análise estatística, 54-56, 280-295, 363-377, 433-434, 938-939
  constante de Neuber, 329-330
  dígitos significativos, 48-49
  engenharia mecânica. *Veja também* forças: cargas,
    auxiliada por computador, 34-35
    avaliação de adequação e, 39-41
    códigos e, 37-38
    credo da, 36
    definida, 27-29
    diagramas de tensão-deformação e, 86-88
    ética e, 35-36
    fraturas e, 280-289
    tomada de decisão e, 28-31
  estatística, 54-84
  fatores geométricos de engrenagem, 697-701, 703
  fresagem, 640-641
  função delta de Dirac, 196-197
  função Gamma, 948
  fundições em molde metálico, 98-99
  jateamento de metal, 327-328
  lei de Hooke, 86-87
  lei de Sines, 450-451
  materiais compatíveis, 359-361
  matriz, 110
  média, 55-60
    distribuição e, 60-67
  metais. *Veja* propriedades do material
  Metals Handbook (ASM), 303, 305
  método das secções, 175-176n
  Mischke, Charles R., vii
  Mitchiner, R. G., 690
  modelos, 32-33
    choque, 230-231
    cisalhamento defasado, 474-476
    correias e, 816-842
    de Petroff, 580-583
    energia de distorção (DE), 262-267, 875-885
    Guest, 260-262
    hidrodinâmica, 583-588
    impacto, 230-231
    teoria de Coulomb-Mohr, 266-269
    teoria de Mohr, 274-276
    teoria de tensão de cisalhamento máxima, 260-262
    teoria de tensão normal máxima, 272-274
    Tresca, 260-262
    Weibull, 64-67, 556, 559
  parâmetros do código AISC, 42-43
  perda de potência parasítica mínima, 595-596
  problemas estaticamente indeterminados, 214-220
  quantidade determinística, 57-58
  razão de Poisson, 110, 690-691, 830-832
  regra de Miner, 356-357, 359-361
  regressão linear, 68-72
  série de Fourier, 196-197
  teorema da reciprocidade de Maxwell, 886-887
  teorema de Castigliano, 205-211, 527-528
  teorema de Pitágoras, 67-68
  teorema dos eixos paralelos, 454-455
  teoria da tensão normal máxima, 272-274
  teoria de Mises-Hancky, 261-267
  teoria de tensão de cisalhamento máxima, 260-262
materiais flexíveis, 192
  corda de fio e, 849-857
  correias e, 816-842
  corrente de rolos e, 841-849
  eixos e, 856-858, 864
  problemas de, 857-862
mecânica de fratura elástica linear (LEFM), 280-289.
  Veja também fraturas
média amostral, 55-60
média aritmética, 55-60
  distribuições e, 60-67
mercados, 26-27, 32-33, 98
metais não-ferrosos, 105-110
metal almirantado, 107-110
método de correlação, 69-70, 363-364
modelo de Weibull, 64-67, 556, 559
Modern Steel and Their Properties, 103-104
modo de rasgamento (cisalhamento) 282-284
modo deslizante, 282-284
módulo da secção, 134-135
módulo de Young, 86-87, 110. *Veja também* propriedades dos materiais
  corda de fio e, 854-855
  correias e, 830-833
  deformação e, 131-133
  eixos e, 884-885
  junções e, 403-404
mola de enrijecimento não-linear, 192-193
molas, 219-221, 346-347, 528-533
  ângulo de localização de extremidade e, 519-521
  Belleville, 525-526
  compressão, 491-493
  cômputo de voltas de corpo, 511-512
  cônica, 526-527
  constante de condição de extremidade e, 493-496
  critério de falha de Sines e, 506-509
  dados de Zimmerli e, 506-507, 517-518
  deflexão e, 491-492, 520-523
  diâmetro de espira e, 490-491
  efeito de curvatura e, 490-499
  em balanço, 526-528
  emersão e, 504-505
  enrolamento fechado, 512-514
  estabilidade e, 493-496
  extensão, 511-519
  fadiga e, 506-512
  flexão e, 520-521
  força constante, 526-527
  freqüência crítica de, 504-507
  índice para, 498-499
  materiais para, 494-499
  ordenada de intersecção de Gerber e, 518-519
  parafusos de porca e, 398-400
  pré-ajuste e, 492-493
  razões de mola e, 192-193, 398-400, 402-405, 520-523
  relógio, 526-527
  rigidez de junção e, 400, 402-405
  serviço estático e, 498-505
  tensão e, 490-491, 520-521
  teorema de Castigliano e, 527-528
  torção e, 518-526
  voluta, 526-527
molas lineares, 192-193
moldagem em casca, 98-98-99, 639-640
Moore, R. R., 308-309, 363
motores, 27-28
motores de combustão interna, 27-28
movimento harmônico, 221-222

N

NASA/FLAGRO 2.0, 315-317
National Society of Professional Engineers (NSPE), 36
tolerância natural, 75
necessidades, 31-33
newtons, 46-47
níquel, 103-104
normalização, 100-101
normas (padronizações) de roscas, 386-388, 390
Normas 37-38. *Veja também* International System of Units (SI) (Sistema Internacional de Unidades)
  AGMA 682-719 (*veja também* American Gear Manufacturers Association (AGMA))
  ANSI-ASTM, 42-43
  arruelas, 946-947
  bitolas de chapas metálicas, 941-942
  bitolas de fio, 941-942
  corda (cabo) de fios, 851-854
  correias, 823-826, 832-839
  correntes de rolos, 841-843, 845-847
  engrenagens, 648-651, 709-710, 730, 733-745, 750-753
  fatores de conversão, 901
  graus de tolerância, 72-74, 916, 917
  mancais, 538-540, 544-545
  materiais de fricção, 798-801
  materiais de mola, 494-499
  números de Renard, 925
  prefixos métricos, 900
  resistência de parafusos de porca, 405-409
  resistência e, 41-44
  roscas, 386-388, 390
  símbolos de soldagem, 448-450
  sistema de numeração de aço, 97-98
  tensão e, 41-44
  tubos, 929
  unidades de, 46-48
  viscosidade, 579-580, 590-592, 595
Normas da ANSI-ASTM, 42-43
número de controle de qualidade, 701, 703
número de nível de acurácia de transmissão, 701, 703, 734-735
número de Renard, 925
número de Sommerfeld, 580-582, 588-589, 592, 595

P

padrão de rosca da American National Unified, 386-388, 390
padronização unificada de roscas, 386-388, 390
parafuso de engrenagem sem-fim de Joyce, 387-388, 390
parafusos de porca. *Veja também* fixadores
  aperto (alcance), e 398-400, 402
  carga externa e, 407-410
  carregamento de fadiga e, 415-421
  cisalhamento e, 468-472
  condição de aperto razoável (confortável) e, 409-410
  diagrama de dimensões para, 943
  gaxetas e, 415-416
  junções e, 415-421 (*veja também* junções)
  pré-carga e, 398-400, 407-410
  resistência de tração e, 405-409
  tipos de, 396-399
  torque e, 409-412
  tração e, 407-412, 415-421
parafusos. *Veja também* fixadores
  alcance e, 398-400, 402
  carta de dimensões para, 944
  condição de aperto razoável, 409-410
  importância dos, 386
  junções e, 415-421 (*veja também* junções)
  medida de elongação (alongamento), 409-410
  padrões de roscas e, 386-388, 390
  parafusos de retenção e, 425-428, 865-866
  passo, 386
  perfil M e, 386
  potência, 387-388, 390-397
  problemas de, 433-445
  regra da mão direita, 386
  tipos de, 396-399
parafusos de retenção, 425-428, 865-866
partes isoladas, 116
passo,
  círculo, 628-629
  correias e, 835
  dentes de engrenagem e, 628-631, 635-638, 642-645, 647-648
  diâmetro, 628-629
pastilhas de cermeto, 800
pastilhas de metal sinterizado, 800
perda de potência parasítica, 595-596
perfil M, 386
peso, 46-47-48, 505-506
peso específico, 505-506
Peterson, R. E., 415-416, 428-429
pilaretes, 228-230
pinhões,
  flexão de dente e, 714-710, 717, 719-723
  projeto de engrenamento e, 747-749
pinos, 426-433, 774-775, 865-866
plano neutro, 133-134
plásticos, 108-109
polias. *Veja também* correias: eixos fora de plano, 816, 818-819
  transmissões reversíveis/ não-reversíveis e, 816-817
polias coroadas, 816
polias sulcadas, 816
pontos de empate (equilíbrio), 38-39
porcas. *Veja* fixadores
porta planeta, 651
potência admissível, 847-848
praticabilidade, 28-29
pré-ajuste, 492-493
pré-cargas,
  cargas estáticas e, 411-415
  fixadores e, 398-400, 407-410, 411-421
  junções de tração e, 415-421
  mancais e, 564-565, 571-573
prefixos, 47
pressão,
  cilindros e, 155-158
  correias e, 820-821
  durabilidade superficial e, 690-692
  embreagens e, 766-780, 785-787, 792-793
  engrenagens e, 632-633, 639-640, 757
  filme e, 597, 599-597, 599-600
  freios e, 766-780, 789-790, 792-793
  mancais e, 606-612
problemas, 26-28
  comunicação e, 35-36
  definição de, 31-33
  identificação de, 31-33, 35-36
  programa de computador e, 34-35
problemas estaticamente indeterminados, 214-220
processo de metalurgia do pó, 98-99
projeto, 49-52
  auxiliado por computador, 34-35
  avaliação de adequação e, 39-41
  códigos e normas em, 37-38
  comparações de tensão-resistência e, 41-44
  confiabilidade do produto e, 38-40
  confiabilidade e, 45-46
  definido, 26-28
  economia em, 37-39
  eixos e, 864-875, 890-892
  engenharia mecânica, 27-31
  engranzamento de engrenagem, 747-749, 757-760 (*veja também* engrenagens)
  estatística e, 54-84
  ética e, 35-36
  fadiga e, 303, 305, 308-309 (*veja também* fadiga)
  fator, 41-42, 44-45
  feitura de decisão e, 28-31
  ferramentas, 33-36
  fixadores e, 386-445 (*veja também* fixadores)
  funcionalidade e, 26
  identificação de problema e, 26-27, 31-33
  imperativo, 26-27
  incerteza em, 40-42
  invenção do conceito e, 32-33

junções e, 447-487 (*veja também* junções)
junções de adesivos e, 477-479
lubrificação e, 587-590, 604-623
mancais e, 564-569
matemática e, 48-49
molas e, 499-505
parafusos de potência e, 387-388, 390-397
reconhecimento da necessidade e, 31-32
recursos, 33-36
responsabilidades profissionais em, 35-36
segurança e, 38-40, 43-45 (*veja também* segurança)
serviço estático, 498-505
sistemas de unidades para, 46-48
variáveis, 30
propriedades da involuta (evolvente), 630-631, 643-644
propriedades do material, 111-113. *Veja também* forças; segurança
aço, 42-43, 100-104, 903-905, 930-931 (*veja também* aço)
adesivos, 473-479
ajustes, 71-74
cisalhamento e, 42-43 (*veja também* cisalhamento)
compósitos, 110-111
compressão, 87-89, 219-230
constante de condição de extremidade, 493-496
constante de Neuber, 329-330
constantes físicas, 902
correias, 816, 818-820, 830-831, 840-842
corrosão, 104, 106-107, 326-328, 568-569
diagrama de Goodman e, 336-352
duatilidade, 91-92, 252, 260-273 (*veja também* ductilidade)
dureza, 93-95
eixos, 884-885
elasticidade, 44-45, 86-87, 92 (*veja também* elasticidade)
endurecimento superficial e, 102-103
engrenagens, 741-742 (*veja também* engrenagens)
estatística, 54-84
fadiga, 302-303, 305, 308, 939-940 (*veja também* fadiga)
falhas, 252 (*veja também* falhas)
fator de projeto e, 43-45
fator de serviço *K*, 43-44
fluência, 95-98
forças de impacto e, 94-96
fórmula parabólica e, 223-224
fragilidade, 94-96, 252, 272-277
fraturas, 87-88, 280-289
fricção, 798-801
fundição, 105-106
fundição de investimento e, 98-99
fundição em areia, 98
inerente, 42
junções e, 420-426 (*veja também* junções)
ligas, 103-110
limite de resistência (limite de fadiga), 324-328, 363-367
limite de resistência à flexão, 359-361
limites e, 71-74
lubrificação e, 611-614
mancais, 42-43
materiais compatíveis, 359-361
metais não-ferrosos, 105-110
molas e, 494-499
moldagem em casca e, 98-99
padronização e, 37-38
plásticos, 108-109
propagação de erro e, 66-69
recozimento e, 100-101
resistência e, 41-44, 86-92, 252 (*veja também* resistência)
resistência superficial, 44-45, 359-361-363
revenido e, 101-102
rigidez, 88-89, 116, 131-133, 192-194, 219-230
ruptura, 88-89
secções e, 926-927
sensibilidade a entalhe, 327-336
sistema de numeração para, 97-98
soldagem e, 448-469
sólidos e, 928
têmpera e, 101-102
temperatura e, 95-98
tensão e, 41-44, 86-88 (*veja também* tensão)
tensão de contato, 731-734, 740-742
teoria da energia de distorção e, 261-267
teoria da tensão normal máxima e, 272-274
teoria de Coulomb-Mohr e, 266-269
teoria de Mohr e, 274-276
tolerâncias e, 37-39
trabalho a frio, 90-92, 99-101
trabalho a quente e, 98-100
tubulação redonda, 906
variáveis aleatórias e, 54-56

Q

quantidade determinística, 57-58
química, 27-28

R

Raimondi, Albert A., 589-590, 601-602
cartas de viscosidade e, 590-592, 595
razão de contato, 637-638
razão de contato livre, 697-698
razão de esbeltez, 221-224, 229-230
razão de excentricidade, 583-584
razão de folga radial, 580-584
razão de Poisson, 110, 361-363, 830-832
rebites, 468-472. *Veja também* fixadores
reconhecimento da necessidade, 31-33
recozimento, 100-101
redução em área, 90-92, 99-101
região de vida finita, 310-312
região de vida infinita, 310-312
regra da mão direita, 386
regra do somatório da razão de ciclo de Palmgren-Miner, 356-357, 359-360
regressão linear, 68-72
relação de Goodman, 340-342
eixos e, 881-885
engrenagens e, 688-689
junções de tração e, 416-419
remoção de ajuste, 492-493
reservatório de rasgo de chaveta, 602
resistência à tração, 57-59. *Veja também* resistência
análise estocástica e, 363-364
cartas de ensaio de, 933
correias e, 816-842
equação de, 363-364
fadiga e, 302, 318-319 (*veja também* fadiga)
fraturas e, 87-88
limite de resistência (fadiga) e, 363-367
método de correlação e, 363-364
mínima, 318-319
parafusos de porca e, 405-409
rebites e, 468-472
rigidez e, 86-89
soldagem e, 448-469
resistência, 41-42. *Veja também* propriedade do material
análise estocástica e, 288-295, 363-377
cargas e, 252 (*veja também* cargas)
cartas de ensaio de, 938
compósitos e, 110-111
compressão e, 87-88-88-89, 219-229
contato, 361-362
de torção, 88-89 (*veja também* torção)
definida, 87-88, 252
deflexão, 193-195 (*veja também* deflexão)
dureza e, 93-95
eixos e, 874-885, 891-892
equações da AGMA e, 693-698
escoamento, 86-87
estática, 252, 257-258, 522-523
estatística e, 88-89 (*veja também* estatística)
fadiga e, 302-303, 305, 308, 318-321, 338-353 (*veja também* fadiga)
fator de projeto e, 43-45
fator de serviço *K*, 43-44
fatores geométricos e, 698-701, 703
fraturas e, 87-88, 280-289
junções e, 415-421 (*veja também* junções)
ligas e, 103-110
limite de resistência (fadiga) e, 317-319, 321-328, 363-367
mínima e, 42-43
parafusos de porca e, 405-409
parafusos de potência e, 387-388, 390-397
parafusos de retenção e, 425-428
perfil M e, 386
propagação de erro e, 66-69
propriedades inerentes e, 42
resistência hertziana, 361-362
rigidez e, 86-89
soldagem e, 448-469
superfície, 359-363
temperatura e, 95-98
teoria da tensão de cisalhamento máxima e, 260-262
teoria de Coulomb-Mohr e, 266-269
teoria de energia de distorção e, 261-262-267
teoria de Mohr e, 274-276
teoria de tensão normal máxima e, 272-274
trabalho a frio e, 90-92, 99-101
tração, 57-59, 86-89 (*veja também* resistência à tração)
última, 86-88
variáveis aleatórias e, 54-56
responsabilidade do produto, 32-33, 38-40
reyn, 579-580
Reynolds, Osborne 579-580
teoria hidrodinâmica e, 583-588
rigidez, 88-89, 116. *Veja também* deflexão; tensão
compressão e, 192-194, 219-230
definida, 192
elasticidade e, 131-133 (*veja também* elasticidade)
energia potencial e, 220-221
estabilidade e, 219-221
flexibilidade e, 192
molas e, 192-193
suposição de, 192
torção e, 192-194
tração e, 192-194
Roark's Formulas for Stress and Strain, (Roark), 196-197
rodas dentadas, 816, 811-813
rolamento, 98-100
roldanas, 816, 849-853
roscas Acme, 387-388, 390
roscas quadradas, 387-388
ruído, vibração, intensidade, (NHV), 473-475
Russel, Burdsall & Ward Inc. (RB&W), 412-414

S

Saybolt Universal Viscosity (SUV) (Viscosidade Universal Saybolt), 579-580
segurança, 26-27, 38-40. *Veja também* normas
AGMA e, 682-719 (*veja também* American Gear Manufacturers Association [AGMA])
análise estocástica e, 288-295
avaliação de adequação e, 39-41
choque e, 230-231
códigos e 37-38
combinações de carregamento e, 352-355
compressão e, 222-224
confiabilidade de produto e, 38-40
corda (cabo) de fio e, 851-854
correias e, 831-832, 838
critério de falha de Sines e, 506-509
diagrama de Goodman e, 339-340
engrenagens e, 709-710
falhas e, 252, 280-289 (*veja também* falhas)
fator de carga e, 411-412
fator de projeto e, 43-45
fraturas e, 280-289
impacto e, 230-231
incerteza e, 40-42
junções de tração e, 411-413
junções soldadas e, 460-462
molas e, 506-512
pré-carga e, 398-400, 407-410, 411-415
resistência superficial e, 359-363
sensibilidade a entalhe e, 327-336
tensão e, 41-44 (*veja também* tensão)
teoria de von Mises e, 352-355
selo (lacre) de feltro, 571-573
sensibilidade a entalhe,
análise estocástica de, 366-371
concentração de tensão e, 366-371
constante de Neuber, 329-330
ductilidade e, 331-332
fadiga e, 327-336
fatores simultâneos e, 332-336
série de co-seno, 220-221
série de Fourier, 196-197
serviços governamentais, 34-35
Shigley, Joseph E., vii
silício, 103-104, 108-110
simetria, 420-421
simulações de Monte Carlo, 76-77
síntese, 30-33
sistema absoluto de tolerância, 75-76
sistema de numeração, 97-98
sistema inglês de unidades, 46-48
sistema pé-libra-segundo, 46-47
sistemas, 116-119
sistemas gravitacionais, 46-48
slugs, 46-47
Smith, G. M., 505-506
Smith, James O., 351-352
sociedades de profissionais, 35-36
Society of Automotive Engineers (SAE) (Sociedade de Engenheiros Automotivos), 97-98, 311-314, 405, 591-592
soldagem. *Veja também* fixadores
cargas estáticas e, 463-466-467
carregamento de fadiga e, 466-468
critério de Berger e, 466-467
filete, 449-453
junções de torção e, 453-458
resistência e, 460-462
símbolos para, 448-450
tensões em, 453-460
teorema do eixo paralelo e, 454-455
topo, 449-453
solenóides, 778-780
Standard Handbook of Machine Design, 102-104
superposição, 197-199

T

tamanho básico, 72-73, 75
tamanho nominal, 75
técnica de contagem de fluxo de chuva, 355-357
tecnologia
engenharia auxiliada por computador, 34-35
informação e, 34-36
programa NASA/FLAGRO, 315-317
projeto auxiliado por computador, 34-35
simulações de Monte Carlo, 76-77
têmpera, 101-102
temperatura, 96-98
correias e, 830-831

dissipação de calor e, 602
embreagens e, 794-798
endurecimento superficial e, 102-103
engrenagens e, 709, 737-739
fadiga e, 324-326, 366-367
fratura e, 284-289
freios e, 794-798
limite de resistência e, 324-326
lubrificação e, 597, 599-602, 621-623
lubrificação de contorno e, 621-623
mancais e, 559-561
mancais autocontidos e, 602-605
mancais de alimentação pressurizada e, 606-612
plásticos e, 108-109
têmpera e, 101-102
trabalho a frio e, 90-92, 99-101
trabalho a quente e, 98-100
tratamento do aço e, 100-104
valor de impacto e, 94-96
viscosidade e, 579-580, 590-592, 595
tensão
adesivos e, 473-479
ajustes à pressão e de contração e, 158-160
análise estocástica e, 288-295
anéis rotativos e, 157-159
avaliação de adequação e, 39-41
cargas combinadas e, 352-355
chavetas e, 426-433
ciclos variáveis em, 355-361
cilindros pressurizados e, 155-158
círculo de Mohr e, 125-130
circunferencial, 156-157
cisalhamento, 88-89
como propriedade de estado, 42
completa, 124-125
componentes cartesianas da, 123-126
concentração, 152-156, 257-260, 327-336, 366-371, 919-925
constante de Neuber, 329-330
contato,167-173, 730, 731-734, 740-742
dano cumulativo e, 355-361
deformação elástica e, 131-133
diagrama de Goodman e, 337-352
diagramas de corpo livre e, 116-119
diagramas de deformação e, 86-88
distribuída uniformemente, 132-134
durabilidade da superfície e, 690-692
eixos e, 873-885 (*veja também* eixos)
elevadores, 152-153
engrenagens e, 707-708
equações da AGMA e, 691-693
equações de Smith-Liu e, 171-172
estado determinado de, 122-124
estática, 336-338
fadiga e, 308-312, 327-336 (*veja também* fadiga)
falhas e, 252 (*veja também* falhas)
fator de correção, 698-700
fator de intensidade e, 282-284
fator de projeto e, 43-45
fatores de ciclo de vida, 707-708
flutuante, 336-353, 355-361, 370-374
fraturas e, 280-289
hertziana, 167-173, 359-362
incerteza e, 40-42
junções e, 453-460 (*veja também* junções)
lei de Hooke, 86-87
limite de resistência e, 317-319, 321-328, 363-367
média (intermediária), 336-338
média nominal, 336-338
método de Dowling e, 336-338
modos de fendilhamento (fratura) e, 282-284
módulo de elasticidade, 86-87
módulo de Young e, 86-87
molas e, 490-491, 520-521
normal, 123-124
parafusos de potência e, 387-388, 390-397
pinos e, 426-433
plana, 125-130
problemas de, 172-189
propagação de erro e, 66-69
propriedade do aço e, 934-935
propriedades inerentes, 42
pura, 132-133
residual, 336-338
resistência e, 41-44
revenimento e, 101-102
reversa, 309-314, 355-361
secção mediana e, 150-151
sensibilidade a entalhe e, 327-336
simples, 132-133
soldagem e, 448-469
tangencial, 123-124
temperatura e, 159-161
teorema de Castigliano e, 205-211
teoria da tensão de cisalhamento máxima e, 260-262
teoria da tensão normal máxima e, 272-274
teoria de Coulomb-Mohr e, 266-269
teoria de energia de distorção e, 261-267
teoria de von Mises e, 352-355
térmica, 160-161
torção e, 144-153, 512-514 (*veja também* torção)
trabalho a frio e, 90-92, 99-101
tridimensional geral, 129-132
verdadeira, 87-88
vigas assimétricas e, 137-139
vigas curvas e, 160-168
vigas de flexão e, 133-143
vigas em balanço e, 526-528
tensão de cisalhamento tangencial, 123-124
tensão plana, 125-130, 133-134
fraturas e, 280-289
modos de fendilhamento e, 282-284
tenacidade e, 284-289
tensão térmica, 159-161
tensões de engenharia, 88-89
teorema de Castigliano
deflexão e, 205-211
molas e, 527-528
teorema de Pitágoras, 67-68
teorema do eixo paralelo, 454-455
teoria da energia de distorção (DE), 891-892
critério de Gerber e, 875-877
critério elíptico e, 877-880
falhas e, 261-267
relação de Goodman e, 881-885
teoria de Coulomb-Mohr, 266-269
teoria de fricção interna, 266-269
teoria de Tresca, 260-262
teoria de von Mises,
combinação de carregamento e, 352-355
eixos e, 874-885
pinos soltos e, 432-433
teoria de Hencky e, 261-267
termoplásticos, 108-109
termorrígido, 108-110
Timoshenko, S., 219-221
titânio, 106-108
tolerâncias, 37-39
absoluta, 75-76
admissível e, 75
ajustes e, 71-74
bilateral, 75
definida, 72-73
eixo-base (referência: eixo), 72-74
empilhamento de, 75-76
folga e, 75
furo-base (referência: furo), 72-74
grau, 72-74
interferência e, 75
intervalo dimensional, 75-78
intervalo e, 75-78
letras posicionais de, 72-73
limites e, 71-74
natural, 75
sistema estatístico de, 75-78
tamanho básico, 75
tamanho nominal, 75
unilateral, 75
tolerâncias laterais, 75
tomada de decisão *a priori*, 30
tomada de decisão, 26-28
a priori, 30
aceitabilidade, 28-29
alternativas, 28-29
apropriabilidade , 28-29
avaliação de adequação, 30
conjunto de decisões, 29-30
conjunto de especificações, 28-30
diagrama de fluxo para, 31
engenharia mecânica e, 28-31
factibilidade, 28-29
fadiga e, 372-373
figura de mérito, 30
síntese, 30-31
variáveis, 30
torção, 88-89, 146-149, 192-194
análise estocástica e, 364-365
ângulo de torção e, 144-146
cargas e, 277-280, 363-364 (*veja também* cargas)
critério de falha de Sines e, 506-507
eixos e, 864-865, 880-881 (*veja também* eixos)
junções soldadas e, 453-458
lei de Hooke e, 144-145
molas e, 490-491, 518-526
tensão flutuante e, 351-353
tensão não-corrigida e, 512-514
teorema de Castigliano e, 205-211
teorema do eixo paralelo e, 454-455
tubos de parede fina e, 148, 150-153
vetor, 144
torque. *Veja também* freios; embreagens
absorção de energia e, 793-795
chavetas e, 426-433
coeficiente de flutuação de velociade, 803-805
demanda de pressão de puncionamento, 805-806
parafusos de porca e, 409-412
parafusos de potência e, 387-388, 390-397
pinos e, 426-433
potência transmitida e, 823-824
volantes e, 766, 794-798
Tower, Beauchamp, 583-585
trabalho a frio
conformação, 639-640, 930
propriedades de materiais e, 90-92, 99-101
rolamento, 630-631
tração pura, 132-133
tração, 42-43, 192-194. *Veja também* deformação
cargas estáticas e, 411-416
centrífuga, 836
correias e, 816-842
inicial, 827-828
junções e, 407-410
lado tenso, 820-822
parafusos de porca e, 409-412
pré-carga e, 411-416
teorema de Castigliano e, 205-211
transferência de calor, 27-28, 602-604. *Veja também* temperatura
transformações de coordenadas, 124-130
transmissões. *Veja* correias
trens de engrenagens epicíclicas. *Veja* engrenagens
trens de engrenagens planetas. *Veja* engrenagens
trincas. *Veja também* fraturas; sensibilidade a entalhe
comprimento inicial e, 315-317
crescimento de, 314-318
equação de Paris, 315-316
fadiga e, 302-303, 305, 308, 313-318 (*veja também* fadiga)
limite de resistência e, 317-319, 321-328, 363-367
modos, 282-284
resistência de superfície e, 359-363
Trumpler, Paul Robert, 588-590
tubos de parede fina, 148, 150-153, 156-158
tubulações, 929
tungstênio, 104

U

união soldada, 478-479
unidades básicas, 46-47
unidades derivadas, 46-47
unidades preferidas, 48
United Numbering System (UNS) (Sistema Unificado de Numeração), 97-98

V

vanádio, 104
variância
análise estocástica e, 288-295
coeficiente de, 291-292
desvio-padrão e, 55-60
distribuição e, 60-67
erro de propagação e, 66-69
fadiga e, 302-303, 305, 308 (*veja também* fadiga)
variância amostral, 55-60
variáveis aleatórias, 54-56
análise estocástica e, 288-295
variável aleatória contínua, 54-56
vedações, 571-573
vedações comerciais, 571-573
velocidade angular, 588-589
velocidades críticas de eixo, 885-889
vendedores comerciais, 35-36
ventilação, 27-28
vibração, 192, 473-475
correias e, 819-820
emersão e, 504-505
equação de onda, 504-505
freqüência crítica e, 504-507
molas e, 504-507
vida nominal (estimada), 539-540
vigas, 118-120
assimétrica, 137-139
carregamento súbito e, 231-233
cisalhamento e, 138-143, 420-426, 907-914 (*veja também* junções)
curvada, 160-168, 210-214
deflexão e, 196-203, 210-214, 906-914 (*veja também* deflexão)
fadiga e, 318-319 (*veja também* fadiga)
funções de singularidade e, 199-203
momentos e, 907-914
razões de molas e, 192-193
rotativa, 318-319
superposição e, 197-199
tensões normais em, 133-138
viscosidade
absoluta, 579-580
cartas de, 590-592, 595
correntes de rolos e, 848-849
dinâmica, 579-580
lubrificação e, 578-581, 590-592, 595, 848-849
mancais e, 559-561, 568-569
normas de, 579-580
publicações de Raimondi-Boyd e, 590-592, 595
Saybolt, 579-580
temperatura e, 579-580, 590-592, 595
viscosidade, 578-581, 590
corda de fios, 849-855
força de sem-fim, 753-755
junções soldadas, 449-456, 458-460
onda, 504-505
peso, 46-47
Weibull, 64-66, 556, 559
volantes, 766, 802-807
Volkerson, O., 474-475

W

Wolford, J. C., 505-506

Z

Zimmerli, F. P., 506-507, 517-518
zinco, 107-110